

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro



Pedro Soledade da Câmara

**Análise das características morfológicas
similares nos dedos viscosos**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC–Rio.

Orientador: Professor Rafael Menezes de Oliveira

Rio de Janeiro
Dezembro de 2025

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo apoio incondicional ao longo de toda a minha trajetória. Sua compreensão, carinho e incentivo foram essenciais para que eu pudesse concluir este trabalho e superar cada desafio encontrado no caminho.

Sou imensamente grato ao meu orientador, Professor Rafael Menezes de Oliveira, pelo acompanhamento dedicado, pela confiança depositada no meu trabalho e pelo constante estímulo ao pensamento crítico. Sua capacidade de transmitir conhecimento e sua disponibilidade para esclarecimentos foram fundamentais para o desenvolvimento deste projeto.

Expresso minha gratidão à PUC-Rio, pela excelência acadêmica, pela infraestrutura oferecida e pelo ambiente de aprendizado inspirador, que contribuíram de maneira decisiva para a minha formação.

Registro meu reconhecimento à Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) pelo suporte concedido, que possibilitou a realização deste estudo e o avanço das pesquisas aqui desenvolvidas.

Deixo meu mais sincero muito obrigado a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a Deus, cuja força, sabedoria e proteção sustentaram minha jornada.

Resumo

Análise das características morfológicas similares nos dedos viscosos

Este trabalho investiga a evolução morfológica dos dedos viscosos formados durante o fenômeno de instabilidade de Saffman-Taylor, que ocorre quando um fluido menos viscoso desloca outro mais viscoso em um meio poroso. Utilizando dados numéricos provenientes do método *vortex-sheet* aplicado a uma célula de Hele-Shaw em escoamento radial, analisam-se os mecanismos físicos que governam o crescimento e a forma dos dedos, bem como os efeitos dos parâmetros adimensionais que controlam a instabilidade. O estudo concentra-se especialmente no contraste viscoso e na tensão superficial efetiva, tendo como referência o artigo *Similarity characteristics in the morphology of radial viscous fingers*, publicado no *Physics of Fluids*, do qual sou coautor (OLIVEIRA et al., 2023). A partir dessa abordagem, investiga-se como esses parâmetros influenciam a quantidade, o comprimento, a amplitude e a estabilidade das estruturas interfaciais ao longo do tempo. A compreensão desses padrões é particularmente relevante para aplicações industriais, como processos de recuperação avançada de petróleo (EOR), nos quais a instabilidade reduz a eficiência de varrido. Os resultados obtidos reforçam que a interação entre viscosidade, tensão superficial e gradiente de pressão determina regimes morfológicos distintos e fornece subsídios importantes para a modelagem, o controle e a redução da instabilidade em aplicações reais.

Palavras-chave

Dedos Viscosos; Instabilidade de Saffman-Taylor; Escoamento Bifálico; *Vortex-sheet*; Célula de Hele-Shaw; Recuperação Avançada de Petróleo; Contraste Viscoso; Tensão Superficial Efetiva.

Abstract

Analyse of the similar morfological characteristics in the viscous fingers

This work investigates the morphological evolution of viscous fingers formed during the Saffman-Taylor instability, which occurs when a less viscous fluid displaces a more viscous one in a porous medium. Using numerical data obtained from the vortexsheet method applied to a Hele-Shaw cell in radial flow, we analyze the physical mechanisms that govern the growth and shape of the fingers, as well as the effects of the dimensionless parameters that control the instability. The study focuses particularly on the viscosity contrast and the effective surface tension, using as a reference the article *Similarity characteristics in the morphology of radial viscous fingers*, published in the Physics of Fluids, of which I am a coauthor (OLIVEIRA et al., 2023). Based on this framework, we investigate how these parameters influence the number, length, amplitude, and stability of interfacial structures over time. The understanding of these patterns is particularly relevant for industrial applications, such as enhanced oil recovery (EOR) processes, in which the instability reduces sweep efficiency. The results obtained reinforce that the interaction among viscosity, surface tension, and pressure gradient determines distinct morphological regimes and provides important insights for modeling, controlling, and reducing instability in real applications.

Keywords

Viscous Fingering; Saffman-Taylor Instability; Two-phase Flow; Vortex-sheet; Hele-Shaw cell; Enhanced Oil Recovery; Viscosity Contrast; Effective Surface Tension.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
1.1	A Importância da Indústria Petrolífera no Brasil e no Mundo	7
1.2	Técnicas de Recuperação Avançada de Petróleo	8
1.3	Instabilidade de Saffman-Taylor e os Dedos Viscosos	11
2	REVISÃO TEÓRICA E METODOLOGIA	14
2.1	Célula de Hele-Shaw	14
2.2	Fundamentação Teórica do Escoamento em Meios Porosos	15
2.3	Estudo da interface entre os Fluidos em um célula de Hele-Shaw	18
2.4	Parâmetros Adimensionais A e B	21
3	RESULTADOS	24
3.1	Variação Paramétrica e Análise Geral dos Padrões Obtidos	24
3.2	Similaridade Morfológica	29
3.3	Dinâmica Competitiva e Evolução da Estrutura Interna da Interface	31
3.4	Síntese Interpretativa	33
4	CONCLUSÃO	35
	Referências Bibliográficas	37

Lista de figuras

1.1	Exploração do Pré-sal	8
1.2	WAG utilizando o CO ₂	10
1.3	Exemplos de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw	12
2.1	Estrutura de placas paralelas para observação dos dedos viscosos	15
2.2	Escoamento radial em uma célula de Hele-Shaw	17
3.1	Dedos viscosos a partir das alterações dos parâmetros A e B	26
3.2	(a) Evolução temporal do comprimento interfacial normalizado $L/(2\pi R)$ para $A = 0,5$ e diferentes valores de tensão superficial efetiva B . (b) Evolução do tamanho máximo do dedo normalizado $(R_o - R_i)/R_o$ para $A = 1$.	31
3.3	Figura esquemática de R_o e R_i	31
3.4	Padrões experimentais obtidos em célula de Hele-Shaw para distintos valores dos parâmetros adimensionais A e B : (a) 0,63; 0,0011; (b) 0,78; 0,00034; (c) 0,78; 0,0027; (d) 0,996; 0,25; (e) 0,999; 0,0063; (f) 0,999; 0,0021. Os painéis inseridos em (d) e (e) correspondem às simulações com $A = 1$ e $B = 0,015$ ($t = 130$) e $A = 1$ e $B = 0,005$ ($t = 110$), respectivamente.	34

1

INTRODUÇÃO

1.1

A Importância da Indústria Petrolífera no Brasil e no Mundo

A indústria petrolífera desempenha um papel central na economia mundial e na matriz energética global, sendo responsável pelo fornecimento de combustíveis, lubrificantes e matérias-primas essenciais para diversos setores industriais. O petróleo é um recurso estratégico que impulsiona o desenvolvimento econômico, tecnológico e geopolítico, influenciando diretamente as políticas energéticas e as relações internacionais. No cenário global, países produtores de petróleo, como Arábia Saudita, Estados Unidos e Rússia, exercem significativa influência sobre os mercados e sobre o equilíbrio econômico mundial (Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis (IBP), 2025; OPEP, 2024).

No contexto brasileiro, a indústria petrolífera tem importância fundamental para o crescimento econômico e para a segurança energética nacional. Desde a criação da Petrobras em 1953, o Brasil consolidou uma trajetória de desenvolvimento tecnológico e de ampliação da capacidade de produção e refino (PETROBRAS, 2023). A descoberta do pré-sal, a partir de 2006, representou um marco na exploração *offshore*, colocando o país entre os maiores detentores de reservas de petróleo do mundo (Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), 2023). Além disso, o setor gera milhões de empregos diretos e indiretos, contribui expressivamente para o PIB e para a arrecadação de tributos, e impulsiona cadeias produtivas como a naval, a metalúrgica e a petroquímica (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), 2024).

A exploração do pré-sal trouxe um novo paradigma tecnológico e científico para a engenharia de reservatórios. Além do grande volume de hidrocarbonetos recuperáveis, esses campos apresentam características geológicas e físico-químicas que impõem desafios significativos. Destacam-se a elevada complexidade desses reservatórios, marcada pela heterogeneidade de porosidade e permeabilidade, bem como pela presença de fraturas naturais que influenciam o escoamento dos fluidos. Soma-se a isso a dificuldade de perfuração e de imageamento sísmico em grandes profundidades, sob espessas camadas de sal, como mostrado na Figura 1.1, além da alta concentração de dióxido de carbono (CO₂), que impõe exigências adicionais aos processos de separação e reinjeção (Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), 2023;

PETROBRAS, 2023).

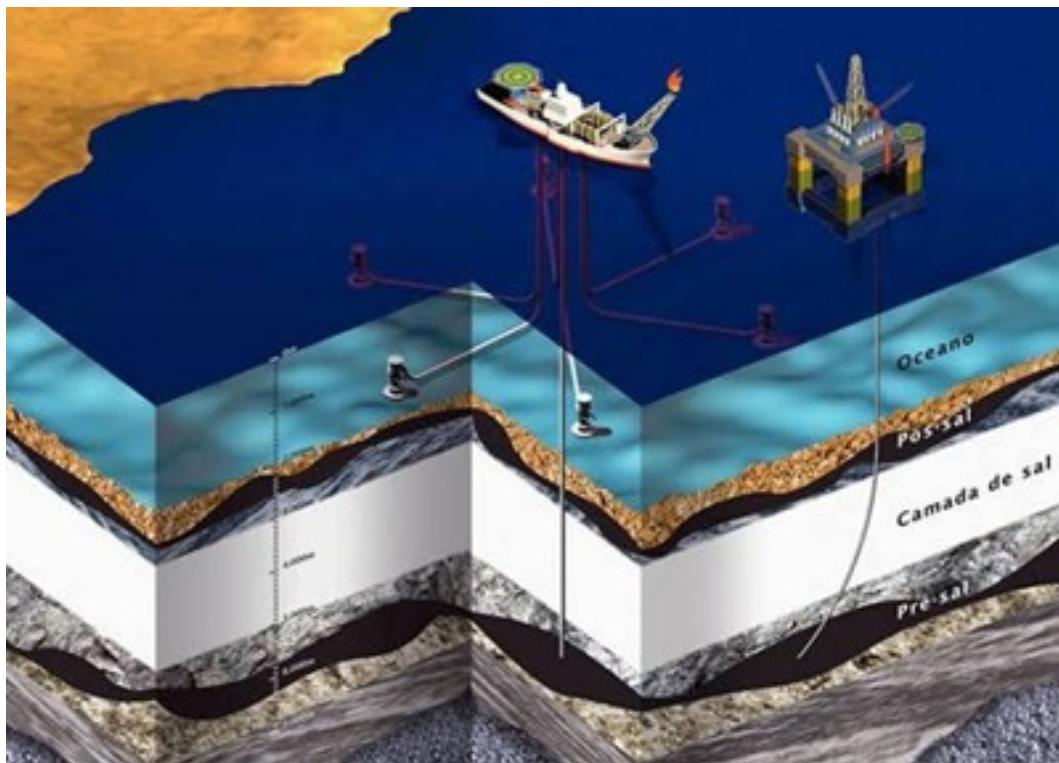


Figura 1.1: Exploração do Pré-sal

Fonte: fup.org.br

1.2

Técnicas de Recuperação Avançada de Petróleo

Embora a ênfase da produção esteja no petróleo, os reservatórios do pré-sal não contêm apenas óleo. Associados a esse hidrocarboneto, encontram-se outras substâncias, como gás natural, água e CO₂. A importância do gás natural tem crescido de forma expressiva, não apenas por seu valor energético e econômico, mas também por ser um recurso estratégico na transição energética (PETROBRAS, 2023; International Energy Agency (IEA), 2023). Em determinados reservatórios, a presença de gás natural em proporções elevadas torna sua exploração mais viável do que a do próprio petróleo, definindo-os como reservatórios gasíferos (PETROBRAS, 2023).

