



PUC

RIO

Dissertação de Mestrado

Visualizações Geométricas de Regularidades da Aritmética Modular

Plínio Nunes da Silva

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Centro Técnico Científico
Departamento de Matemática

Rio de Janeiro, 07 de agosto de 2025



Pontifícia
Universidade
Católica do
Rio de Janeiro

Dissertação de Mestrado

Visualizações Geométricas de Regularidades da Aritmética Modular

Plínio Nunes da Silva

Orientação: Eduardo Barbosa Pinheiro

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção
do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -
PUC, no Departamento de Matemática

Rio de Janeiro, 07 de agosto de 2025



Pontifícia
Universidade
Católica do
Rio de Janeiro

Visualizações Geométricas de Regularidades da Aritmética Modular

Plínio Nunes da Silva

Dissertação apresentada como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre em Matemática da PUC - Rio.
Aprovada pela Comissão examinadora abaixo:

Professor Eduardo Barbosa Pinheiro
Orientador
Departamento de Matemática - PUC - Rio

Professor Marcos Craizer
Departamento de Matemática - PUC - Rio

Professor Mauro Benayon Menezes
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

Professora Dania González Morales
Departamento de Matemática - PUC - Rio

Rio de Janeiro, 07 de agosto de 2025



Pontifícia
Universidade
Católica do
Rio de Janeiro

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial, do trabalho é proibida sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Plínio Nunes da Silva

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ em 2007.

Ficha Catalográfica

Silva, Plínio Nunes da

Visualizações Geométricas de Regularidades da Aritmética Modular / Plínio Nunes da Silva ; orientador: Eduardo Barbosa Pinheiro. – 2025.

61 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2025.

Inclui bibliografia

1. Matemática - Teses. 2. Números inteiros. 3. Operações. 4. Aritmética modular. 5. Geometria. 6. Construção geométrica. I. Pinheiro, Eduardo Barbosa. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A toda minha família
pelo apoio, confiança, mas principalmente pela paciência.

Agradecimentos

“O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”.

Agradeço aos meus familiares, principalmente Roberta e Hugo, esposa querida e filho amado por suportarem tantos momentos de dificuldades e de desânimos ao meu lado e por se alegrarem com todas as minhas conquistas.

Ao meu orientador, Eduardo Barbosa Pinheiro, pela orientação, parceria, dedicação, incentivo e bastante paciência na condução intelectual e moral para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Ao corpo docente dedicado e capacitado da excelente instituição de ensino PUC - Rio, em especial às professoras Christine Sertã Costa e Dania González Morales, bem como aos professores Luís Eduardo F. Barbosa Moreira, Eduardo Barbosa Pinheiro, Samuel Pacitti Gentil e Marcos Craizer, instituição que acolheu a turma 2023.1 como se estivéssemos no conforto de nossas casas, proporcionando o apoio e suporte necessários.

A todos os meus colegas e amigos da turma 2023.1, pela parceria, pelo incentivo, pelos compartilhamentos de momentos inesquecíveis e que jamais se apagarão na caminhada e conquista de nossas vitórias a cada etapa até a conclusão do mestrado.

Por fim, como eu mesmo a prometi, um agradecimento especial a Mariana Soares, nobre gentil, sempre competente e atenciosa secretária do Departamento de Matemática da PUC - Rio, pois sem ela nenhum de nós, alunos da turma PROFMAT 2023.1 teria chegado até o final com sucesso.

Resumo

Silva, Plínio Nunes; Pinheiro, Eduardo Barbosa. **Visualizações Geométricas de Regularidades da Aritmética Modular.** Rio de Janeiro, 2025. 61p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A aritmética modular e suas propriedades favorecem muito o fortalecimento das operações básicas da matemática, como a adição, subtração, multiplicação e a divisão. Deste modo, utilizar a aritmética modular de uma forma adaptada às etapas de ensino e às faixas etárias adequadas dos estudantes se constitui numa excelente alternativa para que os mesmos possuam maior interesse sobre tais assuntos e compreendam mais amplamente essas operações. Podemos criar estratégias interessantes aplicando as operações matemáticas em grupos cíclicos de uma forma que o aluno se surpreenda e, por que não, se encante pelas propriedades e características particulares da dita aritmética dos restos, criando assim diversas conexões sobre múltiplos e divisores. Com uma condução estimulante e bastante visual do assunto, usando a geometria como auxílio, aproximamos o aluno dos conceitos matemáticos, proporcionando-lhe uma participação mais ativa e efetiva em seu aprendizado. Observando as variadas formas de construções, considerando diversas congruências módulo m e as operações da aritmética, a proposta deste trabalho consiste, basicamente, em vincular as operações de congruências modulares e suas regularidades associadas às representações por polígonos inscritos em uma circunferência.

Palavras-chave

Números inteiros; operações; aritmética modular; geometria; construção geométrica.

Abstract

Silva, Plínio Nunes; Pinheiro, Eduardo Barbosa. **Geometric Visualizations of Regularities in Modular Arithmetic.** Rio de Janeiro, 2025. 61p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Modular arithmetic and its properties greatly enhance the strengthening of basic mathematical operations, such as addition, subtraction, multiplication and division. Therefore, using modular arithmetic in a way that is adapted to the appropriate teaching stages and age groups of students is an excellent alternative for students to become more interested in these subjects and to understand these operations more fully. We can create interesting strategies by applying mathematical operations in cyclical groups in a way that surprises students and, why not, is enchanted by the particular properties and characteristics of the so-called arithmetic of remainders, thus creating various connections about multiples and divisors. By conducting the subject in a stimulating and highly visual manner, using geometry as an aid, we bring students closer to mathematical concepts, providing them with a more active and effective participation in their learning. Observing the various forms of constructions, considering various congruences modulo m and the operations of arithmetic, the proposal of this work consists, basically, of linking the operations of modular congruences and their associated regularities to the representations by polygons inscribed in a circumference.

Keywords

Integers; operations; modular arithmetic; geometry; geometric construction.

Sumário

1. Introdução	12
2. O SAEB e o PISA	15
3. Introdução à Aritmética	23
3.1. Aritmética e Geometria	23
4. Congruências Modulares	25
4.1. Classes Residuais	26
5. Polígonos	27
5.1. O módulo 10 (decágono) e propriedades de multiplicação	28
5.2. Múltiplos em módulo 10	28
6. Lehonard Euler e Pierre De Fermat	44
6.1. Teorema de Euler e o Pequeno Teorema de Fermat	45
7. Determinando um menor expoente	46
7.1 O algoritmo de determinação de menor expoente	49
8. Os Chryzodes	51
9. Considerações Finais	58
Referências Bibliográficas	60

Lista de figuras

Figura 1 - Múltiplos de 1 em módulo 10	29
Figura 2 - Múltiplos de 2 em módulo 10	30
Figura 3 - Múltiplos de 3 em módulo 10	31
Figura 4 - Múltiplos de 4 em módulo 10	32
Figura 5 - Múltiplos de 5 em módulo 10	32
Figura 6 - Múltiplos de 6 em módulo 10	33
Figura 7 - Múltiplos de 7 em módulo 10	33
Figura 8 - Múltiplos de 8 em módulo 10	34
Figura 9 - Múltiplos de 9 em módulo 10	34
Figura 10 - Múltiplos 1 em módulo 15	35
Figura 11 - Múltiplos 14 em módulo 15	35
Figura 12 - Múltiplos 2 em módulo 15	36
Figura 13 - Múltiplos 13 em módulo 15	36
Figura 14 - Múltiplos 3 em módulo 15	36
Figura 15 - Múltiplos 12 em módulo 15	36
Figura 16 - Múltiplos 4 em módulo 15	37
Figura 17 - Múltiplos 11 em módulo 15	37
Figura 18 - Múltiplos 5 em módulo 15	37
Figura 19 - Múltiplos 10 em módulo 15	37
Figura 20 - Múltiplos 6 em módulo 15	38
Figura 21 - Múltiplos 9 em módulo 15	38
Figura 22 - Múltiplos 7 em módulo 15	38
Figura 23 - Múltiplos 8 em módulo 15	38
Figura 24 - Múltiplos 1 em módulo 13	39
Figura 25 - Múltiplos 12 em módulo 13	39
Figura 26 - Múltiplos 2 em módulo 13	39
Figura 27 - Múltiplos 11 em módulo 13	39
Figura 28 - Múltiplos 3 em módulo 13	40
Figura 29 - Múltiplos 10 em módulo 13	40
Figura 30 - Múltiplos 4 em módulo 13	40
Figura 31 - Múltiplos 9 em módulo 13	40

Figura 32 - Múltiplos 5 em módulo 13	41
Figura 33 - Múltiplos 8 em módulo 13	41
Figura 34 - Múltiplos 6 em módulo 13	41
Figura 35 - Múltiplos 7 em módulo 13	41
Figura 36 - $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$	47
Figura 37 - $2^6 \equiv 1 \pmod{21}$	48
Figura 38 - $5^4 \equiv 1 \pmod{13}$	49
Figura 39 - Fixo $a = 2$ em módulo 10	51
Figura 40 - Fixo $a = 2$ em módulo 20	51
Figura 41 - Fixo $a = 2$ em módulo 30	52
Figura 42 - Fixo $a = 2$ em módulo 40	52
Figura 43 - Fixo $a = 2$ em módulo 50	52
Figura 44 - Epicicloide de 1 cúspide, cardióide	53
Figura 45 - Fixo $a = 3$ em módulo 10	53
Figura 46 - Fixo $a = 3$ em módulo 20	53
Figura 47 - Fixo $a = 3$ em módulo 30	54
Figura 48 - Fixo $a = 3$ em módulo 40	54
Figura 49 - Fixo $a = 3$ em módulo 50	54
Figura 50 - Epicicloide de 2 cúspides, nefroide	55
Figura 51 - Fixo $a = 4$ em módulo 10	55
Figura 52 - Fixo $a = 4$ em módulo 20	55
Figura 53 - Fixo $a = 4$ em módulo 30	56
Figura 54 - Fixo $a = 4$ em módulo 40	56
Figura 55 - Fixo $a = 4$ em módulo 50	56
Figura 56 - Epicicloide de 3 cúspides, nefroide	57

1. Introdução

O ensino e a aprendizagem da matemática no Brasil têm enfrentado grandes desafios. Dados de avaliações como o SAEB e o PISA evidenciam essas dificuldades. Esses dois sistemas de avaliação, um em nível nacional e outro internacional, são referências para compreender a realidade da educação básica. Eles serão abordados mais à frente neste trabalho como ponto de partida para nossas reflexões.

As dificuldades dos alunos em aprender e lidar com a matemática têm muitas causas. Entre elas, fatores sociais, econômicos e familiares exercem papel decisivo. Questões como moradia, alimentação, condições sanitárias e outros aspectos da vida cotidiana influenciam diretamente a aprendizagem, pois definem se o estudante terá ou não condições mínimas para desenvolver novos conhecimentos.

Há também problemas de ordem estrutural e institucional. Políticas públicas educacionais, muitas vezes marcadas por interesses partidários, deixam de atender às reais necessidades da escola. Soma-se a isso a formação insuficiente de professores, o que impacta de forma sensível o ensino de matemática. Assim, fica claro que existem numerosas variáveis que, em conjunto, dificultam um ensino de qualidade em nosso país. Antes mesmo de discutir conteúdos, competências ou habilidades matemáticas, já nos deparamos com um cenário que exige reflexão profunda.

Essas discussões são importantes e precisam ser feitas constantemente, principalmente quando falamos do Brasil. Nossa país, de dimensão continental, apresenta grande desigualdade social e forte concentração de renda. Essas características tornam ainda mais complexas as reflexões sobre educação, embora não possamos dizer que estamos diante de uma das piores economias do mundo.

Entretanto, não é objetivo deste trabalho aprofundar-se nessas questões, embora sua relevância seja inegável. Reconhecemos plenamente a influência negativa que tais fatores exercem sobre a aprendizagem da matemática. Ainda assim, buscamos oferecer aqui uma contribuição honesta ao ensino, fundamentada em dados concretos de instituições que orientam a educação brasileira.

O foco deste estudo está em algumas dificuldades encontradas pelos alunos do Ensino Fundamental. Mais especificamente, nas duas etapas dessa fase:

o 1º ciclo (do 1º ao 5º ano) e o 2º ciclo (do 6º ao 9º ano). Nessas etapas, os problemas relacionados à matemática básica se tornam mais evidentes, especialmente no domínio das operações aritméticas.

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são, ainda hoje, grandes obstáculos no cotidiano escolar e são também motivo de queixas recorrentes entre os professores. Por isso, a parte inicial deste trabalho analisa tais dificuldades com base em dados do SAEB e do PISA. Essas informações ajudarão a confirmar e ilustrar os desafios enfrentados com a matemática básica, que constitui nosso principal objeto de interesse.

Na primeira parte do estudo, os resultados do SAEB e do PISA serão apresentados e discutidos como fundamento para direcionar nosso olhar. Eles servirão como fio condutor para a proposta de trabalhar as operações aritméticas de forma diferenciada.

Nas etapas seguintes, exploraremos uma maneira alternativa de compreender essas operações: a visualização geométrica por meio da aritmética modular. Essa abordagem permitirá não apenas o aprendizado das congruências modulares, mas também uma nova forma de manipulação das operações aritméticas. Além disso, propomos uma aplicação visual do Pequeno Teorema de Fermat que está diretamente relacionado ao Teorema de Euler e que pode ser utilizada como estratégia para resolver determinadas Equações Diofantinas.

Por fim, apresentamos uma proposta que une a aritmética modular com a construção de curvas racionais algébricas planas, em especial as curvas epicicloides de uma, duas ou três cúspides.

A aritmética é o fio que sustenta todos os ramos da matemática. Não há álgebra, geometria, cálculo, funções ou matemática discreta que se sustentem sem ela. O interesse por esse tema nasceu não apenas de sua necessidade fundamental, mas também de sua beleza e simplicidade. Acreditamos que é possível despertar encantamento pela aritmética, mostrando-a em diálogo com a geometria, área em que os alunos costumam ter maior aceitação justamente pelo caráter visual que oferece.

Assim, a escolha deste tema se justifica: trabalhar as operações aritméticas básicas por meio de representações geométricas pode ser uma forma dinâmica e construtiva de aprender. Além disso, entendemos que o domínio das operações básicas impacta diretamente o avanço em outros conteúdos da matemática. Como

muitos deles são construídos de maneira linear, com forte relação de pré-requisitos, consideramos este tema central e essencial para o desenvolvimento do presente trabalho.

2. O SAEB e o PISA

O Sistema de Avaliação da Educação Básica, conhecido pela sigla SAEB, foi criado em 1990 pelo governo federal. No início, recebia o nome de Sistema Nacional de Avaliação da Educação – SNAE. A criação desse sistema teve como finalidade observar de maneira ampla as condições da educação brasileira e identificar como estava a qualidade do ensino ofertado nas escolas do país. Desde o começo, a proposta era que a aplicação das avaliações acontecesse de dois em dois anos. A segunda edição foi realizada em 1993, consolidando o processo.

Em seu primeiro formato, o SAEB avaliava apenas escolas públicas. Essas instituições eram selecionadas por meio de amostras. Os alunos avaliados pertenciam ao ensino fundamental: no primeiro ciclo, estavam incluídos o 1º, 3º e 5º anos, e no segundo ciclo o 7º ano. As disciplinas avaliadas eram língua portuguesa, matemática e ciências naturais, além da produção textual. Esse arranjo foi mantido até 1995, quando ocorreu uma reformulação importante que ampliou o alcance do sistema. A partir desse momento, escolas privadas também puderam participar do processo, seja de maneira amostral ou por adesão voluntária. Nesse novo formato, a avaliação passou a ter como foco os alunos do 4º e 8º anos do ensino fundamental e do 3º ano do ensino médio, concentrando-se inicialmente nas disciplinas de língua portuguesa e matemática.

Um marco significativo ocorreu em 1997, com a criação das chamadas matrizes de referência. Essas matrizes tinham o papel de estabelecer níveis de proficiência que permitissem interpretar os resultados alcançados pelos estudantes. Com isso, o sistema não apenas aplicava as provas, mas também construía uma escala que possibilitava compreender o desempenho dos alunos de forma mais estruturada. Ainda nesse período, as provas continuavam a ser aplicadas no 4º e 8º anos do ensino fundamental e no 3º ano do ensino médio, contemplando as áreas de língua portuguesa, matemática e ciências da natureza.

Em 1999, durante a 5ª edição, o SAEB ampliou novamente sua abrangência, incluindo a área de ciências humanas junto às disciplinas já avaliadas.

No início dos anos 2000, o foco permaneceu sobre o 4º e 8º anos do fundamental e o 3º ano do ensino médio. Porém, a avaliação apresentava pequenas variações em sua organização a cada edição. Foi em 2005 que o SAEB

passou por uma mudança fundamental: deixou de ser apenas uma avaliação amostral e assumiu caráter censitário. Isso significou que, a partir desse ano, tornou-se obrigatória a participação de todas as escolas públicas localizadas em áreas urbanas que possuíssem 20 ou mais alunos matriculados no 5º e 9º anos do ensino fundamental e no 3º ano do ensino médio. Já as escolas particulares continuaram participando de forma amostral ou por adesão, sem a obrigatoriedade que se impôs às instituições públicas.

