PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Alexandre de Araújo França

Cálculo de áreas de figuras poligonais usando o Teorema de Pick

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Matemática pelo programa de Pós-graduação PROFMAT, ministrado pelo Departamento de Matemática da PUC-RIO.

Orientador: Prof. Drº. Marcos Craizer

Rio de Janeiro

Abril de 2025

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Alexandre de Araújo França

Cálculo de áreas de figuras poligonais usando o Teorema de Pick

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo programa de Pós-graduação PROFMAT, ministrado pelo Departamento de Matemática da PUC-RIO.

Prof. Dr. Marcos Craizer
Orientador
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Profª Drª Christine Sertã Costa
Departamento MPPEB-CPII - Colégio Pedro II

Prof.ª Drª Dania Gonzáles Morales
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de Abril de 2025.

Alexandre de Araújo França

Graduou-se em Licenciatura plena em Matemática na Universidade Federal Fluminense em 2020. Cursou pós-graduação em Gestão/ Coordenação/ Orientação Pedagógica na Faculdade Internacional Siginorelli em 2022 e pós-graduação em Metodologia do Ensino da Matemática na Faculdade Internacional Signorelli em 2023 e atualmente cursa Pedagogia na mesma instituição. Atuou como Professor da Educação Básica na rede privada desde 2010 até 2024, no município de São Gonçalo de 2022 até 2024, no município de Japeri de 2024 até 2025 e atualmente desde 2022 atua no município de Paty do Alferes.

Ficha catalográfica

França, Alexandre de Araújo

Cálculo de áreas de figuras poligonais usando o Teorema de Pick / Alexandre de Araújo França; orientador: Profº Drº Marcos Craizer – 2025
43 f.: Il. Color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2025.
Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Polígonos em malhas reticuladas. 3. Áreas de plantações. 4. Áreas de estufa. I. Craizer, Marcos II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001."

Ao meu Orientador Professor doutor Marcos Craizer por toda dedicação incansável e confiança.

À CNPq e à PUC-RIO pelo apoio concedido, pois, sem essas instituições, o trabalho teria sido impossível.

A Deus por me dar saúde necessária para realizar este sonho.

A Igreja a qual faço parte que tão carinhosamente velava meus estudos e me ajudou até aqui.

A todos os meus queridos colegas de trabalho da Escola Municipal Manoel Rodrigues em especial as minhas diretoras pela compreensão pelas licenças tiradas para estudar para o mestrado.

A todos os professores que, de alguma forma, fizeram parte desta empreitada.

A todos que fazem parte do Departamento de Matemática da PUC-Rio por toda disposição concedida a mim.

Aos professores que participaram da Comissão Organizadora.

A todos meus amigos que torceram e oraram por mim.

A minha esposa e filho pela compreensão pela ausência nos sábados de curso e as semanas de estudo para as provas.

Resumo

França, Alexandre de Araújo; Craizer, Marcos. **Cálculo de áreas de figuras poligonais usando o teorema de Pick.** Rio de Janeiro, 2025: 43p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O tema de cálculo de áreas de figuras planas como paralelogramos, retângulos, losangos, trapézios, quadriláteros em geral, inclusive aqueles que suas áreas são calculadas em decomposições, é ministrado desde o 6º ano do Ensino fundamental II até o 9º ano e, por conseguinte, no Ensino Médio.

O propósito dessa dissertação é apresentar através do Teorema de Pick, que não é tão disseminado nos ambientes escolares, uma maneira de encontrar o valor das áreas dessas figuras tornando o tema mais atrativo para os alunos, desviando de uma prática de simples decoreba de fórmulas. Soma-se a isso que a aplicação do tema foi feita com os alunos da escola rural Manoel Rodrigues no município de Paty do Alferes no estado do Rio de Janeiro, onde os alunos tem uma forte vivência no campo nas plantações de tomates no contra turno escolar. Foi realizada uma aula de campo onde foram coletadas medidas das estufas e também dos terrenos onde são cultivadas as lavouras.

