

6 Análise do processo de filtragem

Este capítulo analisa o processo de filtragem para os filtros de Kalman e de partículas. Esta análise envolve tão somente o processo de filtragem, não levando em consideração o processo de otimização para estimação de parâmetros. Desta forma, pretende-se analisar os resultados sem a interferência de qualquer algoritmo de otimização. Serão realizadas duas análises: a primeira considera os dados sob condições ideais e foi denominada análise com dados artificiais e a segunda utiliza os dados reais de mercado. O capítulo está assim organizado: a primeira seção apresenta os conceitos gerais dos filtros de Kalman e de partículas; a segunda seção trata da análise com os dados artificiais; a terceira seção apresenta a análise com dados reais de mercado e a última seção apresenta o conceito de tamanho efetivo da amostra, uma propriedade específica do filtro de partículas.

6.1 Os filtros de Kalman e de partículas

O filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo eficiente de estimação uma vez que o erro quadrático é minimizado. Através da observação da variável denominada “variável de observação” outra variável, não observável, denominada variável de estado pode ser estimada eficientemente. Podem ser estimados os estados passados, o estado presente e mesmo previsto os estados futuros. Uma vez que o modelo está escrito na forma espaço-estado, o filtro de Kalman (FK) pode ser aplicado. O FK clássico é aplicável quando a equação de observação é linear em relação aos estados e quando os estados e observação são condicionalmente Gaussianos. A perda da linearidade da equação de observação pode ser contornada através do filtro de Kalman estendido (FKE). O FKE trata a não linearidade da equação de observação linearizando-a através da expansão em série de Taylor. A não Gaussianidade implica que uma solução analítica fechada não pode ser obtida,

decorrendo então soluções numéricas, computacionalmente muito intensas e muitas vezes inviáveis. Aplicando-se o filtro de Kalman clássico ao caso não Gaussiano o valor estimado para as variáveis de estado não fornece a média condicional do vetor de estado. Entretanto, o valor estimado pelo filtro de Kalman ainda é o estimador (da variável de estado) que minimiza o erro quadrático médio (veja em Harvey (1989) capítulo 3, seção 3.2.3).

O filtro de partículas (FP) é um procedimento recursivo para integração, pertencendo a classe dos métodos seqüenciais de Monte-Carlo. Os métodos seqüenciais de Monte-Carlo são particularmente interessantes para o cálculo de distribuições *a posteriori*, isto é, das distribuições das variáveis de estado dada a ocorrência de y_t (variável de observação). Os métodos seqüenciais de Monte-Carlo dispensam as condições de Gaussianidade e linearidade do modelo, e ainda possuem adequadas condições de convergência. Eles abrangem os métodos que apareceram na literatura sob as denominações de filtros *bootstrap* (FPB), filtro de partículas (FP), filtro de Monte-Carlo, dentre outros. O filtro de partículas baseia-se na distribuição por importância a qual é definida como sendo a distribuição *a priori*. Infelizmente o processo degenera-se quando o tempo cresce, e não se consegue a distribuição *a posteriori*. Uma etapa adicional é acrescentada para viabilizar o procedimento. Trata-se da amostragem com reposição repetidas vezes. As partículas amostradas que são pouco representativas dentro da distribuição são retiradas do processo e as partículas “sobreviventes” representam a distribuição. Esta mesma distribuição é usada como base para o prosseguimento do método em cada instante de tempo.

Os modelos desta pesquisa são todos lineares, isto é, a equação de observação é uma função afim das variáveis de estado. Com relação a Gaussianidade existem restrições com relação ao uso do FK em todos os modelos. O Modelo Básico e o Modelo Primeira Extensão são condicionalmente Gaussianos em relação à observação e em relação aos estados. Os modelos Segunda Extensão e Terceira Extensão não são condicionalmente Gaussianos pois a inclusão do processo de Poisson, faz com que as distribuições das variáveis de estado sejam não Gaussianas.

6.2 Análise com dados artificiais

Como foi dito anteriormente, a análise do processo de filtragem foi realizada em dois estágios distintos. O primeiro estágio tratou o problema como um caso ideal. A variável de observação foi criada artificialmente. Desta forma foi amplamente atendida a condição de Gaussianidade do modelo para o uso do FK, inclusive o termo referente ao ruído das observações. No segundo estágio da análise, os dados observados são os preços reais de mercado.

O modelo usado para fazer a análise do processo de filtragem foi o Modelo Básico (Schwartz e Smith (2000)). Reescrevemos o modelo abaixo.

$$\ln(S_t) = \chi_t + \xi_t \quad (87)$$

Nesta equação o logaritmo do preço à vista é a soma dos desvios de curto prazo (χ_t) com os preços de equilíbrio (ξ_t). Estas duas variáveis são os estados não observáveis, por conseguinte S_t é não observável.

