

# 1 Introdução

Este primeiro capítulo está dividido em três seções. A primeira seção mostra o contexto em que a pesquisa se insere dentro da Teoria de Finanças, apresenta a evolução das idéias e dos problemas relacionados ao tema e expõe a motivação para o trabalho. A segunda seção apresenta a forma como a pesquisa está organizada. A terceira seção apresenta os conceitos básicos do mercado futuro que é a fonte primária de informações para a abordagem proposta.

## 1.1. O Contexto da Pesquisa

Esta tese analisa os processos estocásticos dos preços das commodities que são adotados na literatura, tanto com enfoque nos modelos quanto nas metodologias utilizadas para estimação. Este tema tem implicações diretas para duas grandes áreas em Finanças. A primeira área diretamente relacionada aos processos estocásticos das commodities é a teoria das Opções Reais (ou mais genericamente a área de orçamentação de capital) que, devido a sua abrangência e rápida evolução, pode ser classificada como uma nova disciplina em Finanças. A segunda, também diretamente relacionada aos processos estocásticos, é a área de apreçamento de derivativos, como por exemplo, avaliação de proteção (*hedge*) para os agentes da indústria e do mercado financeiro. Estas duas áreas em Finanças constituem dois dos seus mais expressivos ramos. Basta observar o enorme número de publicações tanto em livros como em periódicos.

Um derivativo é um ativo cujo preço é função de outro ativo, denominado ativo objeto ou subjacente. O rápido desenvolvimento de métodos de apreçamento de derivativos e a sua aplicabilidade cotidiana nas empresas e no mercado financeiro propiciaram o surgimento e o crescimento vertiginoso de bolsas de valores e mercadorias onde são negociados títulos à vista e derivativos por todo o mundo. Por outro lado, a existência de vigorosos mercados com grandes volumes negociados impulsionou a pesquisa na busca de novos produtos financeiros.

Nestes mercados os investidores, as empresas e as instituições financeiras buscam, além de ganhos de capital, proteção para as suas decisões de investimento evitando perdas econômicas e garantindo aos investidores e credores a maximização de suas riquezas. As cifras negociadas nos mercados de derivativos no mundo são enormes. Inúmeras operações e diversos mecanismos estão hoje à disposição de todos os investidores.

Este imenso desenvolvimento teve início a partir de artigos publicados por Black e Scholes (1973) e Merton (1973). Estes trabalhos apreçam uma opção de compra do tipo europeia (derivativo) através de uma fórmula que é a solução de uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Uma solução analítica fechada trouxe elegância à formulação proposta e favoreceu a proliferação de trabalhos adicionais extensivos e complementares. Estes pesquisadores propuseram um processo estocástico para a evolução dos preços dos ativos subjacentes (ações de empresas negociadas em bolsa). A origem desta suposição remonta ao início do século passado. Em 1900, Bachelier em sua *Théorie de la Spéculation* proveu as bases dos processos de difusão Markovianos. Suas idéias floresceram com Kolmogorov em 1933 e foram usadas por Black, Merton e Scholes. O processo estocástico por eles adotado é conhecido como movimento geométrico Browniano e constitui a suposição inicial para o apreçamento de uma opção de compra europeia. A grande novidade apresentada por Black e Scholes, e Merton foi a idéia de criar um portfólio e eliminar o risco do mesmo, fazendo com que a sua remuneração fosse idêntica à taxa livre de risco. Desta forma, criou-se a condição de não arbitragem e esta condição é conhecida como o Teorema Fundamental de Finanças.

Posteriormente, Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska (1981) trouxeram uma abordagem nova para todas estas idéias. Apresentaram o conceito da Medida Martingal Equivalente como metodologia alternativa no apreçamento de derivativos. As idéias iniciais básicas são as mesmas daquela do modelo de Black e Scholes (1973) e Merton (1973), ou seja, o mesmo processo estocástico para descrever o ativo subjacente. Enquanto Black e Scholes (1973) e Merton (1973) chegaram ao resultado através da solução de uma equação diferencial, Harrison e Kreps usaram uma medida de probabilidade alternativa e calcularam o valor esperado da opção segundo esta nova medida. Esta medida de probabilidade foi denominada Medida Martingal Equivalente (MME) ou medida neutra ao risco.

As duas metodologias são equivalentes e a existência da MME significa que não há possibilidade de arbitragem. Por outro lado, se não há arbitragem existe uma MME. Em essência este é o Teorema Fundamental em Finanças.