Por outro lado, componentes de menor valor econômico, como a água produzida e o CO₂, exigem tecnologias de manipulação adequadas para serem processadas e separadas dos elementos como o petróleo e o gás natural. A água produzida precisa ser tratada antes de seu descarte ou reutilização. Para isso, empregam-se diversos métodos de separação e remoção de contaminantes como óleo e sólidos em suspensão, entre eles a separação gravitacional e

a flotação (GABARDO, 2007). O CO₂ representa um desafio relevante no processamento do gás natural, visto que encontra-se associado ao gás. Sua remoção é imprescindível tanto para que o gás atenda às especificações de comercialização quanto para proteger a integridade dos sistemas de transporte, já que o CO₂ pode aumentar a corrosividade do fluido. Esse processo ocorre por meio de tecnologias de separação de gases, como absorção química com aminas e adsorção em membranas seletivas (Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis (IBP), 2025; Empresa de Pesquisa Energética (EPE), 2024).

No entanto, existem casos em que esse processo de separação não é economicamente viável, especialmente em correntes com alto teor de CO₂, em campos de baixa produção ou em regiões com infraestrutura limitada, situações em que o custo de implantação e operação das unidades de tratamento pode superar o valor comercial do gás (SANTOS, 2014).

Entretanto, em vez de ser simplesmente descartado, esses gases podem ser reinjetados no reservatório como parte de tecnologias de captura, utilização e armazenamento de carbono (CCUS, sigla de *Carbon Capture, Utilization and Storage*). Diversos estudos destacam o potencial do Brasil, especialmente nas áreas do pré-sal, para o desenvolvimento de projetos de CCUS devido ao alto teor de CO₂ presente nos reservatórios e às condições geológicas favoráveis ao armazenamento, visto que a Petrobras conseguiu reinjetar 14,2 milhões de toneladas de CO₂ (PETROBRAS, 2023; Global CCS Institute, 2024). Essa reinjeção desempenha papéis complementares: contribui para a diminuição das emissões de gases de efeito estufa, atende a regulamentações ambientais cada vez mais rigorosas e, simultaneamente, pode aumentar a eficiência produtiva dos poços (International Energy Agency (IEA), 2023).

A adoção de CCUS está alinhada a compromissos globais de redução de emissões e à busca por maior sustentabilidade na indústria de óleo e gás. Além disso, no contexto do pré-sal, proporciona vantagens operacionais: a reinjeção de CO₂ e de água não apenas evitam suas liberações no ambiente, mas também atuam como mecanismo de Recuperação Avançada de Petróleo (*Enhanced Oil Recovery - EOR*), técnica que amplia a quantidade de óleo recuperável em reservatórios maduros ou de difícil exploração (ROSA; BEZERRA; PONZIO, 2016).

A EOR representa uma estratégia além dos métodos primários (produção por energia natural do reservatório) e secundários (injeção de água para manutenção de pressão) para extrair o ouro negro. Consiste em métodos destinadas a modificar as condições do reservatório, aumentando a mobilidade do petróleo e facilitando seu deslocamento até os poços produtores. Entre essas

estratégias, a injeção de fluidos é a mais consolidada e pode envolver tanto fluidos não miscíveis, como a água, quanto fluidos miscíveis, como o CO₂ em altas pressões, e também de solventes, como o butano, capazes de dissolver o petróleo residual e, dessa forma, facilitar sua recuperação. A escolha do fluido injetado depende de estudos prévios detalhados sobre as características petrofísicas e termodinâmicas da formação, que determinam a eficiência do deslocamento e o tipo de interação entre o fluido injetado e o óleo residual (LOURENÇO et al., 2024; LAKE, 2010).

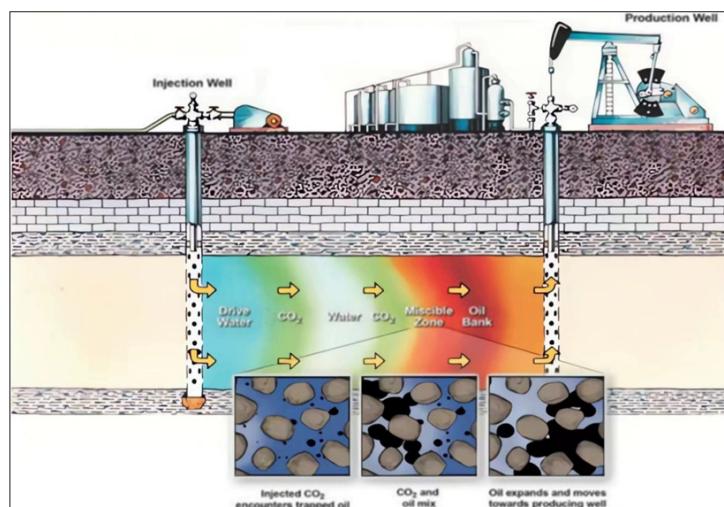


Figura 1.2: WAG utilizando o CO₂

Fonte: researchgate.net

A Petrobras, principal operadora do pré-sal, tem adotado técnicas híbridas, como a WAG (sigla de *Water Alternating Gas*). Esse método consiste na injeção cíclica de volumes controlados de água e gás (geralmente CO₂ ou gás natural), como mostrado na Figura 1.2, permitindo melhor controle da frente de varrido e da mobilidade dos fluidos dentro do reservatório, por meio da combinação da melhor eficiência de varrido da água com a melhor eficiência de deslocamento do gás (PETROBRAS, 2023; ROSA; BEZERRA; PONZIO, 2016). Além de aumentar o fator de recuperação, o processo WAG possibilita a reutilização de fluidos já disponíveis no sistema de produção, como a água produzida, o CO₂ e o gás natural não economicamente viável. Dessa forma, há uma redução significativa nos custos operacionais e nas emissões associadas à queima ou descarte de gás.

Tal estratégia reforça a integração entre eficiência econômica e responsabilidade ambiental, princípios cada vez mais valorizados no contexto da transição energética global. A adoção de EOR com CO₂ e WAG se alinha aos

objetivos de descarbonização da indústria de óleo e gás, contribuindo simultaneamente para a segurança energética e para o cumprimento das metas de redução de emissões (International Energy Agency (IEA), 2023; PETROBRAS, 2023).

1.3

Instabilidade de Saffman-Taylor e os Dedos Viscosos

Um dos principais fatores que determinam o sucesso da EOR é a eficiência de varrido, definida como a fração de petróleo deslocada pelo fluido injetor. Essa eficiência, entretanto, não depende apenas da quantidade de fluido injetado ou da geometria do reservatório, mas também de fenômenos físicos complexos associados ao escoamento em meios porosos (THOMAS, 2001; COSTA; LOPES, 2019).

Entre eles, destaca-se a instabilidade de Saffman-Taylor, que surge quando um fluido menos viscoso desloca outro mais viscoso, causando a formação de padrões interfaciais chamados de dedos viscosos. Esse fenômeno é amplamente observado em processos de recuperação avançada de petróleo, especialmente em injeções de gás ou água em reservatórios (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; HOMSY, 1987).

Na engenharia de reservatórios, o impacto dessa instabilidade é direto, pois a formação de dedos viscosos reduz a eficiência dos métodos de recuperação e aumenta os custos de produção (THOMAS, 2001; MACHADO; BRAGA, 2014). Por esse motivo, compreender os mecanismos que originam tal instabilidade e desenvolver estratégias para diminui-la constitui um dos grandes desafios da área. Diversas abordagens têm sido propostas, incluindo a modificação das propriedades reológicas dos fluidos injetados pela adição de polímeros, o ajuste das taxas de injeção e o uso de técnicas avançadas de simulação numérica para prever padrões de deslocamento (COSTA; LOPES, 2019; PETROBRAS, 2023).

Importante destacar que a relevância do fenômeno transcende a indústria de petróleo e gás. A formação de dedos viscosos está associada a uma ampla gama de processos naturais e industriais, como drenagem de fluidos em materiais porosos, crescimento de estruturas fractais, cristalização em soluções supersaturadas e até a expansão de colônias bacterianas (THOMAS, 2001; MACHADO; BRAGA, 2014). Essa natureza interdisciplinar justifica o intenso interesse acadêmico pelo tema e a diversidade de métodos empregados para estudá-lo (HOMSY, 1987).

Com a importância desse fenômeno para diversos ramos de estudo, a busca por formas de modelar ou descrever esse evento tornou-se de grande

interesse científico. Considerando que a instabilidade ocorre em ambientes porosos, uma das estratégias mais utilizadas para analisá-la é a aplicação da Lei de Darcy, a qual descreve o movimento de fluidos nesses meios (COSTA; LOPES, 2019; PETROBRAS, 2023). Essa formulação permite estabelecer uma relação entre a velocidade de escoamento e o gradiente de pressão, levando em conta a permeabilidade do meio e a viscosidade do fluido.

A partir desse conceito, nota-se que a implementação da Lei de Darcy em uma célula de Hele-Shaw é uma abordagem adequada para investigar o fenômeno. Isso se deve ao fato de que as equações de Navier-Stokes, aplicadas ao escoamento entre duas placas planas paralelas separadas por um pequeno espaçamento, conduzem a uma forma equivalente à equação de Darcy, permitindo a definição de uma permeabilidade efetiva associada à separação entre as placas (SAFFMAN; TAYLOR, 1958). Assim, o sistema de Hele-Shaw simula, de maneira simplificada, o comportamento de um meio poroso ideal, fornecendo um ambiente uniforme, homogêneo e transparente, adequado para experimentos laboratoriais e observação direta da evolução dos dedos viscosos (HOMSY, 1987). A figura 1.3 mostra um exemplo desses experimentos, onde existe um crescimento radial dos dedos viscosos.