A primeira variável de estado possui a seguinte equação de transição:

$$d\chi_t = -k_\chi \chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi \quad (88)$$

A segunda variável de estado é descrita pela equação de transição:

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi \quad (89)$$

Ainda temos que $dZ_\chi dZ_\xi = \rho dt$, onde ρ representa a correlação entre as variáveis de estado. A equação de observação é dada por:

$$\ln(F_{\tau,t}) = e^{-k_\chi(\tau-t)} \chi_t + \xi_t + A(\tau-t) \quad (90)$$

onde:

$$A(\tau-t) = \mu_\xi^* (\tau-t) - \left(1 - e^{-k_\chi(\tau-t)}\right) \frac{\lambda_\chi}{k_\chi} + \frac{1}{2} \left[\left(1 - e^{-2k_\chi(\tau-t)}\right) \frac{\sigma_\chi^2}{2k_\chi} + \sigma_\xi^2 (\tau-t) + 2 \left(1 - e^{-k_\chi(\tau-t)}\right) \frac{\rho \sigma_\chi \sigma_\xi}{k_\chi} \right]$$

Considerando os parâmetros do modelo como aqueles em Schwartz e Smith (2000), os preços futuros (variável de observação) foram gerados artificialmente. Os parâmetros utilizados são: $k_\chi = 1,49$ ao ano, $\sigma_\chi = 28,6\%$ ao ano, $\lambda_\chi = 15,7\%$ ao ano, $\mu_\xi^* = 1,15\%$ ao ano, $\sigma_\xi = 14,5\%$ ao ano e $\rho = 0,30$ ao ano. Primeiramente as equações (88) e (89) serão discretizadas abaixo:

$$\chi_t = (1 - k_\chi \Delta t) \chi_{t-1} + \varepsilon_t \quad (91)$$

$$\xi_t = \mu_\xi \Delta t + \xi_{t-1} + \upsilon_t \quad (92)$$

onde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ e $\upsilon_t \sim N(0, \sigma_\upsilon^2)$ sendo $\rho \Delta t$ a correlação entre as duas distribuições padronizadas e Δt o intervalo de tempo usado na discretização (uma semana ou 1/52 anos). Ainda pode-se escrever¹ que

$$\sigma_\varepsilon^2 = \text{Var}(\chi_t) = \left(1 - e^{-2k_\chi \Delta t}\right) \frac{\sigma_\chi^2}{2k_\chi} \quad \text{e} \quad \sigma_\upsilon^2 = \text{Var}(\xi_t) = \sigma_\xi^2 \Delta t$$

A equação das observações é dada por

$$y_t = \ln(F_{\tau,t}) = e^{-k_\chi(\tau-t)} \chi_t + \xi_t + A(\tau - t) + u_t \quad (93)$$

onde $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$ representa os erros nas observações que são descorrelacionados dos erros das equações de transição (91) e (92). Esta parcela está relacionada ao erro oriundo do registro das observações, provavelmente devido à falta de sincronismo das cotações. Foram gerados simultaneamente T ($T = 2000$) ruídos Gaussianos para ε_t , υ_t e u_t , de tal modo que os dois primeiros ruídos são correlacionados, conforme mencionado acima, e descorrelacionados do terceiro ruído.

Em cada uma das três séries geradas foram realizados os testes estatísticos para verificação da adequabilidade dos dados gerados. Foram realizados os testes de normalidade de Jarque-Bera e Anderson-Darling, aceitando-se a hipótese nula de normalidade. O correlograma com a FAC (Função de Auto-Correlação), FACP (Função de Auto-Correlação Parcial) e com a estatística Ljung-Box (estatística Q) indicam que os dados são não correlacionados. O teste de independência BDS (Brock-Dechert-Sheinkman), realizado em espaço de dimensão oito, indica aceitação da hipótese nula de independência dos termos da série. Além disso, as séries dos resíduos das variáveis de estado estão correlacionadas, enquanto a correlação destas mesmas séries com a série dos ruídos da variável de observação é baixíssima. Foram realizados os testes de igualdade da média com o valor zero para as três séries, e em todos os casos foi aceita a hipótese nula de igualdade.

¹ Veja em Øksendal (2000) ou Mikosch (2000), dentre outros, a solução de equações diferenciais estocásticas como é o caso da equação de Ornstein-Uhlenbeck (equação de Langevin).

Portanto, os valores gerados artificialmente para os ruídos são adequados às premissas requeridas.

A etapa seguinte foi calcular para cada instante de tempo as variáveis de estado a partir de valores iniciais $(\chi_0 \ \xi_0) = (0,2 \ 3,2)$. Para tal, foram usadas as equações discretizadas (91) e (92), bem como os ruídos gerados acima. Foi calculado o termo $A(\tau - t)$. Então, de posse dos valores calculados para as variáveis de estado e do ruído das observações, foi calculado, em cada instante de tempo, o valor da variável de observação para o primeiro contrato futuro. A Figura 1 mostra uma das possíveis trajetórias para o primeiro contrato futuro.

Os dados artificiais, assim gerados, serão os dados de entrada para o processo de filtragem. Eles serão utilizados nos FK e FP. Será feita somente a filtragem dos dados pelas duas metodologias. Por enquanto não haverá estimação de parâmetros por nenhum algoritmo. O objetivo, até o momento, é tão somente de analisar os dois processos de filtragem das observações.