O preço do derivativo calculado por uma metodologia ou outra depende fundamentalmente do processo estocástico do ativo subjacente. Por esta razão o conhecimento preciso deste processo é tão relevante e muitos artigos têm sido dedicados à sua estimação acurada. Quando o ativo subjacente é uma commodity surgem complicações adicionais. Muitas commodities não são negociadas no mercado à vista. Portanto, o preço à vista,  $S$ , não é uma variável observável. Em geral, as commodities são amplamente negociadas em mercados futuros e o preço futuro,  $F$ , é uma variável observável. Logo, o preço à vista  $S$  deve ser estimado a partir do preço futuro  $F$ . Não é por outra razão que normalmente o contrato futuro mais próximo é considerado uma “proxy” para o preço à vista. O exemplo mais trivial é o caso do petróleo. Dada a sua relevância no mundo, o petróleo é a commodity de maior negociação nas bolsas de futuros. Os preços que normalmente são veiculados pela imprensa diariamente referem-se exatamente aos preços do primeiro contrato futuro, aquele que tem vencimento no período de um mês à frente. Em geral são divulgados os preços do petróleo do tipo Brent negociado em Londres e do tipo WTI (*West Texas Intermediate*) negociado em Nova Iorque. Estes preços futuros são as referências para o preço à vista do petróleo.

Existe uma relação muito conhecida entre os preços no mercado à vista ( $S$ ) e no mercado futuro ( $F$ ):  $F = S \exp((r - \delta)(\tau - t))$ . A variável que faz a ligação entre  $F$  e  $S$  é  $\delta$ , denominada retorno de conveniência. As demais variáveis são a taxa livre de risco  $r$ , a data do vencimento do contrato  $\tau$  e a data atual  $t$ . O retorno de conveniência é o prêmio que faz jus o proprietário do ativo físico, ao contrário daquele que detém apenas um contrato futuro sobre a commodity.

Quando o preço à vista é uma variável estocástica e o retorno de conveniência é uma constante, diz-se que o modelo é de um único fator pois só existe uma fonte de incerteza. Os modelos de um fator foram os primeiros a serem usados na descrição dos preços das commodities. Brennan e Schwartz (1985) usaram o modelo de um fator para avaliar um projeto de investimento e o gerenciamento de uma mina de cobre. Quando o modelo é de um fator é

necessário um simples ajuste na tendência (*drift*) e os modelos de apreçamento tornam-se meras extensões do modelo de Black, Merton e Scholes. Entretanto se  $\delta$  é considerado constante, o modelo não reproduz alguns fatos estilizados dos mercados futuros. Evidências empíricas mostram que a volatilidade dos contratos futuros é decrescente com a maturidade dos contratos. Este fato é conhecido em Finanças como a “hipótese de Samuelson” (veja em Samuelson (1965)). No modelo de um fator a volatilidade dos contratos futuros torna-se idêntica à volatilidade do mercado à vista. Além disso, há evidências empíricas de que o retorno de conveniência varia inversamente com o nível dos estoques da commodity. Portanto, considerar o retorno de conveniência constante é apenas uma aproximação.

Quando o retorno de conveniência é estocástico tem-se o modelo de dois fatores (duas fontes de incertezas). Gibson e Schwartz (1990) apresentaram um modelo de dois fatores para os preços do petróleo. As duas variáveis estocásticas ( $S$  e  $\delta$ ) do modelo não são observáveis e necessitam ser estimadas. O preço no mercado futuro ( $F$ ) é observável e permite que seja feita a estimação das componentes não observáveis.

A importância de definir as componentes não observáveis e os parâmetros do modelo está relacionada à necessidade de seu uso na valoração de ativos reais (Opções Reais), planejamento de curto e longo prazos, decisão de proteção (*hedge*) e decisões de investimento de empresas e/ou instituições financeiras.

Schwartz e Smith (2000) apresentaram um modelo de dois fatores em que o primeiro fator reflete as variações de curto prazo no preço e o segundo fator é o preço de equilíbrio (variável de longo prazo). Este modelo é bastante flexível e tem sido muito utilizado, como se pode constatar analisando os trabalhos relevantes sobre o tema. Pode ser utilizado tanto para commodities estocáveis como para as não estocáveis, como é o caso da energia elétrica.

Os trabalhos nesta linha de pesquisa resultam, via de regra, em um modelo para os preços futuros que é uma função linear das variáveis de estado. Por outro lado, a evolução (processos estocásticos) das variáveis de estado é geralmente Gaussiana. Estas duas propriedades de linearidade e Gaussianidade são particularmente interessantes. Nesta situação, as componentes não observáveis (estados não observáveis) podem ser estimadas pelo filtro de Kalman na sua forma clássica. Assim procederam os pesquisadores que trabalharam com o

modelo de Schwartz e Smith (2000) e com extensões deste modelo que preservam tais propriedades.

O filtro de Kalman é um procedimento recursivo e eficiente de estimação, uma vez que o erro quadrático é minimizado. Assim, a partir da observação do preço futuro, as variáveis de estado (não observáveis) são estimadas eficientemente. Além disso, os parâmetros do modelo podem ser estimados a partir da maximização da verossimilhança obtida da decomposição do erro de previsão.

