3
Derivação dos modelos

Este capítulo apresenta a derivação de todos os modelos que serão analisados. Basicamente serão desenvolvidos três casos distintos. Destes casos serão extraídos os modelos que serão estudados nesta pesquisa. Derivar o modelo significa obter a expressão do preço futuro de um contrato, com vencimento definido, sob a medida neutra ao risco ou medida martingal equivalente (MME). A suposição inicial é que são conhecidos os tipos de processos estocásticos para as variáveis de estado (ou componentes não observáveis). O número de variáveis de estado define o número de fatores do modelo. Assim, os modelos de dois fatores possuem duas variáveis de estado, que não são observáveis, e assim sucessivamente. O preço futuro será função do tempo de maturação do contrato e das variáveis de estado. O objetivo é definir uma equação para o preço futuro para que seja possível comparar os preços do modelo, assim obtidos, com os dados reais do mercado. A condição fundamental utilizada é aquela que considera os mercados livres de arbitragem. Desta forma é possível obter a equação para os preços futuros.

Este capítulo foi organizado da seguinte forma: a próxima seção apresenta uma introdução mostrando os modelos que serão analisados; a segunda seção faz uma breve introdução aos trabalhos de Duffie e Kan (1996) e Duffie, Pan e Singleton (2000) expondo a abrangência das transformadas (aqui denominadas transformadas DK e DPS) e a abrangência dos processos de difusão afins com saltos; a terceira seção apresenta a formulação analítica das transformadas; as duas seções subseqüentes tratam, cada uma, das transformadas DK e DPS e, finalmente, seguem-se as seções com a derivação dos modelos dos preços futuros. Ao final é dedicada uma seção para cada modelo. As próximas quatro seções são baseadas no artigo de Duffie, Pan e Singleton (2000).

3.1
Introdução

O modelo de Schwartz e Smith (2000) será denominado de Modelo Básico. Serão analisadas três extensões deste modelo que foram denominadas de Primeira, Segunda e Terceira Extensões.

Em geral, as commodities são negociadas em mercados futuros que são bastante ativos em termos de volume de negócios. Já os mercados à vista das commodities são menos expressivos em volume. A informação relevante sobre preço é formada a partir dos contratos futuros negociados para diferentes maturidades. Aqui a consideração básica é que o preço à vista é uma variável não observável. O Modelo Básico considera que o logaritmo do preço à vista S_t é a soma de duas variáveis de estado estocásticas (dois fatores) não observáveis. A primeira χ_t responde pelas variações de curto prazo. O processo de evolução desta variável é de reversão à média do tipo Ornstein-Uhlenbeck. A segunda variável ξ_t representa os preços de equilíbrio e o seu processo de evolução é do tipo movimento geométrico Browniano (MGB). Estas duas variáveis χ_t e ξ_t constituem as duas variáveis de estado não observáveis (conseqüentemente o preço à vista é não observável).

O modelo Primeira Extensão considera uma modificação no processo de ξ_t. Seu processo é considerado como de reversão à média.

O modelo Segunda Extensão é o mesmo Modelo Básico incluindo saltos na variável de curto prazo, χ_t. Neste modelo há dois casos a considerar com relação ao tamanho dos saltos: (i) a distribuição do tamanho dos saltos é normal, e (ii) a distribuição do tamanho dos saltos é exponencial.

O modelo da Terceira Extensão é o Modelo Primeira Extensão incluindo saltos na variável de curto prazo, χ_t.

A derivação do Modelo Básico é descrita em Schwartz e Smith (2000). Entretanto a derivação que será apresentada neste capítulo difere substancialmente daquela contida no artigo original. Os modelos serão deduzidos com o uso das transformadas de Duffie e Kan (1996) e de Duffie, Pan e Singleton (2000). O uso destas transformadas é aplicável a inúmeras situações de apreçamento de derivativos cujas variáveis de estado são processos Markovianos e caracterizadas por funções afins. Um processo de difusão de uma variável é dito afim se a tendência (*drift*), a difusão e os saltos são funções afins desta variável. Estas transformadas serão denominadas de DK e DPS, respectivamente.

Os processos de difusão afins com saltos (*Affine Jump Diffusions*) foram escolhidos nesta tese porque eles são "bem equipados" no sentido que contém a componente de difusão, a componente dos saltos e ainda permitem agregar componentes de volatilidade estocástica ou volatilidades variando no tempo, tais como processos ARCH/GARCH.

3.2
Aspectos preliminares das transformadas DK e DPS

Em Finanças o apreçamento de derivativos da taxa de juros ocupa um papel de destaque. Inúmeros trabalhos dedicam-se a este tema. Neste contexto, a consideração do tipo de processo estocástico seguido pela taxa de juros é fundamental. Quando este processo estocástico é afim é possível encontrar soluções fechadas para o apreçamento de derivativos. Diz-se que um processo de difusão de um vetor de estado X, com saltos, é afim se a tendência (*drift*), a difusão (matriz de covariância instantânea) e a intensidade dos saltos são funções afins do vetor de estado (a seção seguinte formaliza esta definição). Como exemplo desta consideração na literatura, citam-se os trabalhos de Vasiceck (1977) e de Cox, Ingerssol e Ross (1985), dentre outros. Outros exemplos no campo do apreçamento de opções são os modelos de volatilidade estocástica de Heston (1993).

Duffie e Kan (1996) escreveram um importante artigo considerando os estados (retornos de n títulos zero-cupons) $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, para diferentes maturidades, como processos Markovianos. Impuseram uma estrutura afim a estes estados e demonstraram que o preço dos títulos são funções exponenciais afins. Os termos desta exponencial afim são soluções de equações diferenciais ordinárias (EDOs), conhecidas como equações de Ricatti. Ficou assim definida uma transformada que permite, dentro de determinadas condições, o apreçamento de derivativos do ativo objeto (vetor de estado X) através de soluções analíticas fechadas. Os autores lançaram a base e os conceitos fundamentais e o tema voltou a ser abordado em Duffie, Pan e Singleton (2000). Neste último, é ampliado o conceito da transformada que foi denominado de transformada estendida.

Exemplificando, considere que um título paga em τ um valor que é função do vetor de estado X_τ. Seja este valor dado pela função $(v_0 + v_1 \cdot X_\tau)\, e^{u \cdot X_\tau}$, onde v_0, v_1 e u possuem n elementos escalares reais ou complexos. Seja $R(X_t)$ a taxa de desconto do fluxo de caixa futuro. Então, o valor do título em t é dado por:

$$E_t\left[\exp\left(-\int_t^\tau R(X_s, s)ds\right)(v_0 + v_1 \cdot X_\tau)\, e^{u \cdot X_\tau}\right] \qquad (1)$$

onde E_t é o valor esperado condicional em t.

