

5 Filtro de partículas

Este capítulo trata da apresentação do filtro de partículas em seus conceitos básicos. O filtro de partículas é um método numérico de integração. É adequado para lidar com problemas não lineares e não Gaussianos. Desde a década de sessenta, grande atenção tem sido devotada a estes problemas. Entretanto somente com o aumento do poder computacional foi possível tornar o seu uso mais corrente. Um dos objetivos desta pesquisa é analisar a sua aplicação a modelos de apreçamento de ativos financeiros. Este capítulo está organizado desta forma: a primeira seção faz uma introdução situando esta metodologia dentro do contexto da disciplina de estimação de componentes não observáveis; a segunda seção apresenta os conceitos básicos; a terceira e quarta seções definem a amostragem por importância e a amostragem por importância seqüencial e a quinta seção mostra o algoritmo do filtro de partículas. Os conceitos aqui apresentados estão baseados em Doucet, de Freitas e Gordon (2001). Foi mantida a notação dos artigos técnicos que tratam dos métodos seqüenciais de Monte-Carlo como pode ser observado nas inúmeras referências listadas ao longo do capítulo.

5.1 Introdução

Em vários ramos do conhecimento é comum o problema relacionado à necessidade de estimar uma variável desconhecida ou não observável a partir de um conjunto de dados. Também é freqüente que estes dados ou observações sejam gerados em tempo real e desejável que a estimação seja feita em tempo real. Na grande parte dos casos é conhecida a distribuição anterior (ou *a priori*) do fenômeno ou da variável não observável. Com o uso do Teorema de Bayes é possível calcular a distribuição posterior (*a posteriori*). Esta distribuição permite a inferência sobre a variável que se deseja estimar. Em resumo, trata-se do mesmo problema que o filtro de Kalman aborda. O filtro de Kalman pode ser visto como um caso particular em que o modelo é linear e as distribuições das variáveis de

estado e observação são Gaussianas. O filtro de Kalman é a solução analítica exata para problemas Gaussianos. No capítulo anterior foi apresentado o filtro de Kalman e mostrou-se que em seu algoritmo apenas os dois primeiros momentos da distribuição das variáveis de estado são relevantes. A aplicabilidade do filtro de partículas está relacionada aos mesmos problemas de controle em sistemas dinâmicos que trata o filtro de Kalman. Entretanto, aborda uma classe mais ampla de problemas, pois não tem as mesmas restrições do filtro de Kalman. Por outro lado, possui a desvantagem de ser computacionalmente muito mais intenso. Exemplos de aplicações do filtro de partículas são diversos no ramo da engenharia. Esta pesquisa propõe o seu uso para estimar variáveis de estado não observáveis em mercados financeiros. Um simples exemplo é o caso da volatilidade de ativos. Esta variável não é diretamente observada no mercado. É extraída das séries financeiras sendo dispensável ressaltar sua importância para os mercados. A cada nova informação do preço de um ativo financeiro que normalmente, vem corrompida por um ruído, este parâmetro pode ser filtrado e estimado em tempo real. Outro exemplo está relacionado aos mercados futuros de commodities. A cada nova informação de preço de negociação no mercado futuro para uma commodity, o preço à vista que, via de regra, é não observável, pode ser estimado.

Portanto, em caso de Gaussianidade, como dito acima, existem soluções fechadas para a distribuição posterior e este conjunto de equações recursivas é o filtro de Kalman.

Entretanto, nem sempre os fenômenos podem ser tratados por modelos lineares. Uma solução sempre à vista é linearizar tais modelos para que possa recair sob condições mais fáceis para se trabalhar. É o caso do filtro de Kalman estendido. Ainda mais, nem sempre é possível trabalhar com modelos Gaussianos. Ou seja, os modelos Gaussianos restringem o conjunto de fenômenos que podem ser analisados. A não linearidade e a não Gaussianidade são propriedades comumente encontradas. Nestes casos a determinação da distribuição posterior depende de intensos cálculos numéricos para ser determinada, uma vez que não há solução analítica fechada. Esquemas de aproximações numéricas têm sido pesquisados nos últimos trinta anos com esta finalidade. Pode-se citar o filtro de Kalman estendido e métodos baseados em *grids*, dentre outros.

Os métodos seqüenciais de Monte-Carlo (MC)¹ destacam-se com vantagens sobre os demais no que se refere ao cálculo da distribuição posterior. Além disso, o aparecimento de computadores potentes possibilitou o rápido crescimento desta disciplina. Os algoritmos seqüenciais de MC apareceram na literatura sob diversas denominações: filtros *bootstrap*, condensação, filtro de partículas, filtro de Monte-Carlo. Aqui todos serão tratados por filtro de partículas.