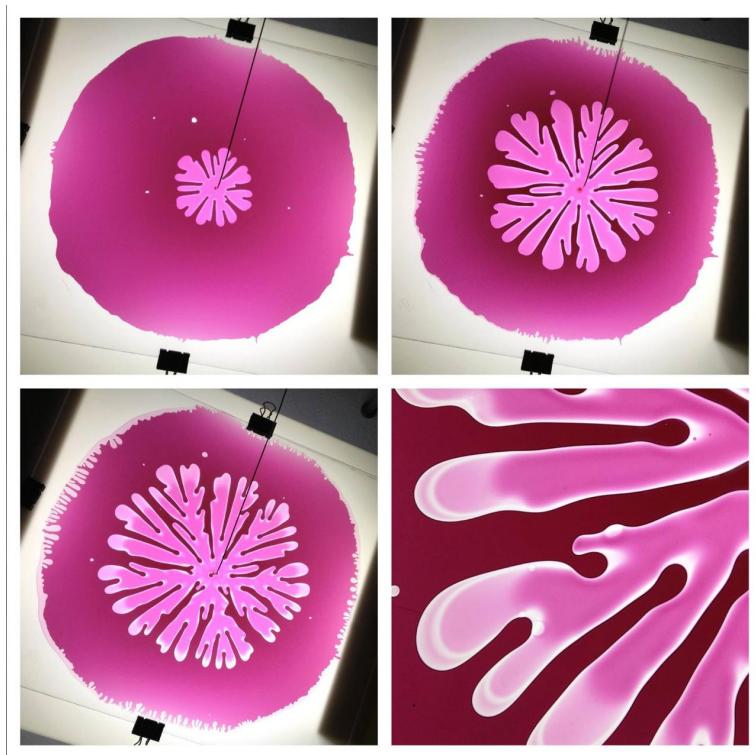


Figura 1.3: Exemplos de dedos viscosos em uma célula de Hele-Shaw

Fonte: projects Nervous System

Nesse contexto, o presente estudo propõe uma investigação sobre a evolução temporal da instabilidade de Saffman-Taylor, a partir de simulações

numéricas em uma célula de Hele-Shaw, na qual o escoamento ocorre de forma quase bidimensional, simulando de maneira simplificada o comportamento de um meio poroso ideal. Essa metodologia é amplamente utilizada por permitir a observação direta dos padrões interfaciais e por oferecer a possibilidade de realizar análises paramétricas amplas (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; HOMSY, 1987).

Os dados empregados derivam do trabalho de Oliveira (2023), *intitulado Similarity characteristics in the morphology of radial viscous fingers*, do qual sou coautor, que utiliza o formalismo *vortex-sheet* para representar de forma acurada as interfaces entre os fluidos. Tal abordagem numérica possibilita capturar a evolução detalhada do contorno interfacial e reproduzir o crescimento de estruturas complexas típicas da instabilidade (OLIVEIRA et al., 2023).

O objetivo central desta análise é compreender como parâmetros físicos e adimensionais, o contraste viscoso (A) e a tensão superficial efetiva (B), determinam a morfologia e a estabilidade dos dedos viscosos. O contraste viscoso define a intensidade da instabilidade: quanto maior a diferença de viscosidade entre os fluidos, mais pronunciado é o crescimento dos dedos. Já a tensão superficial efetiva compara os efeitos estabilizadores da tensão superficial (σ) com os efeitos da taxa de injeção. Dessa forma, a sua diminuição correspondente ao aumento da vazão de injeção (Q), para um σ constante, ocasionando a desestabilização da interface e favorecendo a formação de mais *fingerings* (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; HOMSY, 1987).

Neste contexto, este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) está estruturado em quatro capítulos. O primeiro corresponde à introdução, em que são apresentados o contexto da pesquisa, seus objetivos e a relevância do estudo. O segundo aborda a revisão teórica, no qual são mostrados os fundamentos do escoamento bifásico em meios porosos, com ênfase na instabilidade de Saffman-Taylor e em sua modelagem por meio da célula de Hele-Shaw. Nesse mesmo capítulo, também é apresentada brevemente a metodologia adotada pela utilização de simulações numéricas bidimensionais de alta precisão para a investigação da evolução não linear da interface entre fluidos. Já no terceiro capítulo é realizado uma análise dos resultados obtidos. Por fim, no quarto capítulo, são expostas as conclusões do trabalho, destacando as principais contribuições da pesquisa e apontando perspectivas para estudos futuros.

REVISÃO TEÓRICA E METODOLOGIA

O estudo das instabilidades hidrodinâmicas em meios porosos constitui um tema central na física e na engenharia de escoamentos multifásicos, sendo essencial para compreender fenômenos que ocorrem em sistemas naturais e industriais, como a migração de fluidos em aquíferos, a dispersão de contaminantes e, sobretudo, os processos de recuperação avançada de petróleo (EOR, sigla de *Enhanced Oil Recovery*). Em tais contextos, o comportamento da interface entre dois fluidos de viscosidades distintas determina a eficiência da drenagem ou do deslocamento. Quando um fluido de menor viscosidade é injetado em um meio poroso saturado por outro mais viscoso, a interface do escoamento se torna instável, se deformando, e formando padrões alongados e ramificados conhecidos como dedos viscosos. Esse fenômeno, descrito classicamente como instabilidade de Saffman-Taylor, compromete a eficiência do processo de deslocamento, pois o avanço irregular do fluido injetado podeoccasionar no *breakthrough* prematuro, uma situação em que o fluido de injeção atinge o poço produtor antes de deslocar todo o óleo previsto, aprisionando grandes volumes de hidrocarbonetos no reservatório (PETERS; FLOCK, 1981; GUERRERO; KANTZAS, 2021).

2.1

Célula de Hele-Shaw

O trabalho de Saffman e Taylor (1958) representou um marco na compreensão desse fenômeno. Utilizando uma célula de Hele-Shaw, A partir da utilização de uma célula de Hele-Shaw, estrutura formada por duas placas paralelas separadas por um pequeno espaçamento, estabelece-se um ambiente experimental controlado no qual o escoamento pode ser tratado como essencialmente bidimensional e diretamente observável. A figura 2.1 mostra um exemplo dessa estrutura, na qual pode-se verificar a utilização das placas paralelas, tubos para injeção dos fluidos e um dispositivo de imagem para documentar o experimento.

Essa configuração permitiu a observação direta da instabilidade gerada quando um fluido menos viscoso invade um fluido mais viscoso. A abordagem teórico-experimental adotada demonstrou que a interface entre os fluidos se torna instável sob determinadas condições, levando à formação de estruturas repetitivas e alongadas, os dedos. Esses padrões são o resultado direto da competição entre três efeitos principais: o gradiente de pressão imposto pela

injeção, a diferença de viscosidade entre os fluidos e a tensão superficial que atua como força estabilizadora na interface.



Figura 2.1: Estrutura de placas paralelas para observação dos dedos viscosos
Fonte: TecnoEdu

Na ausência de tensão superficial, a interface se torna altamente instável, gerando dedos finos e numerosos. Já em situações em que a tensão superficial é significativa, esse efeito da interface reduz a formação de dedos, promovendo um avanço mais uniforme. Assim, a tensão superficial exerce papel regulador fundamental na morfologia dos dedos viscosos (HOMSY, 1987).

A tensão superficial é determinada pela escolha dos fluidos envolvidos, portanto sua alteração exigiria a substituição do fluido, o que se torna inviável na condução experimental. Por outro lado, a tensão superficial efetiva, B , pode ser ajustada de forma prática por meio da variação da vazão de injeção controlada por uma bomba injetora, permitindo modular o efeito estabilizador sem a necessidade de trocar os fluidos (OLIVEIRA et al., 2023).

2.2

Fundamentação Teórica do Escoamento em Meios Porosos

A observação desses três efeitos foi fundamental para o avanço no desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de descrever a instabilidade interfacial em meios porosos. A formulação desses sistemas fundamenta-se na Lei de Darcy, originalmente proposta para descrever o escoamento de fluidos

em meios porosos homogêneos e isotrópicos, pode ser expressa, de forma simplificada, pela equação (2-1):

$$v = K \cdot \frac{\Delta\Phi}{L} \quad (2-1)$$

Na equação (2-1), v é a velocidade média do escoamento do fluido, K a permeabilidade intrínseca do meio, $\Delta\Phi$ a diferença de potencial hidráulico (ou de pressão) e L um comprimento característico do sistema. A Lei de Darcy estabelece que para um fluido newtoniano, o fluxo através de um meio poroso é proporcional ao gradiente de pressão e inversamente proporcional à viscosidade do fluido, refletindo um comportamento análogo à condução de calor em sólidos (Lei de Fourier) ou à condução elétrica (Lei de Ohm).

Nessas situações, efeitos inerciais, variações locais de permeabilidade e fenômenos de não homogeneidade tornam-se relevantes, conduzindo a desvios do comportamento ideal previsto por Darcy (WHITAKER, 1986; BEAR, 1972).

Embora a célula de Hele-Shaw não seja um meio poroso propriamente dito, sua geometria permite reproduzir o comportamento médio do escoamento descrito pela Lei de Darcy. Então, a utilização das equações de Navier-Stokes, formatadas para as condições da célula de Hele-Shaw, constitui um modelo físico idealizado que reforça a base teórica da Lei de Darcy e sua validade em regimes de escoamento viscoso (SAFFMAN; TAYLOR, 1958; HOMSY, 1987).

Desse modo, a análise do escoamento em uma célula de Hele-Shaw estabelece o elo entre os princípios fundamentais da mecânica dos fluidos e a descrição macroscópica do deslocamento em meios equivalentes porosos, servindo de ponto de partida para a formulação que caracteriza o movimento do fluido nesse sistema idealizado, possibilitando a utilização da equação (2-2), que é a equação de Navier-Stokes sem a influência de uma força externa, como a gravidade, em regime permanente e na ausência de forças inercias.

$$\mu \nabla^2 \vec{u} - \vec{\nabla} p = 0 \quad (2-2)$$

A equação (2-2), que expressa a igualdade entre a difusão de momento devido a viscosidade do fluido, μ , e o gradiente de pressão, pode ser formulada em um sistema de coordenadas cilíndricas, o qual descreve de maneira mais apropriada a configuração dos dedos viscosos que serão analisados. Essa representação é particularmente relevante, uma vez que o deslocamento dos fluidos injetados pelos poços, nos processos de recuperação avançada em reservatórios, apresenta predominantemente um padrão de escoamento radial.