Nos anos seguintes, entre 2009 e 2021, a metodologia básica do SAEB sofreu poucas alterações. Em algumas edições foram incluídos novos instrumentos, como questionários socioeconômicos respondidos pelos estudantes e questionários destinados aos professores. Esses questionários buscavam levantar informações sobre a formação docente, condições de trabalho e outros fatores que também interferem nos resultados de aprendizagem. Essa coleta de dados ampliou a compreensão do cenário educacional, possibilitando análises mais aprofundadas sobre a relação entre o contexto do aluno, a formação do professor e o desempenho obtido nas provas.

Portanto, desde sua criação até os dias atuais, o SAEB passou por diversas fases de reformulação, mas manteve como essência a preocupação em medir a qualidade da educação básica no Brasil. A seguir, será apresentada uma tabela que organiza os anos de escolaridade e as disciplinas avaliadas em cada edição do sistema desde sua origem, ilustrando de maneira clara as mudanças e evoluções ocorridas ao longo de mais de três décadas de aplicação.

Ano	Anos de Escolaridade Avaliados	Disciplinas Avaliadas
1990	1ª, 3ª, 5ª e 7ª séries do EF	Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, Redação
1993	1ª, 3ª, 5ª e 7ª séries do EF	Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, Redação
1995	4ª e 8ª séries do EF, 3ª série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
1997	4ª e 8ª séries do EF, 3ª série do EM	Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais
1999	4ª e 8ª séries do EF, 3ª série do EM	Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia

2001	4 ^a e 8 ^a séries do EF, 3 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
2003	4 ^a e 8 ^a séries do EF, 3 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
2005	4 ^a série/5 ^o ano e 8 ^a série/9 ^o ano do EF, 3 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
2007	4 ^a série/5 ^o ano e 8 ^a série/9 ^o ano do EF, 3 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
2009	4 ^a série/5 ^o ano e 8 ^a série/9 ^o ano do EF, 3 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
2011	5 ^o e 9 ^o ano do EF, 3 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
2013	3 ^o , 5 ^o e 9 ^o ano do EF, 3 ^a e 4 ^a série do EM	Leitura, Escrita, Matemática, Ciências Humanas, Ciências da Natureza
2014	3 ^o ano do EF	Leitura, Escrita, Matemática
2015	5 ^o e 9 ^o ano do EF, 3 ^a e 4 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
2016	3 ^o ano do EF	Leitura, Escrita, Matemática
2017	5 ^o e 9 ^o ano do EF, 3 ^a e 4 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática
2019	Creche, Pré-escola, 2 ^o , 5 ^o e 9 ^o ano do EF, 3 ^a e 4 ^a série do EM	Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Humanas, Ciências da Natureza

Tabela 1: De própria autoria (2025)

Pode-se observar que, ao longo da história do SAEB, ocorreram diversas mudanças em seus modelos e metodologias de aplicação. Essas transformações revelam tanto a tentativa de aprimorar o sistema quanto à dificuldade de consolidar um instrumentoável para avaliar a qualidade da educação brasileira. Por ser praticamente o único sistema em larga escala voltado a essa finalidade, o SAEB carrega consigo uma responsabilidade muito grande: indicar, de forma consistente, o retrato da aprendizagem dos alunos e ser referência para gestores, professores e pesquisadores.

Entretanto, ainda existem desafios significativos a serem enfrentados. É fundamental que as informações levantadas pelo sistema não sirvam apenas para expor carências, mas que de fato orientem políticas públicas educacionais contínuas, de caráter governamental e não partidário, como já ressaltado anteriormente. Somente assim será possível transformar os dados em ações concretas. Tais ações devem contemplar tanto os estudantes, que necessitam de

melhores condições de aprendizagem, quanto os professores, que precisam de uma formação sólida e permanente.

Nesse sentido, o sistema deve ir além do papel de apontar falhas. Ele precisa ser encarado como um instrumento de diagnóstico educacional, capaz de fornecer subsídios para a construção de medidas eficazes. Se usado de maneira responsável, o SAEB pode se tornar uma espécie de “vacina” contra os males que afetam o ensino de matemática e de outras áreas do conhecimento.

Ao analisar, por exemplo, os resultados mais recentes, percebemos a gravidade da situação. Os dados de 2019, seguidos pelos de 2021, mostram que, em termos gerais, a proficiência dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em matemática permanece em um nível insatisfatório. De acordo com os critérios estabelecidos pelo próprio INEP, a média nacional ainda está abaixo do desejado.

Esse quadro evidencia uma dificuldade persistente e generalizada.

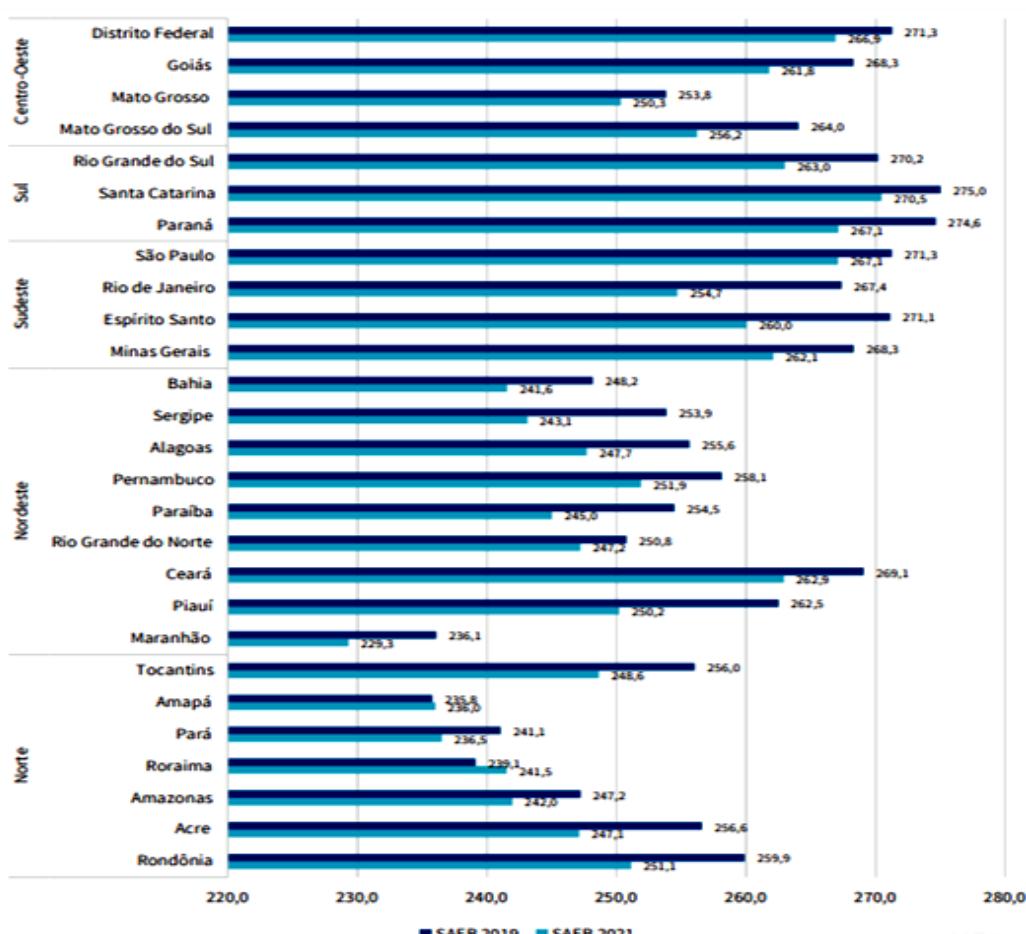


Gráfico 1 - Proficiência média no SAEB, em matemática, no 9º ano do ensino fundamental - unidade da federação e região - 2019 e 2021.

Fonte: Elaborado pela Daeb/Inep.

Apesar disso, alguns estados se destacam positivamente. O Distrito Federal, bem como os estados de Santa Catarina, Paraná e São Paulo, apresentou média dentro ou acima do patamar esperado. Esses resultados demonstram que é possível alcançar avanços quando existem políticas e práticas educacionais mais consolidadas. Por outro lado, reforçam também a urgência de ações que reduzam as desigualdades regionais e garantam que todos os estudantes brasileiros tenham as mesmas oportunidades de aprendizagem.

Os dados dos SAEB de 2021, por exemplo, revelam uma porcentagem de menos de 10% de alunos que cursam 3º ano do ensino médio possuindo o aprendizado considerado como adequado em matemática. Ao se considerar que o 3º ano do ensino médio se coloca como final do ciclo de uma educação dita básica, mediante as dificuldades encontradas nessa etapa, é notório que qualquer trabalho que contribua para uma abordagem sobre matemática básica tenha sua devida importância e torna-se assim uma oportunidade benéfica para seu aprendizado como uma forma de trabalhar conceitos e conteúdos básicos envolvendo as operações básicas da matemática, operações estas que percorrem todo o 1º e 2º ciclos de educação no ensino fundamental. É significativo e importante que tal tema seja debatido e difundido por diversos trabalhos acadêmicos.

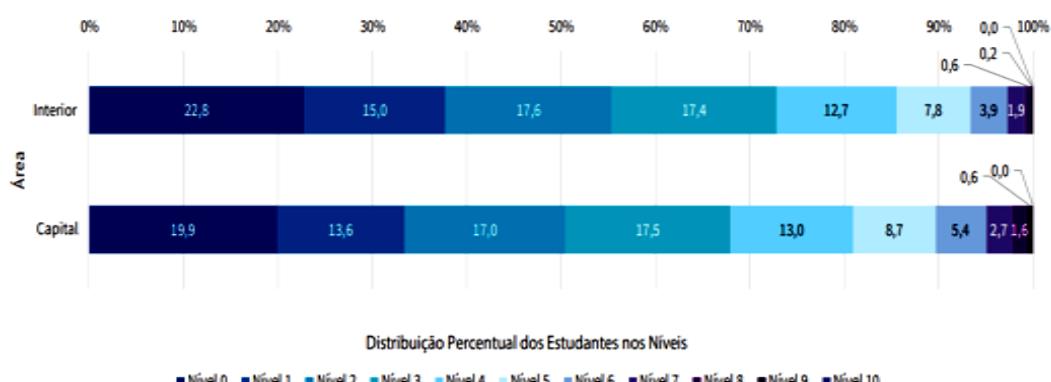


Gráfico 2 - Distribuição porcentual dos estudantes por níveis da escala de proficiência, no SAEB, em matemática, na 3ª série do ensino médio regular - Brasil capital e interior - 2021.
Fonte: Elaborado pela Daeb/Inep.

Por fim, ao que tange no avaliado pelo SAEB de 2021, tem-se demonstrado que mais de 70% dos alunos do 5º ano do ensino fundamental não conseguiram alcançar o nível adequado em matemática, os mesmos permaneceram nos níveis mais baixos de proficiência (INEP, 2022). Contundentemente, se verifica com esses dados, que a maior parte dos estudantes

não tem habilidades básicas consolidadas, o que justifica mais uma vez a produção deste trabalho e os demais trabalhos que possuam ter uma abordagem das operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

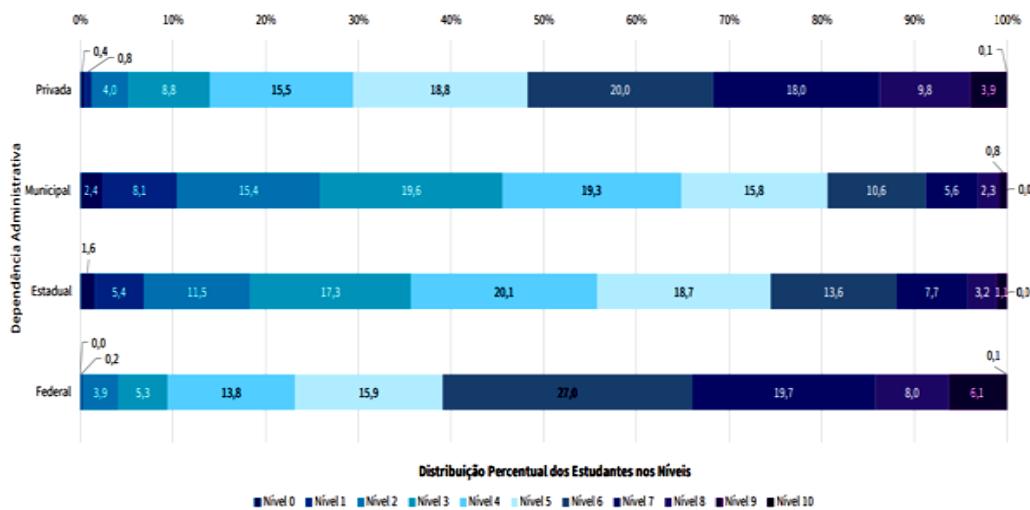


Gráfico 3 - Distribuição porcentual dos estudantes por níveis da escala de proficiência, no SAEB, em matemática, no 5º ano do ensino fundamental - Brasil por dependência administrativa - 2021.
Fonte: Elaborado pela Daeb/Inep.

Registra-se, como o último dado, que um pouco mais de 60% de alunos do 9º ano possuem nível de proficiência abaixo do básico reforçando assim o quanto realmente há de defasado no ensino e aprendizagem em anos anteriores cuja abordagem das básicas operações matemáticas já deveriam estar consolidadas.

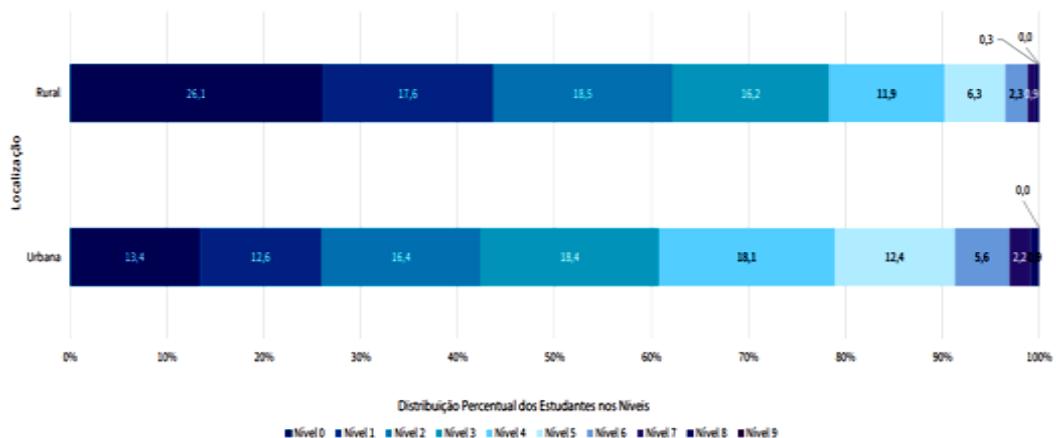


Gráfico 4 - Distribuição porcentual dos estudantes por níveis da escala de proficiência, no SAEB, em matemática, no 9º ano do ensino fundamental - Brasil rural e urbana - 2021.
Fonte: Elaborado pela Daeb/Inep.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA (Programme for International Student Assessment) constitui-se como uma das mais relevantes iniciativas globais para mensurar a qualidade educacional. Avalia estudantes com

idades entre 15 e 16 anos, oriundos de diversos países, com o objetivo de analisar suas competências em áreas fundamentais do conhecimento. A primeira aplicação ocorreu em 2000, sendo realizada de forma trienal até 2018. Em 2021, devido à pandemia de COVID-19, a avaliação foi adiada e realizada apenas em 2022, com a próxima edição prevista para 2025.

Diferentemente do SAEB, que mantém uma metodologia mais homogênea, o PISA possui uma característica singular: a cada edição, escolhe um foco específico. Assim, em 2000, 2009 e 2018, a ênfase foi leitura; em 2006 e 2015, ciências; e em 2003, 2012 e 2022, matemática, área de interesse principal deste estudo.

Segundo dados da OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development), responsável pela coordenação do PISA, o desempenho dos estudantes brasileiros apresenta oscilações, mas permanece abaixo da média internacional. Em matemática, os resultados foram 356 pontos em 2003, 391 em 2012 e 379 em 2022. Para comparação, as médias dos países membros da OCDE nos mesmos anos foram 500, 494 e 472 pontos, respectivamente, mostrando um desempenho inferior ao padrão esperado. Cabe destacar que a queda global em 2022 foi atribuída aos efeitos da pandemia.

A OCDE organiza os resultados em níveis de proficiência, que vão de 0 a 6. Estudantes com até 358 pontos estão abaixo do Nível 1. O Nível 1 abrange 358 a 420 pontos; o Nível 2, de 421 a 482 pontos, é considerado o mínimo desejável; o Nível 3 vai de 483 a 544 pontos; o Nível 4, de 545 a 606 pontos; o Nível 5, de 607 a 668 pontos; e o Nível 6, acima de 669 pontos. No Brasil, aproximadamente 73% dos estudantes estão abaixo do nível mínimo desejável, e apenas 1% atinge os níveis 5 ou 6.

