



**Fernando Antonio Lucena Aiube**

**Modelagem dos Preços Futuros de Commodities:  
Abordagem pelo Filtro de Partículas**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.

Orientador: Tara Keshar Nanda Baidya

Rio de Janeiro  
Julho de 2005



**Fernando Antonio Lucena Aiube**

## **Modelagem dos Preços Futuros de Commodities: Abordagem pelo Filtro de Partículas**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Tara Keshar Nanda Baidya**

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC - Rio

**Prof. Reinaldo Castro de Souza**

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC - Rio

**Edison Américo Huarsaya Tito**

PUC-Rio

**Profa. Mônica Barros**

Departamento de Engenharia Elétrica - PUC - Rio

**Prof. Carlos Patrício Samanez**

Departamento de Engenharia Industrial - PUC - Rio

**Profa. Telma Sáfadi**

Departamento de Ciências Exatas – Universidade Federal de Lavras

**Prof. Love Ekenberg**

Department of Computer and Systems Sciences - University of Stockholm

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de julho de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Fernando Antonio Lucena Aiube**

Graduou-se em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Goiás em 1980. Especializou-se em Engenharia de Petróleo na Petrobras em 1981. Exerceu a atividade de engenheiro de petróleo na área de avaliação de poços e análise econômica de projetos petrolíferos. Obteve o título de Mestre em Engenharia de Produção na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 1995, tendo como concentração a área de Finanças e Análise de Investimentos e linha de pesquisa a Teoria das Opções Reais. Trabalha atualmente no Planejamento Financeiro e Análise de Portfólio da Petrobras e leciona no curso de graduação do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio.

#### Ficha catalográfica

Aiube, Fernando Antonio Lucena

Modelagem dos preços futuros de commodities : abordagem pelo filtro de partículas / Fernando Antonio Lucena Aiube ; orientador: Tara Keshar Nanda Baidya. – Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Industrial, 2005.

183 f. ; 30 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial

Inclui referências bibliográficas

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Processos estocásticos. 3. Filtro de Kalman. 4. Filtro de partículas. 5. Opções reais. 6. Validação cruzada. I. Souza, Reinaldo Castro. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial . III. Título.

CDD: 658.5

Ao meu irmão Carlos de Lucena Aiube

## Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Tara Baidya pelo incentivo para iniciar esta jornada e pela paciência e dedicação na condução da orientação.

Ao colega da Petrobras/PUC Edison Tito pela orientação na metodologia do filtro de partículas.

Aos professores Reinaldo Castro de Souza e Cristiano Fernandes do Departamento de Engenharia Elétrica, pelas críticas apresentadas ao longo do desenvolvimento da pesquisa.

À PUC-Rio pelo auxílio através de bolsa integral nos últimos dezoito meses.

À Petrobras pelo tempo concedido para os estudos.

