



Augusto César Miranda Feijão

Uma contribuição ao projeto ótimo de edifícios

Trabalho de Conclusão de Curso

Trabalho apresentado como requisito parcial à conclusão do curso de Engenharia Civil na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

Orientador: Raul Rosas e Silva.

Rio de Janeiro
Dezembro de 2019



Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, aquele que me deu a vida e que com sua providência me guiou até esta conquista memorável na minha vida.

Aos meus pais, familiares – sejam eles da minha família biológica ou espiritual, que é a Comunidade Católica Shalom, da qual faço parte e pela qual consagrei minha vida a Deus – e amigos, que foram meu sustento em todos aspectos possíveis nos diversos momentos desta graduação.

Aos meus professores, desde o ensino primário até este último semestre da graduação, com um particular agradecimento àqueles que, ao compartilhar seu conhecimento com paixão e brilho nos olhos, foram uma grande inspiração para persistir na busca do conhecimento.

Por fim – mas não menos importante -, de maneira particular agradeço ao professor Raul por ter aceitado pacientemente ser meu orientador neste trabalho de conclusão de curso que, em meio as minhas dificuldades pessoais, me inspirou serenidade e tranquilidade.

Augusto César Miranda Feijão



Resumo

A proposta deste trabalho de conclusão de curso é apresentar alguns conceitos importantes para a engenharia referentes a um processo de otimização e como, de diversas maneiras, a otimização no projeto estrutural impacta nas demais etapas e atividades correlacionadas com a construção civil. Tamanha é a importância da otimização no que diz respeito às necessidades atuais da sociedade, que deve estar alinhada com as questões ambientais, custos, segurança e funcionalidade. Para exemplificar, será demonstrada a otimização de um pórtico simples envolvendo a otimização das áreas das seções transversais dos pilares e viga do mesmo, minimizando uma função custo, a partir de restrições de resistência à uma carga crítica e a carga de plastificação, entre outras condicionantes.

Palavras-chave: otimização; resistência dos materiais; pórtico; projeto estrutural; aço estrutural;



Abstract

The purpose of this undergraduate thesis is to present some important concepts for engineering related to an optimization process and how, in many ways, the optimization in the structural design impacts on the other stages and activities related to the civil construction. Such is the importance of optimization regarding to the society's current needs that it must be aligned with environmental, cost, safety and functionality issues. As a practical case, it will be demonstrated the optimization of a simple frame involving the optimization of the cross-sectional areas of its columns and its beam, minimizing a cost function, regarding to constraints of resistance to a critical load and the plasticizing load, besides some other conditions.

Keywords: optimization; strength of materials; frame; structural design; structural steel;



SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivo.....	2
2	OTIMIZAÇÃO	3
2.1	Os fundamentos da otimização na engenharia.....	3
2.2	Por que otimizar na engenharia civil?	4
3	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	7
3.1	Conceitos básicos.....	7
3.1.1	Função objetivo.....	7
3.1.2	Variáveis de Projeto	7
3.1.3	Restrições ou Condicionantes	8
3.1.4	Carga crítica de flambagem	8
3.1.5	Momento de plastificação	11
3.2	Formulação teórica do problema.....	15
3.2.1	Geometria do problema.....	15
3.2.2	Função objetivo.....	16
3.2.3	Variáveis	17
3.2.4	Restrições.....	17
4	APLICAÇÃO NUMÉRICA COM O USO DO SOLVER.....	20
5	CONCLUSÃO.....	31
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	32



ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1 – Barra submetida a um esforço axial menor ou igual ao valor da carga crítica (a), e uma carga superior a carga crítica, gerando uma deflexão lateral (b) ...9	
Figura 3.2 - Pórtico proposto na solução de Timoshenko. 10	10
Figura 3.3 - Diagrama simplificado do aço (comportamento elasto-plástico)..... 12	12
Figura 3.4 - Estágios de tensão de uma seção I até atingir a plastificação total 12	12
Figura 3.5 - Seção I plastificada – cálculo do módulo resistente plástico Z_x 13	13
Figura 3.6 - Viga hiperestática com carga distribuída em seu modo de plastificação. 14	14
Figura 3.7 - Pórtico para a otimização 15	15
Figura 3.8 – Perfil I (esquemático) 17	17
Figura 4.1 – Pórtico para otimização com o uso do Solver 21	21
Figura 4.2 – Diagramas (a) de esforço normal e, (b) de momento fletor no pórtico ...22	22
Figura 4.3 – Diagrama de momento fletor para viga com $L = 2$ m 24	24

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1 – Dados de projeto 22	22
Tabela 4.2 – Resultados do Solver 23	23
Tabela 4.3 – Solução do solver para vão da viga $L = 2$ m 26	26
Tabela 4.4 – Solução do solver para mudança da restrição nas alturas mínimas dos perfis, gerando uma mudança no valor 28	28
Tabela 4.5 – Solução do solver ao desafixar o valor de t , reduzindo o custo 29	29
Tabela 4.6 – Solução do solver ao desafixar o valor de t e associar um valor b_1 para mesa do perfil do pilar e b_2 para mesa do perfil da viga 30	30



1 INTRODUÇÃO

O Institution of Civil Engineers (ICE), uma associação profissional independente fundada em 1818 no Reino Unido, diz em seus estatutos (1828) que a “engenharia civil é a arte de direcionar as grandes fontes de força da natureza para uso e conveniência da humanidade”. De fato, a engenharia empreende grandes transformações no mundo e ela vive um constante processo de evolução pois, a cada momento histórico, o ser humano tem necessidades diversas de se relacionar com o mundo ao seu redor que exigem respostas novas. O engenheiro, portanto, tem o papel de apresentar soluções para o cotidiano da sociedade em suas necessidades atuais.

Desde o início da história, surgiram muitos especialistas na criação de dispositivos e estruturas para atender as necessidades do ser humano. Na antiguidade, o conhecimento era uma herança passada entre as gerações por meio da prática: aquilo que, de forma empírica, havia funcionado bem, era repetido através de gerações, mesmo sem o devido embasamento teórico. Especialmente no que diz respeito à engenharia civil, as cidades históricas guardam como lembrança das suas histórias estruturas robustas e superdimensionadas para os parâmetros de cálculo atuais.

Nos tempos atuais, o avanço da ciência e da tecnologia tem favorecido fortemente o desenvolvimento de soluções ótimas. Em acréscimo, o estudo de novos materiais para construção tem revolucionado a forma de pensar a construção civil, em vista de obter a melhor solução possível atendendo uma série de critérios em função das necessidades da sociedade e do planeta.



1.1 Objetivo

O objetivo deste presente trabalho de conclusão de graduação em engenharia civil é discutir o desenvolvimento da engenharia civil nos tempos atuais, particularmente no que diz respeito a otimização, no intuito de fomentar a busca por soluções ótimas de engenharia que atendam da melhor maneira possível as demandas de cada tempo.

No que diz respeito a essas demandas, uma das propostas deste trabalho é listar uma série de questões que impactam diretamente a construção civil na atualidade, apontando em alguns casos as problemáticas e também a importância de se pensar novas formas de otimizar.

Por fim, como objetivo prático será apresentado uma solução simples de otimização para um pórtico plano simples, levando em conta critérios de resistência, de maneira literal e aplicando valores, com o uso da ferramenta Solver do Excel.



2 OTIMIZAÇÃO

2.1 Os fundamentos da otimização na engenharia

Otimização é definida como a forma pela qual é possível encontrar uma solução ou um conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou um conjunto de funções. Uma solução ótima é encontrada ao obter o melhor resultado para um determinado problema, ao atingir da melhor forma o objetivo e respeitando as condições impostas.