Essa reformulação permite expressar o campo de velocidades e o gradiente de pressão de forma coerente com a simetria do problema, conduzindo à forma

cilíndrica das equações governantes (2-3) que descreve o movimento radial do fluido no interior da célula de Hele-Shaw, demostrado na figura 2.2.

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (2-3)$$

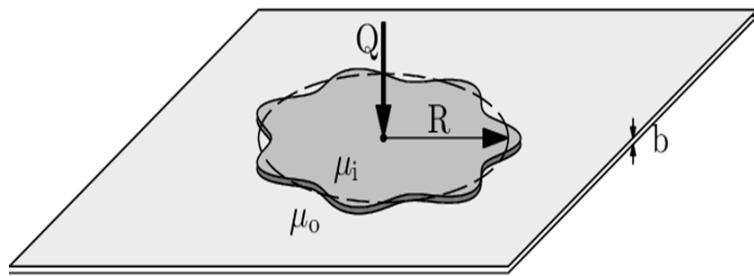


Figura 2.2: Escoamento radial em uma célula de Hele-Shaw

Devido à configuração geométrica da célula de Hele-Shaw, assume-se que o gradiente de pressão na direção axial é nulo, isto é, $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, condição que constitui um aspecto fundamental para o estabelecimento da analogia entre o escoamento nesse sistema e o escoamento em meios porosos. Essa simplificação decorre do espaçamento entre as duas placas, representado por b , é muito pequeno quando comparado às demais dimensões características do domínio e das condições de contorno de não deslizamento nas superfícies das placas. Como outra consequência, as segundas derivadas em relação à coordenada z tornam-se muito maiores do que as segundas derivadas em relação às coordenadas radiais (r) e angulares (θ).

Ao incorporar essas considerações nas equações de movimento apresentadas em (2-3), obtém-se, após a devida simplificação, as equações mostradas em (2-4), as quais descrevem o comportamento do escoamento em uma célula de Hele-Shaw sob as hipóteses de regime laminar, fluido newtoniano e fluxo de baixa inércia (HOMSY, 1987; SAFFMAN; TAYLOR, 1958).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (2-4)$$

Considerando que o gradiente de pressão atua no plano do escoamento e levando em conta as condições de contorno, observa-se que a velocidade u_z é nula nas paredes. Consequentemente, sua distribuição de velocidade ao longo da direção transversal apresenta perfil parabólico. Com base nisso, define-se o vetor de velocidade do fluido, como apresentado em (2-5) e em (2-6) a seguir.

$$\begin{cases} u_r(z, r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial r} (z^2 - zb) \\ u_\theta(z, r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} (z^2 - zb) \end{cases} \quad (2-5)$$

$$\vec{u}(z, r, \theta) = \frac{(z^2 - zb)}{2\mu} \vec{\nabla} p \quad (2-6)$$

Com a equação obtida em (2-6), tem-se a velocidade do fluido de forma tridimensional. Pode-se, assim, realizar a integração demonstrada em (2-7) para obter a equação (2-8), que representa a velocidade média do escoamento no plano da célula. Essa equação condiz a uma relação análoga à apresentada em (2-1), estabelecendo uma correspondência direta entre o gradiente de pressão e a velocidade média do fluido, característica fundamental da analogia com a Lei de Darcy.

$$\vec{v}(r, \theta) = \frac{1}{b} \int_0^b \vec{u}(z, r, \theta) dz \quad (2-7)$$

$$\vec{v}(r, \theta) = -\frac{b^2}{12\mu} \vec{\nabla} p \quad (2-8)$$

Dessa forma, a formulação apresentada em (2-8) permitiu a modelagem matemática do comportamento dos fluidos imiscíveis em um meio experimental quase bidimensional que representa um ambiente poroso, a célula de Hele-Shaw. Com essa base, é possível aprofundar a análise da interface que se forma entre eles.

2.3

Estudo da interface entre os Fluidos em um célula de Hele-Shaw

O método numérico empregado neste trabalho corresponde a uma versão resumida da metodologia apresentada em *Boundary integral simulations based on the vortex-sheet formalism for the discretization of sharp droplet interfaces in Hele-Shaw cells* (OLIVEIRA, 2023), na qual a formulação integral é combinada ao formalismo de *vortex-sheet* para descrever a evolução da interfaces do escoamento numa célula de Hele-Shaw.

Com isso, como inferido anteriormente o escoamento no interior de cada fluido, dentro da célula de Hele-Shaw, é descrito pela fórmula (2-8), tendo o formato, $\vec{u}_j(r, \theta) = -\frac{b^2}{12\mu_j} \vec{\nabla} p_j$, com $j=1, 2$, para o fluido injetado e deslocado respectivamente. O campo de velocidades é irrotacional, satisfazendo

$\nabla \times u_j = 0$ e dessa forma, toda a informação dinâmica relevante é concentrada diretamente na interface, a qual é parametrizada em (2-9).

$$\vec{\Gamma}(\alpha, t) = x(\alpha, t)\hat{x} + y(\alpha, t)\hat{y}, \quad \alpha \in [0, 2\pi] \quad (2-9)$$

Essa interface está sujeita ao salto de pressão decorrente da tensão superficial de cada fluido, representado pelas condições de contorno impostas pela equação de Young-Laplace (2-10).

$$(p_2 - p_1) |_{\Gamma} = \sigma \kappa \quad (2-10)$$

Na equação (2-10) o κ é a curvatura e σ é a tensão superficial.

Uma vez que a interface está em movimento, torna-se necessário impor uma condição de contorno dinâmica, que assegura a continuidade da componente normal da velocidade ao longo da interface. Por outro lado, a componente tangencial da velocidade apresenta descontinuidade, e o salto nesse componente é justamente o que determina a intensidade do *vortex-sheet* ($\tilde{\gamma}$).

$$\tilde{\gamma} = s_\alpha (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \hat{s} \quad (2-11)$$

Sendo que na (2-11) \hat{s} é o vetor tangente unitário da interface, s é o comprimento do arco da interface e $s_\alpha = \partial s / \partial \alpha$.

Combinando as equações de Darcy para cada fluido (2-8) e utilizando as condições de contorno interfaciais, obtém-se uma equação integral de Fredholm de segunda espécie, (2-12).

$$\tilde{\gamma} = 2A s_\alpha \vec{W} \cdot \hat{s} + \frac{b^2 \sigma}{6(\mu_1 + \mu_2)} s_\alpha \kappa_s \quad (2-12)$$

Na equação (2-12) o $A = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$ é o contraste de viscosidade, $\vec{W} = \frac{(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)}{2}$ é a velocidade média na interface e $\kappa_s = \partial \kappa / \partial s$.

Podemos reescrever a equação do *vortex-sheet* em um formato adimensional (2-13), ao adotar o raio inicial (R_0) como comprimento característico e $\frac{Q}{2\pi R_0}$ como velocidade característica, e introduzir uma variável complexa de posicionamento $z(\alpha, t) = x(\alpha, t) + iy(\alpha, t)$.

$$\gamma = 2A \operatorname{Re} \left(\frac{z_\alpha}{z} Q(t) + \frac{z_\alpha}{2\pi i} P \int_0^{2\pi} \frac{\gamma(\alpha')}{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)} d\alpha' \right) + 2B \kappa_\alpha. \quad (2-13)$$

Em (2-13), o P é o termo que determina que está sendo utilizado uma integral de valor principal de Cauchy e o Re é a indicação da parte real dos números complexos envolvidos.

Ao definir a equação (2-13) foi-se construído a peça mais importante do método para modelagem numérica, pois ela determina a distribuição de γ , responsável pelo cálculo do campo de velocidades ao longo da interface.

O cálculo da *vortex-sheet* funciona de modo análogo à lei de Biot-Savart (OLIVEIRA et al., 2021). No magnetismo, esta lei permite calcular a distribuição de corrente elétrica a partir de informações sobre o campo magnético no espaço. Aqui, também, existe um mapeamento entre o campo escalar e um campo vetorial. Assim, os campos de velocidade dos fluidos 1 e 2 podem ser obtidas a partir do cálculo da *vortex-sheet*. A obtenção da equação integral (2-13) representa esta transformação.

Ao analisar a equação (2-13), notam-se dois parâmetros adimensionais que afetam diretamente a distribuição do *vortex-sheet*, controlando o escoamento dos fluidos a cada passo de tempo, o contraste viscosos (A) e a tensão superficial efetiva (B) que serão discutidos com maior profundidade na próximas seção.

O termo contendo $2B\kappa_\alpha$ em (2-13) introduz rigidez numérica devido à dependência de derivadas de ordem superior, sendo o principal responsável pelas dificuldades computacionais quando a tensão superficial é relevante.

Assim decorrendo na necessidade de interpretar de obter o movimento interfacial ao decompor a velocidade média em seus componentes normal e tangencial: $\vec{\Gamma}_t = U\hat{n} + T\hat{s}$ com, $U = \vec{W} \cdot \hat{n}$ e $T = \vec{W} \cdot \hat{s}$.

Para reduzir a rigidez numérica, reformula-se o problema em termos do comprimento total da interface, $L(t)$, e do ângulo tangente $\theta(\alpha, t)$, levando às equações (2-14) e (2-15) (HOU; LOWENGRUB; SHELLEY, 1993).

$$L_t = 2\pi(T_\alpha - U\theta_\alpha) \quad (2-14)$$

$$\theta_t = \frac{2\pi}{L}(U_\alpha + T\theta_\alpha) \quad (2-15)$$

Assim permitindo a interface ser reconstruída por meio da integração direta da função (2-16).

$$\vec{\Gamma}_\alpha(\alpha, t) = \frac{L(t)}{2\pi}(\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y}) \quad (2-16)$$

Assim com (2-16) se pode recuperar $x(\alpha, t)$ e $y(\alpha, t)$ de forma consistente a cada passo temporal.

Assim, a utilização combinada do *vortex-sheet* e do esquema integral de contorno fornece uma formulação matemática robusta que permite analisar com precisão a evolução interfacial em escoamentos instáveis do tipo Saffman-Taylor. Esse método captura os efeitos conjugados da tensão superficial, do contraste viscoso e do gradiente de pressão, constituindo uma ferramenta essencial para o estudo de sistemas equivalentes a meios porosos e de aplicações industriais como recuperação avançada de petróleo.