## Resumo

Aiube, Fernando Antonio Lucena. **Modelagem dos Preços Futuros de Commodities: Abordagem pelo Filtro de Partículas**. Rio, 2005. 183p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A evolução dos conhecimentos em Finanças nas últimas três décadas foi rápido e vertiginoso. Hoje os mercados financeiros oferecem produtos sofisticados para investidores e empresas, e por outro lado, tais agentes demandam instrumentos confiáveis para atender suas necessidades em busca de maiores retornos e menores riscos. Todo esse desenvolvimento baseia-se fundamentalmente em metodologias de apreçamento de ativos. Grande parte deste conhecimento é oriundo dos trabalhos pioneiros de Black e Scholes (1973) e Merton (1973). Em síntese, estes trabalhos apoiaram-se em processos estocásticos para preços de ativos para apreçar um derivativo. A natureza do processo estocástico de evolução dos preços é o ponto central para a derivação dos modelos de apreçamento. A análise do comportamento dos preços das commodities possui duas grandes vertentes na literatura. A primeira trata os preços como decorrência de modelos de equilíbrio entre a oferta e a demanda. Estes modelos prosperaram pouco em termos de pesquisa. A outra vertente trata da análise da evolução dos preços baseando-se na série histórica propriamente dita. Esta linha de pesquisa está mais presente na literatura. Esta tese concentra-se nesta abordagem. As commodities possuem características particulares principalmente porque a formação de preços ocorre, via de regra, em mercados futuros. Isto faz com que muitos fatos estilizados não possam ser descritos por modelos de um fator (ou uma variável estocástica). Os fatores (variáveis estocásticas) ou variáveis de estado em muitas situações não são observáveis e necessitam ser estimados. Os modelos de preços futuros, escritos como função das variáveis de estado, recebe o nome de equação de observação. Quando as variáveis de estado são Gaussianas e a equação de observação é linear nos estados, o problema pode ser estimado pelo filtro de Kalman clássico. Se ocorrer a não linearidade, esta dificuldade pode ser contornada pelo filtro de Kalman estendido. Quando o problema é não Gaussiano a literatura usa outras metodologias (freqüentemente aproximações) que não o filtro de Kalman. Esta tese trata de processos estocásticos para preços de

commodities propondo extensões aos modelos existentes na literatura. A derivação dos modelos é feita com o uso da transformada de Duffie e Kan (1996) em ambiente de não arbitragem. Algumas das extensões incluem modelos não Gaussianos. Esta tese investiga a estimação destes modelos pela metodologia denominada filtro de partículas. O filtro de partículas é um procedimento recursivo para integração, dentro da classe dos métodos seqüenciais de Monte-Carlo. A proposta de utilização desta metodologia decorre do fato de que ela dispensa as condições de linearidade e Gaussianidade. Dentre as contribuições desta tese destacam-se as extensões dos processos estocásticos aplicáveis para quaisquer commodities e as análises de modelos não Gaussianos através da metodologia do filtro de partículas. Além disso, a pesquisa apresenta: (i) conclusões acerca dos modelos de dois fatores aplicados à série de preços da commodity petróleo; (ii) a análise da viabilidade do filtro de partículas mostrando que o erro obtido é próximo daquele do filtro de Kalman para problemas Gaussianos e a resposta obtida da estimação paramétrica é coerente com diversos trabalhos da literatura; (iii) análise da viabilidade operacional de implementação do filtro de partículas em termos do tempo computacional despendido nos processos de filtragem e estimação paramétrica. A tese conclui que o filtro de partículas, apesar ser computacionalmente intenso, é viável na prática face ao imenso desenvolvimento computacional. Ainda mais, por ser uma metodologia aplicável a problemas complexos de inferência, sua utilização em modelos cada vez mais sofisticados é muito promissora.

## **Palavras-chave**

Processos estocásticos; Filtro de Kalman; Filtro de Partículas; Opções Reais.

## Abstract

Aiube, Fernando Antonio Lucena. **Modelling Commodity Future Prices: Particle Filter Approach**. Rio, 2005. 183p. Ph.D. Thesis - Department of Industrial Engineering, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

The evolution of the ideas in Finance has been huge in the last decades. Nowadays the financial markets offer investors sophisticated products. And investors in turn demand reliable financial instruments to meet their needs in search for greater returns and lower risks. This development is based mainly on asset pricing methodologies. The greatest part of this knowledge comes from the seminal works of Black and Scholes (1973) and Merton (1973). To summarize, their works are based on the assumption of a specific stochastic process that governs asset prices. And then a derivative of this underlying asset can be priced. The nature of the stochastic process that describes the evolution of prices is the key point for deriving pricing formulae. The analysis of the behavior of commodity prices has two approaches. The first approach considers prices as a consequence of the equilibrium between supply and demand. These models have not received enough attention in literature. The second approach, which has received more attention, is based on the analysis of price time series. The commodities have particular features because they are most of the times negotiated in future markets. The consequence is that the one factor models badly describe their stylized facts. The factors (stochastic variables) are known as state variables which most of the times are non observables, and need to be estimated. When state variables are Gaussians and the observation equation is linear in states, the classical Kalman filter can be used to access these variables. If non linearity is present extended Kalman filter is used, but when state variables are non Gaussian the literature does not use filtering processes. This thesis analyses the stochastic processes of commodities proposing extensions to the existing models. The derivation of models is based on Duffie and Kan (1996) transform, in a non arbitrage environment. Some extensions are non Gaussian. This thesis investigates the estimation of these models using particle filter methodology. The particle filter is a recursive procedure for integration in the sequential Monte-Carlo methods. The advantage of this methodology is that it does not require linear or Gaussian