A Figura 2 mostra o preço do primeiro contrato futuro (F1), gerado artificialmente, que serviu como dado de entrada para os dois filtros. Esta é a variável de observação que será filtrada. A filtragem estimará a duas variáveis de estados χ_t e ξ_t , por cada metodologia. Também será obtido o sinal de observação filtrado. Serão avaliados os erros entre o sinal observado e aquele gerado em cada metodologia de filtragem.

A variável de observação mostrada na Figura 2 foi introduzida no filtro de Kalman e, juntamente com os mesmos parâmetros utilizados na sua geração, foi rodado o filtro. A saída fornece as variáveis de estado estimadas juntamente com a variável de observação filtrada. A Figura 3 mostra os preços do primeiro contrato futuro para a variável de observação e para a variável filtrada. As duas curvas estão praticamente sobrepostas. A correlação medida entre as duas variáveis é 0,9915. Qualitativamente o resultado é bastante satisfatório, pois a variável resultante do filtro está bem aderente aos movimentos da variável observada. Foram realizados testes estatísticos nos resultados produzidos pelo FK.

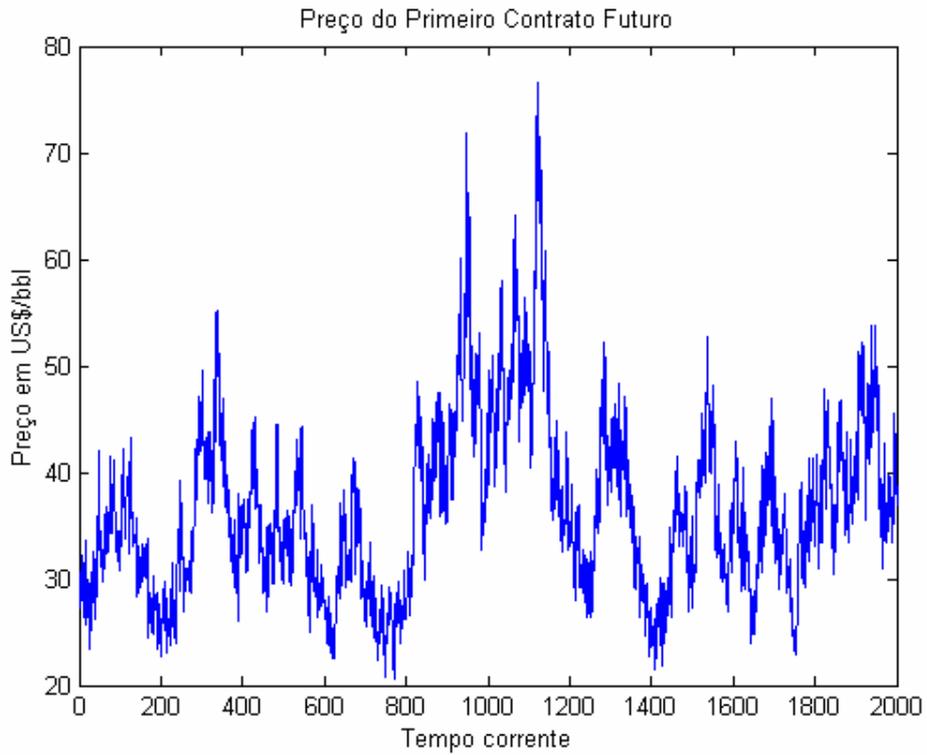