A transformada estendida permite o cálculo da expressão acima, ou seja, do valor do título, através de uma expressão que envolve uma exponencial afim. Um caso muito comum na literatura é a situação de um título sem risco de crédito (*default-free*). Seja a taxa de juros uma função afim de $X_t : r_t = r_0 + r_1 \cdot X_t$. O preço de um título zero-cupon que vence em τ é dado por:

$$E\left(\exp\left(-\int_t^\tau r_s ds\right) \middle| X_t\right)$$

onde foi considerado na eq. (1) que $R(X_t) = r_t, u = 0, v_0 = 1$ e $v_1 = 0$. Ainda, o valor esperado é considerado sob a medida neutra ao risco ou medida martingal equivalente (MME). Duffie e Kan (1996) apresentam a solução analítica para o preço do título. Títulos com risco de crédito podem ser tratados similarmente. Outro uso da eq. (1) é aquele em que se busca a função característica condicional da distribuição de X_τ. Fazendo $R = 0, v_0 = 1$ e $v_1 = 0$, tem-se que $\phi(u, X_t, t, \tau) = E\left(e^{iu \cdot X_\tau} \middle| X_t\right)$, para u real. Conhecendo a função característica de X_τ a função densidade pode ser conhecida e os parâmetros do modelo estimados por máxima verossimilhança. Singleton (2001) considera esta abordagem e Das (1998) considera uma densidade Poisson-Gaussiana e o método dos momentos para estimar os parâmetros do processo da taxa de juros. Heston (1993) mostrou que os preços de derivativos de ações, títulos e câmbio podem ser determinados pela transformada inversa de Fourier da função característica condicional, para os casos em que o ativo objeto é uma função afim e a volatilidade é estocástica.

3.3 Formulação das transformadas DK e DPS

Considere um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$ e uma filtração $\Im_t$. Suponha que X é um processo de Markov no espaço estado $D \subset \Re^n$ e que segue a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t + d\pi_t \qquad (2)$$

onde W_t é um processo Browniano padrão adaptado a $\Im_t$ em $\Re^n$; $\mu(.): D \to \Re^n$; $\sigma(.): D \to \Re^{n\times n}$ são funções que definem a tendência e a difusão, respectivamente. π é um processo que representa saltos e possui uma distribuição de probabilidade ν em $\Re^n$ com intensidade $\{\varpi(X_t): t \geq 0\}$ para ϖ definido tal que $\varpi: D \to [0, \infty)$.

Intuitivamente o salto representado por π representa um salto cujo tamanho é aleatório e dado pela distribuição ν multiplicado por um processo de Poisson de intensidade ϖ tal que $\{\varpi(X_s): 0 \leq s \leq t\}$. O processo de Poisson e de difusão são independentes um do outro e cada um deles é independente de ν. Para que o processo em (2) seja afim é necessário que a tendência, a difusão e a intensidade dos saltos sejam funções afins. Isto significa que as funções $\mu, \sigma\sigma'$ e ϖ sejam afins em seu domínio D. Seja $R: D \to \Re$ a função que representa a taxa de desconto. Portanto, estas funções afins são representadas por:

$\mu(x) = K_0 + K_1 x$, para $K = (K_0, K_1) \in \Re^n \times \Re^{n\times n}$

$(\sigma(x)\sigma(x)')_{ij} = (H_0)_{ij} + (H_1)_{ij} \cdot x$, para $H = (H_0, H_1) \in \Re^n \times \Re^n$

$\varpi(x) = \ell_0 + \ell_1 \cdot x$, para $\ell = (\ell_0, \ell_1) \in \Re \times \Re^n$

$R(x) = r_0 + r_1 \cdot x$, para $r = (r_0, r_1) \in \Re \times \Re^n$

Seja um complexo tal que $c \in \mathbf{C}^n$, então:

$$\theta(c) = \int_{\Re^n} \exp(cq)d\nu(q)$$

define a função característica do tamanho do salto.

Será considerado o caso em que $r_1 = 0$, conseqüentemente a taxa de desconto será constante e representada por r. Neste contexto os preços futuros e *forwards* são idênticos (veja em Duffie (1989) esta demonstração).

3.4 O conceito da transformada DK

Dada a condição inicial do processo $X(0)$, os coeficientes (K, H, ℓ, θ) determinam perfeitamente a distribuição de X. Já o conjunto dado por $\gamma = (K, H, \ell, \theta, r)$ descreve tanto a distribuição de X como também os efeitos dos descontos. Então γ determina uma transformada $\psi^{\gamma} : \mathbf{C}^n \times D \times \Re_+ \times \Re_+ \to \mathbf{C}$ de X_τ condicionada a $\Im_t$, para $t \leq \tau$, dada por:

$$\psi^{\gamma}(u, X_t, t, \tau) = E^{\gamma}\left(\exp(-\int_t^\tau R(X_s)ds)\, e^{u \cdot X_\tau} \middle| \Im_t \right) \tag{3}$$

onde E^{γ} representa o valor esperado da distribuição de X determinado por γ. ψ^{γ} difere da função característica condicional somente pela presença da taxa de desconto $R(X_t)$.

Proposição 1. Suponha que (K, H, ℓ, θ, r) seja bem comportado em (u, τ). Então a transformada ψ^{γ} de X definida em (3) é dada por

$$\psi^{\gamma}(u, x, t, \tau) = e^{\alpha(t) + \beta(t) \cdot x} \tag{4}$$

onde β e α satisfazem as seguintes EDOs de Ricatti:

$$\dot{\beta}(t) = r_1 - K_1'\beta(t) - \tfrac{1}{2}\beta'(t)H_1\beta(t) - \ell_1(\theta(\beta(t))-1) \tag{5}$$

$$\dot{\alpha}(t) = r_0 - K_0 \cdot \beta(t) - \tfrac{1}{2}\beta'(t)H_0\beta(t) - \ell_0(\theta(\beta(t))-1) \tag{6}$$

com as condições terminais dadas por $\beta(\tau) = u$ e $\alpha(\tau) = 0$.