Outro ponto de diferença em relação ao SAEB é que o PISA é amostral e internacional, com 81 países participantes em 2022. Apesar disso, observa-se uma consonância entre os resultados do PISA e do SAEB, ambos coordenados pelo INEP, que garante a gestão nacional das avaliações.

Portanto, SAEB e PISA, sendo os principais sistemas de avaliação da educação no Brasil, expõem uma realidade preocupante em matemática. No entanto, esses resultados não devem ser encarados como desanimadores, mas como um alerta para a necessidade de investimentos contínuos. Tais investimentos devem contemplar tanto a melhoria das condições de aprendizagem

dos alunos, com redução das desigualdades, quanto à formação e valorização dos docentes, elementos essenciais para a transformação da educação brasileira.

3. Introdução à Aritmética

O principal objetivo deste trabalho é proporcionar oportunidades de aprendizagem prática e significativa, aproximando os alunos das operações básicas da matemática de forma contextualizada e construtiva. Para isso, utilizamos a aritmética modular, ramo que estuda o comportamento dos números inteiros e seus restos em um contexto cíclico, como ferramenta para fortalecer a compreensão das operações aritméticas. Ao unir a aritmética a um processo visual e construtivo por meio da geometria, buscamos criar uma conexão sólida entre esses dois eixos fundamentais da matemática, tornando o aprendizado mais intuitivo e envolvente.

Embora a aritmética modular não seja comumente abordada nos níveis iniciais de ensino, acreditamos firmemente em sua capacidade de enriquecer o aprendizado. Sua beleza e simplicidade permitem que conceitos complexos sejam apresentados de maneira mais acessível. Além disso, mesmo incorporando temas desafiadores e profundos, a aritmética modular possui um grande potencial de estimular a participação ativa dos estudantes, despertando curiosidade, engajamento e interesse pelo estudo das operações básicas de forma diferenciada e motivadora.

3.1. Aritmética e Geometria

Abordaremos de forma concisa os conceitos fundamentais de aritmética modular e geometria básica, a fim de proporcionar ao leitor uma base sólida para a compreensão da relação que estabeleceremos entre esses dois ramos da matemática. Para aqueles que desejarem aprofundar seus conhecimentos nesses temas, indicamos diversas fontes de estudo, como (HEFEZ, 2022) e (MOREIRA, 2012).

As primeiras contribuições sérias para a teoria dos números - isto é, completas com provas, não apenas afirmações - são encontradas nos trabalhos de Euclides, em que as ideias estão discretamente disfarçadas de geometria. O tema foi desenvolvido numa área distinta da matemática pelo grego Diofanto, que teve parte dos seus escritos registrados em cópias posteriores. A teoria dos números recebeu grande impulso nos anos 1600, dado por Fermat, e desenvolvida por Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange e Carl Friedrich Gauss num ramo extenso e profundo da matemática, e tocava muitas outras áreas, aparentemente não relacionadas. No fim do século XX essas ligações haviam sido usadas para responder a algumas - embora não todas - antigas charadas, inclusive a famosa conjectura feita por Fermat por volta de 1650, conhecida como seu Último Teorema. (STEWART, 2014, p.119 e p.120)

Gauss foi o responsável pela notação moderna e amplamente utilizada da aritmética modular. Carl Friedrich Gauss, denominado como O Príncipe da Matemática se destaca principalmente nos séculos XVIII e XIX com diversas contribuições em diversas áreas da matemática, física, como astronomia e eletricidade. Nascido em Brunswick - (na Alemanha) - em 1777. Foi uma criança prodígio e extremamente precoce. Gauss foi admitido, como aluno, na Universidade de Götting com apenas 18 anos de idade, onde posteriormente, aos 30 anos se tornaria professor e diretor do observatório da referida universidade. Tornou-se famoso no campo da matemática com a célebre frase: “a matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha da matemática”.

Em uma de suas diversas obras, certamente uma das mais importantes, denominada *Disquisitiones Arithmeticae* traz, dentre muitas contribuições, uma forma de construção de polígonos regulares a régua e compasso, e a comprovação de que um polígono regular de 17 lados pode ser construído com tal técnica. Apresenta também em sua primeira parte a fácil notação para as congruências modulares, objeto deste trabalho bem como a demonstração da Lei de Reciprocidade Quadrática.

Apresentaremos, no seguinte capítulo, os conceitos fundamentais que sustentarão as construções geométricas posteriores, explorando a intersecção entre esses dois ramos da matemática.

4. Congruências Modulares

Ao longo do texto utilizaremos \mathbb{Z} para denotar a conjunto dos números inteiros. Sejam a, b e $n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$. Dizemos que a é congruente a b módulo n , e escrevemos

$$a \equiv b \pmod{n}$$

quando a e b deixam o mesmo resto na divisão por n .

Por exemplo, temos que:

$$17 \equiv 3 \pmod{7}, \text{ pois } 17 = 7 \cdot 2 + 3, \text{ igualmente } 3 = 7 \cdot 0 + 3$$

Mais exemplos como $10 \equiv -2 \pmod{3}$, ou ainda $-6 \equiv -1 \pmod{5}$ são possibilidades.

→ Propriedades das congruências modulares

Para quaisquer $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, temos:

Reflexividade:

$$a \equiv a \pmod{n}$$

Simetria:

Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $b \equiv a \pmod{n}$

Transitividade:

Se $a \equiv b \pmod{n}$ e $b \equiv c \pmod{n}$, então $a \equiv c \pmod{n}$

Compatibilidade com a soma e a subtração:

Se $a \equiv b \pmod{n}$, então $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{n}$

Compatibilidade com o produto:

Se $a \equiv b \pmod{n}$ e se $c \equiv d \pmod{n}$, então $ac \equiv bd \pmod{n}$

Cancelamento:

Se o mdc $(c, n) = 1$ então $ac \equiv bc \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$

As propriedades acima mostram que a relação de congruência tem um comportamento muito similar à relação usual de igualdade. São essas propriedades que tornam as congruências tão úteis em diversos tipos de problemas e serão importantes para as construções posteriores no vínculo com construção geométrica. O leitor interessado em aprofundar-se em mais propriedades e suas devidas demonstrações sugerimos ler a excelente obra do professor Abramo Hefez citada ao final nas referências bibliográficas.

4.1. Classes Residuais

As congruências modulares, para um módulo n ($n > 1$), apresentam diversas aplicações em múltiplos ramos da matemática e, mais recentemente, têm se mostrado essenciais em cálculos computacionais. Entre essas aplicações destacam-se a criptografia RSA e outras formas de criptografia moderna, além de sua utilização em teoria de códigos corretores de erros e em áreas avançadas da teoria de grupos, como exemplificado pela Teoria de Grupos de Galois (COUTINHO, 2009) e (MARTIN, 2010).

De forma conceitual, seja $n > 1$ um número inteiro. Ao considerarmos o conjunto de todos os números inteiros e dividirmos esse conjunto em subconjuntos, de modo que cada subconjunto contenha todos os inteiros que possuem o mesmo resto quando divididos por n , obtemos uma partição estruturada do conjunto dos inteiros. Cada uma dessas classes de equivalência modular forma um bloco distinto dentro do conjunto total, permitindo tratar problemas numéricos e algébricos de forma organizada e sistemática, sendo a base para inúmeras construções teóricas e aplicações práticas da aritmética modular. E sendo assim iremos obter as seguintes partições.

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 0 \pmod{n}\} \\
 R_1 &= \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 1 \pmod{n}\} \\
 R_2 &= \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 2 \pmod{n}\} \\
 R_3 &= \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 3 \pmod{n}\} \\
 &\vdots \\
 R_{n-1} &= \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv n-1 \pmod{n}\} \\
 R_n &= \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv n \pmod{n}\}
 \end{aligned}$$

Em algumas das nossas construções em vez de R_0 , utilizaremos por conveniência R_n , pois são iguais, uma vez que $x \equiv n \pmod{n}$ equivale a $x \equiv 0 \pmod{n}$. Basta notar, por exemplo, que $24 \equiv 6 \pmod{6}$ e $24 \equiv 0 \pmod{6}$, isto mostra que R_0 e R_6 representam a mesma partição por transitividade.

5. Polígonos

As construções dos polígonos utilizadas neste trabalho serão, na maior parte das vezes, diretamente relacionadas ao número de vértices, que por sua vez estará alinhado à congruência modular que se deseja explorar. É importante destacar que, de forma inicial, trabalharemos com polígonos regulares convexos em algumas situações e com polígonos estrelados regulares em outras.

Portanto, nesta fase inicial do estudo, e com o objetivo de promover uma experiência construtiva e visual, realizaremos a construção tanto de polígonos regulares quanto de polígonos estrelados regulares utilizando **vetores residuais**, conceito que será detalhado e definido na sequência. Essa abordagem permite que os alunos assimilem a proposta de maneira concreta, estabelecendo uma conexão prática entre a aritmética modular e a geometria, favorecendo a visualização dos padrões e relações que surgem das congruências modulares.

Sejam $n > 2$ e $0 < k < n$ números inteiros e considere $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ as classes residuais de restos deixados na divisão por n . Definimos o **vetor residual k -múltiplo** como sendo o vetor v_i que conduz o resultado da operação da classe $R_{k(i-1)}$ até a classe R_{ki} para cada i entre 1 e n . Para cada n , obtemos o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ de vetores residuais. As classes residuais serão dispostas em um círculo em por n pontos dividindo-o em n arcos de mesmo comprimento e tais pontos serão orientados no sentido horário de construção de forma crescente.

Os vetores denominados residuais não possuem o objetivo de gozar de todas as operações e propriedades comuns aos vetores, mas terão apenas o fator de orientação, do sentido para o qual a operação está se deslocando. Sendo assim, tal como os vetores, o que deve ser considerado será seu sentido de construção, muito embora em todas as próximas construções possuam mesmo módulo, por exemplo. Como estamos exemplificando construções no módulo 10, qualquer valor superior a 10 será devolvido na sua referente classe residual.

Em construções mais avançadas do texto, usaremos uma ferramenta para a aplicação de teorema e nesse caso existirá a construção de polígonos ou, na maioria das vezes, apenas das diagonais de determinados polígonos. Dessa forma, a estrutura de todo o trabalho se dará a partir do módulo dois em diante, isto é, o menor módulo que trabalharemos será $n > 2$, uma vez que não há polígonos formados por dois lados.

Na seção seguinte, como experiência inicial, concentraremos nossa atenção no módulo 10, utilizado como porta de entrada para introduzir a ideia central deste trabalho. Essa escolha permitirá visualizar caracterizações e construções de polígonos de maneira prática, associando tais construções às propriedades das congruências modulares já mencionadas.

A principal motivação para a utilização do módulo 10 reside na familiaridade dos alunos da educação básica com o sistema decimal, o que facilita a compreensão inicial e o engajamento na experiência prática. No entanto, é importante salientar que inúmeras construções semelhantes podem ser realizadas com outras variações de módulos, permitindo explorar diferentes padrões e propriedades dentro do universo da aritmética modular, ampliando o potencial de aplicação e compreensão dos conceitos trabalhados.

5.1. O módulo 10 (decágono) e propriedades de multiplicação

Faremos construções utilizando como uma base geométrica os vértices de um decágono regular sobrepostos sobre um círculo e abordaremos a construção e visualização de como os k -múltiplos de 1 a 9 se comportam ciclicamente em módulo $n = 10$, utilizando a aritmética dos restos e os representando visualmente. As próximas construções, e todas as demais construções deste trabalho, usarão como referência os vértices de polígonos inscritos em um círculo para registrar as suas classes residuais, registradas sequencialmente no sentido horário, como já registrado.

5.2. Múltiplos em módulo 10

Sejam $R_1, R_2, \dots, R_9, R_{10}$ as classes residuais de restos deixados na divisão por 10 e considere $0 < k < 10$ um número inteiro. Sejam $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_9, \mathbf{v}_{10}\}$ os **vetores residuais k -múltiplos**. Sendo assim, tal como vetores, o que deve ser considerado será seu sentido de construção, muito embora em todas as próximas construções possuam mesmo módulo, por exemplo. Como estamos exemplificando construções em módulo 10, qualquer valor superior a 10 será devolvido na sua referente classe residual correspondente.

O processo algébrico que se dará em cada construção geométrica obedecerá à seguinte lógica descrita nos itens a seguir por meio dos vetores residuais múltiplos de k .

i) Múltiplos de 1 em módulo 10

Seja $k = 1$ o múltiplo escolhido em um sistema de resíduos $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{10}$ módulo 10. Tem-se que:

R_{10} será levado pelo vetor \mathbf{v}_1 até R_1 através da multiplicação $1 \cdot 1 = 1$

(Lembrando que as classes residuais R_0 e R_{10} são congruentes)

R_1 será levado pelo vetor \mathbf{v}_2 até R_2 através da multiplicação $2 \cdot 1 = 2$

R_2 será levado pelo vetor \mathbf{v}_3 até R_3 através da multiplicação $3 \cdot 1 = 3$

R_3 será levado pelo vetor \mathbf{v}_4 até R_4 através da multiplicação $4 \cdot 1 = 4$

R_4 será levado pelo vetor \mathbf{v}_5 até R_5 através da multiplicação $5 \cdot 1 = 5$

R_5 será levado pelo vetor \mathbf{v}_6 até R_6 através da multiplicação $6 \cdot 1 = 6$

R_6 será levado pelo vetor \mathbf{v}_7 até R_7 através da multiplicação $7 \cdot 1 = 7$

R_7 será levado pelo vetor \mathbf{v}_8 até R_8 através da multiplicação $8 \cdot 1 = 8$

R_8 será levado pelo vetor \mathbf{v}_9 até R_9 através da multiplicação $9 \cdot 1 = 9$

R_9 será levado pelo vetor \mathbf{v}_{10} até R_{10} através da multiplicação $10 \cdot 1 = 10$

Construindo geometricamente tem – se:

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_1 \xrightarrow{v_2} R_2 \xrightarrow{v_3} R_3 \xrightarrow{v_4} R_4 \xrightarrow{v_5} R_5 \xrightarrow{v_6} R_6 \xrightarrow{v_7} R_7 \xrightarrow{v_8} R_8 \xrightarrow{v_9} R_9 \xrightarrow{v_{10}} R_{10}$$

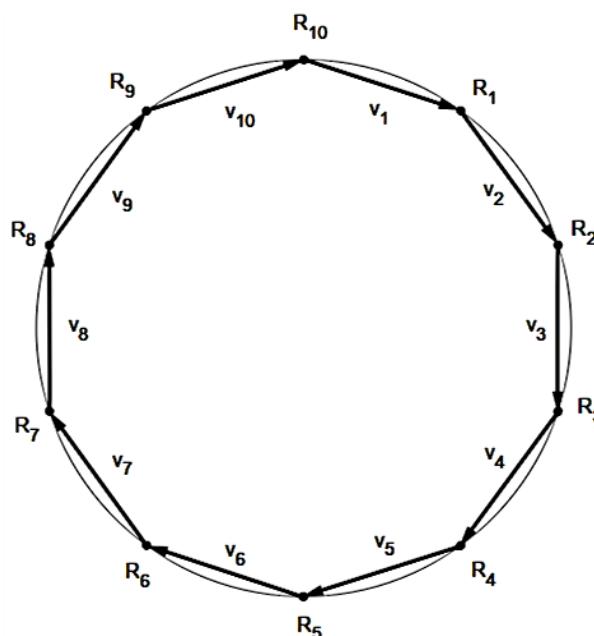


Figura 1: Múltiplos de 1 em módulo 10

Decágono Regular

Fonte: De própria autoria

ii) Múltiplos de 2 em módulo 10

Seja agora $k = 2$ o múltiplo escolhido em um sistema de resíduos $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{10}$ módulo 10. Tem - se que:

R_{10} será levado pelo vetor v_1 até R_2 através da multiplicação $1.2 = 2$

R_2 será levado pelo vetor v_2 até R_4 através da multiplicação $2.2 = 4$

R_4 será levado pelo vetor v_3 até R_6 através da multiplicação $3.2 = 6$

R_6 será levado pelo vetor v_4 até R_8 através da multiplicação $4.2 = 8$

R_8 será levado pelo vetor v_5 até R_{10} através da multiplicação $5.2 = 10$

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_2 \xrightarrow{v_2} R_4 \xrightarrow{v_3} R_6 \xrightarrow{v_4} R_8 \xrightarrow{v_5} R_{10}$$

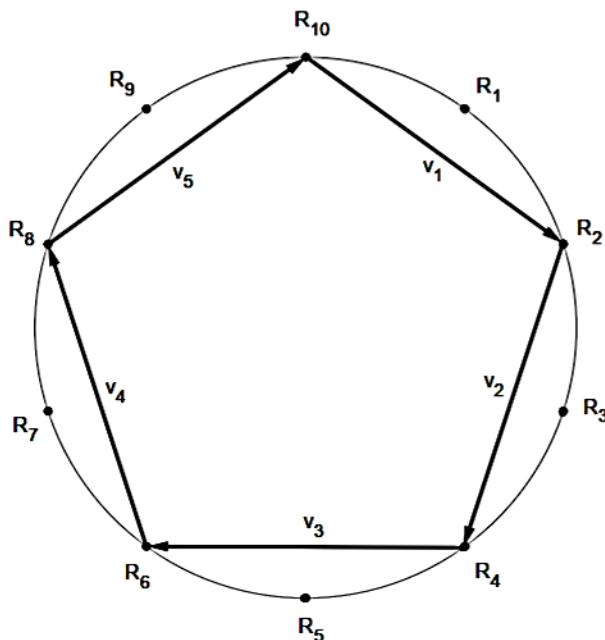


Figura 2: Múltiplos de 2 em módulo 10

Pentágono Regular

Fonte: De própria autoria

iii) Múltiplos de 3 em módulo 10

Seja $k = 3$ o múltiplo escolhido em um sistema de resíduos $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{10}$ módulo 10. Tem-se que:

R_{10} será levado pelo vetor v_1 até R_3 através da multiplicação $1.3 = 3$

R_3 será levado pelo vetor v_2 até R_6 através da multiplicação $2.3 = 6$

R_6 será levado pelo vetor v_3 até R_9 através da multiplicação $3.3 = 9$

R_9 será levado pelo vetor v_4 até R_2 através da multiplicação $4.3 = 12$

R_2 será levado pelo vetor v_5 até R_5 através da multiplicação $5.3 = 15$

R_5 será levado pelo vetor \mathbf{v}_6 até R_8 através da multiplicação $6.3 = 18$

R_8 será levado pelo vetor \mathbf{v}_7 até R_1 através da multiplicação $7.3 = 21$

R_1 será levado pelo vetor \mathbf{v}_8 até R_4 através da multiplicação $8.3 = 24$

R_4 será levado pelo vetor \mathbf{v}_9 até R_7 através da multiplicação $9.3 = 27$

R_7 será levado pelo vetor \mathbf{v}_{10} até R_{10} através da multiplicação $10.3 = 30$

Como $12 \equiv 2$ modo 10, $15 \equiv 5$ mod 10, $18 \equiv 8$ mod 10, $21 \equiv 1$ mod 10, $24 \equiv 4$ mod 10, $27 \equiv 7$ mod 10 e $30 \equiv 10$ modo 10.