Um problema de engenharia consiste no desejo de transformar algo de um estado (inicial) para outro (estado final). No entanto, problemas de engenharia não podem ser considerados completos e fechados, ou seja, não é possível afirmar que existe a solução final, única e perfeita. Haverá sempre novos materiais, novas informações, novos conhecimentos e aperfeiçoamento de teorias, erros de observação, etc. Por isso, é importante levar em conta estas variações ao buscar a solução para este tipo de problemas. Portanto, uma solução a ser adotada para um problema de engenharia depende de uma tomada de decisão, uma escolha dentre diversas soluções.

Seguindo de maneira adaptada a metodologia geral para solução de problemas proposta por George Pólya¹, é possível descrever as etapas da seguinte forma: subdividir o problema e simplificá-lo de forma a identificar (a) o critério (função objetivo); (b) as variáveis; (c) os dados do problema; e (d) as restrições (condicionantes);

¹ George Pólya (1887-1985) foi um matemático húngaro e professor de matemática na ETH Zürich (Suíça) e na Stanford University (Inglaterra). Trabalhou com uma variedade de tópicos matemáticos, incluindo séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade. Notável também foi sua contribuição para a heurística, explicada em seu livro "How to Solve It" (traduzido para o português como "A arte de resolver problemas"). (Referência: Wikipedia)



A etapa seguinte é equacionar matematicamente o problema, que posteriormente será solucionado através de algum método conhecido. Por fim, seguindo a proposta de Pólya, a solução deve ser reavaliada, sofrer os reajustes necessários para poder ser aplicada na solução de outros problemas.

2.2 Por que otimizar na engenharia civil?

A construção civil, como um ramo diversificado que impacta de muitas maneiras a sociedade e o planeta, ela precisa estar num constante processo de otimização de todos seus processos. Nos dias de hoje, muitas questões levam os engenheiros civis e profissionais de áreas correlacionadas a pensarem em soluções ótimas. Problemas tais como:

- **Verticalização urbana**, devido à falta de espaço nas cidades. Os grandes centros urbanos estão saturados de construções – das mais antigas até as mais recentes -, que não comportam a criação de novas edificações ou de áreas livres. Qualquer espaço vago é objeto da especulação do setor imobiliário a fim de aproveitar da melhor forma possível pontos centrais das cidades. A solução encontrada nas últimas décadas foi a verticalização das construções, ou seja, aproveitar o espaço vertical que a obra dispõe dentro dos gabaritos estabelecidos pelos municípios. Graças aos avanços da engenharia, as grandes cidades estão repletas de torres e arranha-céus que tornaram o estilo de vida das cidades mais dinâmico. Além disso, é interessante atestar que, segundo alguns estudiosos (SOUZA, 1994; SOMEKH, 1997), a verticalização no Brasil se caracteriza por estar atrelada, sobretudo à



habitação e não ao setor de serviços como aconteceu em muitos outros países;

- **Altos custos**, unitários e globais, atrelados aos empreendimentos da construção civil. Um dos principais desafios das obras de engenharia civil são projetos que visam a economia, levando em conta as resistências especificadas em norma, evitando repassar gastos altos para o comprador, a fim de gerar um preço final atrativo para o mesmo. Além disso, o contexto econômico e a competitividade são fatores que impulsionam a busca por soluções de engenharia que otimizem custo e sejam atraentes ao público alvo.
- **Materiais de construção:** um projeto de engenharia pode ter soluções elaboradas em diversos materiais nos quais podem ser, ou o custo, ou a resistência ou, alguma propriedade específica de um determinado material, o critério predominante para escolha. Na atualidade, o estudo aprofundado das estruturas químicas dos materiais tem produzido uma nova classe de produtos de engenharia: os compósitos. O principal compósito da construção civil, o concreto armado, já está sendo estudado com outros complementos, como fibras das mais variadas origens, materiais reciclados, etc. Esse estudo promete revolucionar a otimização tanto em termos de custo, quanto em termos de resistência. É possível vislumbrar um futuro onde será possível obter estruturas mais resistentes e com maior economia de material.
- **Questões ambientais:** há alguns anos já se fala de aquecimento global e a construção civil é um ramo que gera e emite muito CO₂ na atmosfera. A sociedade também já discute, com muito temor, a escassez de recursos naturais que pode atingir o planeta em questão de décadas. A otimização



nesse sentido deve priorizar a segurança e o menor gasto de materiais, evitando desperdícios (principalmente de água), a diminuição da produção de resíduos e obras mais limpas.

Projeto, por definição, é “atividade iterativa de tomada de decisões para produzir os planos/plantas a partir dos quais serão convertidos, *da melhor forma possível* (i.e., próxima da "solução ótima"), recursos já existentes em novos sistemas ou dispositivos para atender às necessidades humanas" (Woodson, 1966).

No que diz respeito ao projeto estrutural, é importante ressaltar que o projeto estrutural é uma atividade complexa que envolve arquitetura, concepção e arranjo estrutural e o dimensionamento dos elementos. A principal preocupação é obter os menores custos das obras, alinhados a maior resistência possível, levando em consideração restrições próprias de cada construção. Portanto, a otimização do problema descrito na forma de uma função matemática auxilia a elaboração de projetos estruturais ótimos.

No entanto, é muito importante reforçar que estes esforços para otimizar as construções civis serão em vão se não atenderem principalmente requisitos de segurança (resistência), um bom detalhamento de projeto que forneça um entendimento claro da solução a ser aplicada, um acompanhamento da execução conforme o projeto, o controle de qualidade na fabricação e a proteção dos elementos de agentes agressivos que podem comprometer a segurança, por conseguinte, a resistência especificada em projeto.



3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 Conceitos básicos

3.1.1 Função objetivo

Nos problemas de engenharia, pode-se usar uma ou mais funções que servem como critério para comparar as soluções. A função objetivo é a função das variáveis estabelecidas do projeto e representada por:

$$F(x) \text{ ou } F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_i(x)]$$

É possível comparar quantitativamente as soluções, utilizando um critério único, ou fazendo uma combinação dos diversos critérios. Isto pode ser feito, por exemplo, através da atribuição de pesos (com a devida atenção a magnitude dos pesos) aos diversos critérios componentes por meio de uma combinação linear.

No caso da otimização, a ideia é minimizar ou maximizar essa função. Aplicada ao projeto estrutural, ela está normalmente atrelada ao custo da estrutura ou outro critério que se deseja minimizar ou maximizar.

3.1.2 Variáveis de Projeto

As variáveis são as incógnitas do problema de otimização, que podem ser descritas na forma de um vetor (matriz-coluna).

Num projeto estrutural, elas podem estar relacionadas à geometria da estrutura, como dimensões da seção transversal, comprimento ou as propriedades dos materiais, como resistência, tensões admissíveis, etc.

As variáveis podem ser contínuas – podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo determinado – ou discretas, quando assumem valores específicos, tipicamente uma lista de valores permitidos.



3.1.3 Restrições ou Condicionantes

Uma solução viável deve atender às restrições do problema. As restrições ou condicionantes são exigências que o projeto deve satisfazer, estando ligadas diretamente as variáveis do projeto.

As restrições podem ser funções de igualdade, quando se pretende fixar uma variável com algum valor específico ou de desigualdade, que limitam com valores mínimos e máximos às variáveis.

3.1.4 Carga crítica de flambagem

No intuito de fundamentar teoricamente o problema, serão apresentados alguns conceitos de resistência dos materiais que embasam a sua solução.