conditions. The contributions of this research are the extensions of stochastic processes that can be used for any commodity and the use of particle filter as an estimation methodology in Finance. Furthermore the thesis presents: (i) the conclusions about two factor models applied to oil prices; (ii) the analysis of the use of particle filter verifying that errors in both, Kalman filter and particle filter are close and that parameters estimation is in accordance with the literature; (iii) the analysis of the implementation of particle filter showing that it is viable considering the computational time of filtering and parameters estimation. The thesis concludes that the particle filter is viable, although time consuming, due to the hardware development. And more, since particle filter is useful for complex inference problems, its application to sophisticated models is promising.

## **Keywords**

Stochastic processes; Kalman Filter; Particle Filter; Real Options.

## Sumário

|        |   |    |
|--------|---|----|
| 1      | Introdução  | 19 |
| 1.1.   | O Contexto da Pesquisa  | 19 |
| 1.2.   | Organização da pesquisa   | 25 |
| 1.3.   | Mercados futuros – conceitos básicos  | 26 |
| 1.3.1. | Conceitos básicos   | 26 |
| 1.3.2. | Preços futuros – economia sem incerteza                                     | 28 |
| 1.3.3. | Futuros de commodities  | 30 |
| 1.3.4. | Futuros de commodities – economia com incerteza                             | 31 |
| 2      | Revisão bibliográfica   | 35 |
| 2.1.   | Artigos diretamente relacionados à pesquisa                                 | 36 |
| 2.2.   | Artigos indiretamente relacionados com a pesquisa                           | 46 |
| 3      | Derivação dos modelos   | 52 |
| 3.1.   | Introdução  | 53 |
| 3.2.   | Aspectos preliminares das transformadas DK e DPS                            | 54 |
| 3.3.   | Formulação das transformadas DK e DPS                                       | 56 |
| 3.4.   | O conceito da transformada DK   | 57 |
| 3.5.   | O conceito da transformada estendida DPS                                    | 58 |
| 3.6.   | Derivação dos modelos com a transformada DK                                 | 59 |
| 3.6.1. | Modelo com distribuição normal para os saltos e MGB para                    | 61 |
| 3.6.2. | Modelo com distribuição exponencial para os saltos e MGB para $\xi$         | 63 |
| 3.6.3. | Modelo com distribuição normal para os saltos e reversão à média para $\xi$ | 65 |
| 3.7.   | Resumo dos modelos  | 66 |
| 3.7.1. | Modelo Básico   | 67 |
| 3.7.2. | Modelo Primeira Extensão  | 69 |
| 3.7.3. | Modelo Segunda Extensão   | 70 |
| 3.7.4. | Modelo Terceira Extensão  | 72 |
| 4      | Filtro de Kalman  | 74 |
| 4.1.   | Introdução  | 74 |