Esta tese propõe algumas extensões para o modelo de Schwartz e Smith (2000) apresentando a derivação de todos os modelos propostos. As extensões propostas baseiam-se em alterações do processo estocástico de evolução do preço da commodity. Por exemplo, na variável que representa o curto prazo são analisados os casos com e sem saltos. Estes saltos possuem tamanhos oriundos de distribuições normais ou exponenciais. Na variável de longo prazo é também considerado o caso de reversão à média. Nem sempre tais extensões recaem nas condições ideais para o uso do filtro de Kalman. Um exemplo típico são os processos de difusão com saltos usados juntamente com a variável de curto prazo.

Primeiramente são derivados todos os modelos propostos de forma genérica, isto é, independentemente do tipo da commodity. Para a derivação supõe-se a condição de não arbitragem e a conseqüente existência da MME (medida neutra ao risco). Usando o conceito da transformada de Duffie e Kan (1996) para processos de difusão afins com saltos, são obtidas expressões para os preços futuros. Os processos de difusão afins com saltos são muito utilizados em Finanças, pois são abrangentes cobrindo uma grande variedade de processos estocásticos. O modelo de Schwartz e Smith pode ser obtido da derivação realizada, como um caso particular. Os modelos resultantes são lineares, porém nem todos Gaussianos. Em alguns deles o processo de saltos impõe a perda da condição de Gaussianidade. Esta perda tem um ônus pesado para a estimação das variáveis de estado, pois o filtro de Kalman fica inviabilizado.

Esta tese propõe o filtro de partículas como metodologia de estimação. Um dos objetivos desta pesquisa é investigar a viabilidade desta metodologia para a estimação dos estados não observáveis e dos parâmetros do modelo, a partir de observações de preços nos mercados futuros.

O filtro de partículas é um procedimento recursivo para integração dentro da classe dos métodos seqüenciais de Monte-Carlo. Os métodos seqüenciais de Monte-Carlo são particularmente interessantes para o cálculo de distribuições *a posteriori*, isto é, das distribuições das variáveis de estado dada a ocorrência da observação. Os métodos seqüenciais de Monte-Carlo dispensam as condições de Gaussianidade e linearidade do modelo, e ainda possuem adequadas condições de convergência. Eles abrangem os métodos que apareceram na literatura sob as denominações de filtros *bootstrap*, filtro de partículas, filtro de Monte-Carlo, dentre outros. O filtro de partículas baseia-se na distribuição por importância a qual é definida como sendo a distribuição *a priori*. Infelizmente o processo degenera-se quando o tempo cresce e não se consegue a distribuição *a posteriori*. Uma etapa adicional é acrescida para viabilizar o procedimento. Trata-se da amostragem com reposição repetidas vezes. As partículas amostradas, que são pouco representativas dentro da distribuição, são retiradas do processo e as partículas “sobreviventes” constituem a distribuição, que é usada como base para o prosseguimento do método em cada instante de tempo.

Os modelos derivados são aplicáveis a quaisquer commodities negociadas em mercados futuros. Não obstante tal fato, a análise dos modelos é realizada com dados empíricos do mercado futuro de petróleo. São estimadas as componentes não observáveis e os parâmetros do modelo. Ambas as metodologias (filtro de Kalman e filtro de partículas) foram usadas para os modelos Gaussianos. Para os modelos não Gaussianos usou-se o filtro de partículas. Deve-se ressaltar que algumas conclusões obtidas a partir dos dados empíricos são específicas da série de preços do petróleo.

Em Finanças os modelos nem sempre apresentam as condições de linearidade e Gaussianidade. As soluções que a literatura emprega para tais problemas, ou são aproximações ou demandam tempos computacionais proibitivos. O emprego de uma metodologia alternativa que produza resultados confiáveis tem um forte apelo pois abre espaço para a solução de uma grande variedade de problemas e cria uma nova linha de pesquisa na econometria de séries financeiras.

## 1.2. Organização da pesquisa

Além da introdução apresentada na seção anterior, este capítulo apresenta na próxima seção os conceitos fundamentais dos mercados futuros de onde são extraídos os dados empíricos desta pesquisa.

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica que foi separada em duas seções. A primeira apresenta os trabalhos mais diretamente relacionados com a pesquisa. A segunda apresenta trabalhos relacionados indiretamente com a pesquisa.

O capítulo 3 foi dedicado às derivações dos modelos. É essencialmente um capítulo de desenvolvimento teórico dos modelos dentro do contexto de processos de difusão afins com saltos. Nas primeiras seções são apresentadas as transformadas de Duffie e Kan (1996) e Duffie, Pan e Singleton (2000). Estas transformadas são aplicadas aos modelos especificados resultando em equações para os preços futuros. Os apêndices complementam as deduções apresentadas neste capítulo.