Determinados elementos estruturais podem estar sujeitos a cargas axiais de compressão, e se forem demasiadamente compridos e esbeltos, a carga poderá ser grande o suficiente para provocar uma deflexão lateral. Como define Hibbeler (2010), “mais especificamente, elementos estruturais comprimidos e esbeltos sujeitos a uma força de compressão axial são denominados *colunas*, e a deflexão lateral que ocorre é denominada *flambagem*. Com muita frequência a flambagem de uma coluna pode resultar em uma falha repentina e dramática de uma estrutura ou mecanismo, e por isso, é preciso dedicar especial atenção ao projeto de colunas para que estas possam suportar com segurança as cargas pretendidas sem sofrer flambagem. A carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando está na iminência de sofrer flambagem é denominada carga crítica.”



Figura 3.1 – Barra submetida a um esforço axial menor ou igual ao valor da carga crítica (a), e uma carga superior a carga crítica, gerando uma deflexão lateral (b).

A solução da equação diferencial proposta por Leonhard Euler (1757) levou a expressão da carga crítica ou carga de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Em termos de tensão, podemos descrever a tensão crítica como:

$$\left(\frac{P_{cr}}{A}\right) = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

Onde r é o raio de giração da seção.

O engenheiro Stephen P. Timoshenko em seu livro *Theory of Elastic Stability* (1963) analisa a flambagem elástica em diversos tipos de estruturas e nele desenvolve a equação diferencial da deformada para pórticos.

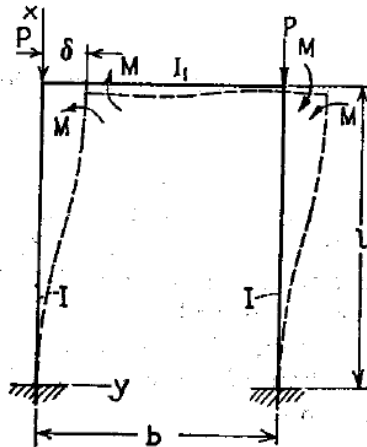


Figura 3.2 - Pórtico proposto na solução de Timoshenko.

É possível obter, portanto, a carga crítica de flambagem da coluna de um pórtico a partir da equação abaixo, proveniente da solução da equação diferencial:

$$\frac{kl}{\tan kl} = -\frac{6 l I}{b I_1}$$

Onde:

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

e,

l = altura da coluna;

b = vão entre colunas do pórtico;

I = momento de inércia das colunas do pórtico;

I_1 = momento de inércia da viga do pórtico;

E = módulo de elasticidade

P = carga axial crítica.



Por meio desta solução, é possível observar que há dois extremos possíveis para essa solução:

$$\frac{\pi}{2} \leq kl \leq \pi$$

Para $I_2 = 0$ (existência de uma rótula na ligação entre pilar-viga),

$$kl = \frac{\pi}{2} \rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

Para $I_2 \rightarrow \infty$ (viga rígida),

$$kl = \pi \rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Para outros valores intermediários de momento de inércia da viga, deve-se solucionar a equação.

Para cálculos manuais, essa solução se torna bastante complicada. A fim de simplificar o problema, pode-se considerar a viga como de material flexível que produz um caso mais crítico, onde obteremos a menor carga crítica possível a favor da segurança, apesar de desprezar os efeitos do momento de inércia da viga.

3.1.5 Momento de plastificação

Alguns materiais em soluções de projeto estrutural – como o aço – apresentam um comportamento caracterizado por uma longa deformação após atingir o limite elástico em um ensaio de tração a uma tensão constante de escoamento (f_y ou σ_y).

Para a análise estrutural, o aço pode ser considerado como um material de comportamento elasto-plástico - ou seja, o diagrama tensão-deformação (σ - ϵ) pode ser aproximado por uma diagrama simplificado, constituído por um trecho elástico linear, a partir da origem até atingir a tensão de escoamento, e por um patamar de tensão constante e igual à tensão de escoamento. Esta consideração é válida tanto para ensaios de tração como os ensaios de compressão axial.

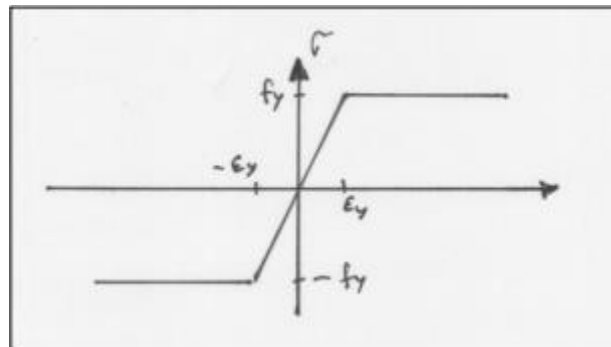


Figura 3.3 - Diagrama simplificado do aço (comportamento elasto-plástico)
 (Fonte: Notas de aula do Prof. Francisco Virtuoso, Universidade Técnico de Lisboa)

Quando a seção está submetida a um momento fletor, é definido que o momento de escoamento (onde a fibra mais externa começa a plastificar) como:

$$\sigma_y = \frac{M_x y_{m\acute{a}x}}{I_x} \therefore M_x = \frac{I_x}{y_{m\acute{a}x}} f_y$$

Podemos definir como módulo elástico da seção

$$W_x = \frac{I_x}{y_{m\acute{a}x}} \therefore M_x = W_x f_y$$

Após atingir a tensão de escoamento na fibra mais externa da seção, aos poucos a seção vai plastificando até atingir a plastificação total da seção.

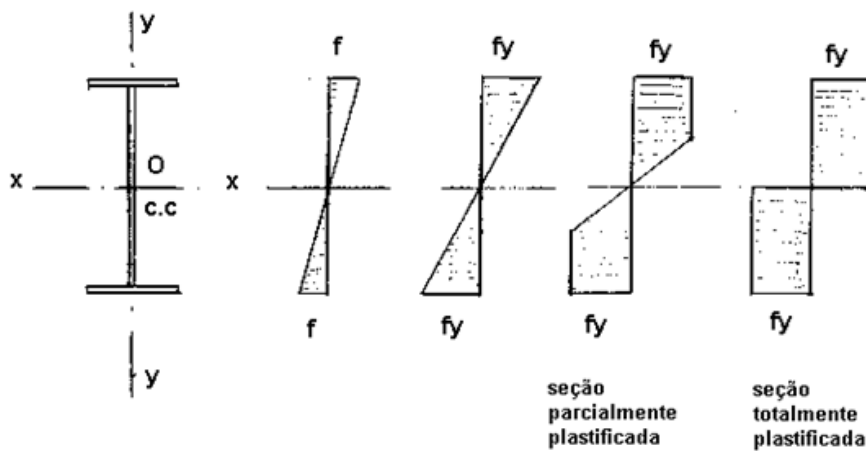


Figura 3.4 - Estágios de tensão de uma seção I até atingir a plastificação total

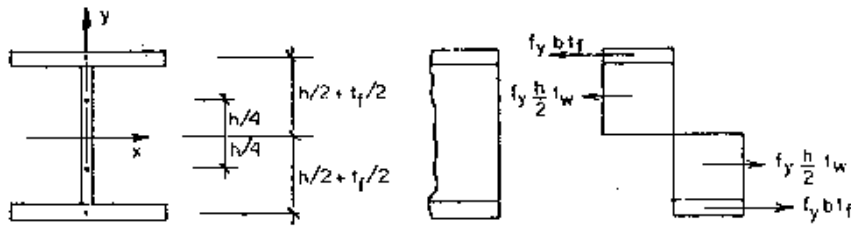


Figura 3.5 - Seção I plastificada – cálculo do módulo resistente plástico Z_x

Na plastificação total da seção, temos a partir do binário de forças atuantes na seção que o momento de plastificação, resumidamente:

$$M_p = \sigma_p \left(bth + t \frac{h^2}{4} \right)$$

Onde,

M_p = momento de plastificação da seção;

σ_p = tensão de plastificação do material (f_y na notação da NBR 8800:2008);

b = largura da mesa;

h = altura da alma do perfil;

t = espessura das chapas de mesa e alma, considerando que seja muito pequena.