Um fator de altíssima relevância dessa dissertação é que o Teorema de Pick abordado contribui de forma significativa para o aprendizado do aluno, fato esse que foi observado não só na aula de campo, como também nas atividades desempenhados em sala, na questão aplicada tanto no simulado e na prova do 4º bimestre onde os índices de acertos excederam as expectativas o que comprova o êxito no objetivo da assimilação da proposta não só teórica mas também prática por parte dos alunos.

Palavras chaves

Polígonos em malhas reticuladas, áreas de plantações e áreas de estufas.

Abstract

França, Alexandre de Araújo; Craizer, Marcos. Calculation of areas of polygonal figures using Pick's theorem. Rio de Janeiro, 2025: 43p. Master's Dissertation - Mathematics Department, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

The topic of Calculating the areas of plane figures such as parallelograms, rectangles, rhombuses, trapezoids, and quadrilaterals in general, including those whose areas are calculated by decomposition, is taught from the 6th grade of elementary school through the 9th grade and, consequently, in high school.

The purpose of this dissertation is to present, through Pick's Theorem, which is not widely used in schools, a way to find the area values of these figures, making the topic more engaging for students, moving away from the practice of simply memorizing formulas. In addition, the topic was applied to students at the Manoel Rodrigues Rural School in the municipality of Paty do Alferes, Rio de Janeiro state, where students have extensive field experience in tomato fields outside of school hours. A field trip was held, where measurements were taken from the greenhouses and the land where the crops are grown. A highly relevant factor of this dissertation is that Pick's Theorem contributes significantly to student learning, a fact that was observed not only in the field class, but also in the activities carried out in the classroom, in the question applied both in the simulation and in the 4th semester test where the correct answer rates exceeded expectations, which proves the success in the objective of assimilating the proposal not only theoretically but also practically by the students.

Keywords

Polygons in reticulated meshes, plantation areas and greenhouse areas.

Sumário

Lista de figuras

Lista de fotos

Para o sonho existe a possibilidade e
Para a beleza, a humanidade.
Para o presente existe a oportunidade e
Para a cidadania, a responsabilidade.
Para as conquistas existe a felicidade e
Para as perdas, a saudade.
Para a chegada existe o recomeço e
Para a esperança, amanheço.
Para a liberdade existe o horizonte e
Para o deserto, surpreendentes fontes.
Para o caminhante existe o endereço e
Para as dádivas da vida, eu agradeço.
Para a perplexidade existe o tempo e
Para a intensidade, o momento.
Para os erros existe o arrependimento e
Para as crises, o entendimento.
Para a queda existe a mão que se estende e
Para a solidão, o amigo que compreende.

Canísio Mayer

1.
Introdução

A presente dissertação tem por finalidade abordar o tema cálculo de áreas poligonais, cujos polígonos quando regulares possuem uma fórmula para determinação de suas medidas ou quando se refere a um polígono irregular recorre-se a decomposição do mesmo em polígonos regulares. No entanto se essas figuras estiverem contidas em uma malha reticulada, contando os pontos de intersecção das retas da malha é possível determinar a sua área pelo Teorema de Pick.

Esse tema é abordado na sala de aula desde o sexto ano do Ensino Fundamental II inclusive por meio de malhas quadriculadas até chegar no 8º e 9º anos com a aplicação de fórmulas e decomposição de figuras conforme mencionado anteriormente

O Teorema de Pick não é de maneira geral a forma mais difundida do cálculo de áreas poligonais. No entanto, o que foi suscitado para o referido projeto foi uma tentativa de tornar mais atrativa o ensino da disciplina de Matemática mais especificamente da Geometria, transformando o problema numa "simples" contagem de pontos, divergindo do que muitas das vezes concentra-se exclusivamente na memorização de fórmulas abstratas o que acaba por não despertar o interesse dos educandos pelo conteúdo, culminando, em alguns casos, em evasão ou repetência. Isso dito foi realizada uma aula de campo para ministração do conteúdo trazendo para o concreto onde eles precisaram colocar um pouco mais a mão na massa para calcular a área, e não somente aplicar uma fórmula sem saber o que aquilo representa. Importante resaltar que os alunos que foram participantes ativos desse projeto estudam na Escola Municipal Manoel Rodrigues situada no município de Paty do Alferes no Rio de Janeiro a qual é uma escola rural e muitos deles trabalham na lavoura de plantação de tomates no contra turno sendo essa a principal fonte da economia da região, e nessa prática o cálculo de áreas de terreno e das estufas onde serão realizados os plantios se faz presente. Isso seria capaz de trazer para os jovens um novo significado para o ensino de Geometria, baseado na experimentação e no manuseio das formas e fazendo uso na aplicação do seu dia a dia e de suas famílias.