|   |     |
|---|-----|
| 4.2. Definição do modelo na forma espaço-estado             | 75  |
| 4.3. As origens computacionais do filtro de Kalman          | 76  |
| 4.4. As origens probabilísticas do filtro                   | 77  |
| 4.5. O algoritmo do filtro de Kalman                        | 77  |
| 4.6. Estimação por máxima verossimilhança                   | 79  |
| 4.7. Previsão   | 81  |
| 4.8. Alisamento   | 81  |
| 4.9. O filtro de Kalman estendido                           | 82  |
| 5 Filtro de partículas                                      | 85  |
| 5.1. Introdução   | 85  |
| 5.2. Definições básicas                                     | 87  |
| 5.3. Amostragem por importância                             | 88  |
| 5.4. Amostragem por importância seqüencial                  | 90  |
| 5.5. Estratégia de reamostragem e o filtro <i>bootstrap</i> | 91  |
| 6 Análise do processo de filtragem                          | 96  |
| 6.1. Os filtros de Kalman e de partículas                   | 96  |
| 6.2. Análise com dados artificiais                          | 98  |
| 6.3. Análise com dados de mercado                           | 108 |
| 6.4. Tamanho efetivo da amostra e a eficiência do FP        | 109 |
| 7 Análise dos resultados empíricos                          | 111 |
| 7.1. Organização dos dados                                  | 112 |
| 7.2. Utilização dos painéis                                 | 114 |
| 7.3. Sazonalidade   | 114 |
| 7.4. Estimação dos parâmetros                               | 115 |
| 7.5. Resultados do modelo básico                            | 117 |
| 7.5.1. Filtro de Kalman                                     | 118 |
| 7.5.2. Filtro de partículas                                 | 122 |
| 7.5.3. Tamanho efetivo da amostra no FP                     | 127 |
| 7.5.4. Estrutura a termo da volatilidade                    | 128 |
| 7.5.5. Estrutura a termo dos preços                         | 132 |
| 7.5.6. Previsão   | 135 |
| 7.6. Resultados do Modelo Primeira Extensão                 | 136 |
| 7.6.1. Filtro de Kalman                                     | 137 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.6.2. Filtro de partículas  | 140 |
| 7.7. Resultados do Modelo Segunda Extensão                                     | 143 |
| 7.7.1. Modelos com distribuição normal para os saltos                          | 143 |
| 7.7.2. Modelos com distribuição exponencial para os saltos                     | 148 |
| 7.8. Resultados do Modelo Terceira Extensão                                    | 152 |
| 8 Aplicações e exemplos  | 155 |
| 8.1. Implicações para a área de Opções Reais                                   | 155 |
| 8.2. Implicações para a área de Finanças                                       | 158 |
| 9 Conclusões e trabalhos futuros   | 163 |
| 10 Referências Bibliográficas  | 168 |
| 11 Apêndice 1 - Solução das EDOs com distribuição normal                       | 175 |
| 12 Apêndice 2 - Solução das EDOs com distribuição exponencial                  | 177 |
| 13 Apêndice 3 - Solução das EDOs com reversão à média para $\xi$               | 179 |
| 14 Apêndice 4 - Estrutura a termo da volatilidade - Modelo Básico              | 181 |
| 15 Apêndice 5 - Estrutura a termo da volatilidade - o Modelo Primeira Extensão | 183 |