A partir desta expressão, é possível definir o módulo resistente plástico (Z_x), que varia para cada tipo de seção.

$$M_p = Z_x \sigma_p = Z_x f_y$$

O fator de forma (f) é a razão entre esses dois módulos:

$$f = \frac{M_p}{M_x} = \frac{Z}{W}$$

Para momentos fletores acima do momento do início do escoamento (M_x), acontece gradualmente um aumento das zonas (seções) plastificadas. Quando esse momento atinge o momento de plastificação (M_p ou M_{pl}), há um trecho da viga onde a seção foi completamente plastificada. Nas seções onde o momento fletor é igual ao momento de



plastificação, é possível verificar a formação de uma rótula plástica, onde a viga se comporta de maneira similar ao efeito de uma rótula real.

Considerando a viga engastada abaixo e o seu modo de plastificação (nos apoios e na seção central):

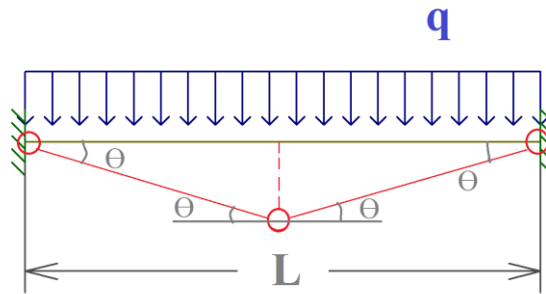


Figura 3.6 - Viga hiperestática com carga distribuída em seu modo de plastificação

A fim de aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), deve-se igual o trabalho das forças internas com o trabalho das forças externas. O trabalho das forças externas é:

$$W = \frac{qL}{2} \delta$$

Para pequenos deslocamentos, pode-se considerar que a tangente do ângulo é o próprio valor do ângulo (no caso, θ). Portanto:

$$\delta = \theta \frac{L}{2} \therefore W = \frac{qL^2}{4} \theta$$

Para as forças internas,

$$U = M_p(\theta + 2\theta + \theta)$$

Aplicando o PTV:

$$W = U \rightarrow 4M_p\theta = \frac{qL^2}{4} \theta \therefore q_p = \frac{16M_p}{L^2}$$



Onde q_p é a carga distribuída sobre a viga que leva a plastificação da seção central e M_p o momento de plastificação.

3.2 Formulação teórica do problema

3.2.1 Geometria do problema

No intuito de aplicar de forma prática, será demonstrada a seguir a otimização das seções transversais de um pórtico plano simples com o uso da extensão Solver do Excel, A função objetiva a ser minimizada é uma função do tipo custo que contém as variáveis das áreas que se pretende otimizar.

Suponha um pórtico de altura H , com espaçamento entre apoios L . Os pilares possuem seção transversal em I de área A_1 , momento de inércia I_1 . Já a viga é composta por uma seção transversal em I de área A_2 , momento de inércia I_2 . O módulo de elasticidade E é igual para ambos elementos. Este pórtico está sendo solicitado por um carregamento distribuído q ao longo de L , e por duas cargas pontuais P , cada uma aplicada sobre um pilar.

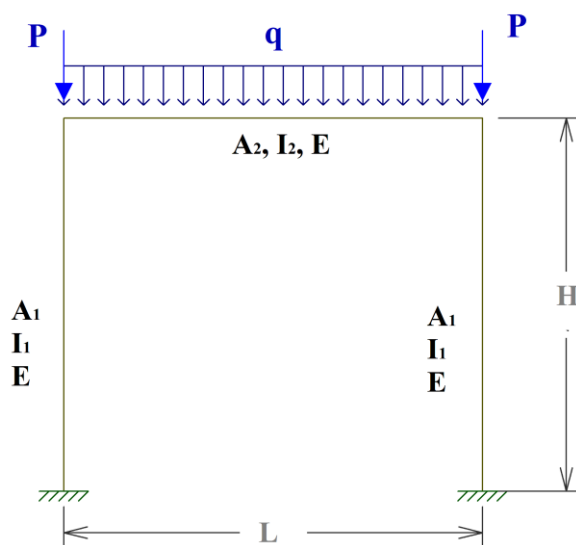


Figura 3.7 - Pórtico para a otimização



É importante ressaltar como premissa a simplicidade desse problema em vista da aplicação de conceitos básicos de resistência dos materiais. Portanto, pela natureza desta análise, não consideramos travamentos intermediários fora do plano do pórtico, nem será discutido efeitos de segunda ordem ou flexo-compressão no pilar do pórtico ou ainda outras considerações mais complexas propostas pela norma de estruturas metálicas NBR 8800/2008.

3.2.2 Função objetivo

A função objetivo a ser minimizada é a seguinte:

$$C_t = 2 C_1 A_1 \rho H + C_2 A_2 \rho L$$

Onde:

C_t = custo total (R\$)

C_1 = custo do material 1 (para os pilares, em R\$/kg);

A_1 = área da seção transversal dos pilares otimizada (m²);

ρ = peso específico do material (kg/m³);

H = comprimento do pilar (m);

C_2 = custo do material 2 (para as vigas, em R\$/kg);

A_2 = área da seção transversal da viga otimizada (m²);

L = comprimento da viga (m).

O custo para pilares e vigas pode ser o mesmo, mas a formulação considerando essa possível diferença facilita caso futuramente se queira estudar possibilidades de utilizar materiais com custos diferentes. Da mesma forma pode-se considerar peso específicos diferentes nas parcelas da função objetivo.



3.2.3 Variáveis

Deseja-se variar as dimensões do perfil de forma a obter uma solução ótima que minimize as áreas, atingindo parâmetros mínimos de resistência.

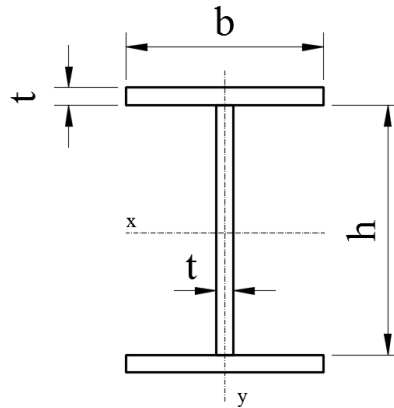


Figura 3.8 – Perfil I (esquemático)

As variáveis do projeto são as alturas das seções h_1 (para coluna), h_2 (para viga) e a largura da mesa b (para ambos). A dimensão t será fixada para a simplificação do problema.

A seção I tem como propriedades:

$$\text{Área: } A = t(2b + ht)$$

$$\text{Momento de Inércia: } I_x = t\left(\frac{h^3}{12} + \frac{bh^2}{2} + bh^2 + bt^2\right); I_y = \frac{ht^3}{12} + \frac{tb^3}{6}$$

$$\text{Módulo plástico da seção I: } Z_x = bt(h + t) + \frac{t}{4}h^2; Z_y = \frac{ht^2}{4} + \frac{b^2t}{2}$$

$$\text{Módulo elástico da seção I: } W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \text{ onde } y_{\max} = \frac{h + t}{2}$$

3.2.4 Restrições

A otimização de uma seção transversal deve obedecer a uma série de critérios relacionados a resistência da mesma a fim de obter um projeto ótimo e seguro.