Figura 1 – Uma das possíveis trajetórias de preços gerada artificialmente

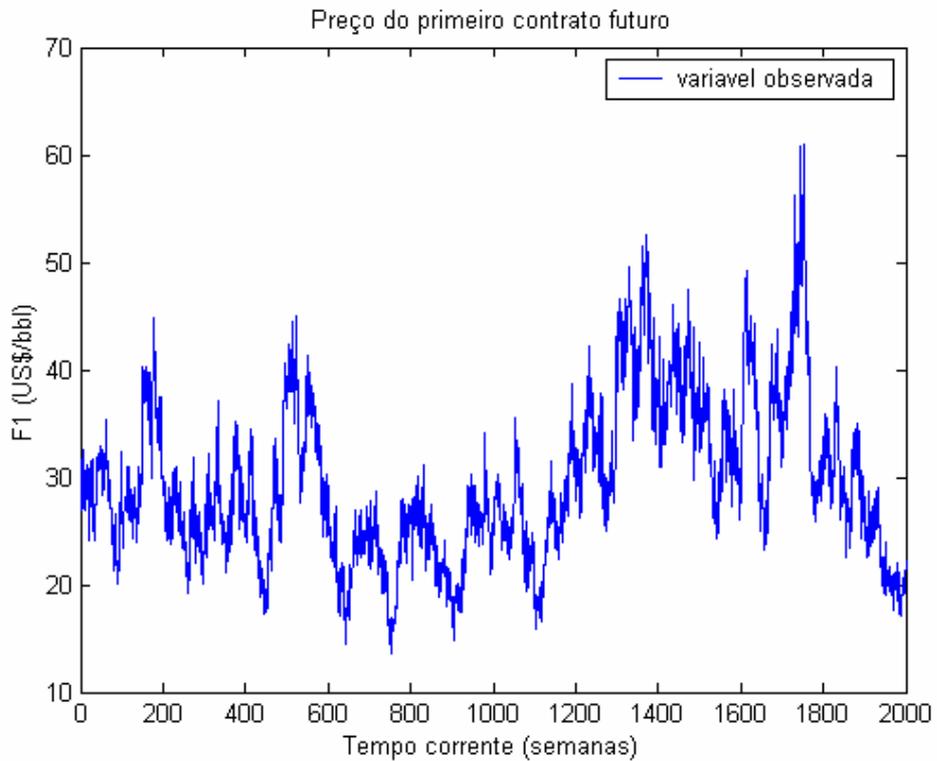


Figura 2 – Variável de observação utilizada nos filtros de Kalman e de partículas

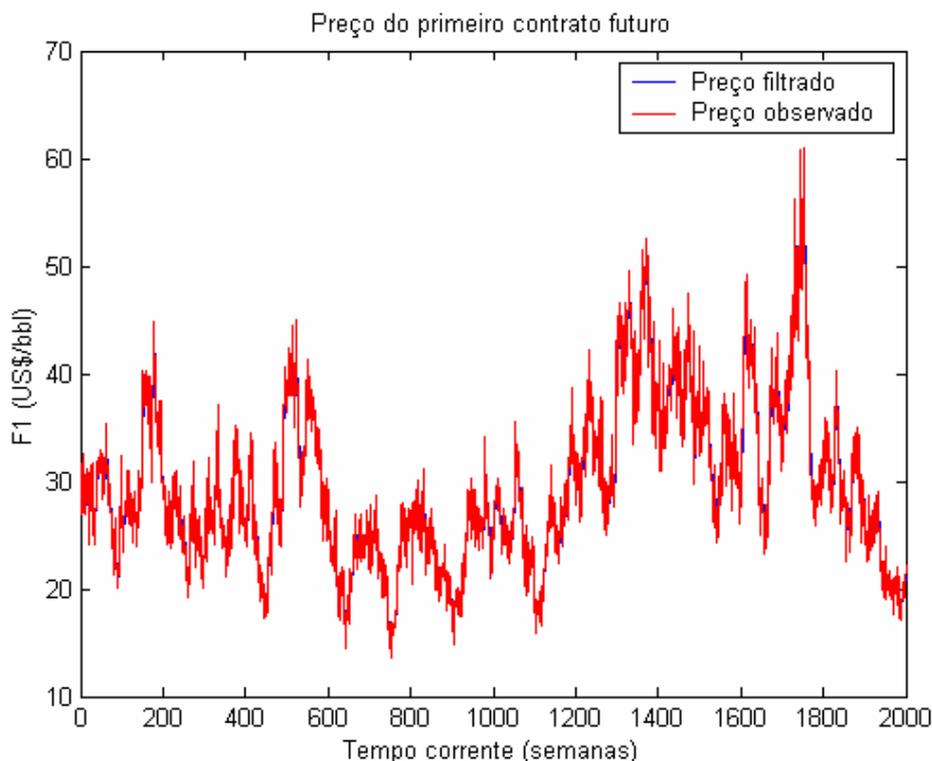


Figura 3 – Variável de observação e a variável de observação pelo FK

O erro (ruído) da variável de observação foi analisado para a verificação das propriedades de sua distribuição. Foram realizados os testes de normalidade Jarque-Bera e Anderson-Darling e em ambos aceita-se a hipótese nula de normalidade. A FAC e a FACP, junto com a estatística Q, mostram que os dados são não correlacionados. O teste BDS, realizado em espaço de dimensão seis, mostra fortemente a aceitação da hipótese nula de independência.

O mesmo procedimento foi realizado em relação ao filtro de partículas. Ou seja, usando a mesma variável de observação anterior e os mesmos parâmetros, fez-se a filtragem com o FP, obtendo-se a resposta que está na Figura 4. A análise qualitativa mostra uma grande aderência entre as duas séries. A correlação medida entre as duas variáveis é de 0,9909. Os mesmos testes estatísticos foram conduzidos na série do ruído da variável de observação. Os resultados foram os mesmos.