O capítulo 4 apresenta os fundamentos do filtro de Kalman sem, no entanto, entrar no mérito de sua derivação.

O capítulo 5 apresenta os conceitos fundamentais do filtro de partículas.

O capítulo 6 apresenta a análise do processo de filtragem pelas duas metodologias. Para tal, foi usado o Modelo Básico (Schwartz e Smith (2000)). Supondo conhecidos os parâmetros do modelo procedeu-se a filtragem. Este procedimento foi realizado com dados sintéticos (ou artificiais) e com dados reais de mercado.

O capítulo 7 apresenta os resultados empíricos de todos os modelos considerando a estimação dos parâmetros. É realizada uma comparação dos resultados obtidos com aqueles de trabalhos existentes na literatura.

O capítulo 8 apresenta quais as conseqüências que a formulação dos modelos traz para as áreas de Opções Reais e para a área de apreçamentos de derivativos.

O capítulo 9 apresenta as conclusões e possíveis pesquisas futuras.

### 1.3. Mercados futuros – conceitos básicos

Os mercados futuros são muito antigos. Há notícias de mercados futuros bem organizados na Europa e Japão nos séculos 17 e 18. Alguns atribuem a origem dos atuais mercados futuros ao mercado futuro de arroz existente em Osaka (Japão) nos anos de 1730.

Uma das principais funções dos mercados futuros é proporcionar aos agentes uma melhor alocação de risco, de acordo com suas capacidades individuais. As próximas seções explicarão com detalhes esta assertiva.

#### 1.3.1. Conceitos básicos

Os contratos futuros, sob uma perspectiva ampla, propiciam a troca entre os agentes de ativos, sejam eles commodities ou ativos/instrumentos financeiros. São em verdade contratos de seguros. Por exemplo, um produtor de soja receoso de uma queda de preços daqui a três meses, quando fizer sua colheita; pode vender sua produção hoje estabelecendo o preço pelo qual entregará seu produto no futuro. O termo contrato futuro pode ser mais especificamente separado em dois tipos de contratos: (i) contrato *forward* e (ii) contrato futuro.

O contrato *forward* é um acordo de entrega de uma quantidade específica de um produto (commodity ou ativo/instrumento financeiro) em uma data definida no futuro, por um preço estabelecido (preço *forward*), que será pago quando da entrega. As especificações do produto, o ponto de entrega, a quantidade, o preço e a data são descritos no contrato. O contrato envolve duas partes, o comprador que receberá o produto e pagará por ele e o vendedor que entregará o produto. Os contratos *forwards* são normalmente celebrados diretamente entre produtores e consumidores. O contrato *forward* envolve uma única saída de caixa contra o recebimento do ativo na data do vencimento.

O contrato futuro é, da mesma forma, um contrato entre duas partes para a entrega de um produto especificado, em uma data definida, a um preço estabelecido (preço futuro), a ser pago quando da entrega. Os contratos futuros, em geral, são negociados em bolsas de valores tais como a BM&F (Bolsa de Mercadorias e Futuros) ou o NYMEX (*New York Mercantile Exchange*). Os

contratos são padronizados com relação às especificações acima. Embora na grande parte dos negócios não haja liquidação física, o contrato futuro estabelece um ponto de entrega do ativo. Em geral, os contratos futuros têm maior liquidez que os contratos *forwards*. Mas a principal diferença entre os dois tipos de contratos é que o contrato futuro é marcado a mercado. Isto significa que a cada dia o contrato é liquidado (parcialmente) com base na variação do preço entre este dia e o dia anterior. Considere, um investidor que compra hoje dez contratos futuros de petróleo WTI com vencimento em julho ao preço de US\$ 50,00/bbl. Cada contrato envolve um montante de mil barris. O investidor não faz nenhum desembolso à vista. Nos mercados futuros não há troca de fluxos de caixa entre comprador e vendedor no momento da entrada no mercado. No fechamento deste mesmo dia o preço do contrato futuro era de US\$ 48,50/bbl. No dia seguinte, o investidor deverá pagar  $(\$50,00 - 48,50) \times 10 \times 1000 = \$15.000,00$ . Ainda no mesmo dia o preço do contrato para julho fechou em US\$ 49,00/bbl. O investidor receberá  $(\$49,00 - 48,50) \times 10 \times 1000 = \$5.000,00$ ; no dia seguinte. E se ainda neste dia o investidor vender (ou encerrar) sua posição nos dez contratos ao preço de US\$ 50,50/bbl, irá receber  $(\$50,50 - \$49,00) \times 10 \times 1000 = \$15.000,00$ ; no dia posterior. Ao longo dos três dias pagou US\$ 15.000,00 e recebeu US\$ 20.000,00; resultando em um ganho de US\$ 5.000,00. Este ganho equivale à variação do preço de compra e de venda multiplicado pela quantidade de barris negociados. Este investidor ganhou, porém o outro investidor, que tomou exatamente a posição contrária, teve uma perda de igual valor. A posição comprada recebe fluxos de caixa positivos se as variações de preços são positivas (mercado subindo). A posição vendida, neste caso, tem fluxos de caixa negativos. Quando as variações de preço são negativas (mercado caindo), a posição comprada tem fluxo de caixa negativo e a posição vendida tem fluxo de caixa positivo.