A primeira restrição é que a carga solicitante no pilar (P_{sd}) deve ser menor que a carga crítica de flambagem:

$$P_{sd} \leq P_{cr}$$

Como as variáveis a serem otimizadas estão relacionadas a área, deve-se reescrever essa restrição em termos relacionados à área, a fim de obter uma restrição coerente com a função objetivo.

Para o caso dessa análise, será considerado o pior caso da equação demonstrada em 3.1.4, em que a carga crítica produz um valor menor, a favor da segurança:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_1}{4H^2}$$

Como por definição tensão é a razão entre a carga e área, e a tensão crítica é definida por:

$$\left(\frac{P_{cr}}{A}\right) = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E r^2}{4 H^2}$$

Temos, portanto, que a área crítica

$$A_{cr} = \frac{I_1}{r_1^2}$$

Como não é considerada a existência de travamentos intermediários fora do plano, é importante verificar a carga crítica do pilar para os eixos X-X e Y-Y da seção (P_{cr-x} e P_{cr-y} , respectivamente) e adotar o menor valor obtido entre os dois como a carga crítica, a favor da segurança.

$$P_{cr_x} = \frac{\pi^2 EI_{1x}}{4H^2}$$

$$P_{cr_y} = \frac{\pi^2 EI_{1y}}{4H^2}$$

A segunda principal restrição é que a carga distribuída q sobre a viga não deve ultrapassar a carga distribuída que causa a plastificação da viga por flexão (q_p).



$$q \leq q_p$$

Em 3.1.5, foi deduzido que a carga de plastificação para a viga é

$$q_p = \frac{16M_p}{L^2}$$

Considerando que a viga trabalha a flexão no eixo forte (X-X) e como:

$$M_p = Z_x f_y$$

Temos que:

$$q_p = \frac{16 Z_x f_y}{L^2}$$

Como o módulo resistente plástico está em termos de áreas, obtemos uma expressão que se adequa à função objetivo.

Para o caso do pórtico, será levado em consideração a possibilidade da plastificação da seção da coluna na ligação com a viga, comparando o momento na ligação viga-pilar com o momento que levaria a seção do pilar a plastificação total. Logo, temos uma nova restrição:

$$M_c \leq M_{pc}$$

Onde, M_c é o momento no topo da coluna e M_{pc} é o momento que leva a seção transversal da coluna à plastificação, que pode se dar ou no eixo X-X ou no eixo Y-Y da seção. Em termos de áreas, portanto, temos que:

$$M_{pc-x} = Z_{xc} f_y$$

$$M_{pc-y} = Z_{yc} f_y$$

É importante também limitar lateralmente os valores mínimos e máximos das variáveis, a fim de não encontrar valores irrealis. Isto será exemplificado mais adiante.



A fim de restringir a flambagem local dos perfis, tomamos emprestado algumas expressões da NBR 8800:2008 (anexo F):

- Para os pilares:

ALMA (anexo F da NBR 8800:2008, grupo 2):

$$\frac{h_1}{t} \leq 1,49 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

MESA (anexo F da NBR 8800:2008, grupo 5):

$$\frac{b}{2t} \leq 0,64 \sqrt{\frac{E}{f_y/kc}}, \text{ onde } kc = \sqrt{\frac{4}{\left(\frac{h_1}{t}\right)}}, 0,35 \leq kc \leq 0,76$$

- Para a viga:

MESA:

$$\frac{b/2}{t} \leq 0,38 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

ALMA:

$$\frac{h}{t} \leq 3,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Para flambagem global (NBR 8800:2008, item 5.3.4.1), deve-se obedecer que o índice de esbeltez não deve ser superior a 200:

$$\lambda = \frac{H}{r} \leq 200$$

4 APLICAÇÃO NUMÉRICA COM O USO DO SOLVER

O Excel é uma das ferramentas mais populares e úteis para diversos ramos das engenharias, por meio do qual diversas equações e rotinas de cálculo podem ser implementadas para facilitar o trabalho dos engenheiros. O Solver é um suplemento do Excel capaz de encontrar um valor ideal (máximo ou mínimo) para uma fórmula em uma



célula (função objetivo), segundo as restrições ou limites impostos, sobre os valores de outras células de fórmula em uma planilha. Esse suplemento do Excel ajusta os valores nas células variáveis a fim de satisfazer os limites impostos pelas células de restrição e retornar o resultado esperado para a célula da função objetivo.

Existem três métodos de solução: o método do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) Não Linear, o método Evolutionary, e o método LP Simplex. Para esta análise, foi utilizado o método GRG, que é um método para solução de problemas de programação matemática com função objetivo não-linear e restrições lineares ou não lineares.

Para a solução prática no Excel, considera-se o seguinte pórtico:

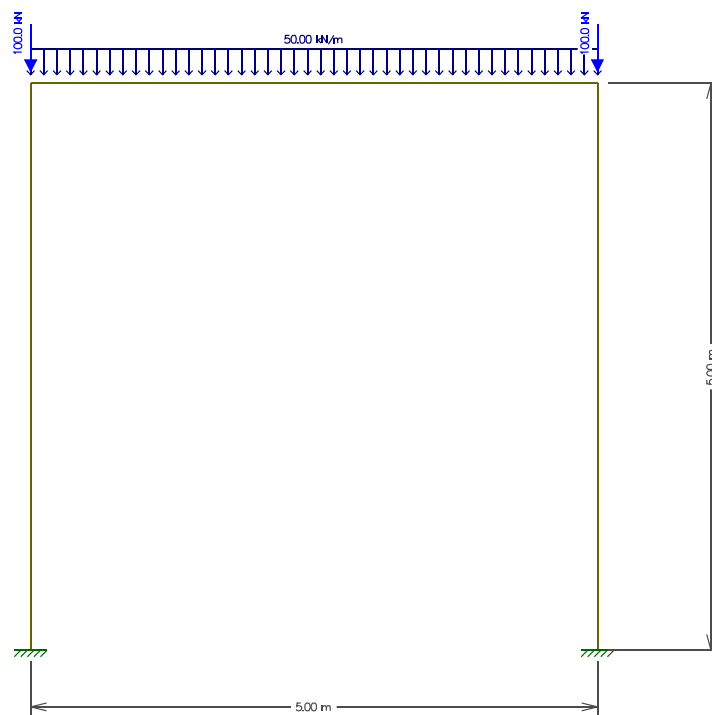


Figura 4.1 – Pórtico para otimização com o uso do Solver

Como dados de projeto:



Dados de projeto					
<i>Carga q</i>	50	kN	<i>L</i>	5	m
<i>P</i>	100	kN	<i>H</i>	5	m
Propriedades do aço					
<i>P_{sd}</i>	225	kN			
<i>M_{c (ftool)}</i>	69,4	kNm			
<i>E</i>	2,00E+08	kN/m ²			
<i>f_y</i>	3,45E+05	kN/m ²			

Tabela 4.1 – Dados de projeto

Onde P_{sd} é a carga solicitante no pilar do pórtico (reação vertical). Os valores do módulo de elasticidade e da tensão de escoamento/plastificação são valores típicos encontrados num ensaio de tração do aço.