Estudos recentes têm ampliado a compreensão da dinâmica interfacial

em meios confinados, incluindo análises que quantificam o número esperado de dedos em deslocamentos radiais de fluidos viscosos, fornecendo subsídios importantes para a avaliação da competitividade entre modos instáveis (OLIVEIRA et al., 2022). Investigações sobre ferro-fluidos sob campos magnéticos cruzados também têm revelado a formação de instabilidades de forma complexas, evidenciando como forças externas podem alterar significativamente a evolução da interface (OLIVEIRA et al., 2021). Além disso, simulações totalmente não lineares de padrões produzidos por campos magnéticos radiais demonstram a riqueza de comportamentos emergentes nesses sistemas (OLIVEIRA; MIRANDA, 2020). Em conjunto, esses trabalhos reforçam a relevância dos mecanismos físicos discutidos neste capítulo para a descrição da evolução morfológica de interfaces em sistemas confinados.

2.4

Parâmetros Adimensionais A e B

No estudo da instabilidade de Saffman-Taylor, dois parâmetros adimensionais desempenham papel fundamental na caracterização dos efeitos físicos que governam a evolução da interface entre os fluidos: o contraste viscoso A e o parâmetro associado à tensão superficial B . Esses parâmetros sintetizam, de maneira compacta, as principais forças em competição no processo interfacial e permitem comparar diferentes regimes físicos sob uma mesma formulação matemática.

O parâmetro adimensional A mede o contraste entre as viscosidades dos dois fluidos. Sua definição, utilizada no formalismo *vortex-sheet*, é dada pela equação (2-17).

$$A = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \quad (2-17)$$

Em que o μ_1 é a viscosidade do fluido injetado e μ_2 é a viscosidade do fluido deslocado. Assim com o parâmetro A variando no intervalo $-1 \leq A \leq 1$.

No contexto da instabilidade viscosa, se a $\mu_2 > \mu_1$, leva a $A > 0$. Quanto maior o valor de A , mais acentuada tende a ser a diferença de mobilidade entre os fluidos. Assim, o parâmetro A quantifica a intensidade do mecanismo desestabilizador que promove o crescimento da interface.

Como destacado anteriormente, os escoamentos são irrotacionais fora da interface; contudo, no contato entre os fluidos pode surgir vorticidade. Nesse contexto, como o problema é bidimensional e dominado por efeitos de tensão superficial, a interface pode ser modelada como uma linha fina no plano. Assim, embora a vorticidade concentre-se exatamente na interface, sua magnitude não pode ser diretamente determinada devido à espessura desprezível da fronteira entre os fluidos. A formulação por *vortex-sheet* contorna essa limitação, uma

vez que define a intensidade de vorticidade como o salto no componente tangencial da velocidade ao longo da interface, garantindo valores não nulos apenas nos pontos onde a vorticidade efetivamente está presente

No modelo do *vortex-sheet*, o contraste viscoso aparece diretamente no termo de salto da velocidade tangencial ao longo da interface, conforme representado em (2-12) e (2-13), controlando a contribuição da viscosidade para a geração e transporte de vorticidade interfacial.

O parâmetro adimensional B representa a importância relativa da tensão superficial na estabilização da interface. Ele é introduzido ao reescalar adequadamente as grandezas físicas e aparece explicitamente na versão adimensional da equação do *vortex-sheet* (2-13).

Nessa formulação, o termo proporcional a B está associado à derivada espacial da curvatura κ_α e tem sua origem na equação de Young-Laplace, responsável por introduzir um efeito regularizador e suavizar variações abruptas da interface.

Esse parâmetro B é dado pela expressão abaixo.

$$B = \frac{b^2 \sigma}{12(\mu_1 + \mu_2)U_0 R_0^2} \quad (2-18)$$

Onde b representa a separação entre as placas da célula de Hele-Shaw, σ corresponde à tensão superficial entre os fluidos, μ_1 e μ_2 são as viscosidades dos dois fluidos envolvidos e U_0 denota uma velocidade de referência associada à injeção do fluido. Dessa forma, o parâmetro B quantifica a importância relativa dos efeitos estabilizadores da tensão superficial em comparação a vazão de injeção responsável por impulsionar o fluxo, estabelecendo um equilíbrio fundamental entre os mecanismos que suavizam a interface e aqueles que promovem a instabilidade.

Os parâmetros A e B aparecem acoplados na equação integral que rege a evolução da interface. Valores crescentes de $A > 0$ favorecem o crescimento de dedos viscosos que tendem a aparecerem em maior número e mais compridos. Enquanto isso, maiores valores de B atuam na direção oposta, estabilizando as deformações da interface. Em síntese:

- A controla a geração de vorticidade interfacial por contraste viscoso.
- B controla a interface por meio da curvatura.

Ambos são, portanto, essenciais para estabelecer regimes físicos comparáveis, permitindo simulações adimensionais compatíveis com experimentos clássicos em células de Hele-Shaw.

Apesar desses parâmetros de controle serem bem conhecidos, ainda são escassos os estudos que exploram de forma sistemática uma faixa ampla de

variação desses valores. Nesse contexto, o trabalho de Oliveira et al. (Phys. Fluids, 2023) representa uma contribuição relevante ao preencher essa lacuna, ao analisar de maneira abrangente os efeitos combinados desses parâmetros sobre a evolução dos padrões interfaciais.

3

RESULTADOS

A compreensão dos resultados numéricos obtidos depende diretamente do arcabouço conceitual estabelecido no Capítulo 2, no qual os fundamentos da instabilidade viscosa radial, o método de solução por integrais de contorno e os parâmetros adimensionais relevantes foram detalhados. Com esse pano de fundo esclarecido, este capítulo analisa em profundidade a evolução das interfaces simuladas, discutindo os mecanismos físicos que determinam a morfologia dos padrões, a importância relativa dos parâmetros que governam o fenômeno e a relação entre os resultados numéricos, os experimentos disponíveis na literatura e a teoria clássica da instabilidade de Saffman-Taylor. A partir dessa análise integrada, torna-se possível revelar não apenas as características geométricas dos padrões, mas também os processos dinâmicos subjacentes que organizam e modulam a evolução interfacial.

3.1

Variação Paramétrica e Análise Geral dos Padrões Obtidos

As simulações foram conduzidas variando-se sistematicamente os parâmetros adimensionais A e B , conforme discutido no Capítulo 2, com o objetivo de mapear regiões do espaço paramétrico capazes de revelar transições entre casos mais e menos instáveis, pela análise da velocidade de crescimento, o número de ramificações e as larguras dos dedos. O parâmetro A controla diretamente o contraste viscoso entre os fluidos, enquanto B modula o papel estabilizador da tensão superficial efetiva. Essa estratégia permitiu evitar valores excessivamente altos de B ($> 0,015$), praticamente suprimiriam a instabilidade e valores muito baixos de B ($< 0,0005$), que resultariam em interfaces numericamente irregulares.

Nesse espaço paramétrico, a evolução dos padrões interfaciais revelou-se altamente sensível às combinações de A e B . De modo geral, a interface inicial experimentou uma evolução composta por fases sucessivas: um estágio quase linear, caracterizado pela amplificação de pequenas perturbações aleatórias; um regime intermediário no qual modos dominantes passam a se destacar; e um regime não linear plenamente desenvolvido, no qual os dedos competem, bifurcam e se alongam radialmente até que a interface se aproxime de auto-interseções. A duração e a intensidade de cada fase variaram substancialmente entre as simulações, refletindo a influência direta dos parâmetros adimensionais sobre os mecanismos físicos em jogo.

A partir dessa perspectiva, a descrição dos padrões obtidos não se restringe ao aspecto morfológico, mas evidencia como a interação entre os efeitos capilares e o contraste viscoso define a dinâmica global do sistema. Cada combinação de A e B estabelece um balanço particular entre a amplificação das instabilidades e os mecanismos suavizantes impostos pela tensão superficial, resultando em diferentes geometrias e frequências de ocorrência de bifurcações ao longo da interface.

A Figura 3.1 sintetiza esse panorama, fornecendo um mapa essencial para a interpretação dos resultados apresentados nas seções seguintes. Observa-se coerência entre as tendências numéricas e o comportamento descrito no Capítulo 2, indicando que o método empregado reproduz adequadamente os padrões característicos relatados por Homsy (1987) e Oliveira et al. (2023). Ao estruturar de forma clara o espaço de regimes físicos, esta seção estabelece as bases necessárias para compreender como diferentes combinações de A e B controlam a amplitude, a frequência e a morfologia das instabilidades analisadas nos capítulos subsequentes