Além da marcação a mercado, as bolsas requerem de compradores e vendedores depósitos de margens, o que praticamente garante aos contratos um grau máximo em termos de nível de risco de crédito. Esta é uma das razões porque os contratos futuros apresentam maior liquidez que os contratos *forwards*.

Como os contratos futuros são marcados a mercado, os preços futuros serão maiores que os preços *forward* se a taxa livre de risco é estocástica e

positivamente correlacionada com o preço à vista. Se for negativamente correlacionada, os preços futuros serão menores que o preço *forward*. Quando a taxa livre de risco é constante, os preços *forward* e futuro são iguais. Esta demonstração pode ser vista em vários textos, como por exemplo, Hull (2000) e Duffie (1989).

Em geral, para os contratos *forward* e futuros, não ocorre a entrega física do produto. Na grande maioria dos casos a posição do investidor é encerrada antes do vencimento ou transferida para o vencimento seguinte. Isto é explicado pelo fato de que a maior parte dos agentes do mercado atuam com a finalidade de proteção (*hedge*) ou especulação. Por exemplo, considere que um consumidor de petróleo esteja receoso de que ocorrerá um aumento do preço desta commodity entre hoje e o mês de setembro. Então ele entra no mercado futuro na posição comprado. Se realmente suas estimativas se confirmarem, ele estará comprando petróleo, para o uso corrente, por um preço mais elevado. Por outro lado, se beneficiará dos fluxos de caixa positivos a que faz jus diante de sua posição no mercado futuro. Se o preço cair, pagará menos pelo produto, mas arcará com os pagamentos devido a posição de comprado. Quando se aproximar setembro o consumidor poderá vender a sua posição e adquirir outra para dezembro. Ele “rolou” a posição de setembro e pode fazê-lo novamente em dezembro. Assim, ele nunca tomará posse fisicamente do produto.

Seja agora o caso de um produtor. Ele se protegerá de eventuais quedas de preço vendendo a sua produção no mercado futuro. O preço está garantido, mas em contrapartida se houver aumento de preços não poderá beneficiar-se.

Os mercados futuros encerram duas classes diferentes de ativos que são negociados: (i) o mercado futuro de commodities e (ii) o mercado futuro financeiro. Os mercados de commodities negociam grãos (arroz, trigo, milho e soja), petróleo e derivados, boi gordo, energia elétrica, metais, dentre outros. Os mercados futuros financeiros negociam taxa de juros, moedas e índices.

### 1.3.2.

#### **Preços futuros – economia sem incerteza**

Seja  $F_{\tau,t}$  o preço futuro na data  $t$  de um ativo para entrega em  $\tau$ . Seja  $B_{\tau,t}$  o valor que será pago a um investidor que aplicar \$1 à taxa livre de risco  $r$  ao ano.

Se considerado capitalização contínua, pode-se escrever  $B_{\tau,t} = e^{r(\tau-t)}$ . O ativo a ser entregue no futuro, tem preço à vista  $S_t$ . Este preço em  $\tau$  deverá ser  $S_t B_{\tau,t} = S_t e^{r(\tau-t)}$ . Agora considere por hipótese que  $F_{\tau,t} > S_t B_{\tau,t}$ . Se isto ocorrer poderá haver arbitragem? Suponha que um investidor tome posição vendida no mercado futuro em  $t$  e mantenha até  $\tau$ . Para simplificar, considere que a liquidação da posição ocorrerá na data  $\tau$  (e não diariamente). Na data  $t$  o investidor comprará o ativo à vista ao preço  $S_t$  com recursos que tomou emprestado à taxa de juros  $r$  (ou  $B_{\tau,t}$ ) ao ano. Em  $\tau$  terá que pagar pelo seu empréstimo o montante de  $S_t B_{\tau,t}$ . Nesta mesma data entregará o ativo que comprou (que foi estocado sem custo) e receberá  $F_{\tau,t}$ . Terá um lucro que será  $F_{\tau,t} - S_t B_{\tau,t}$  sem incorrer em qualquer risco. Esta é uma operação de arbitragem. Se o pressuposto básico é de que neste mercado não há arbitragem, então a hipótese inicial não vale, logo  $F_{\tau,t} \leq S_t B_{\tau,t}$ . Se o raciocínio for feito de modo inverso pode-se provar que  $F_{\tau,t} \geq S_t B_{\tau,t}$ . Portanto, destas duas últimas desigualdades conclui-se que  $F_{\tau,t} = S_t B_{\tau,t} = S_t e^{r(\tau-t)}$ . Este equação relaciona o preço futuro com o preço à vista e foi definida sob a hipótese de que no mercado não há possibilidade de arbitragem. Intuitivamente esta equação estabelece que o preço pelo qual o ativo deve ser entregue em  $\tau$  deve ser igual ao custo de oportunidade do ativo que o proprietário carrega, ou seja, o valor que estaria sendo remunerado se ao invés de adquirir o ativo tivesse aplicado seus recursos à taxa  $r$ .