5.2 Definições básicas²

Seja $\{\mathbf{x}_t, t \in \mathbf{N}\}$ a variável de estado, não observável, que segue um processo de Markov. Seja $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbf{N}\}$ a variável observável. Ainda sejam $p(\mathbf{x}_0)$ a distribuição inicial da variável de estado e $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ a equação de transição que descreve a evolução da variável de estado. A distribuição marginal da variável de observação é dada por $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$. Ou seja, as observações $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbf{N}\}$ são condicionalmente independentes dado $\{\mathbf{x}_t, t \in \mathbf{N}\}$. Em resumo:

- $p(\mathbf{x}_0)$ distribuição inicial da variável de estado,
- $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ equação de transição da variável de estado,
- $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$ distribuição marginal da variável de observação.

Dentro do ambiente Bayesiano toda informação relevante sobre $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t\}$ dadas as observações até t , podem ser obtidas a partir da distribuição posterior $p(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t | \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \dots \mathbf{y}_t)$. Em várias aplicações há o interesse em determinar recursivamente, em tempo real, esta distribuição, $p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})$. Além disso, deseja-se saber a distribuição marginal $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$ conhecida como distribuição filtrada. Ainda mais, deseja-se saber valores esperados tais como:

$$I(f_t) = \int f_t(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t} \quad (69)$$

¹ Veja em Doucet, Godsill e Andrieu (2000) uma resenha sobre os métodos seqüenciais de Monte-Carlo.

² Doucet, de Freitas e Gordon (2001) apresentam uma coletânea de artigos relevantes sobre os métodos seqüenciais de Monte-Carlo.

onde $f_t : \mathcal{R}^{t+1} \rightarrow \mathcal{R}$ é integrável com respeito a $p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})$. Assim estabelecido, o problema acima é conhecido como problema de filtragem Bayesiano ou problema ótimo de filtragem. Veja em Tito (2003), capítulo 2, um resumo sobre o estado da arte da estratégia Bayesiana de aprendizado.

Em um instante de tempo t qualquer, o Teorema de Bayes fornece a distribuição posterior:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_{1:t} | \mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{x}_t)}{\int p(\mathbf{y}_{1:t} | \mathbf{x}_{0:t})p(\mathbf{x}_{0:t})d\mathbf{x}_{0:t}} \quad (70)$$

Ainda pode-se obter uma fórmula recursiva para avaliar a distribuição posterior:

$$p(\mathbf{x}_{0:t+1} | \mathbf{y}_{1:t+1}) = p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) \frac{p(\mathbf{y}_{t+1} | \mathbf{x}_{t+1})p(\mathbf{x}_{t+1} | \mathbf{x}_t)}{p(\mathbf{y}_{t+1} | \mathbf{y}_{1:t})} \quad (71)$$

A distribuição marginal $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$ também pode ser obtida de forma recursiva a partir das seguintes equações:

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \int p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})p(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_{t-1} \quad (72)$$

$$p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1})}{\int p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1})d\mathbf{x}_t} \quad (73)$$

A eq. (72) é a equação de previsão e a eq. (73) é a equação de atualização. Estas duas equações constituem a base dos algoritmos seqüenciais de Monte-Carlo.

Quando as equações de transição e observação são lineares e as distribuições são Gaussianas as integrais em (72) e (73) possuem solução analítica fechada. A solução ótima obtida é exatamente o filtro de Kalman.

5.3 Amostragem por importância

O cálculo da integral em (69) é função da densidade posterior. Da mesma forma, toda a descrição da variável não observável $\{\mathbf{x}_{0:t}, t \in \mathbf{N}\}$ é obtida da densidade posterior. Dentro do ambiente Bayesiano a distribuição posterior desempenha papel fundamental.

À exceção de casos lineares e Gaussianos, o cálculo da distribuição posterior e dos estimadores Bayesianos são proibitivamente complexos. Para transpor esta dificuldade o filtro de partículas adota uma abordagem baseada em simulação cuja técnica básica é denominada amostragem por importância. O objetivo é estimar a densidade de probabilidade posterior e a idéia central do filtro de partículas é representar tais densidades por conjunto de partículas.