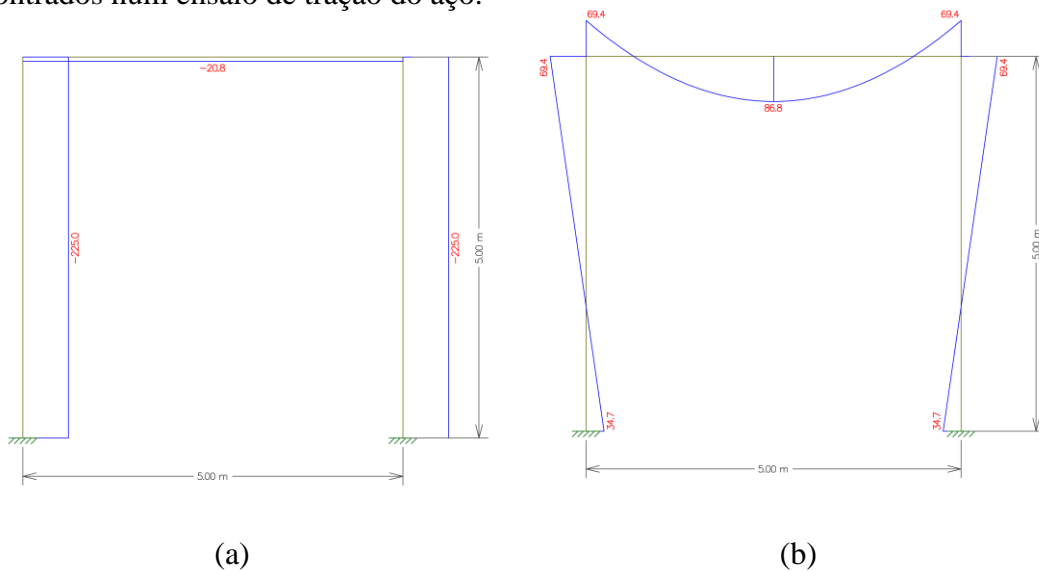


Figura 4.2 – Diagramas (a) de esforço normal e, (b) de momento fletor no pórtico

A fim de limitar lateralmente as variáveis no intuito de achar valores coerentes, foram estipuladas algumas restrições para a largura das abas e das alturas dos perfis, além das demais restrições apresentadas no item 3.2.4:

$$100 \leq b \leq 300 \text{ [mm]}$$

$$150 \leq h_1 \leq 300 \text{ [mm]}$$

$$150 \leq h_2 \leq 300 \text{ [mm]}$$



Tendo como objetivo minimizar a função custo a fim de otimizar a área, após inserir todas as restrições no Solver, o suplemento do Excel apresentou como solução os seguintes resultados:

Teste de otimização de custo de uma viga de perfil I			
Função objetivo	R\$ 723,33		
Objetivo	Minimizar custo para otimizar áreas das seções transversais		
Áreas		Propriedades ligadas à área da seção transversal	
A1	0,00614 m ²	I _x	7,68E-05 m ⁴
A2	0,00614 m ²	I _y	1,18E-05 m ⁴
		I _{2x}	7,68E-05 m ⁴
		Z _{x2} (viga)	0,00042 m ³
		r _{x1} (pilar)	0,11191 m
		r _{y1} (pilar)	0,04387 m
		Z _{x1} (pilar)	0,00042 m ³
		Z _{y1} (pilar)	0,00020 m ³
Variáveis		Custo 1	1 R\$/kg
b	0,181 m	Custo 2	1 R\$/kg
h1 (pilar)	0,150 m	Massa específica	7860 kg/m ²
h2 (viga)	0,150 m		
t (fixo)	0,012 m		
Restrições			
<i>Carga no pilar deve ser menor que carga crítica</i>			
P _{cr} (x)	1516,8 kN	P _{cr} (y)	233,1 kN
P _{cr adot}	233,1 kN	>=	P _{sd}
<i>Carga distribuída deve ser menor que a carga que leva a plastificação</i>			
q _p	92,4 kN	>=	q
<i>Momento na coluna deve ser menor que o seu momento de plastificação</i>			
M _{pc-x}	144,4 kNm	M _{pc-y}	69,4 kNm
M _{pc adot}	69,4 kNm	>=	Mc
<i>Limites laterais</i>			
b min	0,100 m		
b max	0,300 m		
h1 min	0,150 m		
h1 max	0,300 m		
h2 min	0,150 m		
h2 max	0,300 m		
<i>Flambagem global (NBR 8800, item 5.3.4.1)</i>			



$\lambda = H/r$	44,68	=<	200
<i>Flambagem local pilar</i>			
Alma			
$h1/t$	12,500	=<	$1,49\sqrt{(E/fy)}$ 35,875
Mesa			
$b/2t$	7,526	=<	$0,64\sqrt{(E/(fy/kc))}$ 11,590
			$kc = \sqrt{(4/(h1/t))}$ 0,566
<i>Flambagem local viga</i>			
Mesa			
$\lambda = (b/2)/t$	7,526	=<	$\lambda p = 0,38\sqrt{(E/fy)}$ 9,149
Alma			
$\lambda = h/t$	12,500	=<	$\lambda p = 3,76\sqrt{(E/fy)}$ 90,530
* Raio de giração - $r = \sqrt{(I/A)}$			

Tabela 4.2 – Resultados do Solver

É possível constatar que a restrição de momento de plastificação no topo da coluna na ligação entre viga-pilar foi a restrição predominante, pois se obteve o valor limite.

Ao executar o Solver com os mesmos carregamentos, porém um vão menor - por exemplo, $L = 2 \text{ m}$ - a carga $q_p \gg q$ ($q_p = 361,4 \text{ kN}$ e $q = 50 \text{ kN}$) e a altura do perfil que atende a solicitação é altura mínima que compõe a restrição dessa variável.

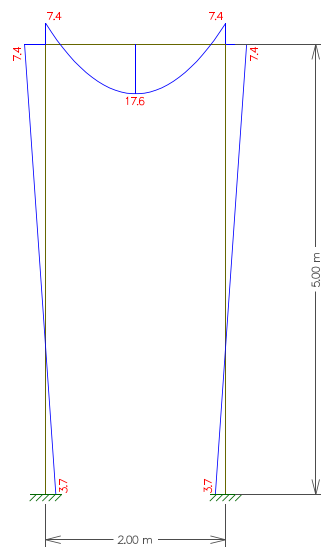


Figura 4.3 – Diagrama de momento fletor para viga com $L = 2 \text{ m}$



Teste de otimização de custo de uma viga de perfil I			
Função objetivo	R\$ 198,07		
Objetivo	Minimizar custo para otimizar áreas das seções transversais		
Áreas		Propriedades ligadas à área da seção transversal	
A_1	0,00420 m ²	I_{1x}	4,40E-05 m ⁴
A_2	0,00420 m ²	I_{1y}	2,02E-06 m ⁴
		I_{2x}	4,40E-05 m ⁴
		Z_{x2} (viga)	0,00026 m ³
		r_{x1} (pilar)	0,10241 m
		r_{y1} (pilar)	0,02194 m
		Z_{x1} (pilar)	0,00026 m ³
		Z_{y1} (pilar)	0,00007 m ³
Variáveis		$Custo\ 1$	1 R\$/kg
b	0,100 m	$Custo\ 2$	1 R\$/kg
h_1 (pilar)	0,150 m	$Massa\ específica$	7860 kg/m ²
h_2 (viga)	0,150 m		
t (fixo)	0,012 m		
Restrições			
<i>Carga no pilar deve ser menor que carga crítica</i>			
$P_{cr}(x)$	5434,2 kN	$P_{cr}(y)$	249,4 kN
$P_{cr\ adot}$	249,4 kN	\geq	P_{sd}
<i>Carga distribuída deve ser menor que a carga que leva a plastificação</i>			
q_p	361,4 kN	\geq	q
<i>Momento na coluna deve ser menor que o seu momento de plastificação</i>			
M_{pc-x}	90,4 kNm	M_{pc-y}	22,6 kNm
$M_{pc\ adot}$	22,6 kNm	\geq	M_c
<i>Limites laterais</i>			
$b\ min$	0,100 m		
$b\ max$	0,300 m		
$h_1\ min$	0,150 m		
$h_1\ max$	0,300 m		
$h_2\ min$	0,150 m		
$h_2\ max$	0,300 m		
<i>Flambagem global (NBR 8800, item 5.3.4.1)</i>			
$\lambda = H/r$	19,53	\leq	200
<i>Flambagem local pilar</i>			
Alma			
h_1/t	12,500	\leq	$1,49\sqrt{E/f_y}$ 35,875
Mesa			
$b/2t$	4,167	\leq	$0,64\sqrt{E/(f_y/k_c)}$ 11,590