Prova: Veja no corpo do texto de Duffie, Pan e Singleton (2000) e no Apêndice A deste mesmo artigo. ■

Intuitivamente pode-se verificar tal resultado usando o lema de Itô na função ψ^{γ} dada em (4). As EDOs (5) e (6) podem ter solução fechada se a distribuição ν tiver função característica facilmente tratável. Duffie e Kan (1996) apontam que as distribuições exponencial, binomial e normal são convenientes. No caso de não possuírem soluções analíticas as EDOs devem ser resolvidas numericamente. A condição de bem comportada é dada pela definição a seguir.

Definição 1. O conjunto (K, H, ℓ, θ, r) é dito bem comportado em $(u, \tau) \in \mathbf{C}^n \times [0, \infty)$ se (5) e (6) possuem em β e α soluções únicas, e se

(i) $E\left(\int_0^\tau |\varphi(t)|\right) < \infty$ onde $\varphi_t = \Psi_t\left(\theta(\beta(t)) - 1\right)\varpi(X_t)$

(ii) $E\left[\left(\int_0^\tau \eta_t \cdot \eta_t dt\right)^{1/2}\right] < \infty$ onde $\eta_t = \Psi_t \beta'(t)\sigma(X_t)$

(iii) $E\left(|\Psi_\tau|\right) < \infty$ onde $\Psi_t = \exp\left(-\int_0^t R(X_s)ds\right) e^{\alpha(t)+\beta(t)\cdot X_t}$

3.5 O conceito da transformada estendida DPS

Em alguns casos o apreçamento de derivativos recai no cálculo do valor esperado do produto de uma função afim de X_τ e de uma exponencial afim de X_τ. Por isto a necessidade do conceito da transformada estendida, ou transformada DPS. Nesta pesquisa todos os modelos estão definidos em termos do logaritmo do preço à vista: $\ln(S_t)$. Por esta razão a transformada DK é suficiente para a obtenção dos modelos. Caso os modelos tivessem sido desenvolvidos a partir do preço S_t, ao invés do seu logaritmo, usar-se-ia a transforma DPS. Pode-se definir a transformada $\phi^\gamma : \Re^n \times \mathbf{C}^n \times D \times \Re_+ \times \Re_+ \to \mathbf{C}$ de X_τ, condicionada a $\Im_t$, para $t \le \tau$ por:

$$\phi^\gamma(v,u,X_t,t,\tau) = E\left[\exp\left(-\int_t^\tau R(X_s)ds\right)(v \cdot X_\tau)e^{u \cdot X_\tau} \middle| \Im_t\right] \tag{7}$$

Proposição 2. Suponha que $\gamma = (K, H, \ell, \theta, r)$ seja bem comportado em (v,u,τ), agora no sentido estendido. A transformada estendida ϕ^γ definida em (7) é dada por:

$$\phi^\gamma(v,u,x,t,\tau) = \psi^\gamma(u,x,t,\tau)\,(A(t) + B(t)\cdot x) \tag{8}$$

onde ψ^γ é dada em (4) e B e A satisfazem as EDOs:

$$-\dot{B}(t) = K_1' B(t) + \beta'(t) H_1 B(t) + \ell_1 \nabla\theta(\beta(t))B(t) \tag{9}$$

$$-\dot{A}(t) = K_0.B(t) + \beta'(t) H_0 B(t) + \ell_0 \nabla\theta(\beta(t))B(t) \tag{10}$$

com as condições terminais dadas por $B(\tau) = v$ e $A(\tau) = 0$, onde $\nabla\theta(c)$ é o gradiente de $\theta(c)$ com relação a $c \in \mathbf{C}^n$.

Prova. Veja no Apêndice de Duffie, Pan e Singleton (2000). ■

A condição bem comportada no sentido estendido é dada pela definição a seguir.

Definição 2. (K,H,ℓ,θ,r) é bem comportada no sentido estendido se β e α são soluções únicas de (5) e (6), se θ é diferenciável em $\beta(t)$ para $t \le \tau$, se B e A são soluções únicas de (9) e (10) e ainda se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $E\left(\int_0^\tau |\tilde{\varphi}(t)| dt\right) < \infty$, onde $\tilde{\varphi}_t = \omega(X_t)(\Phi(\theta(\beta(t)) - 1) + \Psi_t \nabla\theta(\beta(t))B(t))$

(ii) $E\left[\left(\int_0^\tau \tilde{\eta}_t \cdot \tilde{\eta}_t dt\right)^{1/2}\right] < \infty$, onde $\tilde{\eta}_t = \Phi(\beta'(t) + B'(t))\sigma(X_t)$

(iii) $E(|\Phi_\tau|) < \infty$, onde $\Phi_t = \Psi_t(A(t) + B(t)\cdot X_t)$

3.6
Derivação dos modelos com a transformada DK

Nesta seção serão apresentadas as condições gerais para o desenvolvimento dos modelos. Posteriormente será apresentado o preço futuro como uma função da transformada DK. Em seguida será apresentado cada modelo com as respectivas particularidades.

Os modelos desta tese foram desenvolvidos considerando o logaritmo do preço à vista ($\ln(S_t)$). Por vezes encontra-se na literatura a denominação de tais modelos como modelos de retorno. Decorre deste fato que somente a transformada DK será necessária. Se além dos modelos de retorno, houvesse o desenvolvimento de modelos no nível do preço (S_t), haveria a necessidade da utilização da transformada DPS.

Considere inicialmente um intervalo de tempo onde ocorre a negociação nos mercados futuros $[0,\tau]$, onde τ é fixo. A incerteza na economia é descrita pelo espaço de probabilidade $(\Omega,\Im,P)$, sendo P a medida real de probabilidade. Os eventos na economia são revelados ao longo do tempo de acordo com a filtração $\Im_t$. O modelo de mercado considerado admite que as commodities são negociadas em mercados futuros sob diferentes contratos, ou seja, com diferentes datas de vencimento. O preço à vista em t é S_t que é função de duas variáveis de estado não observáveis χ_t e ξ_t, tal que

$$\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \tag{11}$$

onde χ_t são as variações do preço no curto prazo, ξ_t é o preço de equilíbrio no longo prazo e $f(t)$ é uma função determinística que descreve a sazonalidade em t.

As variáveis de estado evoluem segundo processos gerais de Itô[1]:

$$d\chi_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_\chi + d\pi_t \tag{12}$$

$$d\xi_t = \mu(\xi_t) + \sigma(\xi_t)dW_\xi \tag{13}$$

onde $\mu(.)$ e $\sigma(.)$ são processos estocásticos adaptados em $(\Omega, \Im, P)$. A eq. (12) equivale ao processo descrito em (2). A eq. (13) descreve um processo similar sem saltos.