Adota-se uma distribuição $\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})$ denominada distribuição por importância. A amostragem será feita a partir desta distribuição e geradas amostras iid. Assim, seja a integral em (69):

$$I(f_t) = \int f_t(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}$$

É válida a seguinte identidade:

$$I(f_t) = \frac{\int f_t(\mathbf{x}_{0:t}) p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}}{\int p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}}$$

Multiplicando e dividindo por $\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})$ numerador e denominador:

$$I(f_t) = \frac{\int f_t(\mathbf{x}_{0:t}) \frac{p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})} \pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}}{\int p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) \frac{\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})} d\mathbf{x}_{0:t}}$$

Definindo $\omega(\mathbf{x}_{0:t}) = \frac{p(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})}{\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t})}$ resulta em:

$$I(f_t) = \frac{\int f_t(\mathbf{x}_{0:t}) \omega(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}}{\int \omega(\mathbf{x}_{0:t}) \pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) d\mathbf{x}_{0:t}} \quad (74)$$

onde $\omega(\mathbf{x}_{0:t})$ é denominado peso de importância. Um estimador da integral em (74) é dado por³:

$$\hat{I}(f_t) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_t(\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}) \omega(\mathbf{x}_{0:t}^{(i)})}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega(\mathbf{x}_{0:t}^{(j)})} = \sum_{i=1}^N f_t(\mathbf{x}_{0:t}^{(i)}) \omega_t^{*(i)}$$

³ N representa o número de partículas. Veja em Fox (2001) critérios para determinar o número N de partículas e ajustá-lo com o transcorrer do tempo.

onde $\omega_t^{*(i)} = \frac{\omega(\mathbf{x}_{0:t}^{(i)})}{\sum_{j=1}^N \omega(\mathbf{x}_{0:t}^{(j)})}$ são os pesos de importância normalizados. Sob

condições fracas, a lei forte dos grandes números é aplicável, isto é,

$$\hat{I}_N(\mathbf{f}_t) \xrightarrow{qc} I(\mathbf{f}_t).$$

O método acima apesar de ser um método genérico de integração de Monte-Carlo (MC), não possui uma forma recursiva.

5.4 Amostragem por importância seqüencial

Seja o caso em que a distribuição por importância em t é obtida da distribuição por importância em $t-1$:

$$\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) = \pi(\mathbf{x}_{0:t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1}) \pi(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{y}_{1:t}) \quad (75)$$

Recursivamente pode-se obter:

$$\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) = \pi(\mathbf{x}_0) \prod_{k=1}^t \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{0:k-1}, \mathbf{y}_{1:k}) \quad (76)$$

Agora os pesos de importância são obtidos por:

$$\omega_t^{*(i)} = \omega_{t-1}^{*(i)} \frac{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)}) p(\mathbf{x}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{t-1}^{(i)})}{\pi(\mathbf{x}_t^{(i)} | \mathbf{x}_{0:t-1}, \mathbf{y}_{1:t})} \quad (77)$$

A escolha da distribuição por importância é essencial pois ela determinará a eficiência e a complexidade do filtro de partículas⁴.

Se for adotada como distribuição por importância a distribuição posterior, então a distribuição por importância será dada por $\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{0:t}, \mathbf{y}_{1:t})$. Seria a condição do caso ótimo no sentido de que a variância dos pesos por importância é minimizada e em consequência melhores estimativas podem ser alcançadas. Entretanto, o cálculo dos pesos é muito complexo pois envolve a avaliação de $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{y}_{1:t-1})$ através de integrações onerosas. Este fato exclui a distribuição posterior como uma boa candidata para ser usada como distribuição por importância.

⁴ Veja em Huang e Djuric' (2002) uma proposta de distribuição por importância híbrida.

Se for adotada como distribuição por importância a distribuição anterior (ou *a priori*), a eq. (76) transforma-se em:

$$\pi(\mathbf{x}_{0:t} | \mathbf{y}_{1:t}) = p(\mathbf{x}_0) \prod_{k=1}^t p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (78)$$

Trata-se de uma situação especial, pois é de fácil implementação. Quando a distribuição por importância é a distribuição anterior, a amostragem por importância recebe a denominação de amostragem por importância seqüencial.

Neste caso os pesos por importância são dados por:

$$\omega_t^{*(i)} = \omega_{t-1}^{(i)} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)}) \quad (79)$$

Agora a função $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t^{(i)})$ é a função de verossimilhança em t , que é relativamente fácil de calcular. A desvantagem do seu uso é que ela não carrega nenhuma informação das observações e assim as partículas geradas podem ser oriundas das caudas da distribuição posterior. Desta forma, com o transcorrer do tempo o sistema degenera-se rapidamente. Em outras palavras, a variância incondicional dos pesos de importância aumenta com o tempo.