2.
História

Georg Alexander Pick nasceu em 1859 em Viena, na Áustria, oriundo de uma família judia. Sua mãe era Josefa Schleisinger e seu pai foi Adolf Josef Pick, diretor de uma instituição privada. Foi educado em casa pelo seu pai até a idade de 11 anos sendo logo após matriculado na quarta classe do Leopoldstaedter Commun Gymsasium, uma escola local até 1875.

Figura 1 – Georg Alexander Pick (1859-1942). Fonte: Imagem extraída de Wikipédia

Nesse mesmo ano, agora com 16 anos, após prestar os exames para faculdade, ingressou na Universidade de Viena e já aos 17 anos escreveu seu primeiro artigo matemático. Graduou-se em Matemática e Física no ano de 1879, qualificação essa que lhe permitia lecionar ambas as disciplinas.

No ano seguinte 1880, após defender sua tese de doutorado foi contratado como assistente de Ernest Mach considerado uma dos maiores cientistas da Europa em sua época em uma Universidade em Praga.

Foi em Praga que ele passou toda a sua carreira acadêmica. Em 1888, se tornou Professor Adjunto de Matemática e em 1892 promovido para Professor Titular pela Universidade Alemã de Praga, onde se tornou também reitor em 1901, orientando cerca de 20 alunos no doutorado. Aos 68 anos se aposentou e foi nomeado como Professor Emérito. Georg Alexander Pick ainda foi eleito como membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca, mas foi excluído pelos nazistas. Em 13 de Julho de 1942, ele foi enviado para o campo de concentração de Theresienstadt onde faleceu duas semanas depois aos 82 anos.

Figura 2 – Campo de concentração em Theresienstadt alojamento masculino

Figura 3 – Campo de concentração em Theresienstadt alojamento feminino

Em sua vida acadêmica, Pick relacionou-se com duas personalidades bem conhecidas. Em 1884, estudou por dois anos com Felix Klein na Universidade de Leipzig, na Alemanha. E também se tornou amigo de Einstein entre 1911 e 1913. Pick fazia parte de uma comissão que nomeou Einstein para a cadeira de Física da Universidade de Praga. E nesses anos Pick apresentou Einstein também para a sociedade musical de Praga, já que os dois tinham os mesmos interesses musicais.

Ao longo de sua vida Pick escreveu 67 artigos matemáticos em diversas áreas, como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculos de Integrais e Geometria. O mais famoso foi aquele que fala sobre um teorema que leva o seu próprio nome, o Teorema de Pick, que foi publicado em 1899/1900 sob o nome de Geometrisches Zur Zahlenlehre (Resultados Geométricos em Teoria dos Números), Pick [20], em Praga. O artigo apresentava um teorema bem simples para calcular áreas de uma figura geométrica plana

No entanto, a fórmula ficou obscura por vários anos, pois Pick acreditava que não era uma grande descoberta e a publicou em uma seção de matemática pouco conceituada. Em 1969, o matemático polonês Hugo Dyonizy Steinhaus incluiu o teorema em um de seus livros, Mathematical Snapshots, [23], popularizando-o.

Geometrisches zur Zahlenlehre. 313

ergeben, dass die Punktzahl eines aus zwei Bestandtheilen zusammengesetzten Polygons gleich ist der Summe der Punktzahlen der Bestandtheile. Wiederholte Anwendung dieses Resultats zeigt die Richtigkeit desselben auch für beliebig viele Bestandtheile.