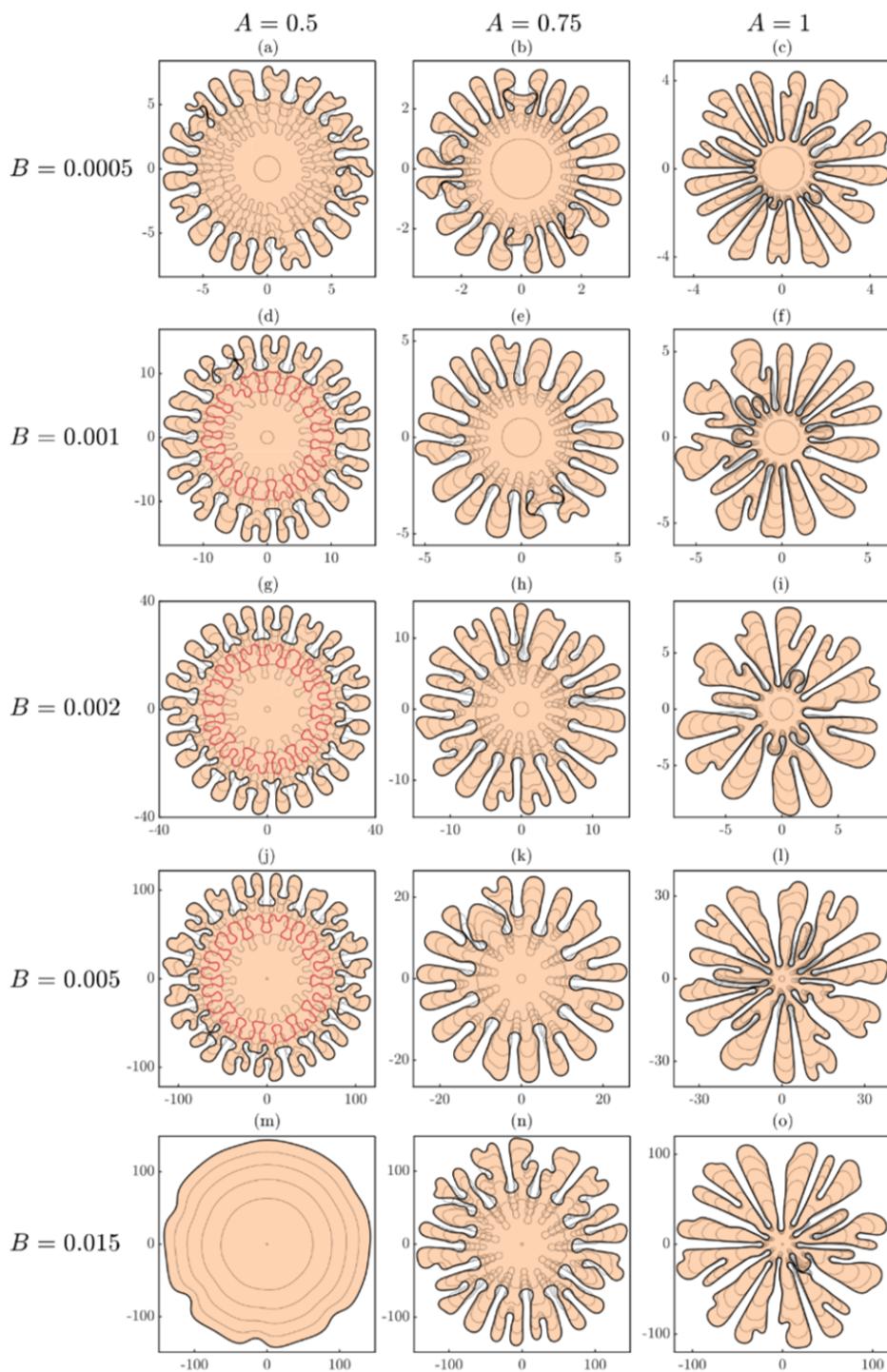


Figura 3.1: Dedos viscosos a partir das alterações dos parâmetros A e B

3.1.1

Variação Morfológica Associada ao Contraste de Viscosidade A

O contraste de viscosidade $A = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$ mostrou-se o fator mais determinante na definição da morfologia dos padrões. A análise detalhada evidencia que o parâmetro controla fundamentalmente a intensidade da instabilidade e o grau de ramificação observado.

Para $A = 0,5$, perturbações cresciam, mas com intensidade limitada, permitindo que o contorno permanecesse relativamente suave. Os dedos gerados eram curtos e pouco alongados, sugerindo que o mecanismo de amplificação das perturbações era insuficiente para desencadear ramificações típicas de regimes altamente não lineares. A região central estável permanece larga e circular, indicando baixa penetração dos dedos.

Para $A = 0,75$, os efeitos não lineares tornaram-se mais pronunciados. A interface deformava-se de forma mais agressiva e, mesmo em tempos intermediários, já era possível identificar divergências claras no comprimento entre dedos adjacentes. O processo de competição tornava-se mais vigoroso, e ramificações secundárias surgiam de maneira intermitente. A região central estável apresentava diminuição comparado ao valor de A anterior, visto a tendência do avanço dos dedos mais longos e a supressão dos mais curtos.

O comportamento mais extremo ocorreu para $A = 1$, equivalendo ao deslocamento de um fluido altamente viscoso por outro quase sem viscosidade, como o caso clássico ar-glicerina. Nesse regime, mesmo perturbações muito pequenas eram amplificadas rapidamente, produzindo dedos longos, finos e altamente ramificados. O padrão apresentava assinaturas características dos experimentos de Bischofberger (BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015), evidenciando múltiplos ciclos de ramificação lateral e eventos sucessivos de divisão no ápice dos dedos (*tip-splitting*). A região central estável se torna relativamente pequena.

A tabela 3.1 sintetiza as informações acima mostradas.

Tabela 3.1: Efeito do contraste de viscosidade (A) sobre a morfologia

A	Comprimento dos dedos	Região estável interna	Velocidade de crescimentos dos dedos
0,50	Curto	Grande	Baixo
0,75	Intermediário	Média	Moderada
1,00	Longo	Pequena	Alta

3.1.2

Influência da Tensão Superficial Efetiva B

A tensão superficial efetiva, representada pelo parâmetro B , atua como o principal agente estabilizador da interface. Diferentemente do contraste de viscosidade, B não altera o tipo de padrão final, mas controla a rapidez com que a interface passa das primeiras deformações para um regime de crescimento mais não linear.

Para valores muito baixos, como $B = 0,0005$, a ação capilar é reduzida e a interface torna-se sensível a perturbações, resultando em crescimento rápido e formação de múltiplos dedos estreitos, comportamento coerente com a instabilidade clássica descrita por Saffman e Taylor (1958), Homsy (1987).

Quando B assume valores intermediários, como 0,001 ou 0,002, o ritmo de crescimento desacelera, permitindo que a interface se reorganize gradualmente. Os dedos tornam-se mais espessos e menos susceptíveis a ramificações, com aparência morfológica mais consistente.

A partir de valores elevados, $B \geq 0,005$, o efeito estabilizador domina. A instabilidade precisa de longo tempo para se desenvolver, e os padrões de crescimento lento e pouca ramificação. Nesses regimes, a tensão superficial impede a amplificação de ruídos, restringindo o surgimento de dedos estreitos e deixando os padrões menos ramificados.

A tabela 3.2 sintetiza as informações acima mostradas.

Tabela 3.2: Efeito da tensão superficial efetiva (B)

B	Crescimento	Tamanho final	Características
0,0005	Muito rápido	Pequeno	Estreitos e numerosos
0,001	Rápido	Médio	Dedos mais largos
0,002	Moderado	Médio-Grande	Dedos mais estáveis
0,005	Lento	Grande	Pouca ramificação
0,015	Muito lento	Muito grande	Morfologia estabilizada

3.1.3

Interação entre A e B

A interação entre os dois parâmetros revela-se fundamental para compreender a hierarquia física do sistema: A controla a forma; B controla o tempo; ambos definem conjuntamente o regime observável.

O controle de tempo exercido pelo parâmetro B decorre do seu efeito estabilizador sobre a evolução dos padrões, retardando o crescimento da instabilidade. Assim, valores maiores de B prolongam o tempo necessário para que os dedos se amplifiquem, enquanto valores menores permitem que

a instabilidade se desenvolva mais rapidamente. Esse comportamento pode ser observado pelo alongamento do tempo de simulação indicado pelas curvas vermelhas internas aos padrões mostrados nos casos (d), (g) e (j) da figura 3.1. Essas curvas representam o formato assumido pela interface no instante em que a simulação correspondente ao valor de B anterior foi interrompida, evidenciando que simulações com maior B requerem tempos mais longos para alcançar níveis equivalentes de *fingering*.

A seguir, um quadro resumido as interações entre A e B :

Tabela 3.3: Interação entre A e B

A	B baixo	B alto
0,5	Dedos curtos	Padrões amplos e estabilização acentuada
0,75	Ramificações ocasionais	Dedos mais espessos e competição reduzida
1,0	<i>Tip-splitting</i> intenso	Crescimento instável, porém retardado

Essas combinações deixam claro que não é possível compreender o comportamento do sistema sem analisar simultaneamente a morfologia e a escala temporal.

3.2

Similaridade Morfológica

A similaridade morfológica observada entre padrões gerados com o mesmo valor de contraste de viscosidade, mas com valores distintos de tensão superficial, constitui uma das descobertas mais relevantes deste estudo. Esse resultado revela que o sistema apresenta uma invariância estrutural quando adequadamente normalizado, o que sugere que os mecanismos físicos fundamentais transcendem as condições específicas de escala temporal.

Ao normalizar o tempo pelo instante final de cada simulação e ao reescalar espacialmente os padrões pelo raio máximo alcançado, verificou-se que os contornos se sobreponham, independentemente do valor de B . Isso significa que, embora a tensão superficial module o ritmo da evolução, ela não altera o caráter geométrico dominante imposto pelo contraste de viscosidade. Tal comportamento remete aos resultados clássicos de Homsy (1987), que identificou a viscosidade como o parâmetro primário de seleção morfológica para instabilidades interfaciais, e aos trabalhos contemporâneos de Patmonoaji, Nagatsu e colaboradores, que reforçam a universalidade desses padrões quando controlados por escalas adimensionais apropriadas. Essa similaridade tem implicações

importantes para aplicações em engenharia, como processos de recuperação avançada de petróleo. A partir dessa observação, é possível inferir que ajustes em tensões superficiais efetiva, através de variações na taxa de injeção, influenciam a taxa de avanço, mas não o tipo de padrão, permitindo maior previsibilidade e controle operacional.

A Figura 3.2 apresenta uma análise quantitativa da evolução temporal da instabilidade viscosa e servem como evidência direta da similaridade morfológica discutida. No painel (a) da figura 3.2, o gráfico mostra a evolução do comprimento interfacial normalizado $L/(2\pi R)$ para o caso $A = 0, 5$. Esse parâmetro indica o grau de distorção da interface em relação a uma circunferência perfeita, de modo que valores maiores correspondem a padrões mais irregulares e com dedos mais pronunciados. Observa-se que, embora diferentes valores de tensão superficial efetiva B modifiquem significativamente a velocidade inicial de crescimento das deformações, todas as curvas convergem para trajetórias muito próximas quando o tempo é normalizado pelo instante final da simulação. Esse colapso das curvas reforça a ideia de que B não altera a estrutura geométrica dominante, mas apenas a escala temporal da evolução.

O painel (b) da figura 3.2 aprofunda essa conclusão ao examinar a evolução do tamanho máximo do dedo normalizado $(R_o - R_i)/R_o$ para simulações com $A = 1$, onde a instabilidade é mais intensa. Esse parâmetro mede relativamente a região central estável da interface e a expansão da região instável. Para compreender essa razão geométrica, define-se R_i como o raio da região estável onde o fluido injetado desloca todo outro fluido.; por outro lado, R_o corresponde ao raio externo da estrutura, medido até a ponta do dedo mais longo, representando a fronteira extrema de penetração do fluido menos viscoso. A Figura esquemática 3.3, similar às apresentadas por Bischofberger, Ramachandran e Nagel (2014). Mais uma vez, embora valores menores de B promovam uma invasão mais rápida e agressiva, refletida por curvas mais íngremes e crescimento acelerado, a normalização temporal faz com que as trajetórias para diferentes tensões superficiais se tornem semelhantes.

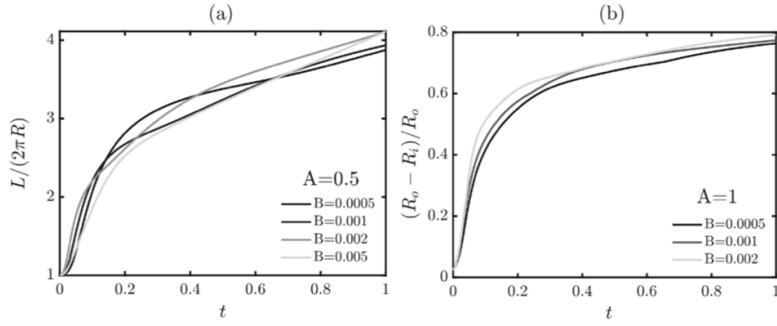


Figura 3.2: (a) Evolução temporal do comprimento interfacial normalizado $L/(2\pi R)$ para $A = 0,5$ e diferentes valores de tensão superficial efetiva B . (b) Evolução do tamanho máximo do dedo normalizado $(R_o - R_i)/R_o$ para $A = 1$.