Logo podemos construir o decágono regular estrelado (Decagrama) abaixo:

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_3 \xrightarrow{v_2} R_6 \xrightarrow{v_3} R_9 \xrightarrow{v_4} R_2 \xrightarrow{v_5} R_5 \xrightarrow{v_6} R_8 \xrightarrow{v_7} R_1 \xrightarrow{v_8} R_4 \xrightarrow{v_9} R_7 \xrightarrow{v_{10}} R_{10}$$

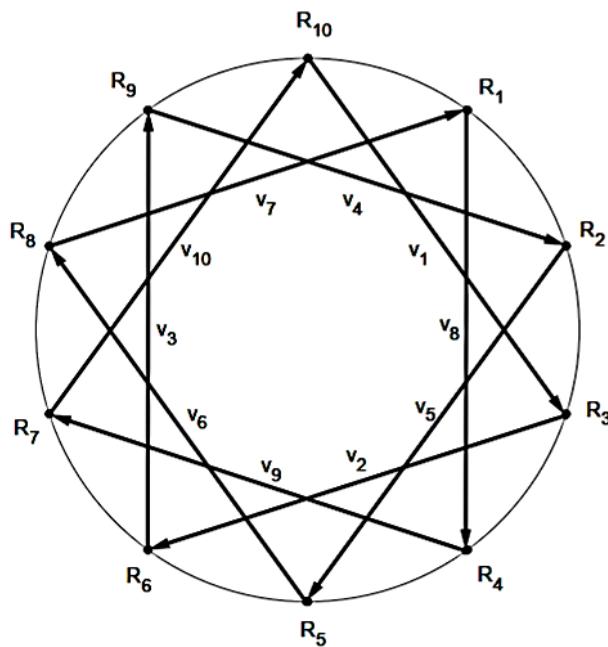


Figura 3: Múltiplos de 3 em módulo 10
Decágono Regular Estrelado (Decagrama)
Fonte: De própria autoria

iv) Múltiplos de 4 em módulo 10

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_4 \xrightarrow{v_2} R_8 \xrightarrow{v_3} R_2 \xrightarrow{v_4} R_6 \xrightarrow{v_5} R_{10}$$

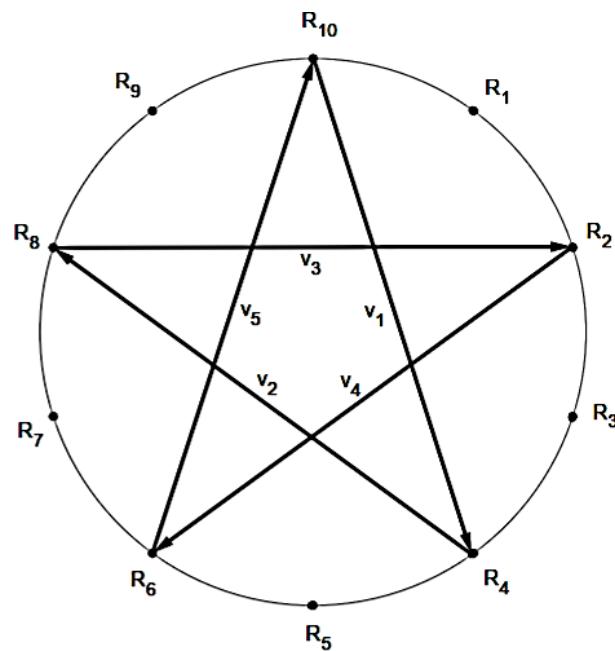


Figura 4: Múltiplos de 4 em módulo 10
 Pentágono Regular Estrelado (Pentagrama)
 Fonte: De própria autoria

v) Múltiplos de 5 em módulo 10 (Caso degenerado)

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_5 \xrightarrow{v_2} R_{10}$$

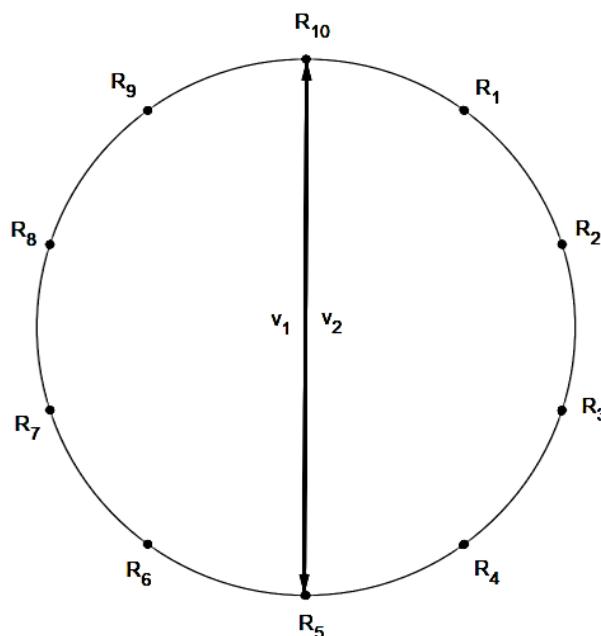


Figura 5: Múltiplos de 5 em módulo 10
 Caso degenerado
 Fonte: De própria autoria

vi) Múltiplos de 6 em módulo 10

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_6 \xrightarrow{v_2} R_2 \xrightarrow{v_3} R_8 \xrightarrow{v_4} R_4 \xrightarrow{v_5} R_{10}$$

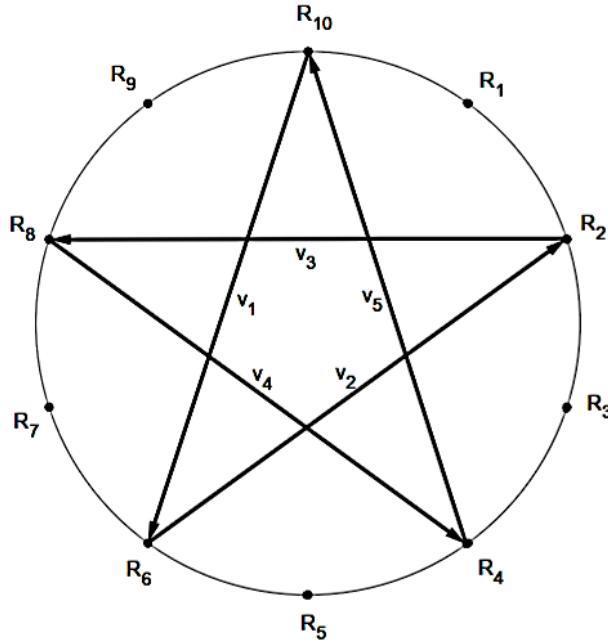


Figura 6: Múltiplos de 6 em módulo 10
 Pentágono Regular Estrelado (Pentagrama)
 Fonte: De própria autoria

vii) Múltiplos de 7 em módulo 10

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_7 \xrightarrow{v_2} R_4 \xrightarrow{v_3} R_1 \xrightarrow{v_4} R_8 \xrightarrow{v_5} R_5 \xrightarrow{v_6} R_2 \xrightarrow{v_7} R_9 \xrightarrow{v_8} R_6 \xrightarrow{v_9} R_3 \xrightarrow{v_{10}} R_{10}$$

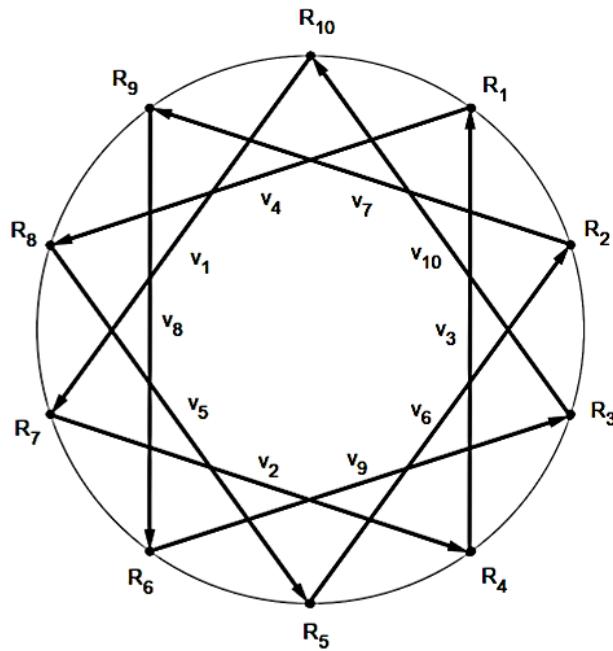


Figura 7: Múltiplos de 7 em módulo 10
 Decágono Regular Estrelado (Decagrama)
 Fonte: De própria autoria

viii) Múltiplos de 8 em módulo 10

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_8 \xrightarrow{v_2} R_6 \xrightarrow{v_3} R_4 \xrightarrow{v_4} R_2 \xrightarrow{v_5} R_{10}$$

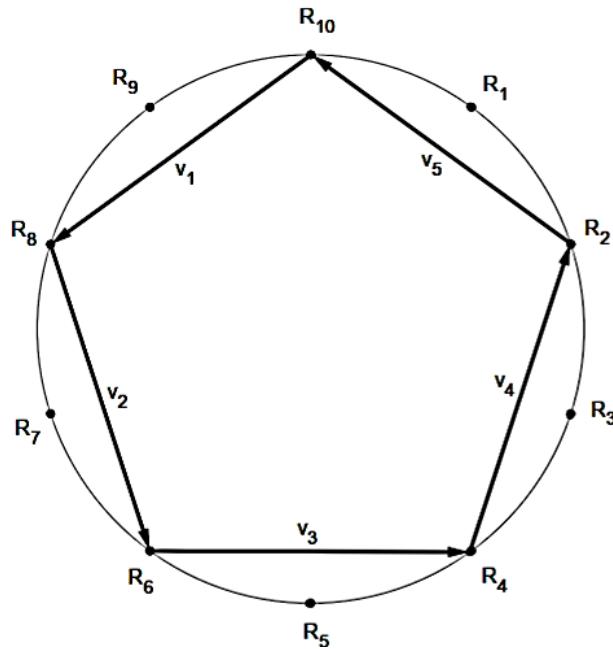


Figura 8: Múltiplos de 8 em módulo 10

Pentágono Regular

Fonte: De própria autoria

ix) Múltiplos de 9 em módulo 10

$$R_{10} \xrightarrow{v_1} R_9 \xrightarrow{v_2} R_8 \xrightarrow{v_3} R_7 \xrightarrow{v_4} R_6 \xrightarrow{v_5} R_5 \xrightarrow{v_6} R_4 \xrightarrow{v_7} R_3 \xrightarrow{v_8} R_2 \xrightarrow{v_9} R_1 \xrightarrow{v_{10}} R_{10}$$

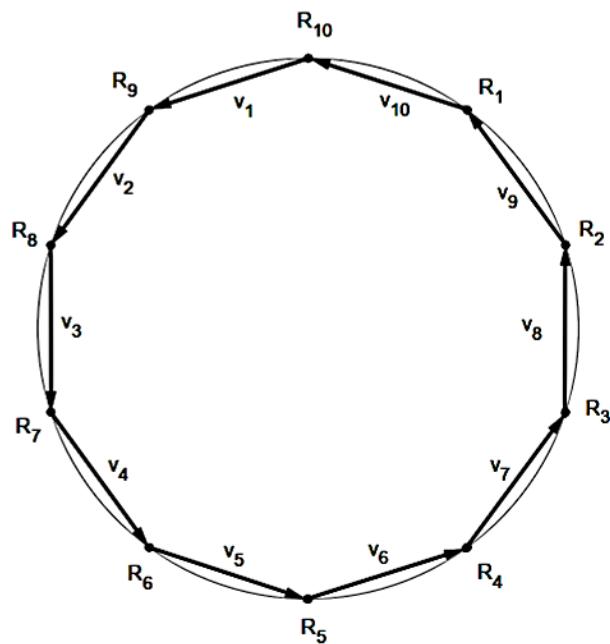


Figura 9: Múltiplos de 9 em módulo 10

Decágono Regular

Fonte: De própria autoria

Com essas construções geométricas são possíveis as observações sobre os restos dos múltiplos de 1 e 9, 2 e 8, 3 e 7, pois estes possuem figuras geométricas, polígonos congruentes, sejam esses regulares ou regulares estrelados, com a única exceção da orientação de construção e sendo assim, verifica-se visualmente a propriedade a seguir e se justificam as congruências modulares das formas:

$1 \equiv -9 \pmod{10}$	ou	$9 \equiv -1 \pmod{10}$
$2 \equiv -8 \pmod{10}$	ou	$8 \equiv -2 \pmod{10}$
$3 \equiv -7 \pmod{10}$	ou	$7 \equiv -3 \pmod{10}$
$4 \equiv -6 \pmod{10}$	ou	$6 \equiv -4 \pmod{10}$
$5 \equiv -5 \pmod{10}$	ou	$5 \equiv -5 \pmod{10}$

Perceba que para efeitos de cálculos, tais múltiplos deixam os mesmos restos. Os valores negativos se baseiam apenas na orientação do sentido de construção dos denominados vetores residuais, isto é, se foram construídos da direita para a esquerda ou no sentido contrário.