	$kc = \sqrt{4/(h1/t)}$		0,566
<i>Flambagem local viga</i>			
Mesa			
$\lambda = (b/2)/t$	4,167	$=<$	$\lambda p = 0,38\sqrt{(E/fy)}$ 9,149
Alma			
$\lambda = h/t$	12,500	$=<$	$\lambda p = 3,76\sqrt{(E/fy)}$ 90,530
* Raio de giração - $r = \sqrt{I/A}$			

Tabela 4.3 – Solução do solver para vão da viga L = 2m

As restrições laterais são um fator muito importante, elas influenciam consideravelmente no custo final da estrutura.

Por exemplo, ao retornar ao primeiro exemplo (tabela 4.2), se reduzirmos o valor de $h_{1\text{mín}}$ e $h_{2\text{mín}}$ para zero, é obtido um custo menor e, tanto a carga distribuída que leva a plastificação como o momento que leva a plastificação no topo do pilar estão nos seus respectivos limites. No entanto, os valores obtidos para as alturas dos perfis não correspondem a valores praticados em projetos estruturais, sendo esta solução apenas uma forma de ilustrar a utilização do programa.

Teste de otimização de custo de uma viga de perfil I			
Função objetivo	R\$ 622,30		
Objetivo	Minimizar custo para otimizar áreas das seções transversais		
Áreas		Propriedades ligadas à área da seção transversal	
A_1	0,00524 m ²	I_{xx}	1,81E-05 m ⁴
A_2	0,00535 m ²	I_{yy}	1,20E-05 m ⁴
		I_{zz}	2,31E-05 m ⁴
		Z_{x2} (viga)	0,00023 m ³
Variáveis		r_{x1} (pilar)	0,05874 m
b	0,182 m	r_{y1} (pilar)	0,04795 m
$h1$ (pilar)	0,073 m	Z_{x1} (pilar)	0,00020 m ³
$h2$ (viga)	0,082 m	Z_{y1} (pilar)	0,00020 m ³
		$Custo 1$	1 R\$/kg
t (fixo)	0,012 m	$Custo 2$	1 R\$/kg



		<i>Massa específica</i>	7860 kgf/m ²
Restrições			
<i>Carga no pilar deve ser menor que carga crítica</i>			
<i>P_{cr} (x)</i>	356,9 kN		<i>P_{cr} (y)</i> 237,8 kN
<i>P_{cr adot}</i>	237,8 kN	>=	<i>P_{sd}</i>
<i>Carga distribuída deve ser menor que a carga que leva a plastificação</i>			
<i>q_p</i>	50,0 kN	>=	<i>q</i>
<i>Momento na coluna deve ser menor que o seu momento de plastificação</i>			
<i>M_{pc-x}</i>	69,4 kNm		<i>M_{pc-y}</i> 69,4 kNm
<i>M_{pc adot}</i>	69,4 kNm	>=	<i>Mc</i>
<i>Limites laterais</i>			
<i>b min</i>	0,100 m		
<i>b max</i>	0,300 m		
<i>h1 min</i>	0,000 m		
<i>h1 max</i>	0,300 m		
<i>h2 min</i>	0,000 m		
<i>h2 max</i>	0,300 m		
<i>Flambagem global (NBR 8800, item 5.3.4.1)</i>			
$\lambda = H/r$	85,12	=<	200
<i>Flambagem local pilar</i>			
<i>Alma</i>			
<i>h1/t</i>	6,072	=<	$1,49\sqrt{(E/f_y)}$ 35,875
<i>Mesa</i>			
<i>b/2t</i>	7,579	=<	$0,64\sqrt{(E/(f_y/k_c))}$ 13,434
			$k_c = \sqrt{(4/(h1/t))}$ 0,760
<i>Flambagem local viga</i>			
<i>Mesa</i>			
$\lambda = (b/2)/t$	7,579	=<	$\lambda_p = 0,38\sqrt{(E/f_y)}$ 9,149
<i>Alma</i>			
$\lambda = h/t$	6,867	=<	$\lambda_p = 3,76\sqrt{(E/f_y)}$ 90,530
* Raio de giração - $r = \sqrt{(I/A)}$			

Tabela 4.4 – Solução do solver para mudança da restrição nas alturas mínimas dos perfis, gerando uma mudança no valor

O que justifica a adoção de limites mínimos e máximos para as dimensões de um perfil são especificações de arquitetura ou de fabricação de perfil sob medida.

Ao desafixar o valor das espessuras das chapas dos perfis, é possível obter um custo ainda melhor:



Teste de otimização de custo de uma viga de perfil I			
Função objetivo	R\$ 667,58		
Objetivo	Minimizar custo para otimizar áreas das seções transversais		
Áreas		Propriedades ligadas à área da seção transversal	
A1	0,00566 m ²	I _{1x}	7,20E-05 m ⁴
A2	0,00566 m ²	I _{1y}	1,27E-05 m ⁴
		I _{2x}	7,20E-05 m ⁴
		Z _{x2} (viga)	0,00039 m ³
		r _{x1} (pilar)	0,11278 m
		r _{y1} (pilar)	0,04736 m
		Z _{x1} (pilar)	0,00039 m ³
		Z _{y1} (pilar)	0,00020 m ³
Variáveis		Custo 1	1 R\$/kg
b	0,193 m	Custo 2	1 R\$/kg
h1 (pilar)	0,150 m	Massa específica	7860 kg/m ²
h2 (viga)	0,150 m		
t (VARIÁVEL)	0,0106 m		
Restrições			
<i>Carga no pilar deve ser menor que carga crítica</i>			
P _{cr} (x)	1421,7 kN	P _{cr} (y)	250,7 kN
P _{cr adot}	250,7 kN	>=	P _{sd}
<i>Carga distribuída deve ser menor que a carga que leva a plastificação</i>			
q _p	85,4 kN	>=	q
<i>Momento na coluna deve ser menor que o seu momento de plastificação</i>			
M _{pc-x}	133,5 kNm	M _{pc-y}	69,4 kNm
M _{pc adot}	69,4 kNm	>=	M _c
<i>Limites laterais</i>			
b min	0,100 m		
b max	0,300 m		
h1 min	0,150 m		
h1 max	0,300 m		
h2 min	0,150 m		
h2 max	0,300 m		
<i>Flambagem global (NBR 8800, item 5.3.4.1)</i>			
λ = H/r	44,33	<=	200
<i>Flambagem local pilar</i>			
Alma			
h1/t	14,209	<=	1,49√(E/f _y) 35,875
Mesa			
b/2t	9,149	<=	0,64√(E/(f _y /k _c)) 11,224



	$kc = \sqrt{4/(h1/t)}$		0,531
<i>Flambagem local viga</i>			
Mesa			
$\lambda = (b/2)/t$	9,149	\leq	$\lambda p = 0,38\sqrt{(E/fy)}$ 9,149
Alma			
$\lambda = h/t$	14,209	\leq	$\lambda p = 3,76\sqrt{(E/fy)}$ 90,530
* Raio de giração - $r = \sqrt{I/A}$			