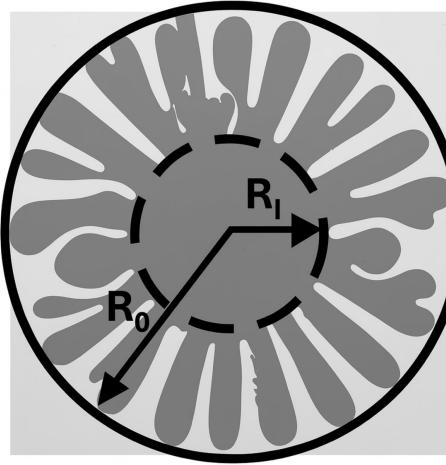


Figura 3.3: Figura esquemática de R_o e R_i

3.3

Dinâmica Competitiva e Evolução da Estrutura Interna da Interface

A instabilidade da interface e a competição entre dedos constituem aspectos centrais da dinâmica da instabilidade viscosa radial. Esses mecanismos controlam a profundidade de penetração da instabilidade no domínio invadido, refletida diretamente na evolução do raio interno estável R_i .

A competição entre dedos emerge de forma espontânea assim que perturbações iniciais são amplificadas e passam a crescer de modo não linear ao longo da interface. Dedos que avançam ligeiramente à frente passam a captar fluxo preferencialmente, devido ao gradiente de pressão mais pronunciado no ponto frontal. Esse mecanismo amplia diferenças iniciais e leva à supressão progressiva de dedos menores, estabelecendo uma hierarquia de estruturas

dominantes. Em regimes com contraste de viscosidade A elevado, tal processo ocorre quase imediatamente após o surgimento das primeiras deformações, pois a diferença entre viscosidades aumenta a sensibilidade do sistema. Esse comportamento está alinhado com observações experimentais clássicas, como as de Peters e Flock (1981), que demonstraram seleção angular intensa em meios porosos.

À medida que o escoamento evolui, o crescimento dos dedos não ocorre de forma estritamente ordenada. Inicialmente, alguns dedos primários tendem a avançar mais rapidamente, enquanto outros permanecem menos desenvolvidos. Com o tempo, contudo, observa-se um processo de realinhamento no qual dedos secundários podem recuperar intensidade e progredir, resultado de uma redistribuição local do fluxo. Esse comportamento torna-se evidente em regimes nos quais o parâmetro B é elevado, pois a maior tensão superficial efetiva atua reduzindo contrastes entre os dedos e promovendo uma distribuição mais homogênea do fluido. Em regimes altamente instáveis, esse fenômeno é menos frequente, mas ainda assim pode ocorrer devido a flutuações locais no campo de pressões.

A interação entre os dedos não se limita à modulação da morfologia externa da interface, pois também condiciona a organização geométrica do domínio interno, afetando diretamente a evolução do raio estável R_i . Em valores de $A \leq 0,5$, isto é regimes de baixa instabilidade, R_i mantém-se elevado e próximo de uma geometria circular, indicando que as perturbações permanecem confinadas à borda externa e que o núcleo opera em um regime hidrodinâmico pouco sensível.

Com o aumento do contraste de viscosidade, o avanço de dedos mais longos e ramificados promove uma redução progressiva de R_i , refletindo a penetração da instabilidade em regiões mais internas do domínio. Nos limites de maior instabilidade, isto é para os valores de A próximo a 1, a região central deixa de apresentar simetria circular, assumindo contornos irregulares ou fragmentados.

A tensão superficial efetiva B atua modulando esse processo: valores elevados retardam a penetração e mantêm R_i grande por períodos prolongados, enquanto valores baixos aceleram a invasão dos dedos, tornando R_i um indicador sensível do grau de instabilidade. Assim, o comportamento combinado de competição angular e evolução do raio interno revela uma dinâmica complexa, na qual efeitos estabilizadores e mecanismos amplificadores interagem continuamente para moldar a interface.

3.4

Síntese Interpretativa

Os resultados apresentados neste capítulo evidenciam que a dinâmica da instabilidade viscosa radial é governada por parâmetros físicos bem definida. O contraste de viscosidade A estabelece a morfologia dominante dos padrões, controlando o grau de ramificação e a intensidade da instabilidade, enquanto a tensão superficial efetiva B atua principalmente como regulador temporal, modulando o ritmo de evolução sem alterar a classe estrutural selecionada. A combinação desses efeitos determina tanto a organização dos dedos quanto a penetração da instabilidade, refletida na evolução do raio estável R_i .

Além disso, os resultados quantitativos confirmam a similaridade morfológica entre padrões obtidos para diferentes valores de B , reforçando a validade do reescalonamento temporal e espacial adotado. Essa invariância estrutural sugere que os mecanismos físicos fundamentais permanecem robustos mesmo sob variações paramétricas amplas, aproximando as simulações numéricas dos comportamentos observados experimentalmente.

Essa conexão entre a invariância estrutural das simulações e os registros experimentais pode ser observada de forma clara nos padrões apresentados na Figura 3.4, constante no artigo de Oliveira et al (2023) onde diferentes combinações de A e B produzem morfologias que permanecem semelhantes quando analisadas em escalas normalizadas. Nos experimentos, mesmas variações significativas da tensão superficial efetiva resultam apenas em mudanças no ritmo de crescimento. Além disso, a presença de ramificações, *tip-splitting* e competição não linear entre dedos, visível sobretudo nos painéis mais instáveis, reproduz fielmente mecanismos já documentados em estudos de Saffman-Taylor e em investigações contemporâneas conduzidas em células de Hele-Shaw. Dessa forma, as evidências experimentais reforçam a robustez do modelo adotado e consolidam a interpretação de que a similaridade morfológica é uma característica intrínseca do fenômeno, emergindo tanto em ambiente numérico quanto em laboratório.

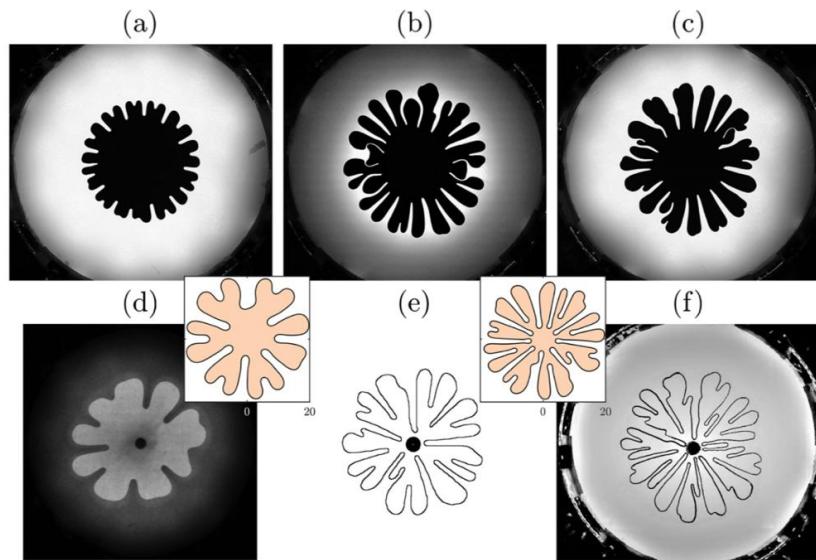


Figura 3.4: Padrões experimentais obtidos em célula de Hele-Shaw para distintos valores dos parâmetros adimensionais A e B : (a) 0,63; 0,0011; (b) 0,78; 0,00034; (c) 0,78; 0,0027; (d) 0,996; 0,25; (e) 0,999; 0,0063; (f) 0,999; 0,0021. Os painéis inseridos em (d) e (e) correspondem às simulações com $A = 1$ e $B = 0,015$ ($t = 130$) e $A = 1$ e $B = 0,005$ ($t = 110$), respectivamente.

4

CONCLUSÃO

O presente Trabalho de Conclusão de Curso teve como objetivo principal investigar a evolução temporal da instabilidade de Saffman-Taylor em escoamentos radiais em uma célula de Hele-Shaw, com ênfase na influência dos parâmetros adimensionais contraste viscoso (A) e tensão superficial efetiva (B) sobre a formação e morfologia dos dedos viscosos. A partir de dados numéricos de alta resolução, obtidos no estudo de Oliveira et al. (2023) com o formalismo de *vortex-sheet*, buscou-se compreender de forma sistemática como esses parâmetros controlam os regimes de estabilidade e instabilidade da interface entre dois fluidos imiscíveis, em um contexto com aplicações à engenharia de reservatórios e às técnicas de recuperação avançada de petróleo (EOR).

Ao longo do trabalho, estabeleceu-se inicialmente o pano de fundo aplicado do problema, inserindo a instabilidade viscosa no contexto da indústria petrolífera. Mostrou-se que, em um cenário de transição energética e de crescente adoção de tecnologias de captura, utilização e armazenamento de carbono (CCUS), métodos como a injeção de CO₂ e a injeção alternada de água e gás (WAG) assumem relevância não apenas econômica e ambiental, mas também técnico-científica. Nesses processos, a eficiência de varrido em meios porosos é fortemente condicionada pela estabilidade da frente de deslocamento entre fluidos de diferentes viscosidades, sendo a instabilidade de Saffman-Taylor um fator central de perda de eficiência em EOR.

Do ponto de vista teórico, o trabalho revisitou os fundamentos do escoamento em meios porosos, a partir da Lei de Darcy e de sua relação com as equações de Navier-Stokes em regime viscoso. Para o ambiente de uma célula de Hele-Shaw, embora não seja um meio poroso real, constitui um análogo físico adequado para reproduzir o comportamento médio de escoamentos em meios porosos ideais, permitindo a observação direta das instabilidades interfaciais. A dedução da forma equivalente de Darcy para o escoamento entre placas paralelas e a formulação em coordenadas polares para o escoamento radial forneceram a base conceitual para a modelagem da instabilidade em um sistema quase bidimensional.