5.5

Estratégia de reamostragem e o filtro *bootstrap*

A amostragem seqüencial por importância acarreta a degeneração do procedimento. A solução adotada para evitar este problema foi criar uma etapa adicional. Trata-se da etapa de seleção ou de reamostragem. Uma vez calculados os pesos por importância, antes de fazer a evolução para o instante seguinte, é realizada a seleção. As partículas de maior peso (maior importância), são selecionadas. De acordo com o seu peso é realizada uma nova amostragem (da distribuição anterior). Assim, as partículas de maior importância dão origem a um maior número de partículas. As partículas de menor importância desaparecem e não originam “descendentes”. Este procedimento é denominado filtro de partículas *bootstrap* (FPB). Ao amostrar proporcionalmente à verossimilhança, o filtro de partículas (FP) focaliza nas regiões da distribuição onde a verossimilhança é maior, ou seja, onde as boas aproximações significam possuir maior importância. As principais vantagens do FPB são: (i) facilidade de implementação; (ii) modularidade (basta atualizar a densidade por importância e o peso por importância); (iii) é paralelizável; (iv) a etapa de reamostragem

independe da complexidade do modelo e não requer nenhuma alteração; (v) a sua aplicabilidade prescinde das condições de linearidade e Gaussianidade do modelo que está sendo analisado.

A presença de *outliers* nas amostras acarreta problemas para o uso do FPB. Para contornar este problema foram desenvolvidas extensões para o FPB tais como o filtro de partículas auxiliar ou ainda a inclusão de um estágio Monte-Carlo Cadeia de Markov (MCCM) após a seleção das partículas. A introdução da etapa MCCM faz com que haja um choque aleatório na posição das partículas. Procedendo iterativamente buscam-se posições ou densidades que aproximam melhor a densidade posterior. O método MCCM considera cada densidade de filtragem $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$ como uma densidade objetivo $p(\mathbf{x})$ a qual precisa ser aproximada numericamente. Admita que as condições necessárias para esta convergência sejam satisfeitas. Pode-se escrever que a densidade a priori (ou distribuição por importância) é tal que

$$\pi(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) = g(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) \alpha(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$$

onde $g(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ é o núcleo de transição e $\alpha(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ é denominada densidade de aceitação. A função do núcleo de transição é gerar um conjunto de partículas candidatas $\{\mathbf{x}_t^{*(i)}\}_{i=1,N}$ a partir do conjunto $\{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}\}_{i=1,N}$. A função da probabilidade de aceitação é aceitar as amostras candidatas $\mathbf{x}_t^{*(i)}$ ou rejeitá-las. Rejeitando-as equivale a preservar as amostras $\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}$ da iteração anterior.

O núcleo de transição é um processo aleatório definido por

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (80)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ é um ruído branco. A probabilidade de aceitação é dada por Metropolis (1953) e Hastings (1970)

$$\alpha(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) = \min \left\{ 1, \frac{p(\mathbf{x}_{t-1}) \pi_g(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{x}_t)}{p(\mathbf{x}_t) \pi_g(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})} \right\} \quad (81)$$

onde $\pi_g(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$ é a densidade definida por $g(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$. Na prática determina-se a amostra candidata $\{\mathbf{x}_t^{*(i)}\}_{i=1,N}$ a partir da amostra da iteração anterior $\{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}\}_{i=1,N}$ usando a eq. (80), isto é

$$\mathbf{x}_t^{*(i)} = \mathbf{x}_{t-1}^{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (82)$$

Posteriormente cada amostra candidata é aceita ou rejeitada de acordo com

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{x}_t^{*(i)} & \text{se } u \leq \rho \\ \mathbf{x}_{t-1}^{(i)} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (83)$$

$$\text{sendo } u \sim U(0,1) \text{ e } \rho = \frac{p(\mathbf{x}_{t-1}^{(i)})\pi_g(\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}|\mathbf{x}_t^{*(i)})}{p(\mathbf{x}_t^{*(i)})\pi_g(\mathbf{x}_t^{*(i)}|\mathbf{x}_{t-1}^{(i)})} \text{ para } i = 1, \dots, N \quad (84)$$

Assim o conjunto de partículas aceitas $\{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}\}_{i=1,N}$ se torna distribuído de acordo com $p(\mathbf{x})$. Após várias iterações usando as equações (82), (83) e (84) espera-se que as partículas $\{\mathbf{x}_{t-1}^{(i)}\}_{i=1,N}$ se localizem em regiões de alta probabilidade $p(\mathbf{x})$, sendo portanto, uma aproximação eficiente de $p(\mathbf{x})$. Veja em Doucet, de Freitas e Gordon (2001), no capítulo 6, detalhes sobre a metodologia reamostragem-evolução (*resample-move*). Também veja em Tito (2003) detalhes do algoritmo MCCM bem como a obtenção da densidade posterior usando a tecnologia dos algoritmos genéticos.