## Lista de figuras

|  |     |
|--|-----|
| Figura 1 – Uma das possíveis trajetórias de preços gerada artificialmente            | 101 |
| Figura 2 – Variável de observação utilizada nos filtros de Kalman e de partículas    | 101 |
| Figura 3 – Variável de observação e a variável de observação pelo FK                 | 102 |
| Figura 4 – Variável de observação e a variável de observação filtrada pelo FP        | 103 |
| Figura 5 – Erros (RMSE) da simulação com 100 experimentos usando o FP                | 105 |
| Figura 6 – Erros (RMSE) para o caso de 100 experimentos usando 1000 partículas       | 106 |
| Figura 7 – Comportamento assintótico do erro no FP em função do número de partículas | 107 |
| Figura 8 – Variável de estado (variações de curto prazo) do painel A                 | 124 |
| Figura 9 – Variável de estado (preços de equilíbrio) do painel A                     | 124 |
| Figura 10 – Evolução dos preços à vista estimado e do primeiro contrato futuro       | 125 |
| Figura 11 – Estrutura a termo da volatilidade do painel A - FK                       | 130 |
| Figura 12 – Estrutura a termo da volatilidade do painel A - FP                       | 130 |
| Figura 13 – Estrutura a termo da volatilidade do painel C - FK                       | 131 |
| Figura 14 – Estrutura a termo da volatilidade do painel C - FP                       | 131 |
| Figura 15 – Preços futuros: variáveis observada e filtrada para o F9 - FK            | 133 |
| Figura 16 – Preços futuros: variáveis observada e filtrada para o F9 - FP            | 133 |
| Figura 17 – Previsão do contrato F1 de 21/09/00 a 12/12/01                           | 136 |
| Figura 18 – Posição nos contratos futuros de um mês e um ano                         | 162 |

## Lista de tabelas

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 1 – Erros na variável de observação com as duas metodologias de filtragem         | 104 |
| Tabela 2 – Erros na variável de observação usando 1000 partículas no FP                  | 105 |
| Tabela 3 – Erro RMSE e tempo em função do número de partículas                           | 106 |
| Tabela 4 – Erro na variável de estado S com as duas metodologias                         | 107 |
| Tabela 5 – Erros na variável de observação – preços do contrato F1                       | 108 |
| Tabela 6 – Variação do erro da variável de observação em função do valor de coef         | 110 |
| Tabela 7 – Principais informações dos painéis utilizados                                 | 113 |
| Tabela 8 – Utilização dos painéis em cada modelo   | 114 |
| Tabela 9 – Resultados da estimação com o painel A pelo FK                                | 119 |
| Tabela 10 – Resultados da estimação com o painel C pelo FK                               | 119 |
| Tabela 11 – Resultados da estimação com o painel C pelo FK                               | 121 |
| Tabela 12 – Resultados da estimação com o painel E pelo FK                               | 122 |
| Tabela 13 – Resultados da estimação com o painel A pelo FP                               | 123 |
| Tabela 14 – Resultados da estimação com o painel D pelo FP                               | 123 |
| Tabela 15 – Resultados da estimação com o painel C pelo FP                               | 126 |
| Tabela 16 – Resultados da estimação com o painel E pelo FP                               | 127 |
| Tabela 17 – Efeito da eficiência do FP na verossimilhança                                | 127 |
| Tabela 18 – Erros entre as variáveis filtrada e observada para o FK e o FP               | 132 |
| Tabela 19 – Erros entre as variáveis observada e filtrada para o FK e FP para o painel C | 134 |
| Tabela 20 – Erros de previsão fora da amostra para o FK e o FP de 12/08/04 a 30/12/04    | 135 |
| Tabela 21 – Erros de previsão fora da amostra para o FK e o FP de 21/09/00 a 12/12/01    | 135 |
| Tabela 22 – Resultados da estimação com o painel A pelo FK                               | 138 |
| Tabela 23 – Resultados da estimação com o painel C pelo FK                               | 139 |
| Tabela 24 – Resultados da estimação com o painel E pelo FK                               | 140 |

|  |     |
|--|-----|
| Tabela 25 – Resultado da estimação com o painel A pelo FP                              | 141 |
| Tabela 26 – Resultados da estimação com o painel C pelo FP                             | 142 |
| Tabela 27 – Resultados da estimação com o painel E pelo FP                             | 143 |
| Tabela 28 – Resultados da estimação com o painel A                                     | 145 |
| Tabela 29 – Resultado da estimação com o painel C                                      | 146 |
| Tabela 30 – Estrutura a termo dos preços resultante da estimação com o painel A        | 147 |
| Tabela 31 – Estrutura a termo dos preços resultante da estimação com o painel C        | 147 |
| Tabela 32 – Estrutura a termo dos preços para o algoritmo de alisamento do painel<br>A | 148 |
| Tabela 33 – Resultados da estimação com o painel A                                     | 149 |
| Tabela 34 – Resultados da estimação com o painel C                                     | 150 |
| Tabela 35 – Estrutura a termo dos preços resultante da estimação com o painel A        | 151 |
| Tabela 36 – Estrutura a termo dos preços resultante da estimação com o painel C        | 151 |
| Tabela 37 – Resultados da estimação com o painel A                                     | 153 |
| Tabela 38 – Resultado da estimação com o painel E                                      | 154 |