Tabela 4.5 – Solução do solver ao desafixar o valor de t, reduzindo o custo

Neste caso, a restrição de flambagem local foi predominante. Outro caso possível, é desassociar a dimensão da mesa, definindo como b1 a mesa do perfil do pilar e b2 a mesa do perfil da viga. Sendo assim, são obtidos os seguintes valores:

Teste de otimização de custo de uma viga de perfil I			
Função objetivo	R\$ 590,27		
Objetivo	Minimizar custo para otimizar áreas das seções transversais		
Áreas		Propriedades ligadas à área da seção transversal	
A1	0,00566 m ²	I _x	7,20E-05 m ⁴
A2	0,00369 m ²	I _y	1,27E-05 m ⁴
Variáveis		I _{2x}	3,87E-05 m ⁴
		Z _{x2} (viga)	0,00023 m ³
b1 (pilar)	0,193 m	r _{x1} (pilar)	0,11278 m
b2 (viga)	0,100 m	r _{y1} (pilar)	0,04736 m
h1 (pilar)	0,150 m	Z _{x1} (pilar)	0,00039 m ³
h2 (viga)	0,150 m	Z _{y1} (pilar)	0,00020 m ³
t (VARIÁVEL)	0,0106 m	Custo 1	1 R\$/kg
		Custo 2	1 R\$/kg
		Massa específica	7860 kg/m ²
Restrições			
<i>Carga no pilar deve ser menor que carga crítica</i>			
P _{cr} (x)	1421,7 kN	P _{cr} (y)	250,7 kN
P _{cr adot}	250,7 kN	\geq	P _{sd}
<i>Carga distribuída deve ser menor que a carga que leva a plastificação</i>			
q _p	50,5 kN	\geq	q



Momento na coluna deve ser menor que o seu momento de plastificação			
M_{pc-x}	133,5 kNm	M_{pc-y}	69,4 kNm
$M_{pc\ adot}$	69,4 kNm	\geq	M_c
Limites laterais			
$b\ min$	0,100 m		
$b\ max$	0,300 m		
$h1\ min$	0,150 m		
$h1\ max$	0,300 m		
$h2\ min$	0,150 m		
$h2\ max$	0,300 m		
Flambagem global (NBR 8800, item 5.3.4.1)			
$\lambda = H/r$	44,33	\leq	200
Flambagem local pilar			
Alma			
$h1/t$	14,209	\leq	$1,49\sqrt{(E/f_y)}$ 35,875
Mesa			
$b/2t$	9,149	\leq	$0,64\sqrt{(E/(f_y/k_c))}$ 11,224
			$k_c = \sqrt{(4/(h1/t))}$ 0,531
Flambagem local viga			
Mesa			
$\lambda = (b/2)/t$	9,149	\leq	$\lambda_p = 0,38\sqrt{(E/f_y)}$ 9,149
Alma			
$\lambda = h/t$	14,209	\leq	$\lambda_p = 3,76\sqrt{(E/f_y)}$ 90,530
* Raio de giração - $r = \sqrt{(I/A)}$			

Tabela 4.6 – Solução do solver ao desafixar o valor de t e associar um valor b1 para mesa do perfil do pilar e b2 para mesa do perfil da viga

Uma observação a ser feita é que os perfis metálicos raramente possuem a mesma espessura nas chapas das mesas e das almas.

Outra observação é que os valores das restrições laterais acabam gerando um custo maior do que poderia se obter a partir de perfis menores com os valores da otimização. No entanto, os valores muito pequenos dos resultados do solver não correspondem à prática de projeto de estruturas de aço.



5 CONCLUSÃO

Os problemas de engenharia são complexos e envolvem uma série de fatores que influenciam nas decisões de projeto e de execução. Por isso, é importante um estudo aprofundado das possibilidades, restrições, materiais etc., a fim de definir um projeto que chegue o mais próximo da solução ótima, respeitando as restrições impostas.

A aplicação numérica da otimização no Excel se mostrou coerente dentro dos valores esperados. Os valores de carga crítica axial são comumente muito maiores que os valores de carga de plastificação, o que mostra uma predominância dos efeitos causados pela flexão.

O problema analisado, na realidade, possui uma complexidade muito maior em restrições em relação as que foram consideradas. Foram desconsiderados efeitos de travamentos transversais ao pórtico, efeitos de flexo-compressão, além da simplificação da fórmula que Timoshenko propôs para a carga crítica de uma coluna de pórtico. A simplificação, no entanto, gera resultados razoáveis para uma análise inicial, o que permite concluir que o Excel se mostra muito útil para rotinas de cálculo de pré-dimensionamento. Esses valores obtidos em um pré-dimensionamento são importantes para balizar e orientar decisões posteriores no detalhamento do projeto.

A partir desta função objetivo, pode-se otimizar outros componentes do problema: seria possível maximizar os vãos, a partir de uma dada seção transversal, a fim de encontrar os vãos máximos para obter o melhor aproveitamento de uma dada seção transversal. Da mesma forma, seria possível maximizar as cargas que podem atuar no pórtico a partir de uma seção transversal pré-estabelecida.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROSAS E SILVA, Raul. **CIV1000 – METODOLOGIA DA ENGENHARIA CIVIL (Heurística, Otimização e Decisão para Engenheiros)**. 2008. 42 slides.

ROSAS E SILVA, Raul. **Comentários sobre a formalização da solução de problemas**. 2008. 34 slides.

M. KALAWATIS, Alex. **Otimização de pilares e vigas em concreto armado utilizando o Solver**. 2019. 52 f.. Trabalho de conclusão de curso – Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. 7ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 644 p.

TIMOSHENKO, Stephen P.; GERE, James M. **Theory of Elastic Stability**. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1985. 542 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**: NBR 8800:2008. Rio de Janeiro, 2008. 237 p.

VIRTUOSO, Francisco. **Disciplina de estruturas metálicas: Análise Plástica de Estruturas**. Lisboa, 2012. 51 f. Disponível em: <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1689468335593856/Analise%20plastica%20de%20estruturas.pdf>>. Acesso em: 17 novembro 2019.

RIBEIRO MAIA, João Paulo. **Otimização estrutural: estudo e aplicações em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta Solver**. São Carlos, 2009. Disponível em: http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/2009ME_JoaoPauloRibeiroMaia.pdf>. Acesso em: 17 novembro 2019.



VENTURA, Ana Mafalda F.M.. **Os Compósitos e a sua aplicação na Reabilitação de Estruturas metálicas.** Lisboa, 2009. Disponível em: <http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0870-83122009000200003>. Acesso em: 17 novembro 2019.

O QUE É OTIMIZAÇÃO E COMO APLICAR NA ENGENHARIA. Engenharia 360. 2015. Disponível em: <<https://engenharia360.com/o-que-e-otimizacao-e-como-aplicar-na-engenharia/>>. Acesso em: 17 novembro 2019.

IPEA. **Verticalização urbana e segregação socioespacial: Crise da cidade quadricentenária.** Disponível em: <<http://www.ipea.gov.br/code2011/chamada2011/pdf/area7/area7-artigo38.pdf>>. Acesso em: 17 novembro 2019.

VASCONCELLOS, Alexandre. **PLASTIFICAÇÃO DA SEÇÃO DE AÇO - Módulo Plástico Zx.** Disponível em: <<https://www.linkedin.com/pulse/plastificacao-da-secao-de-aco-da-se-de-a-7o-m-b3dulo-pl-astico-zx-vasconcellos/>>. Acesso em: 17 nov 2019.

PUC-Rio. **Projetos e gerenciamento de projetos.** Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/10385/10385_3.PDF>. Acesso em: 13 dez 2019