Assume-se a existência de não arbitragem para os preços futuros. Decorre deste fato a existência de uma única medida neutra ao risco ou medida martingal equivalente (MME), definida por Q. Este é o Teorema Fundamental de Finanças. O seu enunciado formal e sua demonstração estão contidos em vários textos clássicos como em Huang e Litzenberger (1988). Em síntese este teorema estabelece que se não há arbitragem então existe uma única MME, e por outro lado, se existe uma MME o mercado não admite possibilidade de arbitragem.

É um fato em conhecido em Finanças que sob a MME o preço futuro[2] em t de um contrato futuro com vencimento em τ, é o valor esperado condicional do preço à vista em τ:

$$F_{\tau,t} = E^Q\left(S_\tau \middle| \Im_t\right) \tag{14}$$

onde $E^Q(\cdot|\Im_t)$ representa o valor esperado condicional a $\Im_t$ sob a MME. O capítulo1 na seção 1.2.4 oferece os argumentos para a eq. (14). Veja, por exemplo, em Duffie (1989) as condições de sua validade.

A eq. (14) pode ser escrita como

$$F_{\tau,t} = E^Q(S_\tau|\Im_t) = e^{r(\tau-t)}\, E^Q(e^{-r(\tau-t)}S_\tau|\Im_t) = e^{r(\tau-t)}\, E^Q(e^{-r(\tau-t)}\; e^{\ln S_\tau}|\Im_t)$$

---

[1] Por conveniência omitiremos o subíndice t no processo padrão de Wiener. Então W_{χ_t} e W_{ξ_t} serão escritos como W_χ e W_ξ, respectivamente.

[2] Será usada a notação simplificada para os preços futuros $F_{\tau,t}$ que equivale a $F(t,\tau,\chi_t,\xi_t)$.

Introduzindo na equação a cima o termo $\ln S_\tau$ dado na eq. (11):

$$F_{\tau,t} = e^{r(\tau-t)} E^Q(e^{-r(\tau-t)}\ e^{f(\tau)+\chi_\tau+\xi_\tau} | \Im_t)$$

Rearranjando os termos,

$$F_{\tau,t} = e^{r(\tau-t)+f(\tau)} E^Q(e^{-r(\tau-t)}\ e^{u \cdot x_\tau} | \Im_t) \qquad (15)$$

onde $x' = (\chi \quad \xi)$ e $u' = (1 \quad 1)$. Comparando a transformada na eq. (3) com a eq. (15), pode-se escrever:

$$F_{\tau,t} = e^{r(\tau-t)+f(\tau)} \psi^Q(u, x_t, t, \tau) \qquad (16)$$

Então para cada modelo basta calcular o valor da transformada DK sob a MME. O preço futuro será decorrência da eq.(16).

3.6.1 Modelo com distribuição normal para os saltos e MGB para ξ

Neste modelo a variável de estado de curto prazo χ_t evolui por um processo de reversão à média do tipo Ornstein-Uhlenbeck adicionado a um processo de Poisson que é multiplicado pelo tamanho dos saltos. O tamanho dos saltos é descrito por uma distribuição normal. A variável de longo prazo ξ_t (preços de equilíbrio) é descrita por um movimento (ou processo) geométrico Browniano (MGB). Sob a medida real o modelo é escrito por:

$$\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t$$

$$d\chi_t = -k_\chi \chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi + \nu(\mu_\nu, \sigma_\nu^2) d\pi(\varpi_t) \qquad (17)$$

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi$$

$$\rho dt = dW_\chi dW_\xi$$

Considera-se para o modelo descrito pelas equações (17) as mesmas condições expostas na seção 3.3.

Agora o conjunto de equações (17) deve ser escrito sob a MME. Para a variável ξ_t a mudança de medida segue o teorema de Girsanov com um ajuste na tendência do processo. Veja em Øksendal (2000) a demonstração do teorema de Girsanov. Portanto, μ_ξ^* é a tendência sob a MME, onde $\mu_\xi^* = \mu_\xi - \lambda_\xi$ e λ_ξ é preço de risco de mercado da variável ξ, admitido como constante. Para a variável χ_t, que segue um processo de difusão com saltos, três ajustes são requeridos. O primeiro é feito na tendência do processo e neste caso λ_χ representa o preço de risco de mercado também constante. Os dois ajustes seguintes ocorrem por conta do processo de saltos. O segundo ajuste é feito na distribuição que representa o tamanho dos saltos trocando μ_v pelo seu equivalente μ_v^* no processo sob a MME. O último é feito na intensidade do processo de Poisson, onde ϖ_t é substituído pelo seu equivalente ϖ_t^* sob a MME. Portanto, as diferenças entre μ_v e μ_v^* e entre ϖ_t e ϖ_t^* são as responsáveis pelo premio de risco associado à incerteza que os saltos introduzem no processo puro de difusão. Será feita uma hipótese simplificadora (esta mesma consideração foi feita por Pan (2002)[3]) relativa ao premio de risco dos saltos. Será admitido que todo o premio de risco dos saltos será capturado pelo premio de risco da incerteza associada ao tamanho dos saltos, ou seja por $\mu_v - \mu_v^*$. Em outras palavras, será considerado que $\varpi_t = \varpi_t^*$.

Portanto, as equações em (17) escritas sob a MME fornecem:

$$
\begin{aligned}
&\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \\
&d\chi_t = -(k_\chi \chi_t + \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dW_\chi^Q + \nu(\mu_v^*, \sigma_v^2)d\pi(\varpi_t) \qquad (18) \\
&d\xi_t = \mu_\xi^* dt + \sigma_\xi dW_\xi^Q \\
&\rho dt = dW_\xi^Q dW_\chi^Q
\end{aligned}
$$

Sob a MME, o processo descrito em (18) permanece um processo afim. Esta demonstração de que a mudança de medida de probabilidade não altera esta propriedade do modelo pode ser vista em Culot (2003).