## Lista de quadros

|   |    |
|---|----|
| Quadro 1 – Esquema mostrando os níveis de preços até o vencimento               | 32 |
| Quadro 2 – Exemplo com preços em contango e situação de normal<br>backwardation | 33 |
| Quadro 3 – Representação esquemática do filtro de Kalman                        | 79 |
| Quadro 4 – Representação esquemática do filtro de Kalman estendido              | 84 |
| Quadro 5 – Algoritmo do filtro de partículas                                    | 94 |

## Lista de símbolos e abreviações

|                    |  |
|--------------------|--|
| bbl(s)             | Volume em barril ou barris                                 |
| BDS                | Teste de independência de Brock, Dechert e Sheinkman       |
| BM&F               | Bolsa Mercantil e de Futuros                               |
| CBOT               | Chigaco Board of Trade                                     |
| CME                | Chigaco Mercantile Exchange                                |
| $E^Q(Y)$           | Valor esperado de Y com relação à medida de prob. Q        |
| EDO                | Equação diferencial ordinária                              |
| EDP                | Equação diferencial parcial                                |
| $\mathfrak{S}$     | $\sigma$ -álgebra  |
| FAC                | Função de autocorrelação                                   |
| FACP               | Função de autocorrelação parcial                           |
| FK                 | Filtro de Kalman   |
| FKE                | Filtro de Kalman estendido                                 |
| FP                 | Filtro de partículas                                       |
| FPB                | Filtro de partículas <i>bootstrap</i>                      |
| F(x)               | Contrato futuro com vencimento x meses à frente            |
| GMM                | Método generalizado dos momentos                           |
| iid                | Independente e identicamente distribuída                   |
| ln                 | Logaritmo na base e  |
| MAE                | Erro absoluto médio  |
| MAPE               | Erro absoluto percentual médio                             |
| MC                 | Monte Carlo  |
| MCCM               | Monte Carlo cadeia de Markov                               |
| MGB                | Movimento geométrico Browniano                             |
| MME                | Medida martingal equivalente                               |
| $N(\mu, \sigma^2)$ | Distribuição normal com média $\mu$ e variância $\sigma^2$ |
| NYMEX              | New York Mercantile Exchange                               |
| $\xrightarrow{qc}$ | $A_n \xrightarrow{qc} A$ : convergência quase-certamente   |
| $\Omega$           | Espaço amostral  |
| P                  | Medida de probabilidade verdadeira                         |
| Q                  | Medida Martingal Equivalente                               |

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $\mathfrak{R}$              | Conjunto dos reais                                 |
| $\mathfrak{R}^n$            | Espaço Euclidiano n dimensional                    |
| RMSE                        | Raíz quadrada do erro quadrado médio               |
| S&P500                      | Índice Standart & Poors 500                        |
| $\Theta$                    | Conjunto de hiperparâmetros                        |
| US\$/bbl                    | Preço do petróleo em dólares americanos por barril |
| $W_t$                       | Processo padrão de Wiener                          |
| WTI                         | West Texas Intermediate                            |
| x                           | Variável de estado                                 |
| $x'$                        | Transposição de x                                  |
| y                           | Variável de observação                             |
| $[\Omega, \mathfrak{F}, P]$ | Espaço de probabilidade                            |