

## 2

## Teoria Geométrica da Difração - Teoria Uniforme da Difração.

A análise do espalhamento e radiação das ondas eletromagnéticas sobre os objetos utilizando soluções modais é restrita a objetos cujas superfícies são descritas facilmente por coordenadas ortogonais. A maioria das soluções existente apresenta a forma de séries infinitas, as quais possuem baixa convergência quando as dimensões do objeto são grandes se comparadas ao comprimento de onda.

Quando as dimensões do objeto não são muito maiores que o comprimento de onda, pode-se utilizar o método da equação integral (IE). A vantagem deste método é que ele pode ser usado para objetos de qualquer forma, porém necessita de grande esforço computacional para seus cálculos. A solução do método da equação integral (IE) é geralmente realizada através do método dos momentos (MoM).

Quando as dimensões dos objetos são muito maiores que o comprimento de onda, os métodos assintóticos para altas frequências podem ser utilizados para a análise matemática do espalhamento das ondas eletromagnéticas. A teoria geométrica da difração (GTD) e sua extensão, a teoria uniforme da difração (UTD), merecem especial atenção.

A GTD é uma extensão da ótica geométrica clássica (GO), com seus raios diretos, refletidos e refratados. Ela supera as limitações da ótica geométrica, introduzindo o conceito de difração formulada por Keller [1]. A UTD é uma extensão da GTD, por corrigir a limitação existente nas regiões de transição dos raios direto e refletido, desenvolvida por Kouyoumjian e Pathak [2].

### 2.1.

### Ótica Geométrica

A ótica geométrica utiliza o conceito de raios criado pela ótica clássica para caracterizar os raios diretos, refletidos e refratados, considerando informações de fase, polarização e amplitude dos campos eletromagnéticos. A propriedade mais significativa dos campos de alta frequência da ótica geométrica em meios

homogêneos e sem perdas é o comportamento de onda plana, localmente, em qualquer ponto da propagação do raio.

Para a ótica clássica, os raios refletidos e refratados estão relacionados ao raio incidente através das leis de reflexão (Lei de Snell) e refração. O percurso descrito por qualquer raio segue o princípio de Fermat [3] que corresponde à curva que minimiza o caminho ótico, expresso por:

$$C.O = \int_c n(l) dl \quad (2.1)$$

onde  $n(l)$  é o índice de refração do meio. Em meios homogêneos, onde  $n$  é constante, os raios são formados por linhas retas.

A direção de propagação de um raio é dada pelo seu vetor diretor, tangente à trajetória em cada ponto e ortogonal às superfícies equifásicas (ou frentes de onda).

As frentes de onda podem ser calculadas por intermédio da equação de eikonal [3], expressa por:

$$|\nabla\Psi_n(x, y, z)|^2 = \left\{ \frac{\partial\Psi_n}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial\Psi_n}{\partial y} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial\Psi_n}{\partial z} \right\}^2 = n^2(s) \quad (2.2)$$

A figura 2.1 apresenta alguns exemplos de frentes de onda para os casos de ondas planas, esféricas e para um caso genérico, onde os raios de curvaturas nos planos principais são diferentes (frente de onda astigmática).

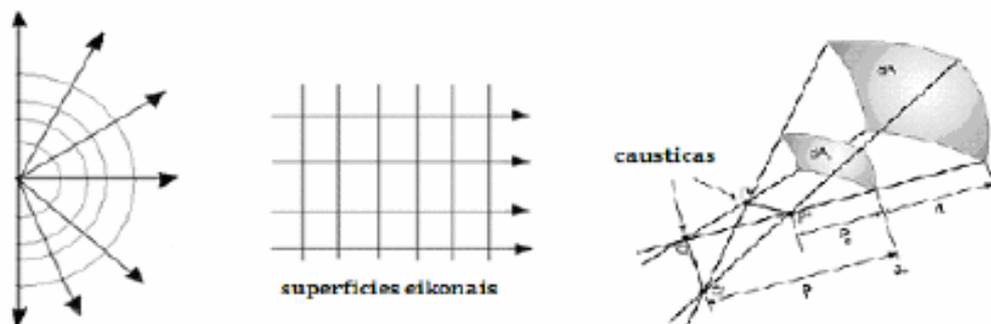


Figura 2.1: Superfícies eikonais: cilíndricas, planas e astigmáticas (reproduzidas da referência [17]).

Na ótica geométrica, o transporte de energia ocorre no sentido da trajetória dos raios e não transversalmente, exceto para ondas evanescentes. Para entender o transporte de energia e sua conservação, é importante o conceito de tubo de raios [3].