Evidentemente que existem infinitas construções usando a ferramenta acima, como por exemplo, tomando o módulo 15 com os seus múltiplos, visualizados nas imagens a seguir:

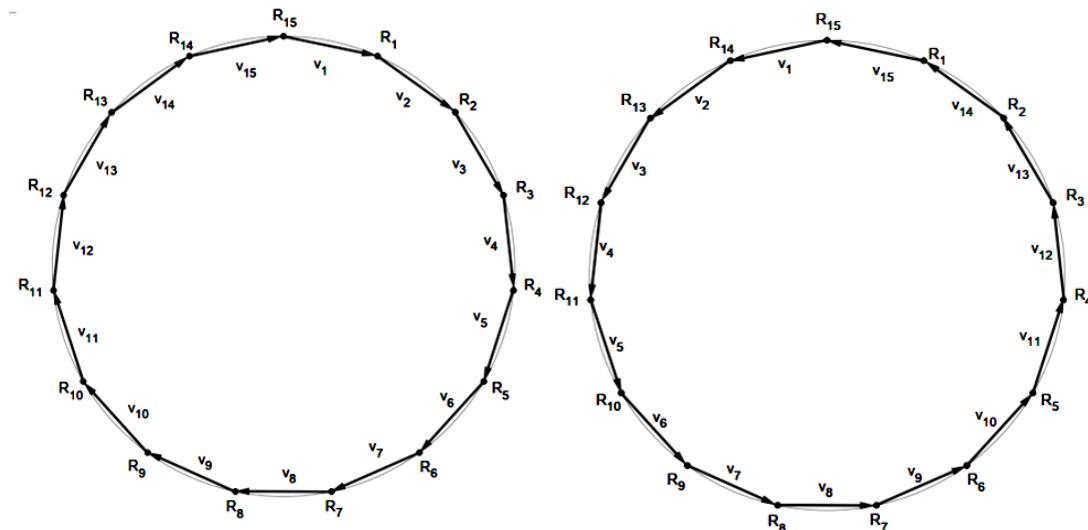


Figura 10: Múltiplos de 1 em módulo 15
Pentadecágono Regular

Fonte: De própria autoria

Figura 11: Múltiplos de 14 em módulo 15
Pentadecágono Regular

Fonte: De própria autoria

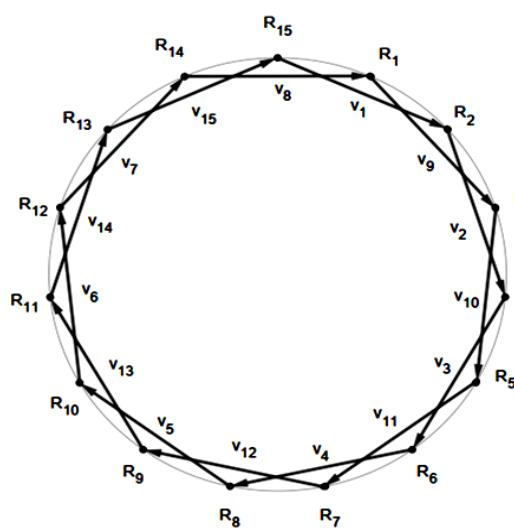


Figura 12: Múltiplos de 2 em módulo 15
Pentadecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

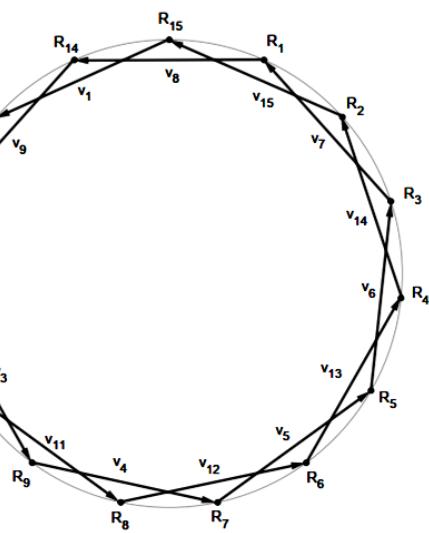


Figura 13: Múltiplos de 13 em módulo 15
Pentadecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

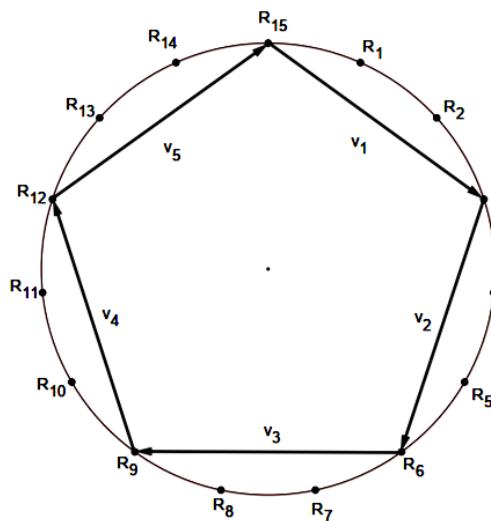


Figura 14: Múltiplos de 3 em módulo 15
Pentágono Regular
Fonte: De própria autoria

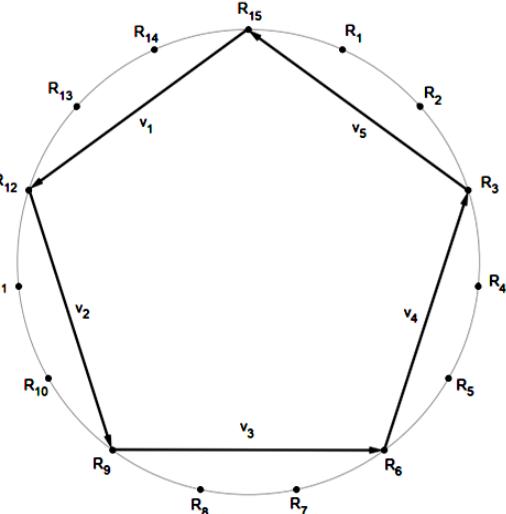


Figura 15: Múltiplos de 12 em módulo 15
Pentágono Regular
Fonte: De própria autoria

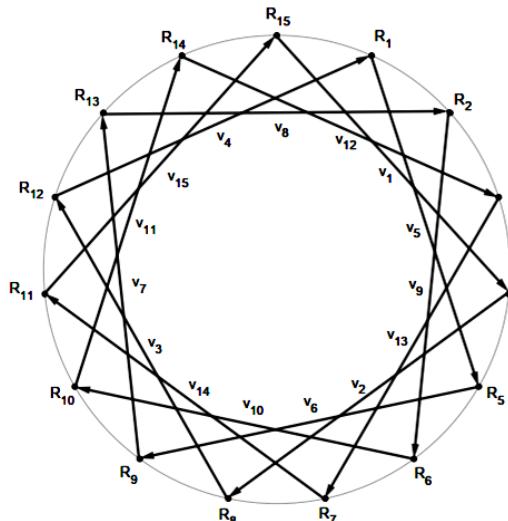


Figura 16: Múltiplos de 4 em módulo 15
Pentadecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

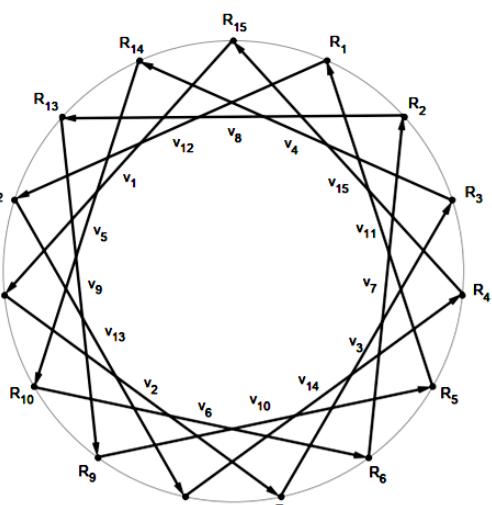


Figura 17: Múltiplos de 11 em módulo 15
Pentadecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

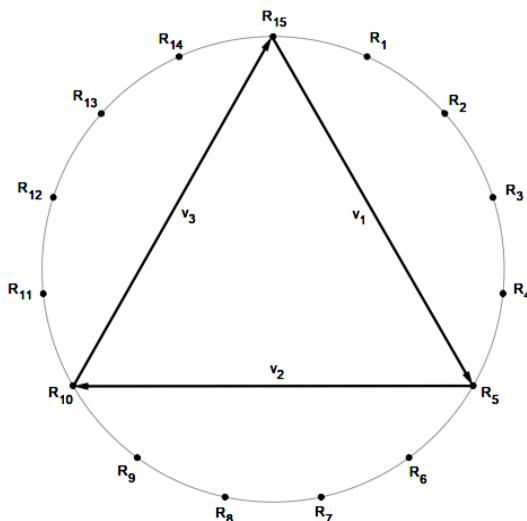


Figura 18: Múltiplos de 5 em módulo 15
Triângulo Equilátero
Fonte: De própria autoria

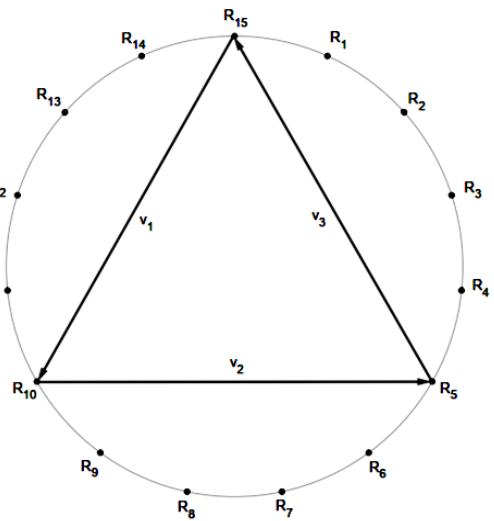


Figura 19: Múltiplos de 5 em módulo 15
Triângulo Equilátero
Fonte: De própria autoria

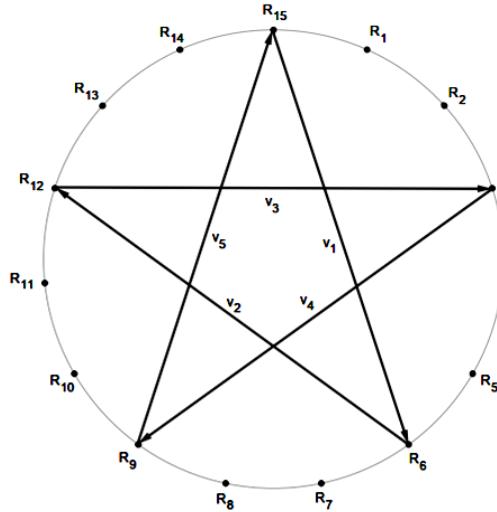


Figura 20: Múltiplos de 6 em módulo 15
Pentágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

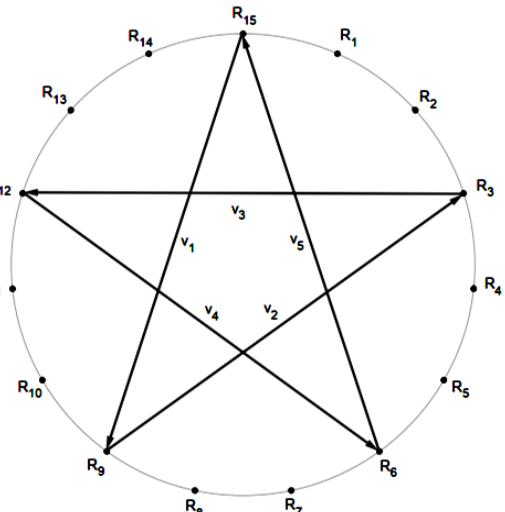


Figura 21: Múltiplos de 9 em módulo 15
Pentágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

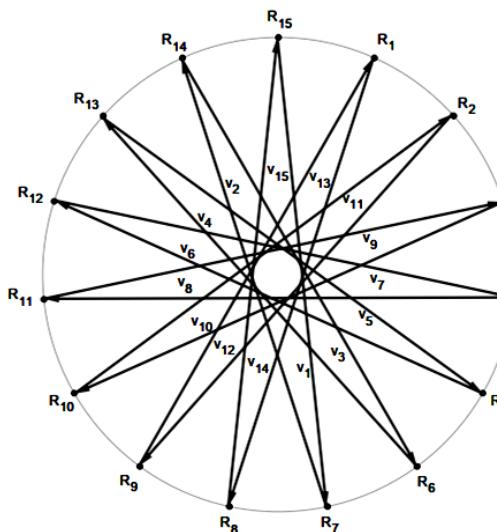


Figura 22: Múltiplos de 7 em módulo 15
Pentadecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

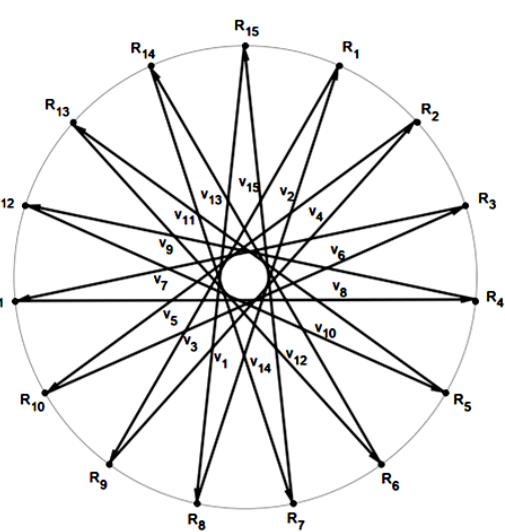


Figura 23: Múltiplos de 7 em módulo 15
Pentadecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

Como resultados esperados, temos as mesmas reflexões, exceto pela orientação de construção dos módulos entre 1 e 14, 2 e 13, 3 e 12, 4 e 11, 5 e 10, 6 e 9 e 7 com o 8.

Naturalmente, através dos exemplos demonstrados, sendo o primeiro construído sobre um módulo par, módulo $n = 10$, o segundo exemplo feito com a utilização de um módulo ímpar, $n = 15$, não primo, que se questione por fim sobre as construções de múltiplos em um módulo primo.

Faremos deste modo, as últimas construções em módulo primo para obtermos conclusões sobre as mesmas. Escolhendo o módulo $n = 13$ por módulo primo visualizaremos suas propriedades aritméticas e geométricas. Tomemos, portanto as construções dos múltiplos em módulo $n = 13$:

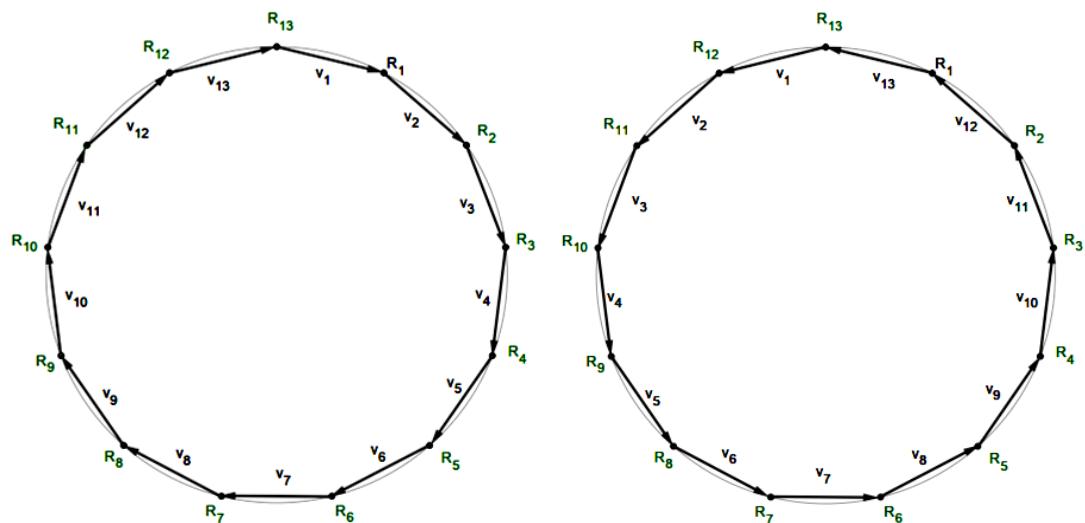


Figura 24: Múltiplos de 1 em módulo 13
Tridecágono Regular
Fonte: De própria autoria

Figura 25: Múltiplos de 1 em módulo 13
Tridecágono Regular
Fonte: De própria autoria