A transformada DK para ψ^γ é dada pela eq. (4) reescrita abaixo:

$$\psi^\gamma(u, x, t, \tau) = e^{\alpha(t) + \beta(t)\cdot x}$$

ou ainda

[3] Neste artigo a autora investiga os prêmios de riscos associados às presenças de volatilidade estocástica e de saltos nas séries de retornos financeiros. Estuda o preço de risco de mercado dos saltos e ainda se o risco associado aos saltos é apreçado diferentemente do risco associado ao processo de difusão puro.

$$\psi^{\gamma}(u,(\chi_t,\xi_t),t,\tau) = \exp\left(\alpha(u,t,\tau) + \beta_1(u,t,\tau)\chi_t + \beta_2(u,t,\tau)\xi_t\right) \tag{19}$$

As EDOs (5) e (6) devem ser resolvidas, considerando as equações em (18) sob a MME. O resultado fornecerá a transformada sob a MME que será substituído na eq. (16). As EDOs estão resolvidas no Apêndice 1.

A transformada sob a MME resulta em

$$\begin{aligned}\psi^{Q}(\chi_t,\xi_t,t,\tau) = \exp\Big[&-r(\tau-t) - \tfrac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \mu_\xi^*(\tau-t) + \\ &\frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1-e^{-2k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \\ &\tfrac{1}{2}\sigma_\xi^2(\tau-t) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + \xi_t + B(\tau-t)\Big]\end{aligned} \tag{20}$$

Levando o resultado de (20) em (16), chega-se à equação do contrato futuro:

$$F_{\tau,t} = \exp\left(f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + \xi_t + A(\tau-t) + B(\tau-t)\right) \tag{21}$$

onde:

$$\begin{aligned}A(\tau-t) = \Bigg(&\mu_\xi^*(\tau-t) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1-e^{-2k_\chi(\tau-t)}) + \\ &\frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2(\tau-t)\Bigg)\end{aligned}$$

$$B(\tau-t) = \varpi\int_t^\tau \left[\exp\left(\mu_v^* e^{-k_\chi(\tau-s)} + \tfrac{1}{2}\sigma_v^2 e^{-2k_\chi(\tau-s)}\right) - 1\right] ds$$

ou ainda, escrevendo em termos do logaritmo:

$$\ln(F_{\tau,t}) = f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + \xi_t + A(\tau-t) + B(\tau-t) \tag{22}$$

3.6.2
Modelo com distribuição exponencial para os saltos e MGB para ξ

Neste modelo a variável de estado de curto prazo é descrita por um processo de reversão à média do tipo de Ornstein-Uhlenbeck adicionada a saltos para cima e para baixo cujos tamanhos são descritos por distribuições exponenciais. A variável de longo prazo (preço de equilíbrio) é descrita pelo movimento geométrico Browniano. Sob a medida real, o modelo é escrito por:

$$\begin{aligned}&\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \\ &d\chi_t = -k_\chi\chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi + \nu_u(\eta_u)d\pi(\varpi_{ut}) - \nu_d(\eta_d)d\pi(\varpi_{dt}) \\ &d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi\end{aligned} \tag{23}$$

$$\rho dt = dW_\chi dW_\xi$$

onde os subíndices u e d significam saltos para cima e para baixo, respectivamente. A estrutura para os saltos é diferente daquela do modelo anterior. Considerou-se um salto para cima e um salto para baixo. Embora não seja este o objetivo, esta estrutura é utilizada para modelar *spikes* que é um fenômeno comum em séries de preços de energia elétrica.

Considera-se para o modelo descrito nas equações (23) as mesmas condições expostas na seção 3.3.

Aqui também é feita a mesma consideração simplificadora acerca do modelo sob a MME. Isto é o prêmio de risco dos saltos está sendo carregado inteiramente pela distribuição ν. Equivale a escrever $\varpi_u = \varpi_u^*$ e $\varpi_d = \varpi_d^*$. Então as equações em (23), escritas sob a MME, ficam:

$$\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t$$

$$d\chi_t = -(k_\chi \chi_t + \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dW_\chi^Q + \nu_u(\eta_u^*)d\pi(\varpi_{ut}) - \nu_d(\eta_d^*)d\pi(\varpi_{dt}) \quad (24)$$

$$d\xi_t = \mu_\xi^* dt + \sigma_\xi dW_\xi^Q$$

$$\rho dt = dW_\chi^Q dW_\xi^Q$$

A transformada DK para ψ^γ é dada pela eq. (19), escrita novamente abaixo:

$$\psi^\gamma(u,(\chi_t,\xi_t),t,\tau) = \exp\big(\alpha(u,t,\tau) + \beta_1(u,t,\tau)\chi_t + \beta_2(u,t,\tau)\xi_t\big)$$

As EDOs (5) e (6) estão resolvidas para este caso no Apêndice 2.

A transformada DK sob a MME resulta em:

$$\psi^Q(\chi_t,\xi_t,t,\tau) = \exp\Bigg[-r(\tau-t) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \mu_\xi^*(\tau-t) +$$

$$\frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1-e^{-2k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2(\tau-t) +$$

$$\sum_i \frac{\varpi_{ui}}{k_\chi}\ln\left(\frac{1-\eta_{ui}\exp(-k_\chi(\tau-t))}{1-\eta_{iu}}\right) - \sum_i \frac{\varpi_{di}}{k_\chi}\ln\left(\frac{1-\eta_{di}\exp(-k_\chi(\tau-t))}{1-\eta_{di}}\right) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + \xi_t\Bigg] \quad (25)$$

Levando o resultado de (25) em (16) e escrevendo em termos do logaritmo, resulta em:

$$\ln(F_{\tau,t}) = f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + \xi_t + A(\tau-t) + B(\tau-t) \quad (26)$$

onde:

$$A(\tau - t) = \left(\mu_\xi^* (\tau - t) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1 - e^{-k_\chi(\tau - t)}) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1 - e^{-2k_\chi(\tau - t)}) + \right.$$

$$\left. \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi}(1 - e^{-k_\chi(\tau - t)}) + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2(\tau - t) \right)$$

$$B(\tau - t) = \sum_i \frac{\varpi_{ui}}{k_\chi} \ln\left(\frac{1-\eta_{ui} \exp(-k_\chi(\tau - t))}{1-\eta_{iu}} \right) - \sum_i \frac{\varpi_{di}}{k_\chi} \ln\left(\frac{1-\eta_{di} \exp(-k_\chi(\tau - t))}{1-\eta_{di}} \right)$$

3.6.3
Modelo com distribuição normal para os saltos e reversão à média para ξ

Neste modelo a variável de estado de curto prazo é descrita por um processo de reversão à média, do tipo Ornstein-Uhlenbeck adicionado a um processo de Poisson, representativo dos saltos. O tamanho dos saltos é descrito por uma distribuição normal. A variável de longo prazo (preços de equilíbrio) ξ_t é descrita por um processo de reversão à média. Sob a medida real o modelo é escrito por:

$$\begin{aligned}
&\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \\
&d\chi_t = -k_\chi \chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi + \nu(\mu_\nu, \sigma_\nu^2) d\pi(\varpi_t) \qquad (27) \\
&d\xi_t = k_\xi(\bar{\xi} - \xi_t)dt + \sigma_\xi dW_\xi \\
&\rho dt = dW_\chi dW_\xi
\end{aligned}$$

onde k_ξ e $\bar{\xi}$ são a velocidade de reversão e a média de longo prazo do processo ξ, respectivamente. Considera-se para o modelo descrito pelas equações (27) as mesmas condições expostas na seção 3.3. Aqui também são válidas as mesmas considerações relativas ao prêmio de risco dos saltos que foram apresentadas nas seções anteriores.