Define-se como tubo de raios [3] o conjunto de raios adjacentes (raios paraxiais) ao raio principal que se deseja analisar (raio axial), conforme ilustrado na figura 2.2 abaixo:

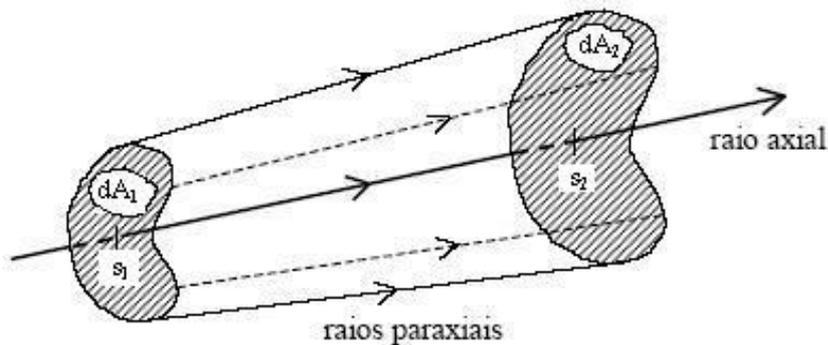


Figura 2.2: Tubo de raios (reproduzida da referência [18]).

Quando os raios de curvatura que formam o tubo de raios são diferentes, o tubo é chamado astigmático, pois os raios não apresentam um único foco, cruzando em pontos diferentes. As linhas entre os pontos de foco são chamadas cáusticas.

### 2.1.1. Relações de Amplitude, Polarização e Fase da Onda Eletromagnética.

Como dito na seção 2.1, a energia é transportada dentro do tubo de raios, havendo sua conservação no tubo. Com isso, pode-se afirmar que a densidade de radiação  $S_1$  no ponto de referência  $s_1$  está relacionada com a densidade de radiação  $S_2$  no ponto de referência  $s_2$  por:

$$\frac{S_2(s_2)}{S_1(s_1)} = \frac{dA_1}{dA_2} \quad (2.3)$$

onde  $dA_1$ ,  $dA_2$ ,  $s_1$  e  $s_2$  estão representados na figura 2.2.

Para ondas eletromagnéticas na região de campo distante [4], o campo elétrico  $E(r, \theta, \varphi)$  está relacionado à densidade de radiação  $S(r, \theta, \varphi)$  por:

$$S(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\eta} |E(r, \theta, \varphi)|^2 \quad (2.4)$$

onde  $\eta$  é a impedância intrínseca do meio. Entende-se por região de campo distante [4] ou região de Fraunhofer aquela formada por pontos de observação situados a uma distância física da antena transmissora correspondente a:

$$d > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (2.5)$$

onde  $D$  é a maior dimensão da antena transmissora e  $\lambda$  o comprimento de onda.

Com isso, a amplitude do campo elétrico ao longo do tubo de raios é definida por:

$$\frac{|E|}{|E_0|} = \sqrt{\frac{dA_1}{dA_2}} \quad (2.6)$$

Assim, para uma onda representada por um tubo de raios astigmático, a amplitude do campo elétrico está relacionada por:

$$\frac{|E|}{|E_0|} = \sqrt{\frac{dA_1}{dA_2}} = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} \quad (2.7)$$

onde  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são os raios de curvatura principais da frente de onda associados ao raio, apresentados na figura 2.1 e  $s$  um ponto de observação.

Para introduzir informações de fase e polarização na expressão do campo elétrico resultante da ótica geométrica, utiliza-se a expansão para altas frequências de Luneberg-Kline em sua primeira ordem de aproximação [1]. Com isso, a equação do campo elétrico correspondente a um raio que se propaga em espaço livre pode ser escrita como:

$$\vec{E}(s) = \vec{E}_0(0) \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)}} e^{-j\beta s} \quad (2.8)$$

onde:

$\vec{E}(s)$  é o campo elétrico no ponto desejado  $s$ ;

$\vec{E}_0(0)$  é o campo elétrico no ponto de referência;

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda, sendo  $\lambda$  o comprimento de onda, definido

por  $\lambda = c/f$ , sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo ( $3 \times 10^8$  m/s) e  $f$  a frequência em Hz.

