3
Filtro de Kalman

Criado por Rudolph E. Kalman [BROWN97] em 1960, o filtro de Kalman (FK) foi desenvolvido inicialmente como uma solução recursiva para filtragem linear de dados discretos. Para isto, utiliza equações matemáticas que implementam um estimador preditivo de estados, buscando corrigir interativamente a resposta de um determinado sistema através de múltiplas variáveis relacionadas a ele. Suas áreas de aplicação são muito diversificadas, tais como: processamento de imagem, supervisores de eventos discretos, processamento de sinais, sistemas de inferência, etc.

A estrutura original do filtro de Kalman está baseada no modelo de espaço de estados (MEE) desenvolvido, inicialmente, para sistemas lineares. Este modelo busca definir a relação entrada-saída de um sistema linear indiretamente, por meio de um conjunto de variáveis internas x_k denominadas estados. Os estados são influenciados por seus próprios valores passados x_{k-1} e pelas entradas do sistema, u_k, e por sua vez influenciam as saídas do sistema z_k.

O modelo propriamente dito é definido por duas equações: a equação de processo (Equação 1) e a equação de medida (Equação 2), também conhecida por equação de observação.

$$x_k = A.x_{k-1} + B.u_k + w_{k-1}, \quad x_k \in \Re \qquad (1)$$

$$z_k = H.x_k + v_k, \quad z_k \in \Re^n \qquad (2)$$

A equação de processo estima o estado atual x_k **,** também chamado de estado a posteriori, através da soma de três parcelas matemáticas. A primeira é composta por uma matriz A, que relaciona o estado atual do processo com o estado anterior x_{k-1} . A segunda também possui uma matriz B que relaciona o estado a posteriori com os pontos de monitoramento de entrada e controle do processo, representados por um vetor $u_k \in \Re^2$. A última parcela

w_{k-1} representa um ruído de processo do tipo branco com distribuição de probabilidade normal, que simula uma alteração gradativa de seu estado ao longo do tempo.

A equação de medida tem como objetivo associar o estado de entrada à saída do sistema através de um histórico de medidas. Para isto, é criado um novo valor de medida z_k através da soma do produto da matriz de correlação H, das medidas de entrada pelo estado atual, com o ruído de medida v_k , que possui as mesmas características do ruído de processo, porém, que independe do estado do mesmo.

A abstração deste modelo permite a elaboração de um algoritmo computacional capaz de estimar os valores ótimos do vetor de estado para os quais a saída vai ser ótima. Desta forma, é possível gerar uma seqüência de valores de estado por unidade de tempo, prevendo estados futuros com a utilização de estados atuais, permitindo a implementação de sistemas com atualizações em tempo real.

Antes de descrever como foi executado o filtro de Kalman é importante definir alguns conceitos e variáveis que serão utilizadas no algoritmo propriamente dito.

A variável $\hat{x}_k^-$ representa o estado a priori do processo em um determinado instante de tempo *k*. Já a variável $\hat{x}_k$ representa o estado a posteriori, também no tempo *k*, dado um valor de medida z_k calculado. Com estas informações é possível calcular os erros relativos a posteriori $e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$ e a priori $e_k = x_k - \hat{x}_k$, e conseqüentemente, suas estimativas a priori $P_k^- = E[e_k^- - e_k^{-T}]$ e a posteriori $P_k = E[e_k - e_k^T]$ relacionadas à covariância gerada entre os valores da entrada do processo.

Conforme pode ser visto na Figura 1, o algoritmo elaborado que executa o filtro de Kalman está dividido em basicamente duas etapas de processamento, uma é denominada atualização de tempo e outra atualização da medida. A seguir está descrita detalhadamente a execução deste procedimento.