Escrevendo as equações em (27) sob a MME:

$$\begin{aligned}
&\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \\
&d\chi_t = -(k_\chi \chi_t + \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi dW_\chi^Q + \nu(\mu_\nu^*, \sigma_\nu^2) d\pi(\varpi_t) \qquad (28) \\
&d\xi_t = k_\xi(\hat{\xi} - \xi_t)dt + \sigma_\xi dW_\xi^Q \\
&\rho dt = dW_\chi^Q dW_\xi^Q
\end{aligned}$$

onde $\hat{\xi} = \overline{\xi} - \frac{\lambda_\xi}{k_\xi}$

A transformada DK para ψ^γ é dada pela eq. (19) e escrita novamente a seguir:

$$\psi^\gamma(u,(\chi_t,\xi_t),t,\tau) = \exp\left(\alpha(u,t,\tau) + \beta_1(u,t,\tau)\chi_t + \beta_2(u,t,\tau)\xi_t\right)$$

As EDOs (5) e (6) são resolvidas no Apêndice 3.

A transformada DK, sob a MME, resulta em:

$$\psi^Q(\chi_t,\xi_t,t,\tau) = \exp\Big(-r(\tau-t) - \tfrac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \hat{\xi}(1-e^{-k_\xi(\tau-t)}) +$$

$$\frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1-e^{-2k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi+k_\xi}(1-e^{-(k_\chi+k_\xi)(\tau-t)}) + \frac{\sigma_\xi^2}{4k_\xi}(1-e^{-2k_\xi(\tau-t)}) +$$

$$e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + e^{-k_\xi(\tau-t)}\xi_t + B(\tau-t)\Big) \qquad (29)$$

Levando o resultado de (29) em (16), chega-se a equação do preço futuro:

$$F_{\tau,t} = \exp\left(f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + e^{-k_\xi(\tau-t)}\xi_t + A(\tau-t) + B(\tau-t)\right) \qquad (30)$$

onde:

$$A(\tau-t) = \Bigg(\hat{\xi}(1-e^{-k_\xi(\tau-t)}) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1-e^{-2k_\chi(\tau-t)}) +$$

$$\frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi+k_\xi}(1-e^{-(k_\chi+k_\xi)(\tau-t)}) + \frac{\sigma_\xi^2}{4k_\xi}(1-e^{-2k_\xi(\tau-t)})\Bigg)$$

$$B(\tau-t) = \varpi\int_t^\tau \left[\exp\left(\mu_v^* e^{-k_\chi(\tau-s)} + \tfrac{1}{2}\sigma_v^2 e^{-2k_\chi(\tau-s)}\right) - 1\right] ds$$

Ou ainda em termos do logaritmo:

$$\ln(F_{\tau,t}) = f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + e^{-k_\xi(\tau-t)}\xi_t + A(\tau-t) + B(\tau-t) \qquad (31)$$

3.7 Resumo dos modelos

Com as derivações apresentadas nas três seções anteriores é possível extrair os modelos a serem analisados nesta pesquisa. Esta seção contém um resumo de todos os modelos, de acordo com a denominação já mencionada no início deste capítulo.

3.7.1
Modelo Básico

O Modelo Básico é o modelo de Schwartz e Smith (2000). Ele é descrito na medida real pelas equações:

$$\begin{aligned} &\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \\ &d\chi_t = -k_\chi \chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi \\ &d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi \\ &\rho dt = dW_\chi dW_\xi \end{aligned} \tag{32}$$

A derivação da equação dos preços futuros é imediata já que se trata do modelo da seção 3.6.1 excluindo-se a componente dos saltos na variável de estado de curto prazo, χ_t. Portanto, a equação dos preços futuros, sob a MME, é dada por:

$$\ln(F_{\tau,t}) = f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + \xi_t + A(\tau - t) \tag{33}$$

onde:

$$A(\tau-t) = \left(\mu_\xi^*(\tau-t) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1-e^{-2k_\chi(\tau-t)}) + \right.$$
$$\left. \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2(\tau-t) \right)$$

Esta é exatamente a equação que em Schwartz e Smith (2000) foi deduzida de forma diferente, seguindo outras etapas e sem o uso do conceito da transformada.

Este modelo tem sido utilizado em várias pesquisas. Além do trabalho original dos autores acima com a commodity petróleo, Sørensen (2002) e Manoliu e Tompaidis (2000) estudaram o comportamento dos preços de commodities agrícolas e da commodity gás natural, respectivamente. Neste modelo (equação (33)) o logaritmo do preços futuros é uma função afim dos estados χ_t e ξ_t. Além disso, as equações de evolução dos estados são Gaussianas. Estas características permitem que o modelo, uma vez discretizado e escrito na forma espaço-estado, possa ter as componentes não observáveis χ_t e ξ_t estimadas com o filtro de Kalman. Ainda mais, os hiperparâmetros do modelo podem ser estimados usando a maximização da verossimilhança do erro de previsão. O logaritmo do preço futuro possui distribuição condicionalmente Gaussiana sob a MME. Esta propriedade conduz a soluções analíticas fechadas para opções de compra/venda européias.

O modelo descrito em (32) mostra que o preço à vista possui duas componentes: uma de curto prazo e outra de longo prazo. Estas duas variáveis estocásticas seguem os processos mais comumente utilizados em Finanças para descrever os movimentos de ativos. A de curto prazo representa um processo de reversão, ou seja, são choques transitórios e que revertem à média zero. A de longo prazo representa um processo do tipo passeio aleatório e representa choques permanentes. Intuitivamente, o processo de curto prazo representa os efeitos de variações de estoque e demanda de efeitos imediatos e transitórios; já o processo de longo prazo representa mudanças estruturais nos custos de produção, inovações tecnológicas etc.