### 2.1.2. Campo da Onda Direta e Campo da Onda Refletida

A equação do campo elétrico  $\vec{E}_0(\theta, \varphi)$  associado a um raio direto a uma distância  $s$  é dada por [4]:

$$\vec{E}(s, \theta, \varphi) = \vec{E}_0(\theta, \varphi) \frac{e^{-j\beta s}}{s} \quad [\text{V/m}] \quad (2.9)$$

onde  $\vec{E}_0(\theta, \varphi)$  é o campo elétrico com componentes  $E_\theta$  e  $E_\varphi$  nas direções  $\theta$  e  $\varphi$ , conforme pode ser visto na figura 2.3;

A equação 2.9 pode ser obtida a partir da equação 2.8 para uma onda esférica, supondo que não há distinção entre os raios de curvatura principais. Logo,  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$ , e o fator de divergência da expressão (2.8) fica:

$$\sqrt{\frac{\rho_0^2}{(\rho_0 + s)^2}} = \frac{\rho_0}{\rho_0 + s} \quad (2.10)$$

Se o ponto de referência é tomado em  $\rho_0 = 0$ , a equação 2.8 torna-se:

$$\vec{E}(s) = \vec{E}_0(0) \frac{\exp(-j\beta s)}{s} \quad (2.11)$$

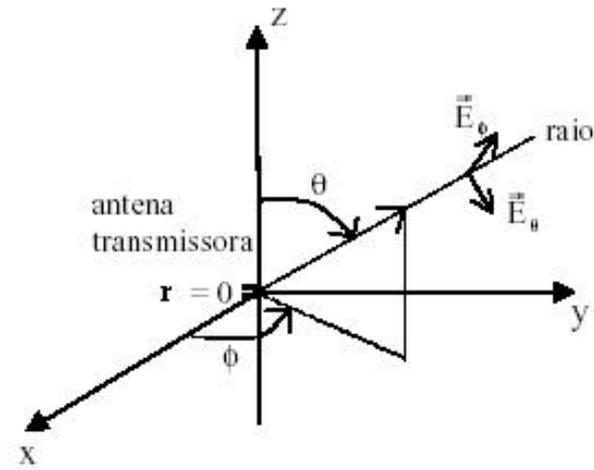


Figura 2.3: Sistema de coordenadas esféricas associado à antena transmissora (reproduzida da referência [18]).

A reflexão é um dos mecanismos de propagação das ondas eletromagnéticas que ocorre quando os sinais do transmissor incidem nas superfícies existentes no ambiente. Estas superfícies podem ser o próprio terreno ou paredes de edificações, cujas dimensões são superiores ao comprimento de onda.

Este mecanismo causa alteração na amplitude e fase do campo elétrico e alteração no sentido de propagação da onda eletromagnética.

A figura 2.4 ilustra os ângulos e apresenta um sistema de coordenadas fixo ao raio.

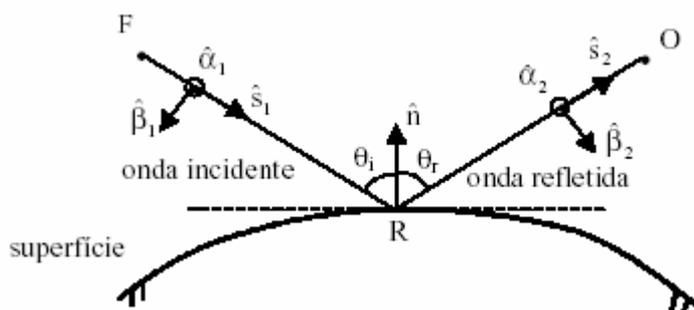


Figura 2.4: Reflexão e sistema de coordenadas fixo ao raio para a reflexão (vista do plano de incidência - reproduzida da referência [17]).

Na figura 2.4, identifica-se:

$\hat{n}$ : vetor unitário normal à superfície refletora no ponto de reflexão R.

$\theta_i = \arccos(-\hat{n} \cdot \hat{s}_1)$ : ângulo de incidência definido entre a direção de propagação da onda incidente e o vetor normal.

$\theta_r$ : ângulo de reflexão definido entre a direção de propagação da onda refletida e o vetor normal.

Plano de Incidência: plano que contém o raio incidente ( $\hat{s}_1$ ) e a normal.

Plano de Reflexão: plano que contém o raio refletido ( $\hat{s}_2$ ) e a normal.

A direção da onda refletida segue a lei de Snell, onde:

$$\theta_i = \theta_r \quad (2.12)$$

Como se observa na figura, os dois planos são coincidentes. Isto é, o raio incidente, o raio refletido e a normal estão no mesmo plano. Os vetores  $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{s}_1$  e  $\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{s}_2$  definem o sistema de coordenadas fixo aos raios incidente e refletido, respectivamente.