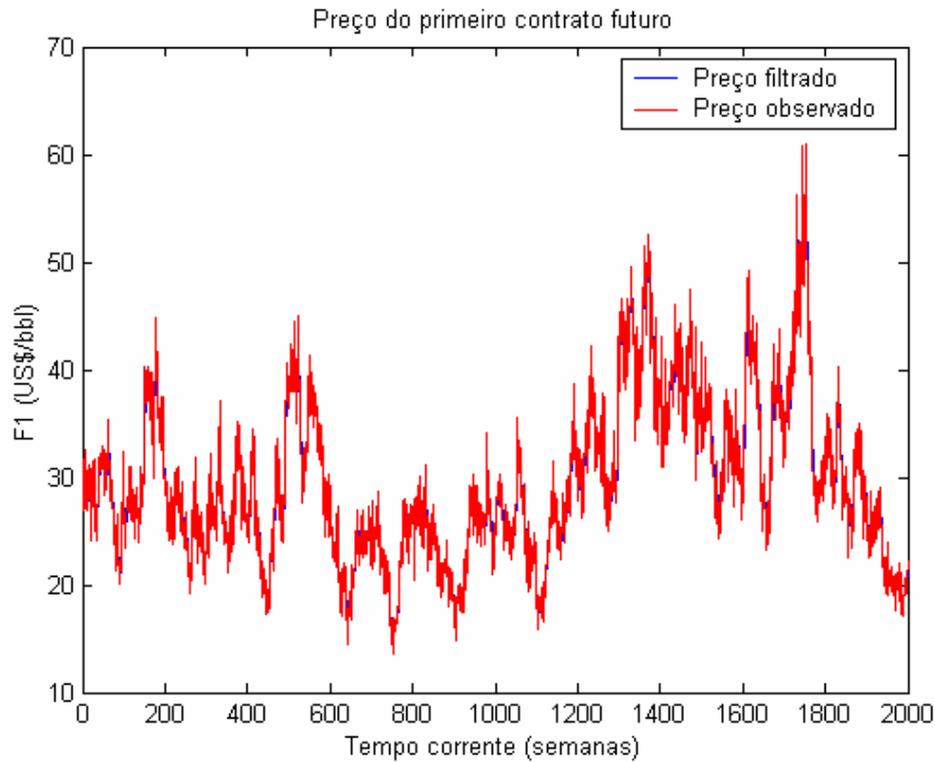


Figura 4 – Variável de observação e a variável de observação filtrada pelo FP

Foram realizadas análises quantitativas usando três diferentes medidas de erro: RMSE, MAE e MAPE.

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (F_{ot} - F_{ft})^2}{T}} \quad (94)$$

$$\text{MAE} = \frac{\sum_{t=1}^T |F_{ot} - F_{ft}|}{T} \quad (95)$$

$$\text{MAPE} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{F_{ot} - F_{ft}}{F_{ot}} \right| \quad (96)$$

onde F_{ot} significa o valor da variável de observação no instante t e F_{ft} o valor da variável de observação filtrada no mesmo instante. A primeira medida RMSE é a raiz do erro quadrático médio, a segunda medida, MAE, é o erro absoluto médio e a terceira medida, MAPE, é o erro absoluto percentual médio. Foi verificado o erro entre a variável observada e a variável filtrada por cada uma das metodologias - FP e FK.

Nos dois casos mostrados nas curvas das Figuras 3 e 4 os valores iniciais para as distribuições das variáveis de estados foram os mesmos, isto é

$\hat{\mathbf{x}}_0 = (\chi_0, \xi_0)$ e \mathbf{P}_0 , com $\chi_0 = 0,2$ e $\xi_0 = 3,2$. O FK é a solução exata onde todas as distribuições são Gaussianas. A média e variância iniciais definem a distribuição normal inicial utilizada no algoritmo do FK.

No FP também foi utilizada uma distribuição normal como distribuição inicial. A média e a variância foram as mesmas do FK. Foram realizadas simulações com amostras retiradas desta distribuição inicial. Cada amostra retirada é um experimento que representa a distribuição inicial. Portanto, para o FP foram realizados diversos experimentos. No primeiro caso foram extraídas 100 amostras para representar a distribuição inicial e cada uma delas gerou uma simulação com uma filtragem. Cada um destes experimentos origina um resultado como o apresentado na Figura 4. No segundo caso foram realizados 500 experimentos. Foram calculados os erros em cada caso, ou seja, foram calculadas as médias dos 100 e dos 500 experimentos. Os resultados obtidos estão mostrados na Tabela 1.

	RMSE (US\$/bbl)	MAE (US\$/bbl)	MAPE (%)
Filtro de Kalman	0,9954	0,7639	2,5849
Filtro de partículas (100)	1,0406	0,7917	2,6803
Filtro de partículas (500)	1,0402	0,7912	2,6780

Tabela 1 – Erros na variável de observação com as duas metodologias de filtragem

Na Tabela 1 o FK mostra o erro cometido na solução exata. O algoritmo do FP de partículas fornece a solução numérica e cada número da tabela representa a média do erro para o caso de 100 experimentos e 500 experimentos. Os resultados mostram que a solução numérica está bem próxima da solução exata. O tempo computacional requerido para cada experimento da solução numérica (FP) é de aproximadamente 26 segundos, com a utilização de 200 partículas. Na solução exata (FK) os resultados são imediatos.

A Figura 5 mostra a evolução dos erros (RMSE), usando o FP, para o caso de 100 experimentos. Uma linha azul é a referência para o erro cometido usando o FK.