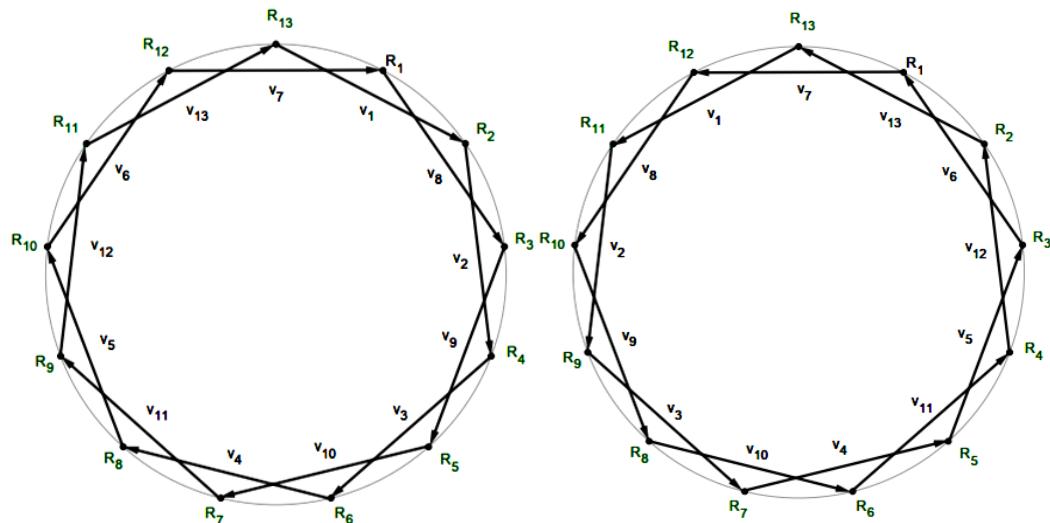


Figura 26: Múltiplos de 2 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

Figura 27: Múltiplos de 11 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

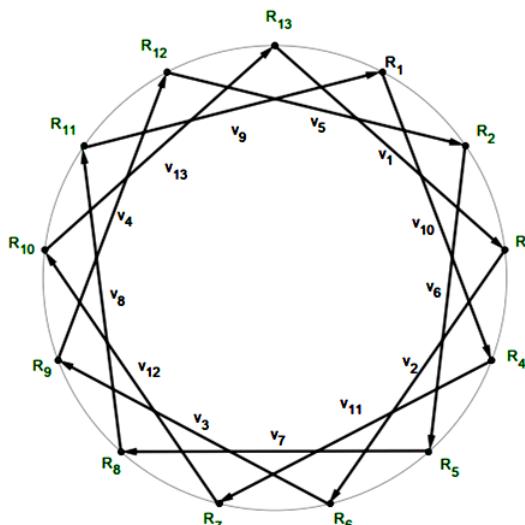


Figura 28: Múltiplos de 3 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

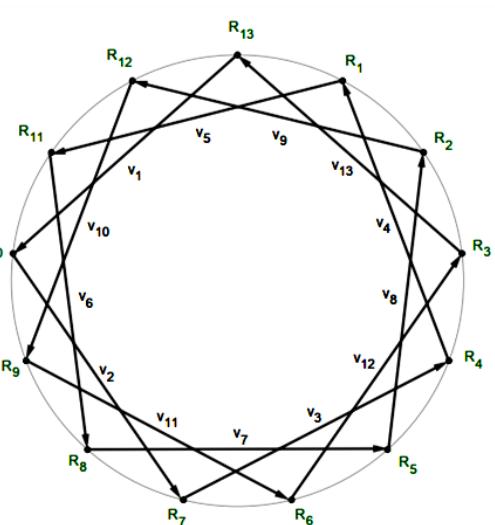


Figura 29: Múltiplos de 10 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

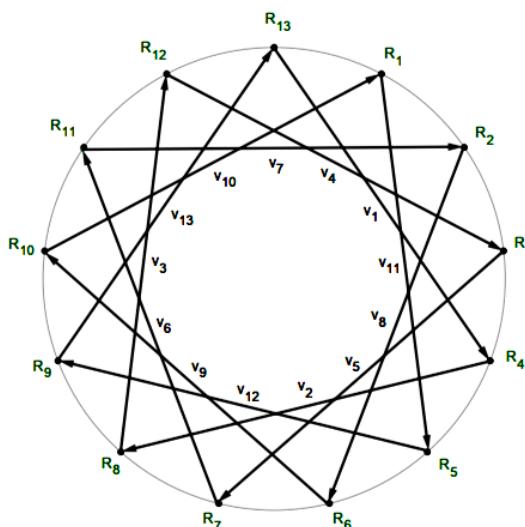


Figura 30: Múltiplos de 4 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

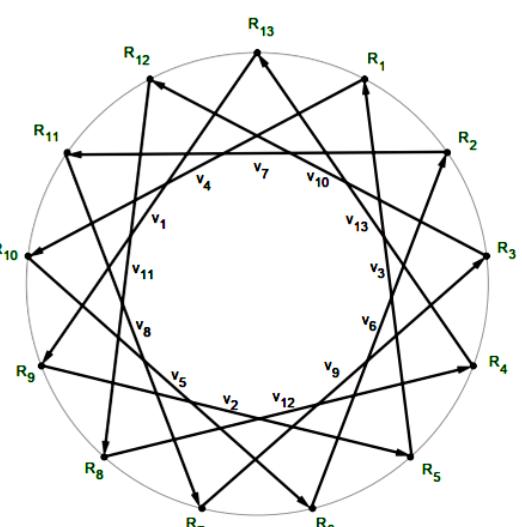


Figura 31: Múltiplos de 9 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

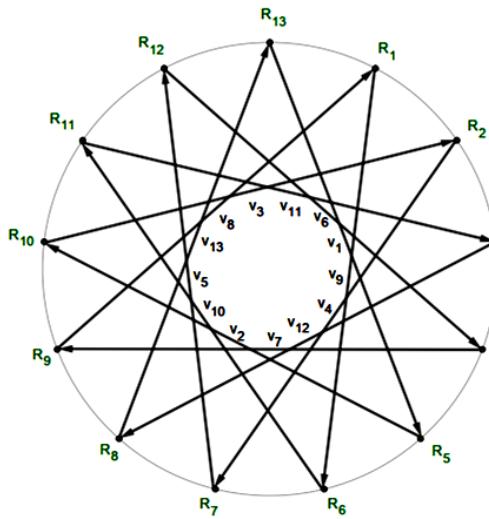


Figura 32: Múltiplos de 5 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

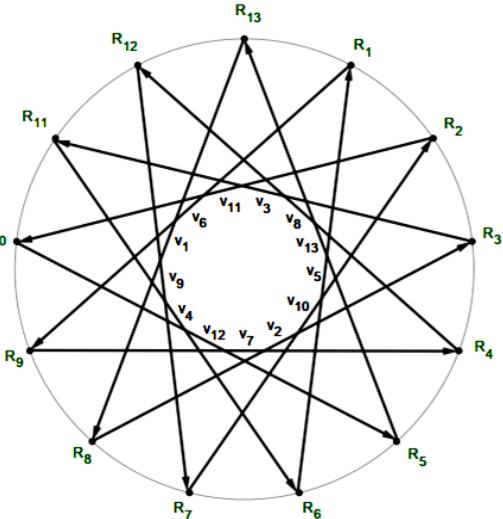


Figura 33: Múltiplos de 8 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

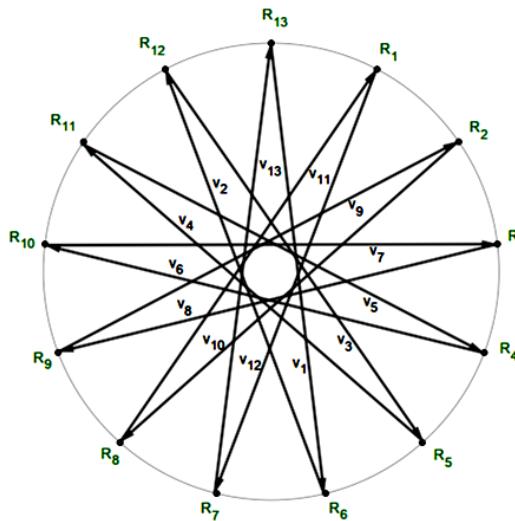


Figura 34: Múltiplos de 6 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

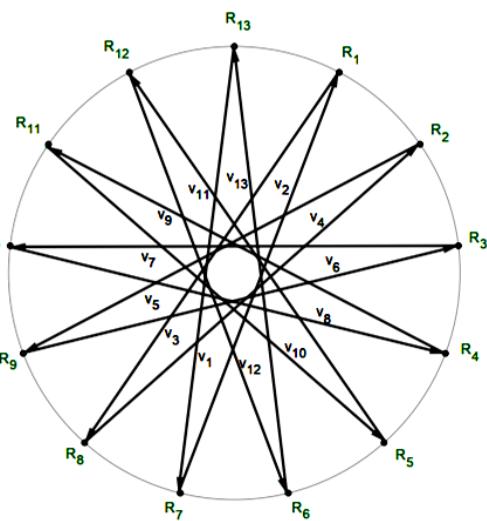


Figura 35: Múltiplos de 7 em módulo 13
Tridecágono Regular Estrelado
Fonte: De própria autoria

Mediante aos novos resultados podemos definir e classificar as construções de polígonos sejam estes regulares ou regulares estrelados por meio das análises das congruências modulares. Considerando os múltiplos k em um dado módulo n , temos:

Proposição. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ e $k \in R_n$, isto é $1 \leq k < n$. Se o $\text{mdc}(k, n) = d$, então o referido polígono possui $\frac{n}{d}$ vértices.

Demonstração. Como $\text{mdc}(k, n) = d$, então $d | k$ e $d | n$. Sendo assim, existem $t, s \in \mathbb{N}$ tais que,

$$k = ds \quad \text{e} \quad n = dt.$$

Observem que, neste caso, podemos afirmar que $1 \leq s \leq k$, $1 \leq t \leq n$ e que $t = \frac{n}{d}$

Além disso, temos:

$$kt = dts = ns \quad \text{e} \quad ns \equiv 0 \pmod{n},$$

isto é, na t -ésima etapa de construção do polígono, retornaremos para o vértice inicial associado ao $R_0 = R_n$, o que nos diz que tal polígono possui $t = \frac{n}{d}$ vértices.

Corolário.

- i) Se $k | n$, então $\text{mdc}(k, n) = k$ e, logo, o tal polígono é regular e possui $\frac{n}{k}$ vértices, com exceção de $k = \frac{n}{2}$ e n par, pois sendo assim temos um caso degenerado onde não se constitui polígono algum;
- ii) Se $n - k | n$, então $\text{mdc}(k, n) = n - k$ e, logo, o tal polígono é regular e possui $\frac{n}{n-k}$ vértices, com a exceção de $k = \frac{n}{2}$ e n par, pois sendo assim temos um caso degenerado onde não se constitui polígono algum;
- iii) Se n é primo, o $\text{mdc}(k, n) = 1$ e, logo o tal polígono é regular estrelado e possui n vértices, com as exceções de $k = 1$ ou $k = n - 1$, pois sendo assim temos polígono regular de n vértices.
- iv) Se k e n são primos entre si, isto é, se $\text{mdc}(k, n) = 1$, então o tal polígono é regular estrelado e possui com n vértices.

Demonstração:

- i) Vamos mostrar que se $k | n$, então $\text{mdc}(k, n) = k$.

Supondo que $k | n$ e seja $\text{mdc}(k, n) = d$. Daí $d | k$ e, logo, $|d| \leq |k|$, o que nos dá que $d \leq k$, visto que d e k são positivos. Além disso, como $k | k$ e $k | n$, então k é um divisor comum entre k e n , o que nos dá $k \leq d$, pois d é o maior divisor comum entre k e n . Sendo assim, de $d \leq k$ e $k \leq d$, temos que $d = k$.

- ii) Vamos mostrar que se $n - k | n$, então $\text{mdc}(k, n) = n - k$.

Supondo que $n - k \mid n$ e seja $\text{mdc}(k, n) = d$. Assim, $d \mid k$ e $d \mid n$, logo d divide qualquer combinação linear entre k e n , em particular $d \mid n - k$, donde $|d| \leq |n - k|$, e consequentemente, $d \leq n - k$, visto que ambos são positivos. Além disso, como $n - k \mid n$ e $n - k \mid n - k$, temos $n - k$ divide qualquer combinação linear entre n e $n - k$, em particular, $n - k \mid n - (n - k)$, isto é $n - k \mid k$. Sendo assim, $n - k$ é um divisor comum entre k e n , o que nos dá que $n - k \leq d$, pois d é o maior divisor comum entre k e n . Sendo assim, de $d \leq n - k$ e $n - k \leq d$ temos que $d = n - k$.

iii) Vamos provar que se n é primo, então $\text{mdc}(k, n) = 1$.

Supondo n primo, temos que $\text{mdc}(k, n) = 1$ ou $\text{mdc}(k, n) = n$. Contudo, como $1 \leq k < n$, não podemos ter que $n \mid k$, o que nos dá que $\text{mdc}(k, n) \neq n$. Assim, $\text{mdc}(k, n) = 1$.

Na próxima seção abordaremos outras formas construtivas baseando-se em dois belos teoremas sobre restos de divisão que existem.

6. Leonhard Euler e Pierre De Fermat

Leonhard Euler foi um matemático suíço, nascido na Basileia no ano de 1707 e tem registro de falecimento em 1783 aos 76 anos de idade. Grande escritor no campo da Matemática, suas contribuições são enormes e numerosas, dentre as quais podemos citar algumas notações consagradas como $f(x)$ para funções, e para a base do logaritmo natural, as letras a , b e c para a notação das medidas dos lados de um triângulo de vértices ABC ou ainda a utilização de $2p$ para a medida do perímetro de um triângulo entre tantas notações.

Também lhe é atribuída a famosa e bela fórmula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, e quando o valor x é π tem - se que:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Essa equação expressa em uma única igualdade, cinco dos mais importantes números de toda a matemática. Cabe a Euler também o famoso Teorema de Euler, bem como sua função φ de Euler, também conhecida como função totiente. Euler tem contribuições essenciais ao século XVIII não somente na Matemática como na astronomia, medicina, botânica, química, em teologia e até em línguas orientais as quais dominava muito bem.

Já Pierre De Fermat nasceu em Beaumont de Lonagne, perto da cidade de Toulouse em 17 de agosto de 1601. Possui-se registro de seu falecimento em 12 de janeiro de 1665, apesar de em sua lápide, presente na igreja agostiniana de Toulouse conste data distinta, determinando seu falecimento aos 56 anos de idade apenas. Deste modo, seu nascimento é dado com uma incerteza, algo entre 1590 a 1608, segundo alguns historiadores. Muitos de seus teoremas só foram provados após sua morte. Dentre dos mais famosos certamente está o conhecido por “Último Teorema de Fermat”, provado, completamente, somente em 1995 pelo matemático britânico Andrews Wiles (nascido em Cambridge no dia 11 de abril de 1953). Euler havia dado algumas contribuições para o Teorema de Fermat, entretanto somente depois de mais de 300 anos Wiles faz sua demonstração criando uma nova ferramenta matemática denominada de teoria de curvas elípticas e a conjectura de modularidade de Serre.

Para as criações e visualizações do próximo capítulo serão necessários que elucidemos dois ilustres teoremas, de Euler e de Fermat. O primeiro teorema, mais geral, sobre o resto de divisão de uma potência de a por n , um número

natural, quando $\text{mdc}(a, n) = 1$, denominado como Teorema de Euler e o Pequeno Teorema de Fermat que toma um caso particular do teorema de Euler quando n é um número primo.

6.1. Teorema de Euler e o Pequeno Teorema de Fermat

Sejam a e n dois números inteiros positivos primos entre si, ou seja, o máximo divisor comum entre a e n é 1, ou ainda, $\text{mdc}(a, n) = 1$. Seja $\varphi(n)$ a função totiente de Euler, também chama de função *Phi* (φ) de Euler, que conta o número de inteiros positivos menores que n e primos com n . Então, o Teorema de Euler diz que:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Seja n um número primo e a um inteiro não divisível por n , então o pequeno teorema de Fermat nos afirma que:

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

Note que quando n é um número primo, sabemos que $\varphi(n) = n - 1$, garantindo que o Pequeno Teorema de Fermat é uma consequência do Teorema de Euler.

Com os dois teoremas acima nos é garantida a existência de resto igual a 1 na divisão com as condições dadas. No entanto em nenhum dos dois casos garante que $\varphi(n)$, no caso de $\text{mdc}(a, n) = 1$ ou até mesmo que $n - 1$, com n primo, sejam os menores expoentes da base a , ou seja, o primeiro que deixa resto 1 no módulo n .

7. Determinando um de menor expoente

Utilizando a visualização geométrica e alguns poucos cálculos com as propriedades aritméticas das congruências modulares, podemos usar um algoritmo construtivo geométrico para determinar o **menor** expoente de uma base a cujo resto da divisão por n seja igual a 1.

Faremos o acréscimo de novos vetores, denominados desta vez por **vetores residuais produto**. Sejam $n > 2$ e $a > 1$ números inteiros e considere $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}, R_n$ as classes residuais de restos deixados na divisão por n . Definimos o **vetor residual produto por a** como sendo o vetor \mathbf{u}_i que leva a classe R_a^i na classe R_a^{i+1} para cada i entre 1 e $n - 1$. Para cada $n > 2$, obtemos o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ de vetores residuais produto.

Tomando por inicio sempre em R_a , determinaremos, através de cálculos simples, quantos produtos por a serão necessários dentro do módulo para retornarmos para a classe R_a . Tal contagem se dará pelos índices dos vetores residuais produto.

Observemos o exemplo a seguir, de modo construtivo: Sejam $a = 2$ e $n = 15$. Iniciando nossas movimentações a partir da base $a = 2$, ou seja, tomando início em R_2 , executaremos o produto de cada resto, a partir de R_2 somente por 2 ligando os resultados aos restos $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_n)$, considerando o módulo $n = 15$. Faremos tais cálculos até que os **vetores residuais produto** retornem ao valor inicial R_2 . Procedendo assim teremos a seguinte construção:

Perceba que o R_2 no produto por 2 será levado pela operação de multiplicação por 2 a R_4 pelo vetor residual \mathbf{u}_1 , já R_4 no produto por 2 será levado em R_8 por \mathbf{u}_2 , o mesmo raciocínio conduzirá R_8 no produto por 2 até R_{16} , que é congruente a R_1 , pelo vetor residual \mathbf{u}_3 e finalmente R_1 no produto por 2 retorna em R_2 pelo vetor residual \mathbf{u}_4 . Deste modo, observe que foram necessários 4 vetores residuais produto para retornar à origem em R_2 .

Construindo um esquema de diagramas temos:

$$R_2 \xrightarrow{\mathbf{u}_1} R_4 \xrightarrow{\mathbf{u}_2} R_8 \xrightarrow{\mathbf{u}_3} R_1 \xrightarrow{\mathbf{u}_4} R_2$$

cuja construção geométrica nos conduzirá a seguinte visualização do algoritmo

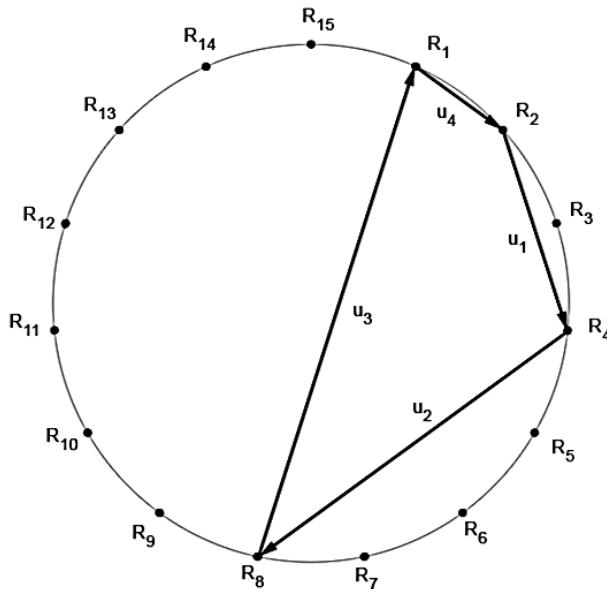


Figura 36: $2^4 \equiv 1 \pmod{15}$
Fonte: De própria autoria

Concluímos então que:

$$2^4 \equiv 1 \pmod{15}$$

Interessante notar que a função φ de Euler determina que $\varphi(15) = 8$ e, pelo Teorema de Euler obtemos:

$$2^8 \equiv 1 \pmod{15}$$

Note que com o algoritmo apresentado encontramos o expoente 4 é um expoente menor que $\varphi(15) = 8$ dado pela função de Euler.