Com isso, os campos elétricos incidente e refletido podem ser escritos em função dos vetores unitários  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ . As direções destes vetores são definidas por:

$$\begin{aligned} \hat{s}_2 &= \hat{s}_1 - 2(\hat{n} \cdot \hat{s}_1)\hat{n} \\ \hat{\alpha}_1 &= \hat{s}_1 \times \hat{n} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_1 = \hat{s}_1 \times \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 &= \hat{s}_2 \times \hat{n} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_2 = \hat{s}_2 \times \hat{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

O campo elétrico refletido em um ponto de observação O pode ser escrito como:

$$\vec{E}^r(O) = \left| E_{\alpha_2}^r \hat{\alpha}_2 + E_{\beta_2}^r \hat{\beta}_2 \right| A^r e^{-j\beta d_2} \quad (2.14)$$

$\vec{E}^r(O)$  é o campo elétrico refletido no ponto de observação O.

$A^r$  é o fator de divergência do tubo de raios refletido.

$\beta$  definido em (2.8)

$d_2$  [m] é a distância entre o ponto de reflexão R e o ponto de observação O.

As componentes de campo perpendiculares ao plano de incidência e de reflexão são chamadas de componentes *soft* e as componentes de campo paralelas ao plano de incidência e de reflexão são chamadas de componentes *hard*.

A relação entre as componentes *soft* ( $E_{\alpha_2}^r$ ) e *hard* ( $E_{\beta_2}^r$ ) dos raios refletidos e incidentes é caracterizada por:

$$\begin{pmatrix} E_{\alpha_2}^r \\ E_{\beta_2}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_s & 0 \\ 0 & \Gamma_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\alpha_1}^i \\ E_{\beta_1}^i \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

onde  $\Gamma_s$  e  $\Gamma_h$  são os coeficientes de reflexão de Fresnel dados por [1]:

$$\Gamma_s(\theta_i) = \frac{\cos(\theta_i) - \sqrt{\varepsilon_{ef_2} - \text{sen}^2(\theta_i)}}{\cos(\theta_i) + \sqrt{\varepsilon_{ef_2} - \text{sen}^2(\theta_i)}} \quad (2.16)$$

$$\Gamma_h(\theta_i) = \frac{\varepsilon_{ef_2} \cos(\theta_i) - \sqrt{\varepsilon_{ef_2} - \text{sen}^2(\theta_i)}}{\varepsilon_{ef_2} \cos(\theta_i) + \sqrt{\varepsilon_{ef_2} - \text{sen}^2(\theta_i)}} \quad (2.17)$$

onde:

$\theta_i$  é o ângulo de incidência, já definido.

$\varepsilon_{ef_2} = \frac{\varepsilon_2 - j \frac{\sigma_2}{\omega}}{\varepsilon_0}$  é a permissividade elétrica relativa ao meio 2.

$\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$  [F/m] é a permissividade elétrica no espaço livre.

$\sigma_2$  [Siemens/m] é a condutividade elétrica no meio 2.

$\omega = 2\pi f$  [rad/s] é a frequência angular com  $f$  em Hz.

É de interesse do trabalho utilizar somente superfícies planas. Logo, os raios principais de curvatura da onda refletida são iguais ao da onda incidente

( $\rho_i = \rho_r$ ) no ponto de reflexão R. Por isso, o fator de divergência  $A^r$  do campo refletido dado pela equação (2.14) é igual ao fator de divergência mostrado em (2.6):

$$A^r = \sqrt{\frac{\rho_1^r \rho_2^r}{(\rho_1^r + s)(\rho_2^r + s)}} \quad (2.18)$$

A reflexão sobre uma superfície plana não altera a forma da frente de onda incidente, pois o fenômeno é equivalente ao resultante de uma fonte localizada na imagem da fonte real em relação à superfície refletora.

A utilização do coeficiente de reflexão de Fresnel supõe que a superfície refletora seja suave (especular), o que não ocorre na prática. Para considerar o efeito da rugosidade da superfície refletora, tal coeficiente deve ser multiplicado por um coeficiente de espalhamento dado por [5]:

$$C_e = \exp(-\xi^2 / 2) I_0(\xi^2 / 2) \quad (2.19)$$

onde:

$\xi = 4\pi(S_h / \lambda) \text{sen}(\theta)$  é o parâmetro de Rayleigh para superfícies rugosas, sendo  $S_h$  a rugosidade do terreno e  $\theta$  o ângulo de incidência sobre um plano de referência no terreno.

$I_0(x)$  é a função de Bessel modificada de ordem zero e argumento  $x$ .