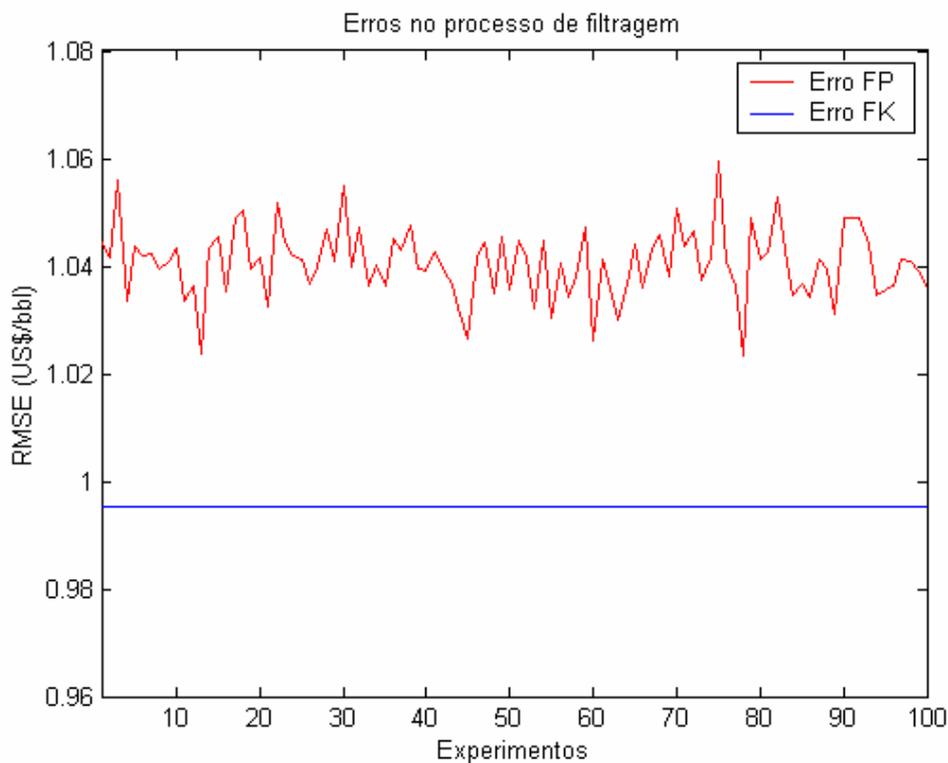


Figura 5 – Erros (RMSE) da simulação com 100 experimentos usando o FP

Se ao invés de 200, fossem usadas 1000 partículas, os erros seriam menores. A Tabela 2 mostra a média dos erros para o caso de 100 experimentos, usando 1000 partículas. Neste caso, cada experimento consumiu 132 segundos de tempo computacional, aproximadamente.

	RMSE (US\$/bbl)	MAE (US\$/bbl)	MAPE (%)
Filtro de Kalman	0,9954	0,7639	2,5849
Filtro de partículas (100)	1,0133	0,7762	2,6265

Tabela 2 – Erros na variável de observação usando 1000 partículas no FP

A Tabela 3 resume os erros medidos pelo RMSE e os tempos computacionais despendidos à medida que o número de partículas é variado, para simulações com 100 experimentos.

Número de partículas	RMSE (US\$/bbl)	Tempo/experimento (segundos)
50	1,1240	6,27
100	1,0689	13,79
150	1,0489	20,10
200	1,0406	26,48
1000	1,0133	131,56

Tabela 3 – Erro RMSE e tempo em função do número de partículas

A Figura 6 mostra a evolução do erro (RMSE) para os diversos experimentos com 1000 partículas. É nítida a redução do erro quando se aumenta o número de partículas. Não existe um critério definitivo para o número ideal de partículas a ser utilizado. Um procedimento empírico é conduzir experimentos e observar o nível nos quais os resultados estabilizam-se.