Como foi dito anteriormente, a amostragem por importância seqüencial fatalmente degenerará. A idéia da reamostragem é eliminar as partículas com pequenos pesos normalizados. Desta forma, ocorre uma seleção pelas partículas de maior peso ou de maior importância. Uma medida da degeneração do algoritmo é o tamanho efetivo da amostra (N_{eff}) apresentado em Kong, Liu e Wong (1994):

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{1 + \text{Var}^{\pi(\cdot|y_{0:k})}(\omega^*(\mathbf{x}_{0:k}))} \quad (85)$$

Não é possível avaliar precisamente N_{eff} , entretanto pode-se obter uma aproximação \hat{N}_{eff} para o valor de N_{eff} . Esta aproximação é dada por

$$\hat{N}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega^{(i)})^2} \quad (86)$$

Pode ser feita na etapa de reamostragem uma avaliação do tamanho efetivo da amostra. Quando a variância dos pesos é grande, o tamanho efetivo é pequeno indicando a necessidade da reamostragem. Quando a variância é pequena o tamanho efetivo da amostra é grande. Neste caso, é dispensável a reamostragem. Portanto, é possível exercer um controle sobre a operação de reamostragem.

O quadro abaixo resume as principais etapas do algoritmo do filtro de partículas *bootstrap*.

Filtro de Partículas Padrão
<p>1. Inicialização</p> <p>Tome um conjunto de partículas da distribuição anterior $p(x_0)$ e obtenha $\{(x_0^{*(i)}, \omega_0^{(i)})\}$, $i = 1, \dots, N$</p> <p>Faça $t = 1$</p> <p>2. Etapa de Avaliação</p> <p>a) Calcule os novos pesos</p> $\omega_{t-1}^{(i)} \propto \omega_{t-2}^{(i)} p(y_{t-1} x_{t-1}^{*(i)}) \quad i = 1, \dots, N$ <p>b) Normalize os pesos</p> $\tilde{\omega}_{t-1}^{(i)} = \frac{\omega_{t-1}^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \omega_{t-1}^{(j)}} \quad i = 1, \dots, N$ <p>3. Etapa de reamostragem ou seleção</p> <p>Reamostre $x_t^{(i)}$ com probabilidade $\tilde{\omega}_{t-1}^{(i)}$, obtendo N partículas aleatórias iid $x_t^{(j)}$, aproximadamente distribuídas conforme $p(x_t y_{1:t})$.</p> <p>Faça $\tilde{\omega}_t^{(i)} = \frac{1}{N}$ $i = 1, \dots, N$</p> <p>4. Etapa de Evolução</p> <p>Avance os estados no tempo de $t-1$ para t usando a equação de evolução dos estados $x_t^{*(i)} \sim \pi(\cdot) = p(x_t x_{t-1}^{(i)})$ para $i = 1, \dots, N$</p> <p>5. Retorne a etapa 2.</p>

Quadro 5 – Algoritmo do filtro de partículas

Primeiramente amostre N partículas aleatoriamente da distribuição $p(x_0)$. Denomine estas partículas de candidatas a representantes da distribuição posterior no instante $t-1$ denotando-as por x_{t-1}^* . A segunda etapa consiste em avaliar estas partículas, é a etapa da avaliação. Para tal, calcule o correspondente valor $y_{t-1}^{*(i)}$ conforme a equação do modelo. Considere que neste instante $t-1$ seja observado um valor de y_{t-1} . Verifique o quão próximo este valor está dos valores oriundos do modelo, isto é calcule a verossimilhança $p(y_t|x_{t-1}^*)$. Com isso, o peso por importância pode ser calculado, normalize os pesos obtendo $\tilde{\omega}_{t-1}^{(i)}$. As partículas de maior peso representam as regiões de maior importância da distribuição. A terceira etapa é a de seleção. Reamostre da distribuição anterior $p(x_t|x_{t-1})$ N partículas de acordo com os pesos $\tilde{\omega}_{t-1}^{(i)}$. Obtenha então as partículas que em $t-1$ representam a distribuição posterior, denomine-as por $x_{t-1}^{(i)}$, agora elas possuem pesos $\frac{1}{N}$. A última etapa é a de evolução. Obtenha a partir da distribuição $p(x_t|x_{t-1})$ (equação de transição) as partículas candidatas a representar a distribuição posterior no instante t , denomine-as de x_t^* , agora repita o procedimento, e prossiga até T .