## 2.2. Teoria Geométrica da Difração

A difração é o mecanismo de propagação capaz de explicar a presença de campos eletromagnéticos em regiões nas quais, pela ótica geométrica clássica, os mesmos não existiriam. A difração ocorre quando as ondas transmitidas encontram a borda de uma superfície, a aresta formada pela interseção de duas superfícies, o vértice de um sólido ou quando as ondas incidem de forma rasante sobre uma superfície curva. Tais obstáculos encontrados pelos sinais eletromagnéticos podem ser naturais ou artificiais em ambiente urbano, suburbano e rural.

A classe de raios difratados complementa a ótica geométrica, pois supre sua deficiência em não prever valores de campo para as regiões de sombra, formadas pelo espalhamento das ondas eletromagnéticas quando encontram um obstáculo.

De acordo com a teoria geométrica da difração e supondo uma geometria bidimensional, pode-se dividir o espaço em 3 regiões, como mostra a figura 2.5 abaixo:

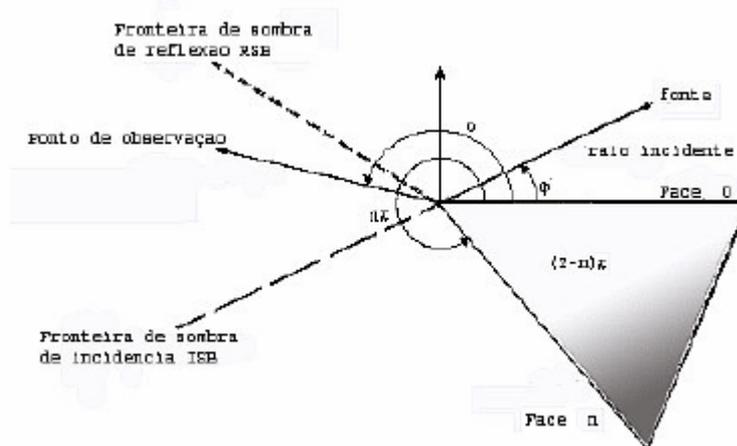


Figura 2.5: Raio incidente sobre aresta de obstáculo, mostrando a formação da região de sombra e suas fronteiras ISB e RSB (reproduzida da referência [17]).

A região I corresponde à região que possui visibilidade para os raios refletido e direto. Sua fronteira é formada pelo raio refletido na aresta do obstáculo, sendo conhecida como RSB (limite de sombra para a reflexão, em inglês *reflection shadow boundary*).

A região II corresponde à região onde só existe raio direto. Sua fronteira é formada pelo prolongamento do raio incidente sobre a aresta do obstáculo,

sendo conhecida como ISB (limite de sombra para a incidência, em inglês *incidence shadow boundary*).

A região III corresponde à região de sombra, onde, pela ótica geométrica clássica, não há raio direto e nem raios refletidos. Inicia-se após a fronteira ISB.

Os raios difratados passam a completar esta ausência de raios na região de sombra.

A difração, assim como os outros mecanismos de propagação, é um fenômeno local em altas frequências. O valor do campo difratado é proporcional ao valor do campo incidente no ponto de difração multiplicado por um coeficiente de difração. Os coeficientes de difração são determinados por intermédio de soluções assintóticas de problemas canônicos, o que foi proposto por Keller em 1953 [1], com a famosa teoria geométrica da difração (GTD).

Keller [1] generalizou o princípio de Fermat, estabelecendo uma analogia entre os fenômenos de difração e os de reflexão e refração da ótica geométrica. Em particular, os raios difratados podem penetrar tanto nas regiões de sombra como nas regiões iluminadas.

A GTD falha nas regiões próximas às fronteiras de sombra por incidência (ISB) e reflexão (RSB), pois o coeficiente de difração apresenta singularidade nestas regiões. O coeficiente de difração definido pela GTD é proporcional a [1]:

$$D_{s,h} \alpha \left[ \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\varphi - \varphi'}{n}\right)} \mp \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\varphi + \varphi'}{n}\right)} \right] \quad (2.20)$$

Onde  $\varphi'$  é o ângulo formado pelo raio incidente com a face 0 do obstáculo e  $\varphi$  é o ângulo formado pelo raio incidente com a face n do obstáculo, conforme observa-se na figura 2.5.

Com isso, para valores de  $\varphi = \pi + \varphi'$  ou  $\varphi = \pi - \varphi'$ , os coeficientes de difração *soft* ( $D_s$ ) e *hard* ( $D_h$ ) (relativos aos componentes de campo perpendiculares ao plano de incidência e componentes de campo paralelos, respectivamente) são singulares.