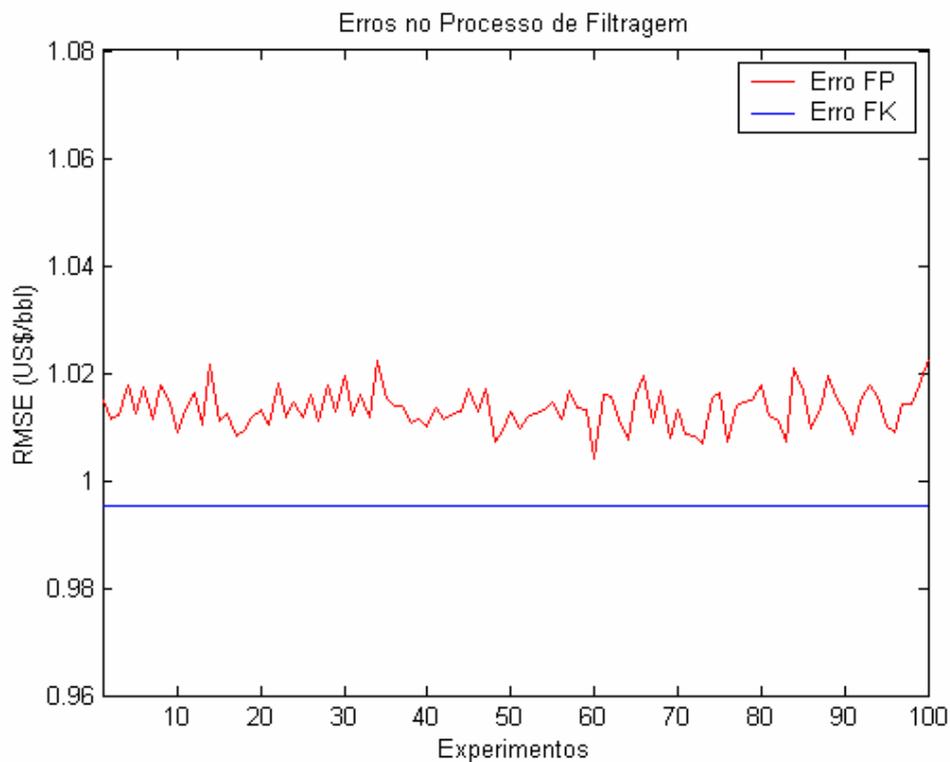


Figura 6 – Erros (RMSE) para o caso de 100 experimentos usando 1000 partículas

A Figura 7 mostra os resultados da Tabela 3 em forma gráfica, evidenciando o comportamento assintótico do erro com o aumento do número de partículas.

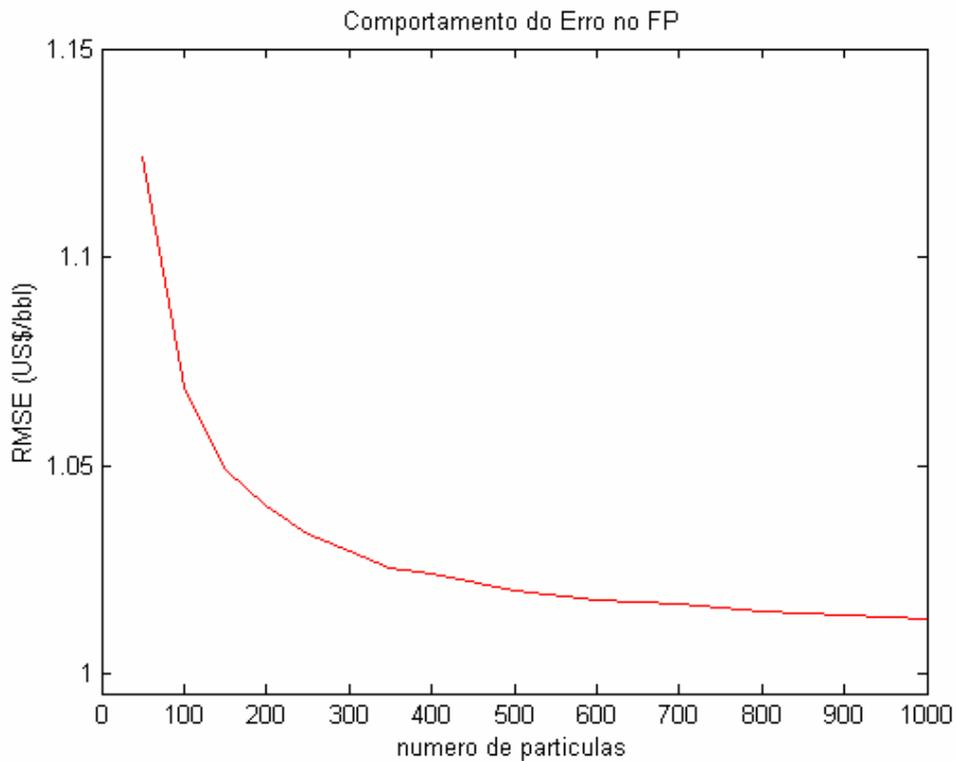


Figura 7 – Comportamento assintótico do erro no FP em função do número de partículas

Como se trata da análise com dados artificiais, todas as variáveis do modelo foram construídas sinteticamente. Assim, a variável de estado S , preço à vista, pode ser comparada com a respectiva variável filtrada. Nesta simulação foram usadas 200 partículas. A Tabela 4 mostra os resultados.

	RMSE (US\$/bbl)	MAE (US\$/bbl)	MAPE (%)
Filtro de Kalman	1,2262	0,9507	3,1735
Filtro de partículas (100)	1,2395	0,9619	3,2115
Filtro de partículas (500)	1,2413	0,9631	3,2149

Tabela 4 – Erro na variável de estado S com as duas metodologias

Novamente nota-se que o erro obtido através do FP é bastante próximo do erro obtido com o FK.

6.3 Análise com dados de mercado

Nesta seção será mostrada a análise realizada entre as metodologias do FK e FP considerando os dados reais de mercado. A variável de observação é o primeiro contrato futuro (F1) de petróleo. Desta forma, o modelo é univariado nas observações, pois contém apenas uma variável de observação. Os dados abrangem o período de janeiro de 1985 a abril de 2004, tomados com frequência semanal. O tamanho da amostra é de 1007 dados. O modelo considerado é o Modelo Básico (Schwartz e Smith (2000)), o mesmo da seção anterior. Os parâmetros foram mantidos os mesmos e a análise dar-se-á tão somente sob o aspecto da filtragem. Adotou-se o mesmo procedimento anterior. Foram calculadas as três medidas de erros, tal qual descrito nas equações (94), (95) e (96). Ainda da mesma forma, foram realizadas comparações dos erros cometidos. Para o FP foram simulados casos com 100 e 500 experimentos com 200 partículas. A Tabela 5 mostra os resultados.