Vejamos outro exemplo:

Tomemos agora o módulo $n = 21$ com a base $a = 2$. Procedendo da mesma forma que no exemplo anterior, temos que:

$R_2 \rightarrow R_4$ por u_1 ; $R_4 \rightarrow R_8$ por u_2 ; $R_8 \rightarrow R_{16}$ por u_3 ; $R_{16} \rightarrow R_{11}$ por u_4 ; $R_{11} \rightarrow R_1$ por u_5 ; e, por fim, $R_1 \rightarrow R_2$ por u_6 . Pelos diagramas temos:

$$R_2 \xrightarrow{u_1} R_4 \xrightarrow{u_2} R_8 \xrightarrow{u_3} R_{16} \xrightarrow{u_4} R_{11} \xrightarrow{u_5} R_1 \xrightarrow{u_6} R_2$$

Deste modo, o **menor** expoente que se deve elevar o número 2 para que o resto na divisão por 21 seja igual a 1 é o número 6, que coincide com a quantidade de vetores residuais produto necessários para retornar ao início do nosso cálculo em R_2 .

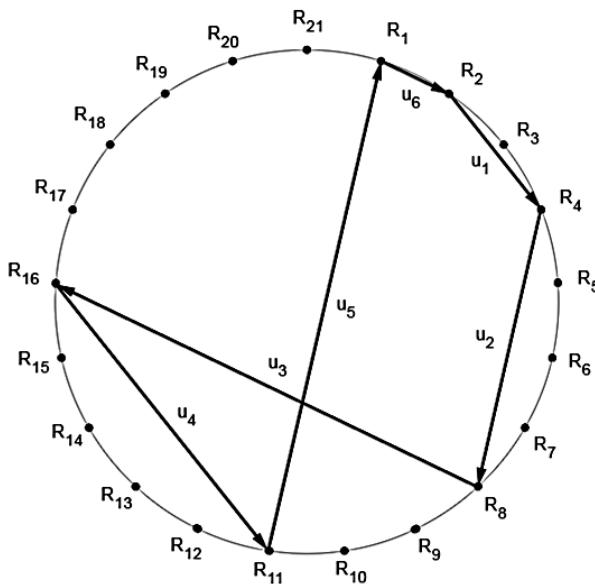


Figura 37: $2^6 \equiv 1 \pmod{21}$

Fonte: De própria autoria

$$2^6 \equiv 1 \pmod{21}$$

Algo interessante em se notar, novamente, assim como no exemplo anterior é o fato dos expoentes das bases não corresponderem aos valores da função *Phi* de Euler (totientes) de 15 e tampouco de 21. A função *Phi* de Euler nos permite, como já visto, calcular que $\varphi(15) = 8$ e de $\varphi(21) = 12$, portanto existem valores menores dos expoentes da base 2 para os quais deixam resto 1 em módulo 15 e módulo 21, respectivamente, o 4 e o 6.

Construamos mais um exemplo, agora tomando o módulo $n = 13$ e a base $a = 5$.

Perceba que $R_5 \rightarrow R_{12}$ por \mathbf{u}_1 ; $R_{12} \rightarrow R_8$ por \mathbf{u}_2 ; $R_8 \rightarrow R_1$ por \mathbf{u}_3 ; e $R_1 \rightarrow R_5$ por \mathbf{u}_4 .

Utilizando os diagramas, obtemos que:

$$R_5 \xrightarrow{\mathbf{u}_1} R_{12} \xrightarrow{\mathbf{u}_2} R_8 \xrightarrow{\mathbf{u}_3} R_1 \xrightarrow{\mathbf{u}_4} R_5$$

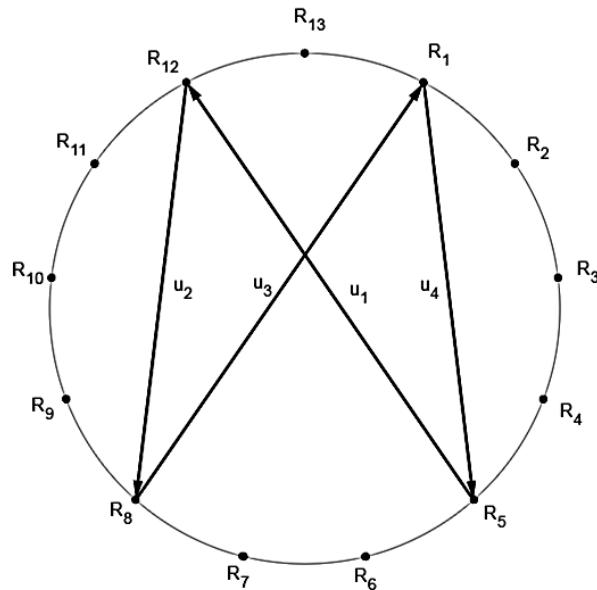


Figura 38: $5^4 \equiv 1 \pmod{13}$
Fonte: De própria autoria

Assim, concluímos que,

$$5^4 \equiv 1 \pmod{13}$$

Notemos neste último exemplo que o valor $\phi(13) = 12$ e que, o algoritmo nos dá 4 que é um menor expoente.

Vale ressaltar que as propriedades de congruências modulares são utilizadas em todos os momentos nessas construções, mais amplamente as operações básicas de multiplicação, adição e subtração que são trabalhadas constantemente favorecendo o contato e a utilização de tais operações fundamentais da aritmética, cujo maior objetivo desejado desde o princípio da obra.

7.1 O Algoritmo de determinação de menor expoente

Nessa seção iremos apresentar o algoritmo exemplificado no início do capítulo e também algumas propriedades observadas ao longo do desenvolvimento dessa ferramenta.

Sejam $n > 2$ e $a \geq 2$ números inteiros primos entre si. Para determinar um menor expoente σ tal que

$$a^\sigma \equiv 1 \pmod{n},$$

começamos verificando se,

$$a \equiv 1 \pmod{n}.$$

Caso a congruência seja verdadeira, $\sigma = 1$. Caso contrário, verificamos se,

$$a^2 \equiv 1 \pmod{n}$$

e, caso seja verdadeira, $\sigma = 2$. Se não, seguimos verificando se,

$$a^i \equiv 1 \pmod{n}$$

até encontrarmos o primeiro valor de i que irá tornar verdadeira essa congruência. Tal valor existe, pois os expoentes são limitados superiormente pelo totiente $\varphi(n)$ e o Teorema de Euler nos garante que:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Assim, comprovamos a existência de um expoente $\sigma \leq \varphi(n)$ que satisfaz $a^\sigma \equiv 1 \pmod{n}$

Uma propriedade interessante sobre esse menor expoente é que σ divide $\varphi(n)$. De fato, pelo Algoritmo de Divisão de Euclides existem q e r números inteiros tais que $0 \leq r < \sigma$ e,

$$\varphi(n) = q\sigma + r$$

Suponha que $r > 0$. Então,

$$a^{\varphi(n)} = a^{q\sigma+r} = (a^\sigma)^q \cdot a^r$$

e, como,

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \text{ e } a^\sigma \equiv 1 \pmod{n}$$

concluímos que,

$$1 \equiv (1)^q \cdot a^r \pmod{n}$$

ou seja,

$$a^r \equiv 1 \pmod{n},$$

o que é um absurdo, pois $r < \sigma$ e σ é o menor expoente tal que a^σ deixa resto 1 na divisão por n . Logo, $r = 0$ e, portanto, $\sigma \mid \varphi(n)$.

Podemos verificar essa propriedade nos exemplos vistos no início do capítulo:

Perceba que anteriormente pelo algoritmo construído na figura 36 temos que $\sigma = 4$ e que $\varphi(15) = 8$ e sendo assim, temos $4 \mid 8$. Do mesmo modo, nas figuras 37 e 38, temos que $\sigma = 6$ e $\sigma = 4$, respectivamente cujas funções de Euler são $\varphi(21) = 12$ e $\varphi(13) = 12$ e novamente $6 \mid 12$ e $4 \mid 12$.

Vale ressaltar que apesar da simplicidade do algoritmo, sua relevância também se apresenta na representação geométrica de sua construção.

8. Os Chryzodes

Os Chryzodes consistem em figuras geométricas formadas quando construídas a partir da regularidade de um número inteiro a fixo multiplicado pelos restos de um dado módulo escolhido, as já famosas classes residuais. A palavra Chryzodes vem da junção das palavras gregas “*Chrysos*” cujo significado é ouro e “*zooide*” cujo significado é círculo.

Deste modo iremos dispor dos restos de uma divisão de um dado módulo, exatamente como feito até aqui, sobre um círculo, tais classes residuais serão dispostas nos vértices de um polígono do módulo escolhido, a partir deste instante a estratégia estabelecida para as construções será manter um valor fixo inteiro e multiplicá-lo por cada um dos restos da divisão, seguidamente e assim teremos diversas figuras regulares construídas. Em especial mostraremos o processo de construção das curvas chamadas de epicicloides de 1 cúspide (*cardioide*), de 2 cúspides (*nefroide*) e a de 3 cúspides. O leitor interessado em se aprofundar em tal construção poderá encontrar materiais interessantíssimos e significativos nos trabalhos de (BELLO, 2011) e (KONAGESKI, 2019).

Construiremos exemplos em módulos 10, 20, 30, 40 e 50 cujos valores fixos multiplicativo dos restos serão os números $a = 2$, $a = 3$ e $a = 4$. Veja:

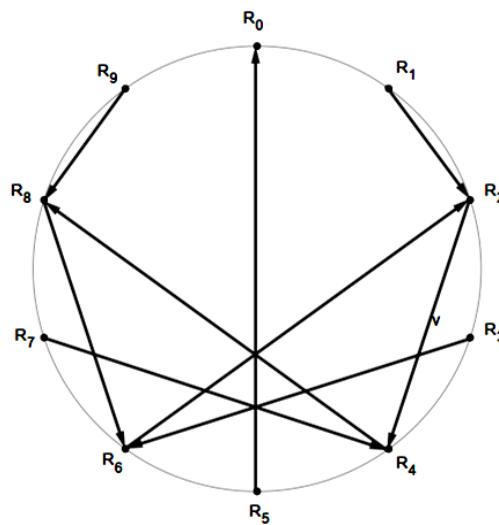


Figura 39: Fixo $a = 2$ em módulo 10
Fonte: De própria autoria

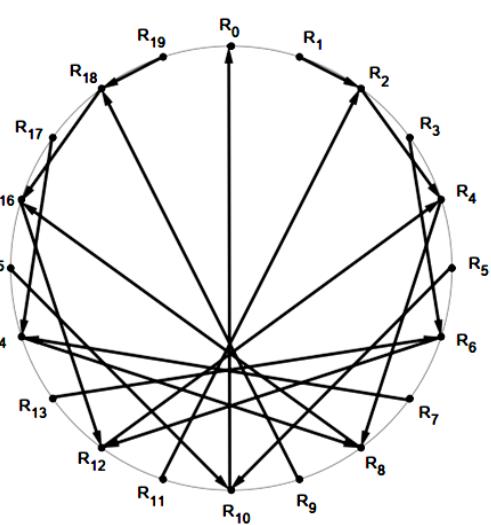


Figura 40: Fixo $a = 2$ em módulo 20
Fonte: De própria autoria

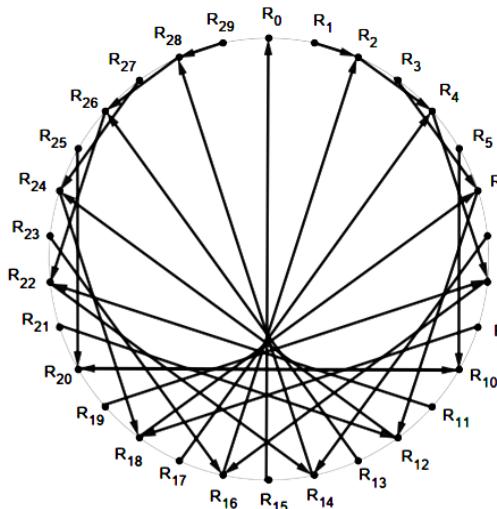


Figura 41: Fixo $a = 2$ em módulo 30
Fonte: De própria autoria

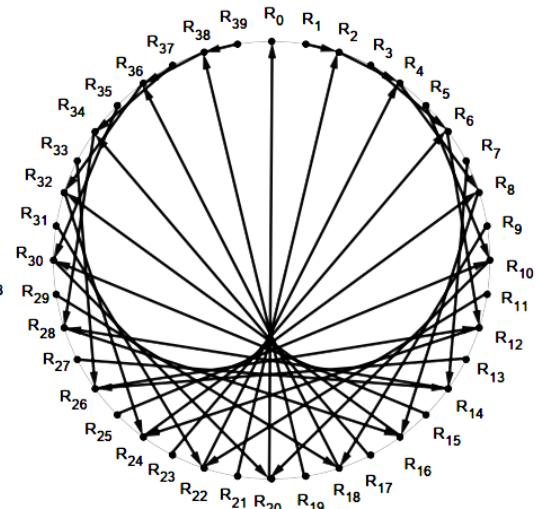


Figura 42: Fixo $a = 2$ em módulo 40
Fonte: De própria autoria

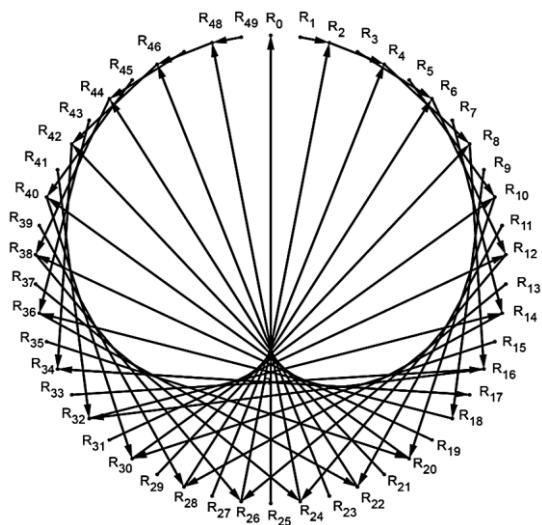


Figura 43: Fixo $a = 2$ em módulo 50
Fonte: De própria autoria

Cada vez que ampliarmos o valor do módulo, teremos imagens mais nítidas sobre a construção que convergirá para uma curva. Em especial, no caso em que nos debruçamos como exemplo, se dará a construção da figura a seguir denominada *cardioide*. Essas construções formam uma cardioide utilizando o processo de operações aritméticas seguidas de multiplicações das classes residuais por um valor fixo a dado.

Utilizando o programa homônimo *chryzodus* disponível em: <https://chryzodus-a-chryzode-explorer.soft112.com> é possível esboçar, com o

auxílio de diversas tonalidades de cores, imagens extremamente interessantes e que podem elevar um possível estudo para o nível da teoria de fractais, de conjuntos de Mandelbrot e dos conjuntos de Julia que são temas mais sofisticados e densos, os quais não abordaremos neste trabalho.