### 2.3. Teoria Uniforme da Difração

A Teoria Uniforme da Difração (UTD) foi desenvolvida por Kouyoumjian e Pathak [2] como extensão da Teoria Geométrica da Difração de Keller [1], corrigindo-a quanto às singularidades apresentadas nas regiões de transição.

Como interesse deste trabalho, será mostrado o desenvolvimento da UTD para arestas retas formadas pela interseção de superfícies planas e incidência oblíqua de raios, como mostra a figura 2.6 abaixo:

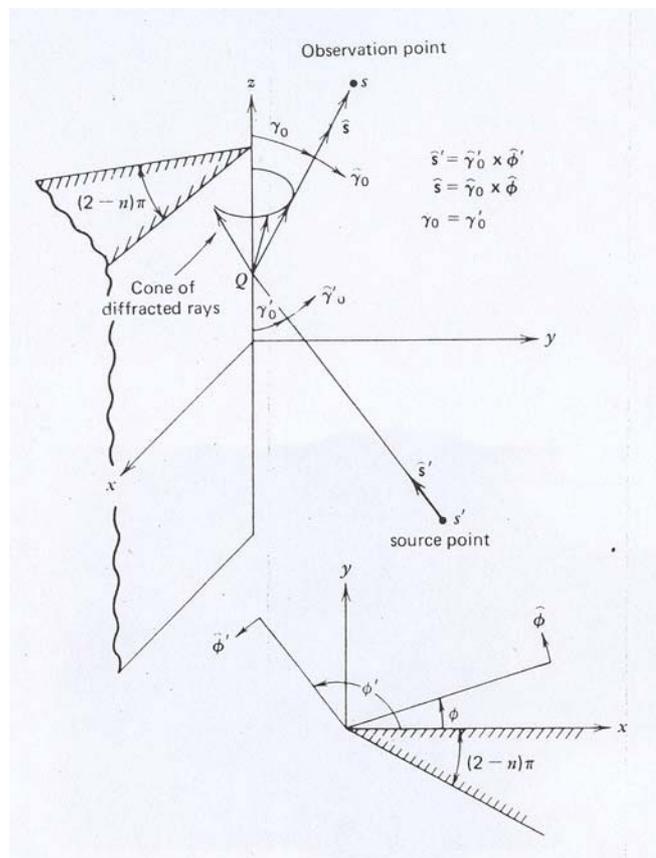


Figura 2.6: Geometria 3D do obstáculo para o cálculo de difração (reproduzida da referência [6]).

A figura acima mostra o sistema de coordenadas esféricas centrado no ponto de difração Q, conhecido como sistema de coordenadas fixo ao raio. Considerando-se a posição da fonte, o raio incidente pode ser definido pelas coordenadas esféricas  $(s', \gamma'_0, \phi')$ , e o ponto de observação pelas coordenadas  $(s, \gamma_0, \phi)$  como mostrado na figura 2.6.

O plano contendo o raio incidente e a aresta será o plano de incidência e o plano contendo o raio difratado e a aresta será o plano de difração. O vetor



onde  $[E^d]$  e  $[E^i]$  são matrizes coluna contendo as componentes escalares dos campos difratado e incidente, respectivamente,  $[D]$  é uma matriz quadrada contendo os coeficientes escalares de difração,  $s$  é a distância da aresta ao ponto de observação e  $A(s)$  é o fator de espalhamento.

Utilizando-se este sistema de coordenadas fixo ao raio, garante-se a inexistência de componente de campo difratado na direção do tubo de raios difratados, já que também não existe componente de campo na direção do tubo de raios incidentes.

Assim, só existem duas possíveis componentes de campo elétrico  $E_\gamma$  e  $E_\varphi$ , tanto para o campo incidente quanto para o difratado. Logo, fica claro que  $[D]$  é uma matriz quadrada 2x2 com termos somente na diagonal principal. Com isso, as componentes do campo elétrico difratado no sistema fixo ao raio podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} E_\gamma^d(s) \\ E_\varphi^d(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_h & 0 \\ 0 & -D_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_\gamma^i(Q) \\ E_\varphi^i(Q) \end{bmatrix} A(s) e^{-j\beta s} \quad (2.22)$$

Assim como no caso da reflexão, as componentes de campo perpendiculares ao plano de incidência e difração são chamadas de componentes *soft* e as componentes de campo paralelas ao plano de incidência e difração são chamadas de componentes *hard*.

Em 1967, Kouyoumjian e Pathak [2] obtiveram uma expressão para a função usada para o cálculo da difração, definida por  $v_B(L, \varphi^\pm)$ , onde  $L$  é um parâmetro dependente da distância entre a aresta e o ponto de observação da Teoria Geométrica da Difração [2].