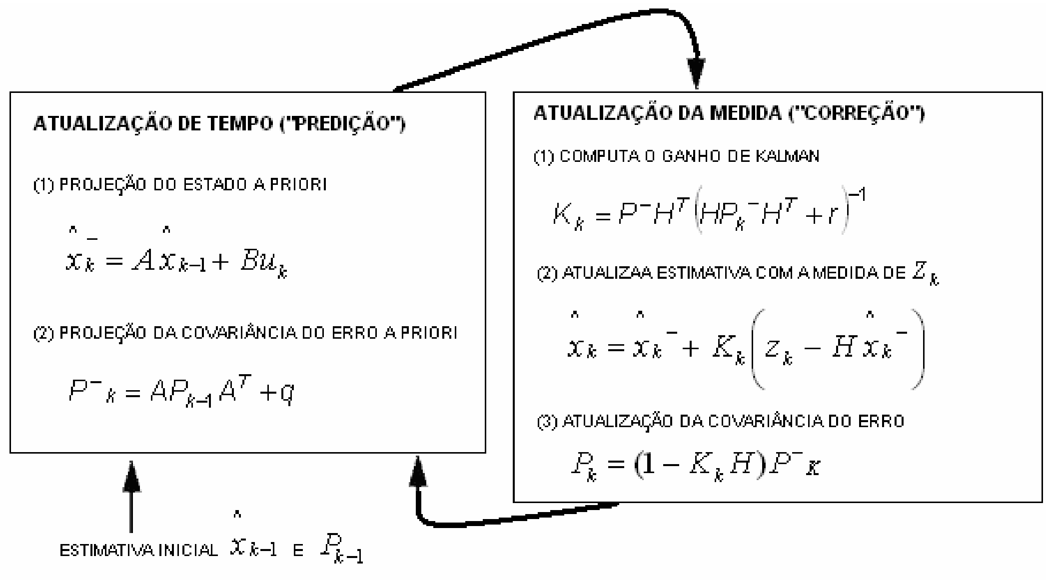

Figura 1: Algoritmo do filtro de Kalman.

O primeiro passo do algoritmo é estimar um valor de medida inicial que representará o estado anterior $\hat{x}_{k-1}$ e sua respectiva estimativa P_{k-1}. Com estes valores determinados, se torna possível executar a etapa de atualização de tempo, responsável por calcular a projeção do estado a priori, aplicando a conhecida equação de processo do MEE e a projeção do erro de covariância.

Dando prosseguimento, é executada a etapa de atualização de medida, que é responsável por calcular o ganho de Kalman, estimar o estado a posteriori e atualizar a covariância do erro. Note que nas equações existem dois termos que não foram definidos anteriormente, são eles o *q* e o *r*, que, por sua vez, representam as matrizes de covariância dos ruídos *w* e *v*, respectivamente.

Considerando que a grande maioria dos processos da natureza são modelados por funções não lineares, o filtro de Kalman original precisou sofrer algumas adaptações no seu conceito, de modo que permitisse a generalização destas aplicações [BOOTER96]. Sendo assim, utilizando expansões em série de Taylor, é possível linearizar a estimativa de um dado em torno da estimativa atual, utilizando as derivadas parciais das funções de processo e medida, mesmo com relações não lineares, definindo, desta forma, o filtro de Kalman estendido (FKE).

Sendo assim, o FKE é regido por equações diferenciais estocásticas não lineares, segundo o MEE, onde a função *f* relaciona o estado no instante *k-1*, o sinal de entrada u_k e o ruído w_{k-1}, com o estado no instante k, ou seja,

$x_k = f(x_{k-1}, u_k, w_{k-1})$; e a função h relaciona o estado x_k e o ruído v_k, com a medida z_k, ou seja, $z_k = h(x_k, v_k)$.