Agora considere que o ativo acima pague dividendos. Se este dividendo é pago continuamente a uma taxa  $q$  ao ano, o possuidor deste ativo terá o seu custo de oportunidade reduzido desta taxa. Agora o preço futuro deverá ser  $F_{\tau,t} = S_t e^{(r-q)(\tau-t)}$ .

Se o ativo em questão for moeda estrangeira, então  $S_t$  é valor da taxa de câmbio em  $t$  (medida na moeda local). O proprietário da moeda estrangeira receberá uma remuneração igual à taxa livre de risco do país a que pertence a moeda. Seja  $r_f$  esta taxa ao ano. Então o possuidor da moeda estrangeira terá o

seu custo de oportunidade reduzido pela taxa  $r_f$ . Para este caso a nova fórmula do preço futuro será  $F_{\tau,t} = S_t e^{(r-r_f)(\tau-t)}$ .

### 1.3.3. Futuros de commodities

Se o ativo da seção anterior for uma commodity existem dois casos distintos a considerar. O primeiro é aquele em que a commodity é dita de consumo, como os casos do petróleo, energia, etc. O segundo caso é aquele em que as commodities são metais preciosos, com pouca aplicação industrial, como o ouro, prata e platina. Neste caso as commodities são ditas de investimento. As commodities de consumo podem ainda ser subdivididas em dois grupos: commodities estocáveis e não estocáveis. No caso de commodities estocáveis considere o caso em que o custo da estocagem é uma taxa proporcional ao preço da commodity. Seja  $u$  o custo da estocagem. Neste caso o proprietário, além do custo de oportunidade, terá o custo de estocagem adicional. A fórmula dos preços futuros será  $F_{\tau,t} = S_t e^{(r+u)(\tau-t)}$ . As commodities de consumo ainda têm outra peculiaridade. O proprietário do ativo físico ainda desfruta de benefícios que o possuidor do contrato futuro não tem. Tais benefícios incluem as conveniências de ter em estoque um produto que pode faltar temporariamente. Este benefício pode ser a venda do produto que se tornou escasso naquele período, ou ainda o seu uso no processo produtivo que não sofrerá interrupção. Este fluxo de benefícios tem o nome de retorno de conveniência e geralmente é medido por uma taxa. Agora o proprietário dispõe de um benefício que entrará na última equação com um sinal negativo  $F_{\tau,t} = S_t e^{(r+u-\delta)(\tau-t)}$  onde  $\delta$  é o retorno de conveniência ao ano. O retorno de conveniência é equivalente a um fluxo de dividendos caso o ativo fosse uma ação. O termo  $r + u$  é denominado de custo de carregamento.

As ações e títulos (*bonds*) são instrumentos utilizados pelas firmas para levantar fundos para capitalizarem-se financiando as suas atividades.

O futuro de commodities é um ativo que difere substancialmente destes dois instrumentos nos seguintes aspectos: (i) o futuro de commodities são ativos derivativos e não são títulos com direitos contra as corporações (*claims*); (ii) são títulos “contra” (*claims*) os projetos; (iii) as commodities em geral possuem

sazonalidade em termos de preço e volatilidade. Além disso, o propósito do ativo futuro de commodities não é de capitalizar a empresa. A sua função é permitir que uma corporação obtenha um seguro em relação aos seus fluxos de caixa. Já os investidores em futuros de commodities recebem uma compensação por suportar o risco de curto prazo das flutuações dos preços.

#### 1.3.4.

#### Futuros de commodities – economia com incerteza

Considere que um investidor tome uma posição comprada no mercado futuro de uma commodity. Se aplicar o valor presente do preço futuro à taxa livre de risco, ele terá na data  $t$  o valor  $F_{\tau,t}e^{-r(\tau-t)}$ . Com o retorno deste investimento ele irá adquirir a commodity em  $\tau$  pelo preço  $S_{\tau}$ . Entretanto, ele não sabe qual é valor de  $S_{\tau}$  pois trata-se de um preço em uma data futura. Mas em  $t$  ele sabe que o valor esperado de  $S_{\tau}$  será  $E_t(S_{\tau})$ , onde  $E_t(\cdot)$  indica o valor esperado em  $t$ . Então para calcular o seu fluxo de caixa em  $t$  deve descontar este valor pela taxa ajustada ao risco  $\rho$ . O fluxo de caixa na data  $t$  será, portanto:

$$-F_{\tau,t}e^{-r(\tau-t)} + E_t(S_{\tau})e^{-\rho(\tau-t)}$$

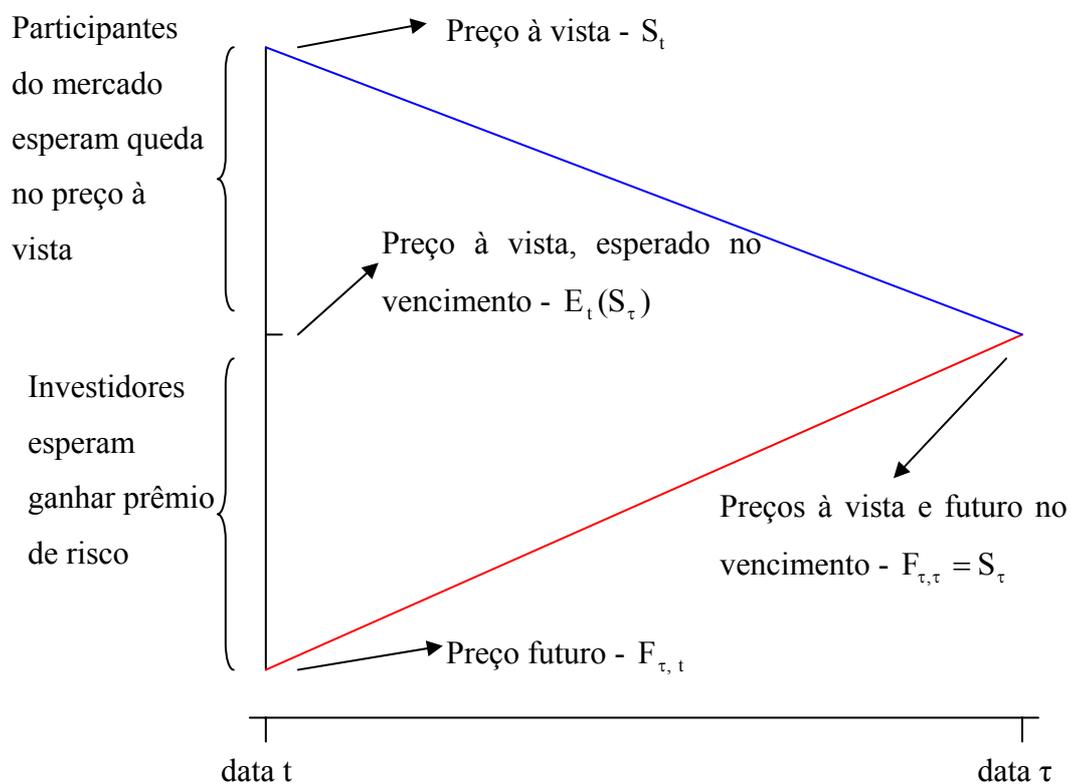
Nestas condições, já compensado pelo risco, o valor do fluxo de caixa acima deve ser nulo, então:

$$F_{\tau,t} = E_t(S_{\tau})e^{(r-\rho)(\tau-t)}$$

Os investidores, na procura pelo preço justo da commodity, irão sempre comparar o preço futuro com o preço à vista que irá prevalecer na data da entrega da commodity. O mercado futuro busca ver o acontecerá à frente, e o preço futuro embute as expectativas sobre o preço à vista no vencimento. Se o preço esperado em  $t$  para  $S_{\tau}$  é superior ao preço  $S_t$ , então o preço futuro  $F_{\tau,t}$  será ajustado em um preço superior a  $S_t$ . O contrário também ocorre se o preço esperado para  $S_{\tau}$  é baixo, o mercado futuro irá refletir esta expectativa.

O ganho do investidor no mercado futuro ocorrerá quando, no vencimento, o preço à vista da commodity for superior ao esperado na data em que entrou no mercado. Perderá se o preço à vista for inferior. O contrato futuro é uma aposta no que irá acontecer ao preço à vista. Quando o investidor entra no mercado ele