No trabalho apresentado pelos autores citados, o parâmetro de distância  $L$  era dado por:

$$\begin{aligned} L &= s \sin^2 \gamma_0 && \text{para ondas planas} \\ L &= \frac{\rho \rho'}{\rho + \rho'} \quad \rho = s \sin(\gamma_0) \quad \text{e} \quad \rho' = s' \sin(\gamma_0) && \text{para ondas cilíndricas} \quad (2.23) \\ L &= \frac{ss' \sin^2 \gamma_0}{s + s'} && \text{para ondas esféricas} \end{aligned}$$

Com isso, o parâmetro  $L$  é função do tipo de onda incidente e do ângulo de incidência  $\gamma_0$ .

De acordo com [3], os coeficientes escalares de difração  $D_s$  e  $D_h$  são:

$$D_{h,s}(L, \varphi, \varphi') = \frac{-e^{-j(\pi/4)}}{2n\sqrt{2\pi\beta} \operatorname{sen} \gamma_0} \{D_1 + D_2 \mp D_3 + D_4\}$$

$$D_1 = \cot\left(\frac{\pi + (\varphi - \varphi')}{2n}\right) F[\beta La^+(\varphi - \varphi')]$$

$$D_2 = \cot\left(\frac{\pi - (\varphi - \varphi')}{2n}\right) F[\beta La^-(\varphi - \varphi')]$$

$$D_3 = \cot\left(\frac{\pi - (\varphi + \varphi')}{2n}\right) F[\beta La^-(\varphi + \varphi')]$$

$$D_4 = \cot\left(\frac{\pi + (\varphi + \varphi')}{2n}\right) F[\beta La^+(\varphi + \varphi')] \quad (2.24)$$

com  $n = \frac{2\pi - \Psi}{\pi}$  o fator de abertura do obstáculo e  $\Psi$  o ângulo interior do obstáculo.

O argumento  $F$  corresponde à função integral de Fresnel, dada por [1]:

$$F(X) = 2j\sqrt{|X|} e^{iX} \int_{\sqrt{|X|}}^{\infty} e^{-j\tau^2} d\tau \quad (2.25)$$

A integral de Fresnel  $F(X)$  corresponde ao fator de correção para as regiões de transição, nas quais a GTD falha. Observando a figura 2.8 a seguir, verifica-se que a função de transição  $F(\beta La)$  possui magnitude aproximadamente igual a 1 para valores de argumento maior que 3, o que corresponde às regiões fora das áreas de transição.

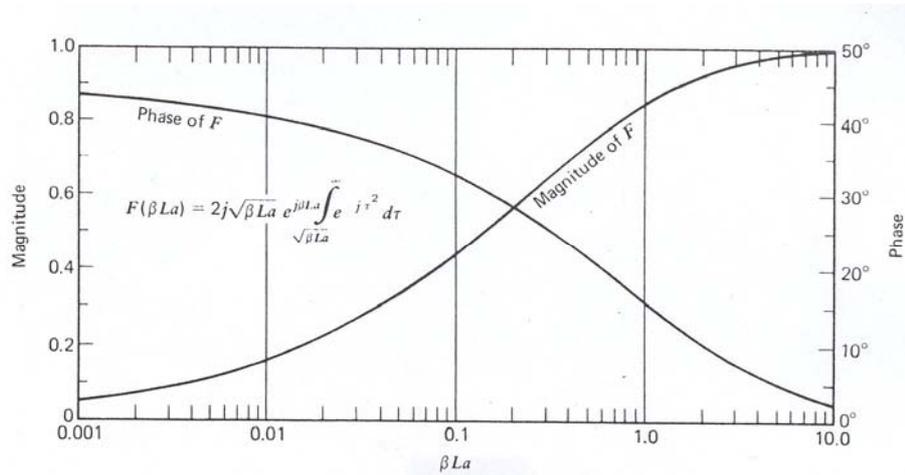


Figura 2.8: Magnitude e fase da função de transição  $F(\beta La)$ , onde  $a = a^+$  ou  $a^-$  (reproduzida da referência [6]).