Como os valores instantâneos de cada ruído W_k e V_k não são conhecidos, utiliza-se um resultado aproximado dos vetores de estado e de medida para realizar a linearização das equações $\bar{x}_k = f(x_{k-1}, u_k, 0)$ e $\bar{z}_k = h(\bar{x}, 0)$ através de expansões por séries de Taylor. Como resultado obtém-se as relações dadas pelas Equações 3 e 4, adiante.

$$x_k = \bar{x}_k . A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \hat{w}_{k-1} \quad (3)$$

$$z_k = \bar{z}_k + H(x_k - \bar{x}_{k-1}) + \hat{v}_k \quad (4)$$

Onde:

- x_k e z_k são vetores reais de estado e medida;
- $\bar{x}_k$ e $\bar{z}_k$ são vetores aproximados de estado e medida;
- $\hat{x}_k$ é o estimador a posteriori do estado no instante *k*;
- *A* é matriz jacobiana das derivadas parciais de *f* em relação a x;
- $\hat{w}$ é matriz jacobiana das derivadas parciais de *f* em relação a w;
- *H* é matriz jacobiana das derivadas parciais de *h* em relação a x;
- $\hat{v}$ é matriz jacobiana das derivadas parciais de *h* em relação a *v*;

Baseado nestas novas notações os erros de predição e residual podem ser reescritos como $\bar{e}_k = A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \varepsilon_k$ e $e_k = He_k^- + \eta_k$, onde ε_k e η_k representam variáveis aleatórias com média zero e matrizes de covariância WQW^T e VRV^T, sendo *Q* e *R* as covariâncias do ruído de processo e de medida, respectivamente. Maiores esclarecimentos podem ser encontrados em [JULIER96], de qualquer forma, é válido apresentar como é executado o algoritmo do FKE (Figura 2) e que influências seriam causadas com a inserção de ruídos brancos no sistema.

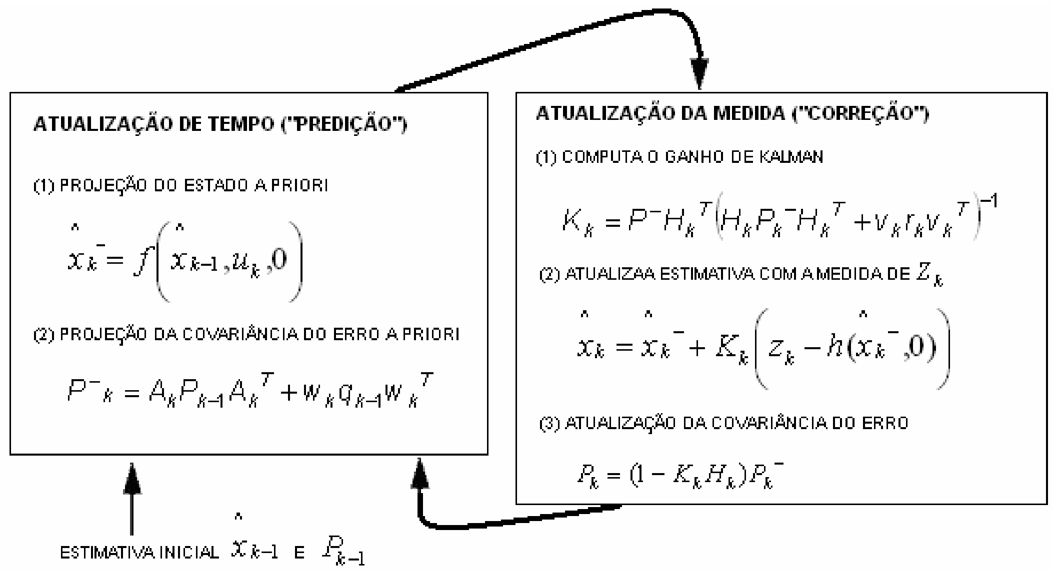

Figura 2: Algoritmo do filtro de Kalman estendido.

Novamente, o primeiro passo do algoritmo é estimar um valor de medida inicial que representará o estado anterior $\hat{x}_{k-1}$ e sua respectiva estimativa P_{k-1}. Da mesma forma que no filtro de Kalman original, executa-se a etapa de atualização de tempo, calculando a projeção do estado a priori do processo e da covariância do erro. Uma vez definidas tais variáveis, pode-se aplicar a etapa de atualização de medida, calculando o ganho de Kalman, estimando o estado a posteriori e atualizando a covariância do erro. A recursividade se completa quando os valores a posteriori são substituídos pelos novos valores a priori, e os cálculos do FKE são realizados novamente.