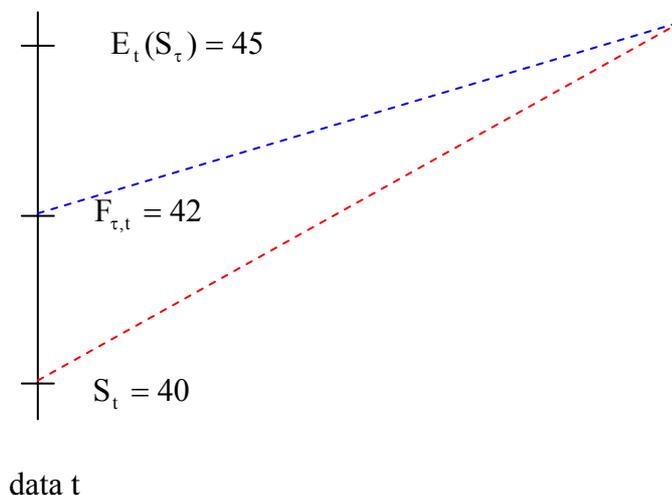
assume o risco dos movimentos dos preços à vista que irão prevalecer no decorrer do tempo. O ganho do investidor no mercado futuro é a diferença entre o preço futuro em  $t$  e o valor esperado do preço à vista. Esta diferença é exatamente o prêmio de risco. Se o preço futuro está abaixo do valor esperado do preço à vista, o comprador do contrato futuro ganhará. Quem faz jus ao prêmio de risco, compradores ou vendedores do mercado futuro? Keynes, em 1930, postulou que o prêmio de risco compete aos compradores. Imaginou uma situação em que produtores de commodities na procura de garantir preços irão vender a produção obtendo um seguro contra as variações de preços quando da colheita. Os investidores (especuladores) irão tomar a posição comprada e prover este seguro, adquirindo contratos quando o preço futuro é inferior ao valor esperado do preço à vista no vencimento. Este postulado de Keynes ficou conhecido em Finanças como *normal backwardation*. A questão relacionada à verificação ou não deste postulado é de natureza empírica. O Quadro 1 ajuda o entendimento desta questão.



Quadro 1 – Esquema mostrando os níveis de preços até o vencimento

Suponha que o preço à vista do barril de petróleo seja US\$ 40/bbl em  $t$ . Os participantes do mercado esperam que o preço caia para US\$ 36/bbl, nos próximos dois meses. Para induzir a entrada de investidores no mercado, o preço futuro é ajustado em US\$ 30/bbl, que é abaixo do valor esperado à vista. A diferença entre o preço futuro e o preço esperado à vista é US\$ 6/bbl, este é o prêmio de risco, que o investidor espera ganhar. Note que o preço à vista e o preço futuro convergem para o mesmo valor no vencimento. Esta convergência é o resultado da existência de um contrato que prevê a entrega física do produto.

A noção de *normal backwardation* envolve a comparação do preço futuro com o valor esperado do preço à vista, que não é observável quando a posição é tomada no mercado futuro. Na prática, o conceito de *backwardation* é usado para expressar a posição do preço futuro em relação ao preço à vista. Uma commodity está em *backwardation* se o preço futuro está abaixo do preço à vista. No sentido do conceito de Keynes há uma equivalência com a existência de um prêmio de risco, já no sentido comum isto não ocorre. Uma commodity está em *contango* se o preço futuro está acima do preço à vista. Seja agora o quadro abaixo:



Quadro 2 – Exemplo com preços em *contango* e situação de *normal backwardation*

Quando o preço futuro é inferior ao valor esperado do preço à vista, é uma situação de *normal backwardation*. Mas não se diz que o mercado está em *backwardation*. Em verdade como  $F_{\tau,t} > S_t$ , o mercado é dito em *contango*. Somente *backwardation* no sentido de Keynes envolve o conceito de prêmio de risco. Além destes conceitos, é usual ainda o termo *backwardation* fraco. Defina-

se *backwardation* fraco quando o valor presente do preço futuro é inferior ao preço à vista  $S_t > e^{-r(\tau-t)}F_{\tau,t}$ . Para diferenciar de *backwardation* fraco, por vezes usa-se o termo *backwardation* forte que é simplesmente um sinônimo de *backwardation*, ou seja  $S_t > F_{\tau,t}$ . Litzenberger e Rabinowitz (1995) analisam a presença de *backwardation* forte e fraco no mercado de petróleo modelando a atitude do agente produtor como uma opção de compra (venda) em função destas movimentações de preços.

É válido ressaltar que o valor esperado que foi usado está relacionado à medida real de probabilidade. Quando se trata da medida neutra ao risco ou medida martingal equivalente (MME) não há prêmio de risco. Isto significa que não há risco sistemático<sup>1</sup>, em outras palavras  $\rho = r$ . Neste caso, a última equação será  $F_{\tau,t} = E_t^Q(S_\tau)$ , onde  $E_t^Q(\cdot)$  é o valor esperado sob a MME. Pode-se definir o prêmio de risco (PR) em um instante  $t$  como sendo:

$$PR_t = F_{\tau,t} - E_t(S_\tau)$$

onde o valor esperado é calculado sob a medida de probabilidade real.

---

<sup>1</sup> No contexto do CAPM escreve-se, simplifcadamente, que  $\rho = r + \beta(r_m - r)$ . O prêmio de risco, ou risco sistemático, é  $\beta(r_m - r)$ . Se não há prêmio de risco  $\beta = 0$  e  $\rho = r$ .