Uma questão imediata que surge é se todas as commodities podem ser modeladas desta forma. Os trabalhos iniciais modelaram a commodity com um único fator estocástico, como é o caso de Brennan e Schwartz (1985) que escreveram um pioneiro artigo sobre a valoração e gerenciamento de um projeto de produção de cobre. As razões imediatas são as simplicidades dos modelos e a possibilidades de resultados analíticos. Gibson e Schwartz (1990) apresentaram evidências de que o petróleo é mais apropriadamente descrito por duas variáveis estocásticas. Schwartz (1997) mostrou que a commodity ouro não se ajustou bem ao modelo de dois fatores. Já o cobre e o petróleo têm bons ajustes. Bessembinder, Coughenour, Seguin e Smoller (1995) apresentaram um estudo em que analisaram quais commodities possuem processo de reversão nos preços. O resultado mostra que o petróleo e as commodities agrícolas são aquelas em que a reversão é mais significante. Estes fatos justificam o uso de uma componente de curto prazo que reverte à média zero em (32).

Cumpre ainda ressaltar que está demonstrado em Schwartz e Smith (2000) que o modelo proposto equivale ao de Gibson e Schwartz (1990): o retorno de conveniência, deste último modelo, está linearmente relacionado à variável de curto prazo χ_t em (32).

A outra questão que surge é se o modelo proposto em (32) representa um modelo de equilíbrio. A resposta é afirmativa, embora no artigo original não haja nenhuma menção enfática a este respeito. Routledge, Seppi e Spatt (2000) desenvolveram um modelo para os preços de commodities baseado em condições de equilíbrio microeconômicas. Este trabalho foi publicado pouco antes do trabalho de Schwartz e Smith. Os autores referenciam-se a este último com um artigo na eminência de ser publicado. No modelo de equilíbrio de Routledge e outros, quando são utilizadas duas variáveis estocásticas, surgem as componentes transitória e permanente, e o equilíbrio reduz-se ao modelo de Schwartz e Smith (2000).

Ainda com relação ao modelo básico descrito nas equações (32) e (33) a estrutura a termo da volatilidade pode ser obtida usando o lema de Itô. Veja o Apêndice 4 para o detalhamento da equação abaixo:

$$\tfrac{1}{dt}\mathrm{VAR}^{Q}\left(\tfrac{dF_{\tau,t}}{F_{\tau,t}}\right)=\sigma_{\chi}^{2}\,e^{-2k_{\chi}(\tau-t)}+\sigma_{\xi}^{2}+2\rho\sigma_{\chi}\sigma_{\xi}e^{-k_{\chi}(\tau-t)} \qquad (34)$$

onde Q é a medida martingal equivalente.

É claro da eq. (34) que quando a maturidade do contrato tende para valores muito grandes, a volatilidade dos preços futuros tende para σ_{ξ}^{2}, ou seja a volatilidade do preço de equilíbrio (ou de longo prazo).

3.7.2 Modelo Primeira Extensão

A primeira extensão do Modelo Básico considera que o movimento de evolução da variável preço de equilíbrio é de reversão à média. Na medida real, as equações abaixo descrevem o modelo:

$$\begin{aligned}
&\ln(S_t)=f(t)+\chi_t+\xi_t\\
&d\chi_t=-k_{\chi}\chi_t dt+\sigma_{\chi}dW_{\chi}\\
&d\xi_t=k_{\xi}(\bar{\xi}-\xi_t)dt+\sigma_{\xi}dW_{\xi}\\
&\rho dt=dW_{\chi}dW_{\xi}
\end{aligned} \qquad (35)$$

A derivação dos preços futuros é imediata, pois se trata do modelo da seção 3.6.3 excluindo a componente dos saltos. A equação dos preços futuros, sob a MME, é dada por:

$$\ln(F_{\tau,t})=f(\tau)+e^{-k_{\chi}(\tau-t)}\chi_t+e^{-k_{\xi}(\tau-t)}\xi_t+A(\tau-t) \qquad (36)$$

onde:

$$A(\tau - t) = \left(\hat{\xi}(1 - e^{-k_\xi(\tau - t)}) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1 - e^{-k_\chi(\tau - t)}) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1 - e^{-2k_\chi(\tau - t)}) + \right.$$

$$\left. \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi + k_\xi}(1 - e^{-(k_\chi + k_\xi)(\tau - t)}) + \frac{\sigma_\xi^2}{4k_\xi}(1 - e^{-2k_\xi(\tau - t)}) \right)$$

O logaritmo do preço futuro é uma função afim dos estados, e ainda condicionalmente Gaussiana. As variáveis de estado também são condicionalmente Gaussianas. Da mesma forma que o modelo anterior, estas propriedades permitem a utilização do filtro de Kalman na estimação dos estados não observáveis. A estimação dos parâmetros é feita pela maximização da verossimilhança do erro de previsão.

A estrutura a termo da volatilidade para este modelo está apresentada abaixo e o seu detalhamento encontra-se no Apêndice 5:

$$\tfrac{1}{dt} VAR^Q\left(\tfrac{dF_{\tau,t}}{F_{\tau,t}}\right) = \sigma_\chi^2 e^{-2k_\chi(\tau - t)} + \sigma_\xi^2 e^{-2k_\xi(\tau - t)} + 2\rho\sigma_\chi\sigma_\xi e^{-(k_\chi + k_\xi)(\tau - t)} \tag{37}$$

onde Q é a medida martingal equivalente.

3.7.3
Modelo Segunda Extensão

A segunda extensão do Modelo Básico é aquela que considera saltos no processo estocástico de curto prazo.

A representação de processos estocásticos de séries financeiras usando difusão com saltos é bastante disseminado na modelagem da taxa de juros[4]. Dentre as commodities, a energia elétrica é aquela que apresenta maior apelo pelo uso dos saltos no seu processo de evolução[5]. Para a energia elétrica, a distribuição mais apropriada para modelar o tamanho dos saltos é a distribuição exponencial. Ela facilmente descreve os saltos do tipo *spike* característicos desta commodity (veja Deng (1998)).

Um dos fatos estilizados das séries de retornos financeiras é o excesso de curtose (caudas pesadas). A modelagem desta propriedade tem sido feita através

[4] Dentre vários trabalhos citam-se Duffie e Kan (1996), Das (1998), Babbs e Nowman (1999), Duffie, Pan e Singleton (2000), e de Jong (2000).