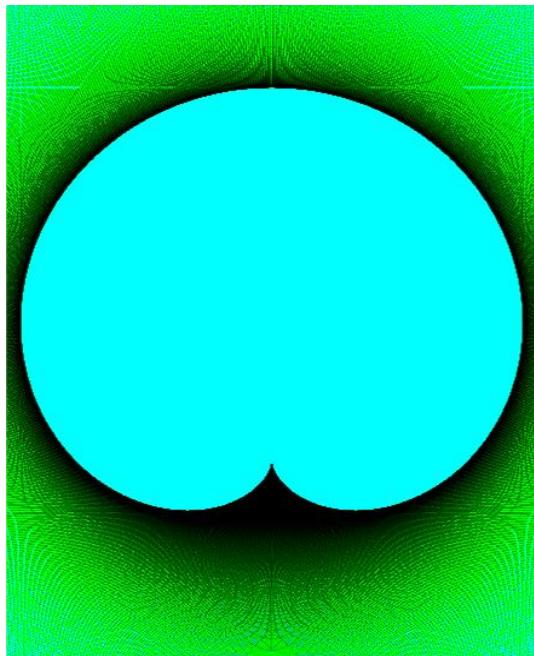


Figura 44: Epicicloide de 1 cúspide, cardióide
Fonte: De própria autoria

Utilizando o mesmo processo tomando o número inteiro $a = 3$ (Fixo) teremos as seguintes construções:

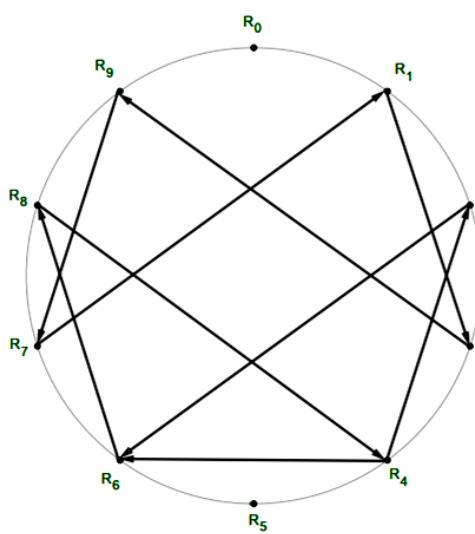


Figura 45: Fixo $a = 3$ em módulo 10
Fonte: De própria autoria

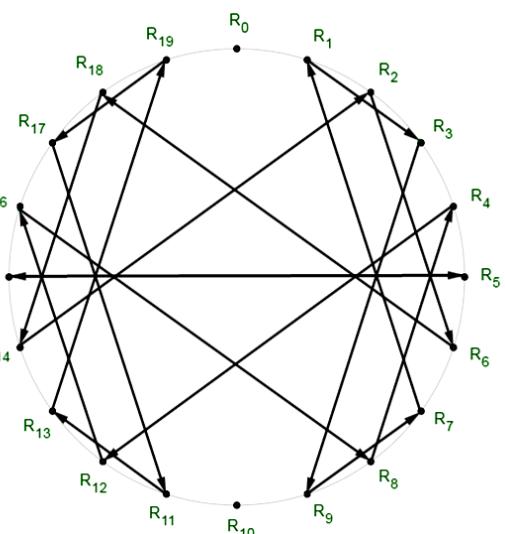


Figura 46: Fixo $a = 3$ em módulo 20
Fonte: De própria autoria

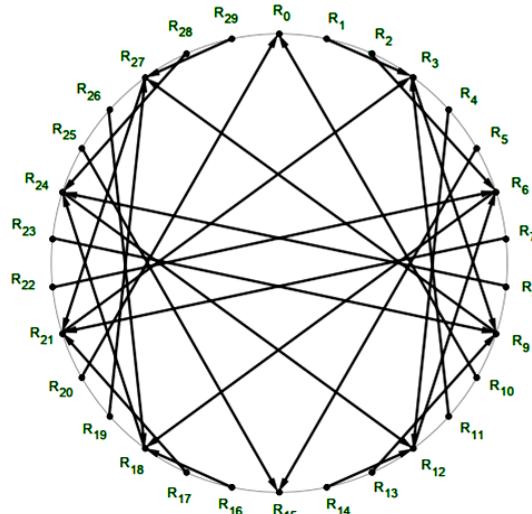


Figura 47: Fixo $a = 3$ em módulo 30
Fonte: De própria autoria

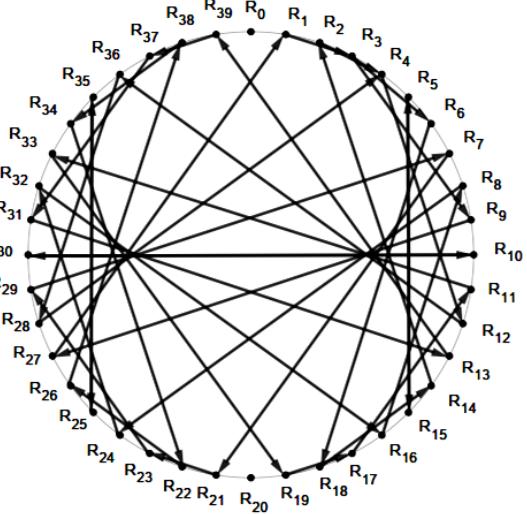


Figura 48: Fixo $a = 3$ em módulo 40
Fonte: De própria autoria

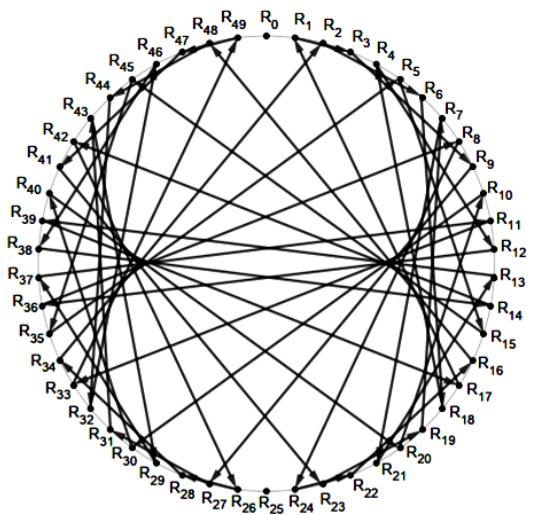


Figura 49: Fixo $a = 3$ em módulo 50
Fonte: De própria autoria

Utilizando o programa **chryzodus**, esboçando a construção, temos:

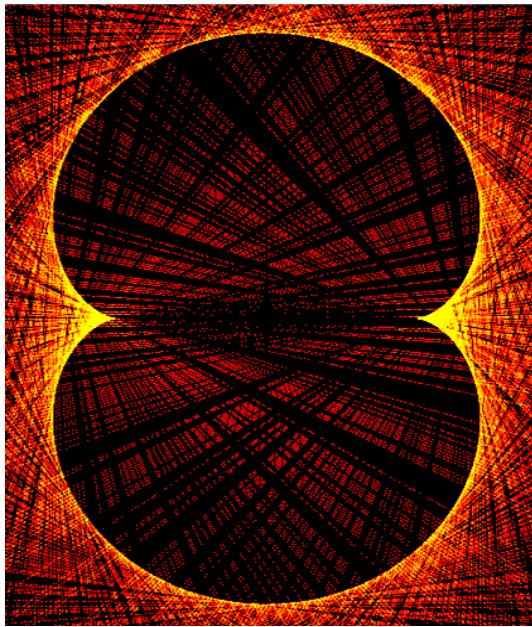
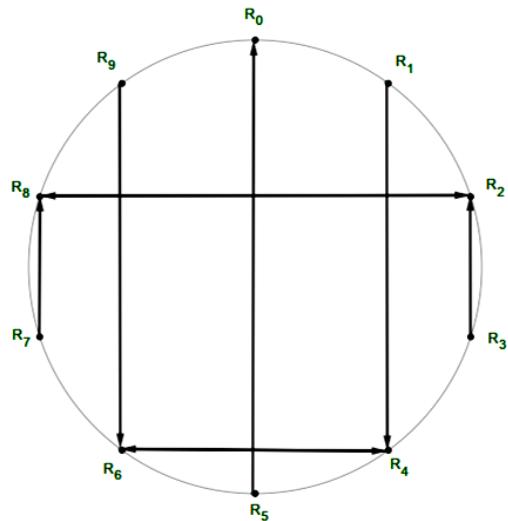


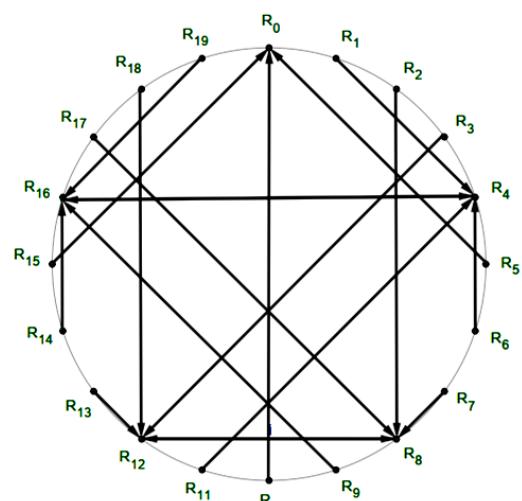
Figura 50: Epicicloide de 2 cúspides, nefroide

Fonte: De própria autoria

O mesmo processo tomando o número inteiro $a = 4$, as construções tomarão o seguinte formato:

Figura 51: Fixo $a = 4$ em módulo 10

Fonte: De própria autoria

Figura 52: Fixo $a = 4$ em módulo 20

Fonte: De própria autoria

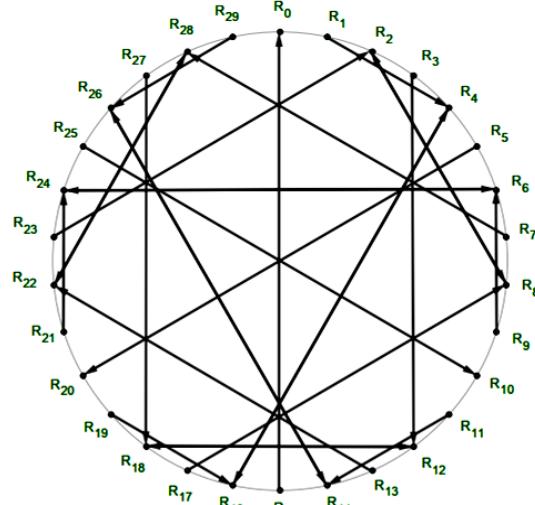


Figura 53: Fixo $a = 4$ em módulo 30
Fonte: De própria autoria

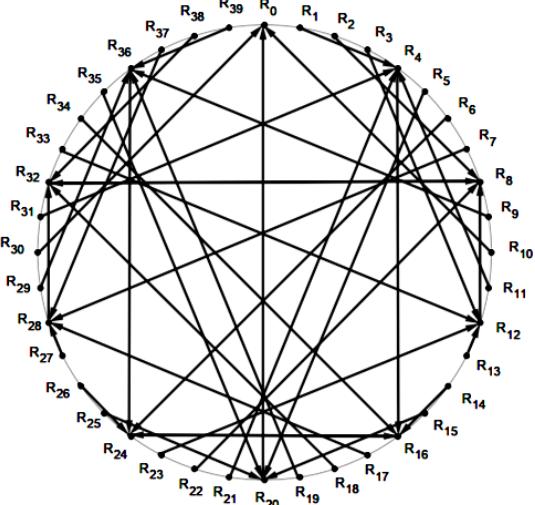


Figura 54: Fixo $a = 4$ em módulo 40
Fonte: De própria autoria

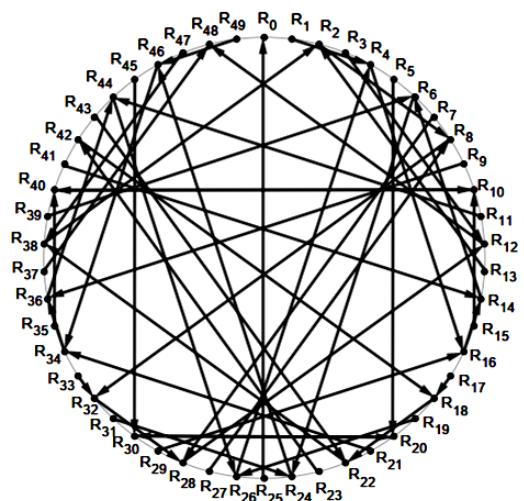


Figura 55: Fixo $a = 4$ em módulo 50
Fonte: De própria autoria

Esboçando as operações com o software, temos:

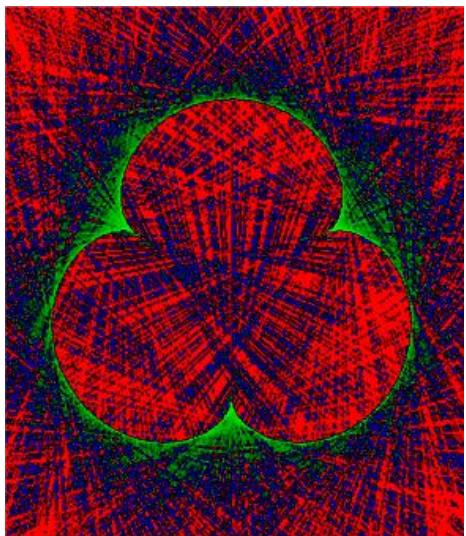


Figura 56: Epicicloide de 3 cúspides, nefroide
Fonte: De própria autoria

9. Considerações Finais

No início do trabalho propomos que o mesmo tivesse a capacidade de fomentar e fortalecer a utilização e o contato das operações básicas da Aritmética por alunos da Educação Básica, do 6º ao 9º e de nossos pares em sala de aula. Consideramos assim nossa proposta válida e porque não dizer, atraente de tal forma que leve o aluno a pensar numa matemática não convencional na educação básica, bem como geralmente ensinada em cursos de graduação ou pós – graduação em matemática.

Desta forma acreditamos ser viável sua abordagem e a sua utilização por meio das ferramentas apresentadas, tais como foram registradas no corpo deste trabalho. Em uma Educação Básica que possui tantas barreiras a serem transpassadas, uma proposta de envolvimento e de aplicação da Matemática da forma abordada de modo diferenciado cumpre o papel de fazer o aluno vislumbrar outros mundos e diferentes possibilidades que não sejam somente as tradicionais usadas na maioria das salas de aula.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, buscou-se não apenas apresentar uma proposta metodológica alternativa para o ensino das operações aritméticas, mas também valorizar a intersecção entre ramos da Matemática que, tradicionalmente, são ensinados de forma dissociada: a Aritmética e a Geometria. Através das construções modulares, vetores residuais e figuras geométricas associadas às congruências, foi possível construir uma narrativa matemática que tem, na visualização, um poderoso instrumento pedagógico. O aluno, muitas vezes afastado da Matemática por suas abstrações iniciais, pode encontrar nas imagens e padrões uma forma mais concreta e motivadora de acesso ao raciocínio matemático.

Não se trata aqui de reinventar a roda, literalmente, mas de oferecer novos caminhos por onde o ensino e a aprendizagem possam caminhar com mais significado e menos resistência. A proposta apresentada nasce da observação da realidade, da escuta dos estudantes e da vivência cotidiana da sala de aula. Surge da inquietação com os números frios das avaliações nacionais e internacionais, mas também da convicção de que há beleza e encantamento possíveis, mesmo nos conteúdos considerados básicos ou elementares.

Aplicável desde o 6º ano do Ensino Fundamental, com as devidas adaptações, esta proposta tem como mérito a simplicidade no possível uso de materiais para sua construção, a flexibilidade de aplicação em diferentes contextos escolares e, sobretudo, o respeito ao tempo e à forma de aprendizagem dos alunos. É, por fim também uma proposta que conversa com a prática docente, que considera os desafios reais da educação pública e que se apresenta como mais uma ferramenta possível no imenso e desafiador campo do ensino da Matemática.

Desejamos que este trabalho sirva como ponto de partida para novas investigações, adaptações e criações em sala de aula, em diversas formações e aplicações possíveis. E que a Matemática, vista aqui sob a luz da geometria e da regularidade modular, possa alcançar mais uma alternativa de atração, motivação e como uma estratégia de abordagem sendo uma contribuição cabível aos alunos e professores no processo de ensino e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

BELLO, M. G. La Aritmética Modular y algunas de SUS aplicaciones (Maestría em enseñanza de las Ciencias Exactas e Naturales) – Universidade Nacional de Colombia, 2011. Disponível em: <<https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/8328/moreiagomezbello.2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em 06 de dezembro de 2024

HEFEZ, A. Aritmética. Coleção Profmat. Rio de Janeiro, Editora SBM, 2016.

KONAGESKI, D. M. F. Experiências concretas na aritmética modular. Dissertação de Mestrado, Profmat – UTFPR, Curitiba – PR: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2029

SANTOS, J. P. de O. Introdução à Teoria dos Números. Rio de Janeiro, IMPA, 2016.

COUTINHO, S. C. Números Inteiros e Criptografia RSA. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

STEWART, I. Em busca do infinito: Uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Tradução George Schlesinger; revisão técnica Samuel Jurkiewicz. 1ª ed. – Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2004.

MARTIN, P. A. Grupos, Corpos e Teoria de Galois – 1ª Ed. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2010.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed – Campinas, São Paulo, Editora UNICAMP 2011.

ROQUE, T. História da matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas. 1ª ed. – Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Curricular. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 06 de dezembro de 2024.

INEP. Ministério da Educação. **Relatório de Resultados do SAEB 2019 – Volume 1:** Contexto educacional em Língua Portuguesa e Matemática para o 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio – Brasília, 2024. Inep/MEC. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_1.pdf. Acesso em 06 de dezembro de 2024.

INEP. Ministério da Educação. **Relatório de Resultados do SAEB 2019 – Volume 2:** Contexto educacional em Língua Portuguesa e Matemática para o 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio – Brasília, 2024. Inep/MEC. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_3.pdf. Acesso em 06 de dezembro de 2024.

INEP. Ministério da Educação. **Relatório de Resultados do SAEB 2021 – Volume 1:** Contexto educacional em Língua Portuguesa e Matemática para o 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio – Brasília, 2024. Inep/MEC. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_1.pdf. Acesso em 06 de dezembro de 2024.

INEP. Ministério da Educação. **Relatório de Resultados do SAEB 2021 – Volume 1:** Contexto educacional em Língua Portuguesa e Matemática para o 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio – Brasília, 2024. Inep/MEC. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_2.pdf. Acesso em 06 de dezembro de 2024.