Para determinar os valores de  $a^\pm(\varphi \pm \varphi')$ , utiliza-se a seguinte expressão:

$$a^\pm(\varphi \pm \varphi') = 2 \cos^2 \left[ \frac{2n\pi N^\pm - (\varphi \pm \varphi')}{2} \right] \quad (2.26)$$

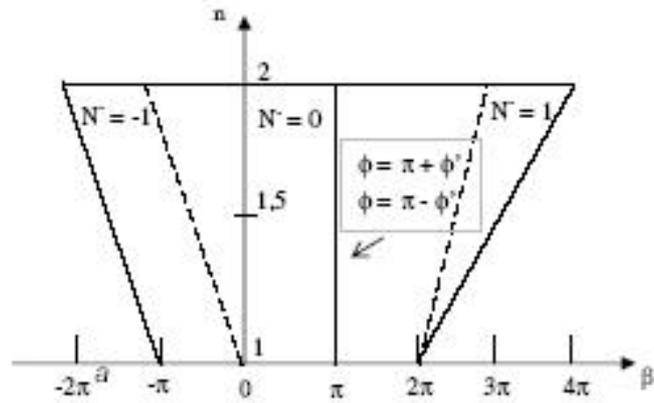
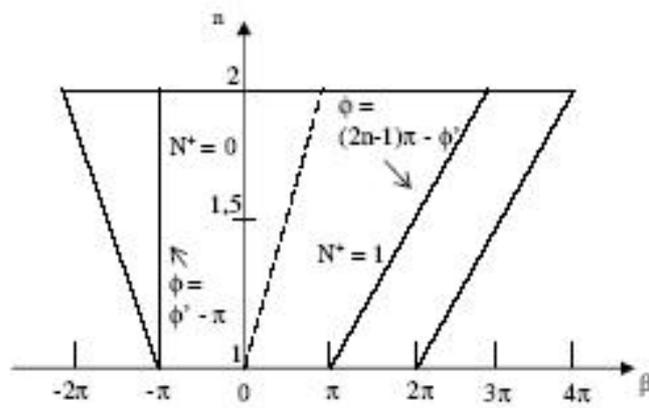
Na expressão (2.26) acima, os valores de  $N^\pm$  correspondem aos inteiros mais próximos que satisfazem as equações abaixo:

$$2\pi n N^+ - (\varphi \pm \varphi') = \pi \quad (2.27)$$

$$2\pi n N^- - (\varphi \pm \varphi') = -\pi \quad (2.28)$$

Note-se que  $N^+$  e  $N^-$  apresentam valores distintos dado um obstáculo para cálculo de difração. Para difração exterior, ou seja,  $1 < n \leq 2$ ,  $N^+$  pode assumir os valores 0 ou 1, enquanto  $N^-$  pode assumir -1, 0 ou 1.

A figura 2.9 a seguir apresenta a variação de  $N^\pm$  em função de  $\beta$  que corresponde a  $\varphi \pm \varphi'$ . As linhas tracejadas correspondem à variação no valor de  $N^\pm$ .

- variação de  $N^-$ - variação de  $N^+$ Figura 2.9: Variação de  $N^\pm$  em função de  $\beta$  (reproduzida da referência [17]).

O fator  $a^\pm(\varphi \pm \varphi')$  pode ser interpretado fisicamente como a medida da separação angular entre o ponto de observação do campo e o limite de sombra e reflexão.

O fator de espalhamento  $A(s)$  é definido por:

$$A(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}, \quad \text{para ondas planas, cilíndricas e cônicas} \quad (2.29)$$

$$A(s) = \left[ \frac{s'}{s(s' + s)} \right]^{1/2}, \quad \text{para ondas esféricas} \quad (2.30)$$

O coeficiente de difração mostrado em (2.22), deduzido por [2], considera que as superfícies que formam o obstáculo possuem condutividade perfeita, ou seja, infinita.

Como, em ambientes reais, superfícies com condutividade perfeita não existem, Luebbers [7] apresentou coeficientes de difração para superfícies rugosas e com condutividade finita.

Luebbers introduziu heurísticamente os coeficientes de reflexão de Fresnel aos coeficientes de difração apresentados pela UTD.

Assim, os coeficientes  $D_s$  e  $D_h$  para superfícies com condutividade finita são expressos por:

$$D_{h,s}(L, \varphi, \varphi') = \frac{-e^{-j(\pi/4)}}{2n\sqrt{2\pi\beta} \sin \gamma_0'} \{D_1 + D_2 \mp \Gamma_0 D_3 + \Gamma_n D_4\} \quad (2.31)$$

com os valores de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  definidos anteriormente.

Os valores de  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_n$  correspondem aos coeficientes de reflexão de Fresnel representados pela equação (2.16) para polarização perpendicular (*soft*) e em (2.17) para polarização paralela (*hard*), multiplicados pelo coeficiente de espalhamento representado pela equação (2.19) para superfícies rugosas. Os índices 0 e n correspondem às faces 0 e n do obstáculo.