Em seguida, apresentou-se a formulação do problema interfacial por meio do método de *vortex-sheet*, no qual toda a dinâmica relevante é concentrada na interface entre os fluidos. A incorporação das condições de contorno de salto de pressão (equação de Young-Laplace) e de continuidade da componente normal da velocidade levou à formulação integral que descreve a evolução da inten-

sidade do *vortex-sheet* na interface. A partir da adimensionalização, emergem naturalmente os parâmetros A e B , que sintetizam, de forma compacta, a competição entre o contraste viscoso, de caráter desestabilizador, e a tensão superficial efetiva, de caráter estabilizador. A reformulação do problema em termos do ângulo tangente e do comprimento da interface, conforme proposto na literatura, mostrou-se essencial para contornar dificuldades numéricas associadas ao termo de curvatura e possibilitar simulações estáveis em escoamento dominados por tensão superficial.

Os resultados numéricos apresentados no Capítulo 3 permitem afirmar que os objetivos do trabalho foram plenamente atendidos. A variação sistemática dos parâmetros adimensionais A e B revelou um espaço de regimes no qual se distinguem claramente diferentes configurações de velocidades de crescimento, largura e número de ramificações dos dedos. De modo consistente com a análise desenvolvida, verificou-se que A controla sobretudo a morfologia, intensificando a instabilidade, ampliando o comprimento dos dedos e aumentando a frequência de ramificações conforme cresce, enquanto B atua predominantemente como regulador temporal, retardando ou acelerando o ritmo de amplificação das perturbações sem alterar a estrutura geométrica dominante. Assim, combinações de A elevado com B baixo definiram os regimes mais instáveis, com dedos longos, finos e fortemente competitivos, ao passo que A baixo e B elevado produziram interfaces quase circulares, suavizadas pela ação capilar. Esses resultados estão alinhados com a estrutura física discutida no capítulo, incluindo a similaridade morfológica observada entre padrões reescalados e a dinâmica competitiva que governa a evolução do raio interno estável.

A análise da estrutura interna dos padrões revelou, por sua vez, que a instabilidade radial não se desenvolve de forma homogênea em todo o domínio. A presença de uma região interna circular estável, de raio R_i , mesmo em cenários de forte instabilidade na periferia, indica a coexistência de um núcleo regular e simétrico. Além disso, a auto-semelhança geométrica observada, com colapso de perfis para diferentes valores de B após reescalonamento adequado, indica que o aumento de B tende a estabilizar os padrões de interface, efeito que pode ser compensado pelo alongamento do tempo necessário para a formação completa do padrão. Tais resultados colaboram estudos experimentais e numéricos recentes que identificam regularidades internas em sistemas de *fingering*, mesmo em condições de alta complexidade morfológica.

Em termos de contribuições, este trabalho reforça, em um contexto de escoamento radial, o papel estruturante dos parâmetros adimensionais A e B na organização da instabilidade viscosa; demonstra que o formalismo de *vortex-sheet* associado à célula de Hele-Shaw é capaz de capturar com precisão

a dinâmica não linear da evolução interfacial, inclusive em regimes altamente instáveis; e evidencia a coexistência de regiões internas regulares, bem como propriedades de auto-semelhança geométrica, contribuindo para uma visão mais ampla e organizada da instabilidade de Saffman-Taylor. Adicionalmente, estabelece-se um elo entre a física fundamental da instabilidade viscosa e aplicações de interesse direto na engenharia de reservatórios, em especial na avaliação de estratégias de EOR e CCUS em ambientes análogos aos reservatórios do pré-sal.

Por outro lado, algumas limitações devem ser reconhecidas. A modelagem baseia-se em um sistema bidimensional idealizado, sem considerar explicitamente heterogeneidades de permeabilidade, anisotropias e efeitos gravitacionais presentes em reservatórios reais. Além disso, a formulação adotada foca em escoamentos de fluidos imiscíveis em uma geometria simples, não contemplando de forma explícita efeitos químico-reacionais, variações de molhabilidade ou geometrias mais complexas de meios porosos. Essas simplificações são adequadas para o objetivo de compreender os mecanismos fundamentais, mas indicam que os resultados devem ser interpretados como um passo intermediário entre a teoria e a aplicação direta em campo.

Como perspectivas para trabalhos futuros, destaca-se a possibilidade de estender a análise para geometrias mais complexas, incluindo heterogeneidades representativas de meios porosos reais e condições tridimensionais; investigar instabilidades em escoamentos miscíveis e em sistemas reativos, aproximando ainda mais o modelo das condições encontradas em processos químicos e ambientais; integrar modelos baseados em *vortex-sheet* com simuladores de reservatórios, de modo a incorporar descrições mais refinadas da instabilidade de Saffman-Taylor em ferramentas de engenharia; e, por fim, estudar estratégias de mitigação da instabilidade, como a modificação reológica de fluidos injetados ou a aplicação de estratégias de controle de vazão, à luz dos resultados obtidos para diferentes combinações de *A* e *B*.

Em síntese, este trabalho contribuiu para o entendimento detalhado da instabilidade viscosa em escoamentos radiais em célula de Hele-Shaw, evidenciando como a competição entre contraste viscoso e tensão superficial efetiva estrutura os padrões interfaciais observados. Ao conectar esses resultados à realidade da indústria de óleo e gás, em especial no contexto dos reservatórios do pré-sal e das tecnologias de EOR e CCUS, reforça-se a importância de uma abordagem integrada entre fundamentos de mecânica dos fluidos, modelagem numérica avançada e aplicações em engenharia de reservatórios.

Referências Bibliográficas

- Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP). *Anuário Estatístico Brasileiro do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis 2023*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2023. <<https://www.gov.br/anp>>. Acesso em: 31 out. 2025.
- BEAR, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York: Dover Publications, 1972.
- BISCHOFBERGER, I.; RAMACHANDRAN, R.; NAGEL, S. R. An island of stability in a sea of fingers: emergent global features of the viscous-flow instability. *Soft Matter*, v. 11, p. 7428–7432, 2015.
- COSTA, M. R.; LOPES, F. P. *Recuperação avançada de petróleo: fundamentos e aplicações*. Rio de Janeiro: Interciênciac, 2019.
- Empresa de Pesquisa Energética (EPE). *Plano Nacional de Energia 2050*. Brasília: [s.n.], 2024. <<https://www.epe.gov.br>>. Acesso em: 31 out. 2025.
- GABARDO, I. T. *Caracterização química e toxicológica da água produzida descartada em plataformas de óleo e gás na costa brasileira*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, 2007.
- Global CCS Institute. *22 FPSOs in Brazil's Pre-Salt Enable Petrobras to Break CO₂ Reinjection Record*. 2024. <<https://www.offshore-energy.biz/22-fpsos-in-brazils-pre-salt-enable-petrobras-to-break-c02-reinjection-record/>>. Acesso em: 31 out. 2025.
- GUERRERO, F.-B.; KANTZAS, A. Visualization of chemical heavy oil eor displacement mechanisms in a 2d system. *Energies*, v. 14, n. 950, p. 1–15, 2021.
- HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 19, p. 271–311, 1987.
- HOU, T. Y.; LOWENGRUB, J. S.; SHELLY, M. J. The convergence of an exact desingularization for vortex methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 14, n. 1, p. 1–18, 1993.
- Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). *Contas nacionais trimestrais: indicadores de volume e valores correntes 2024*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2024. <<https://www.ibge.gov.br>>. Acesso em: 31 out. 2025.
- Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis (IBP). *Carbon Capture, Storage, and Utilization Technologies (CCUS) and their Importance to the Energy Transition in Brazil*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2025. <<https://www.ibp.org.br/media/12-b-technologies-ccus-ingles.pdf>>. Acesso em: 31 out. 2025.

- International Energy Agency (IEA). *Carbon Capture, Utilization and Storage 2023*. Paris: [s.n.], 2023. <<https://www.iea.org/reports/ccus-in-clean-energy-transitions>>. Acesso em: 31 out. 2025.
- LAKE, L. W. *Enhanced Oil Recovery*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2010. Reprint edition. ISBN 9781555633059.
- LOURENÇO, E. et al. Barotropic inversion in brazilian pre-salt carbon-dioxide-rich gas condensate. In: *SPE Brazil Technical Conference*. [s.n.], 2024. Acesso em: 31 out. 2025. Disponível em: <<https://spebrazilfatc.com.br/wp-content/uploads/2024/12/094-Barotropic-Inversion-in-Brazilian-Pre-Salt-Carbon-Dioxide-Rich-Gas-Condensate.pdf>>.
- MACHADO, C. C.; BRAGA, F. A. *Engenharia de Reservatórios: fundamentos de recuperação de petróleo*. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- OLIVEIRA, L. F. S. et al. Expected number of fingers in the radial displacement of confined viscous fluids. In: *AIP Conference Proceedings*. [S.l.]: AIP Publishing, 2022. v. 2872, p. 120040.
- OLIVEIRA, R. M. Boundary integral simulations based on the vortex-sheet formalism for the discretization of sharp droplet interfaces in hele-shaw cells. In: ABCM. *Anais do 27º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – COBEM 2023*. Rio de Janeiro, RJ, 2023. COB-2023-0963.
- OLIVEIRA, R. M. et al. Similarity characteristics in the morphology of radial viscous fingers. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 35, n. 4, p. 042114, 2023.
- OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A. Fully nonlinear simulations of ferrofluid patterns in a radial magnetic field. *Physical Review Fluids*, v. 5, p. 124003, 2020.
- OLIVEIRA, R. M. et al. Shape instabilities in confined ferrofluids under crossed magnetic fields. *Physical Review E*, v. 105, p. 065113, 2021.
- OPEC. *Annual Statistical Bulletin 2024*. Vienna: [s.n.], 2024. Acesso em: 31 out. 2025. Disponível em: <<https://www.opec.org>>.
- PETERS, E. J.; FLOCK, D. L. The onset of instability during two-phase immiscible displacement in porous media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 21, n. 2, p. 249–258, 1981.
- PETROBRAS. *Relatório de Sustentabilidade 2023*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2023. Acesso em: 31 out. 2025. Disponível em: <<https://www.petrobras.com.br>>.
- ROSA, K. R. S. A.; BEZERRA, M. C. M.; PONZIO, E. A. Recuperação avançada de petróleo: potencialidades da injeção wag (water alternating gas). *Revista Virtual de Química*, v. 8, n. 3, p. 723–738, 2016. Acesso em: 31 out. 2025. Disponível em: <<https://rvq-sub.sbjq.org.br/index.php/rvq/article/download/1296/769/8458>>.

SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. The penetration of a fluid into a porous medium or hele–shaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society A*, v. 245, p. 312–329, 1958.

SANTOS, D. S. *Análise comparativa de tecnologias de separação de CO₂ no processamento de gás natural*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Escola de Química.

THOMAS, J. E. *Fundamentos de Engenharia de Petróleo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência/Petrobras, 2001.

WHITAKER, S. Flow in porous media i: A theoretical derivation of darcy's law. *Transport in Porous Media*, v. 1, n. 1, p. 3–25, 1986.