[5] Veja, por exemplo, Deng (1998), Escribano, Peña e Villaplana (2002) e Villaplana (2004).

de: (i) volatilidade variando no tempo (modelos da família ARCH/GARCH), (ii) volatilidade estocástica e (iii) processos de difusão com saltos. Por esta razão decorrem as extensões propostas em (38)-(39) e em (40)-(41).

A distribuição do tamanho dos saltos foi considerada de dois tipos: distribuição normal e exponencial. Estes dois tipos de modelos foram derivados nas seções 3.6.1 e 3.6.2, respectivamente. As equações do modelo com distribuição normal estão descritas abaixo, sob a medida real de probabilidade:

$$
\begin{aligned}
&\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \\
&d\chi_t = -k_\chi \chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi + \nu(\mu_\nu, \sigma_\nu^2) d\pi(\varpi_t) \qquad (38) \\
&d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi \\
&\rho dt = dW_\chi dW_\xi
\end{aligned}
$$

A equação dos preços futuros com distribuição normal, sob a MME, foi deduzida na seção 3.6.1:

$$\ln(F_{\tau,t}) = f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + \xi_t + A(\tau - t) + B(\tau - t) \qquad (39)$$

onde:

$$A(\tau-t) = \left(\mu_\xi^*(\tau-t) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1-e^{-2k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2(\tau-t) \right)$$

$$B(\tau - t) = \varpi \int_t^\tau \left[\exp(\mu_\nu^* e^{-k_\chi(\tau-z)} + \tfrac{1}{2}\sigma_\nu^2 e^{-2k_\chi(\tau-z)}) - 1 \right] dz$$

O logaritmo do preço futuro é uma função afim dos estados. O processo estocástico de evolução da variável χ_t é não Gaussiano pois existe a parcela dos saltos que é adicionada à parcela Gaussiana.

As equações do modelo com distribuição exponencial estão descritas abaixo, sob a medida real de probabilidade:

$$
\begin{aligned}
&\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t \\
&d\chi_t = -k_\chi \chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi + \nu_u(\eta_u) d\pi(\varpi_{ut}) - \nu_d(\eta_d) d\pi(\varpi_{dt}) \qquad (40) \\
&d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi \\
&\rho dt = dW_\chi dW_\xi
\end{aligned}
$$

A equação dos preços futuros, sob a MME, é dada por:

$$\ln(F_{\tau,t}) = f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + \xi_t + A(\tau - t) + B(\tau - t) \tag{41}$$

onde:

$$A(\tau-t) = \left(\mu_\xi^*(\tau-t) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1-e^{-2k_\chi(\tau-t)}) + \right.$$
$$\left. \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi}(1-e^{-k_\chi(\tau-t)}) + \frac{1}{2}\sigma_\xi^2(\tau-t)\right)$$

$$B(\tau-t) = \sum_i \frac{\varpi_{ui}}{k_\chi}\ln\left(\frac{1-\eta_{ui}\exp(-k_\chi(\tau-t))}{1-\eta_{iu}}\right) - \sum_i \frac{\varpi_{di}}{k_\chi}\ln\left(\frac{1-\eta_{di}\exp(-k_\chi(\tau-t))}{1-\eta_{di}}\right)$$

Se por um lado a inclusão dos saltos é uma proposta de melhor descrever os processos estocásticos, a sua presença causa enormes dificuldades no processo de estimação. Não é por outra razão que, em muitos casos, a literatura simplifica a análise, abandonando os saltos em detrimento de maior simplicidade para a estimação.

A inclusão dos saltos impossibilita o uso do filtro de Kalman na sua forma clássica para estimação dos estados. Esta pesquisa propõe o filtro de partículas como metodologia alternativa.

3.7.4
Modelo Terceira Extensão

A terceira extensão do Modelo Básico considera saltos (com distribuição normal) no processo de difusão de curto prazo. O processo para o preço de equilíbrio é de reversão à média. As equações do modelo sob a medida real de probabilidade estão abaixo:

$$\ln(S_t) = f(t) + \chi_t + \xi_t$$

$$d\chi_t = -k_\chi\chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi + \nu(\mu_\nu, \sigma_\nu^2)d\pi(\varpi_t) \tag{42}$$

$$d\xi_t = k_\xi(\overline{\xi} - \xi_t)dt + \sigma_\xi dW_\xi$$

$$\rho dt = dW_\chi dW_\xi$$

A derivação deste modelo foi apresentada na seção 3.6.3 e a equação do preço futuro, sob a MME, está a seguir:

$$\ln(F_{\tau,t}) = f(\tau) + e^{-k_\chi(\tau-t)}\chi_t + e^{-k_\xi(\tau-t)}\xi_t + A(\tau - t) + B(\tau - t) \tag{43}$$

onde:

$$A(\tau - t) = \left(\hat{\xi}(1 - e^{-k_\xi(\tau - t)}) - \frac{\lambda_\chi}{k_\chi}(1 - e^{-k_\chi(\tau - t)}) + \frac{\sigma_\chi^2}{4k_\chi}(1 - e^{-2k_\chi(\tau - t)}) + \right.$$

$$\left. \frac{\rho\sigma_\chi\sigma_\xi}{k_\chi + k_\xi}(1 - e^{-(k_\chi + k_\xi)(\tau - t)}) + \frac{\sigma_\xi^2}{4k_\xi}(1 - e^{-2k_\xi(\tau - t)}) \right)$$

$$B(\tau - t) = \varpi \int_t^\tau \left[\exp\left(\mu_\nu^* e^{-k_\chi(\tau - z)} + \tfrac{1}{2}\sigma_\nu^2 e^{-2k_\chi(\tau - z)} \right) - 1 \right] dz$$

Neste modelo o logaritmo do preço futuro é uma função afim dos estados. A variável de estado de curto prazo também é não Gaussiana. Da mesma forma que o caso anterior, não é possível usar o filtro de Kalman. A proposição é usar o filtro de partículas que dispensa os requisitos de linearidade e Gaussianidade.

Todos os modelos aqui derivados são gerais e, portanto aplicáveis a qualquer commodity. Eles serão utilizados no capítulo 7 tendo como dados de observação os preços da commodity petróleo negociada em vários contratos futuros. Serão estimados as variáveis de estado e simultaneamente os hiperparâmetros de cada modelo. Os hiperparâmetros serão comparados com dados usuais da literatura, observando a coerência entre os resultados. Ainda mais, serão mostradas as estruturas a termo dos preços e da volatilidade.