	RMSE (US\$/bbl)	MAE (US\$/bbl)	MAPE (%)
Filtro de Kalman	0,5242	0,3675	1,6970
Filtro de partículas (100)	0,5810	0,3965	1,8282
Filtro de partículas (500)	0,5812	0,3963	1,8279

Tabela 5 – Erros na variável de observação – preços do contrato F1

Foram realizados os testes de Jarque-Bera e Anderson-Darling na série de resíduos das observações. Em ambos rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados. Isto significa que o uso de observações reais de mercado produziu resíduos não Gaussianos.

Embora não se tenha o objetivo de comparar os resultados dos dados artificiais com os dados de mercado, cumpre ressaltar um aspecto com relação à magnitude dos erros obtidos nos dois casos. Observa-se que com dados artificiais o erro foi superior do que com dados de mercado. Deve-se isto simplesmente ao fato de que o desvio padrão do ruídos das observações que foi utilizado é superior àquele dos dados de mercado. Estas variáveis fazem parte da matriz \mathbf{H} conforme descrito na eq. (44) da seção 4.2. Outros experimentos foram realizados em que o

desvio padrão do ruído das observações era menor que àquele com dados reais. Nesta situação, o erro apresentado pelos dados artificiais foi menor que os de mercado.

Também foi realizada a análise do modelo multivariado, isto é, para mais de uma variável de observação. O modelo foi mantido o mesmo. Os parâmetros foram admitidos sem alteração em relação aos casos anteriores. A base de dados de mercado também abrange o mesmo período, com a mesma frequência de amostragem. No entanto, a cada leitura são tomados os contratos de um a quatro meses à frente. Estes contratos foram denominados F1, F2, F3 e F4, respectivamente. Adotou-se o mesmo critério de comparação entre as metodologias. Foram calculados para cada contrato as três medidas de erro. Também foram realizados experimentos tomando-se diferentes amostras para simular a distribuição inicial dos estados no FP. Os resultados permaneceram idênticos aos mostrados acima. Ou seja, o erro cometido na variável de observação usando o FP foi próximo (embora um pouco maior) àquele do FK. Foram realizados os testes de Jarque-Bera e Anderson-Darling nas séries de resíduos das quatro variáveis de observação. Em todos os casos rejeita-se a hipótese nula de normalidade dos dados. Isto significa que o uso de dados reais de mercado gerou resíduos não Gaussianos.

6.4

Tamanho efetivo da amostra e a eficiência do FP

Conforme foi explicado anteriormente a implementação do FP requer que haja uma operação de reamostragem para evitar que haja degeneração do filtro. Intuitivamente esta etapa pode ser entendida mediante dois casos distintos. Primeiramente suponha que os pesos das partículas estejam muito dispersos, ou com grande variância, então deve-se proceder a reamostragem. Outra possibilidade é a ausência de dispersão ou pequena variância. Neste caso não há necessidade de realizar a reamostragem. Esta operação de reamostragem pode então ser controlada através do cálculo do tamanho efetivo da amostra (\hat{N}_{eff}). Este tamanho efetivo é dado pela eq. (86). Deve-se comparar o tamanho efetivo com uma fração do valor da amostra. Esta fração do valor da amostra é dada por $\text{coef} \times N$, onde $\text{coef} \leq 1$. Reamostra-se sempre que $\hat{N}_{\text{eff}} \leq \text{coef} \times N$. Quando

coef = 1, sempre ocorrerá a reamostragem. Neste caso o filtro estará em sua maior adaptatividade ou eficiência. Quando coef é baixo o número de reamostragens é reduzido e a eficiência do filtro é baixa. Neste caso, o erro entre a variável observada e filtrada tende a aumentar. Foram realizadas simulações onde se variou o valor da eficiência (valor de coef) exercendo, desta forma, um controle sobre a operação de reamostragem. O objetivo é mostrar o quanto afeta no erro as variações atribuídas a coef. A Tabela 6 mostra os resultados dos erros das observações (usando os dados artificiais) fazendo a simulação para o caso de 100 experimentos. Cada número da tabela representa a média de todos dos experimentos para cada valor de coef.

coef	RMSE (US\$/bbl)	MAE (US\$/bbl)	MAPE (%)
1	1,0406	0,7917	2,6803
0,6	1,1338	0,9427	3,1829
0,5	1,3159	1,0896	3,6808
0,4	1,5820	1,2877	4,3364

Tabela 6 – Variação do erro da variável de observação em função do valor de coef

Esta propriedade também tem implicações para o valor da função de verossimilhança. Este aspecto será tratado no próximo capítulo.