Für eine einzelne Masche ist

$$i = o\ ,\ u = 4$$

also die Punktzahl gleich Zwei, und gibt daher direct den Flächeninhalt der Masche an. Für jede aus solchen Maschen zusammensetzbare Polygonfigur, das heisst für jede ausschliesslich von Hauptgitterstrahlen begrenzte Figur, ist daher nach dem obigen Zusammensetzungssatze die Punktzahl gleich dem Flächeninhalt. Insbesondere gilt dies von den Parallelogrammen aus Hauptgitterstrahlen. Zerlegt man ein solches Parallelogramm durch eine Diagonale, so entstehen zwei Dreiecke, welche in Folge der Sätze I und II sammt den zu ihnen gehörigen Gitterpunkten congruent sind. Also ist die Punktzahl eines jeden von ihnen halb so gross als jene des Parallelogramms, und daher wieder gleich ihrem Inhalt.

Ein beliebiges Gitterpolygon nun kann man dadurch zu einer ausschliesslich von Hauptgitterstrahlen begrenzten Figur ergänzen, dass man über allen Seiten derselben, die nicht schon selbst Hauptgitterstrahlen sind, Dreiecke errichtet, deren beide

Fig. 2.

anderen Seiten Hauptgitterstrahlen sind. (Fig. 2. *ABM.*) Für diese ergänzenden Dreiecke ebensowohl als für die entstandene

Figura 4 - Página do livro Geometrisches zur Zahlenlehre

3.

Conceitos básicos

Antes de discorrermos sobre o Teorema de Pick algumas definições se fazem importantes para estabelecimento e aplicação do referido Teorema.

3.1.

Polígonos e definições

Definição 1.1. Uma poligonal é uma figura formada por uma sequência de pontos A_1, A_2, ..., A_n e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$.

Definição 1.2. Consideremos a sequência finita de pontos A_1, A_2, ..., A_n, com n natural e n>2. Chamamos de polígono $A_1A_2...A_n$ o conjunto de todos os segmentos formados por dois pontos consecutivos, a saber, $A_1A_2, A_2A_3, ...A_nA_1$ onde dois desses segmentos não possuem intersecção além dos vértices e, se consecutivos, não pertencem à mesma reta. Ver figura 5.

Definição 1.3. Um polígono é simples quando cada um de seus vértices é extremidade de apenas dois lados. Um polígono que não é simples é dito complexo.

Definição 1.4. Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados.

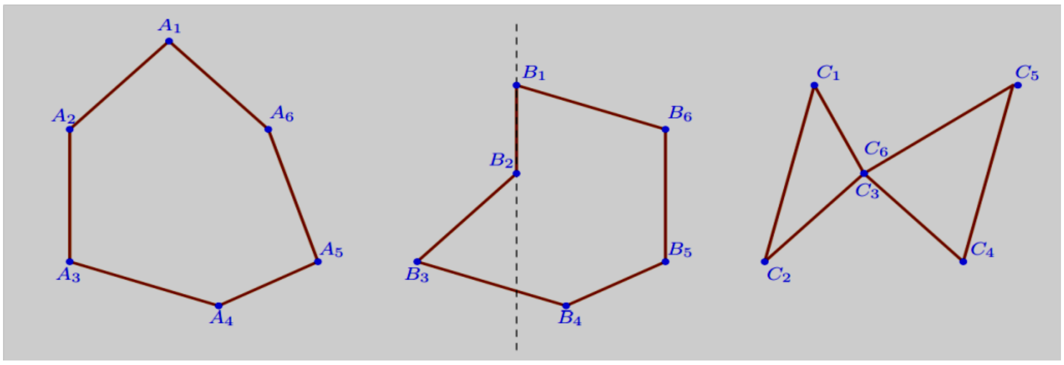

Figura 5 – Polígono convexo (à esquerda), não convexo (centro) e não simples (à direita). Fonte: Extraída de (SILVA, 2021).

Definição 1.5. Uma rede de pontos no plano é um conjunto de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a uma unidade de medida padrão adotada.

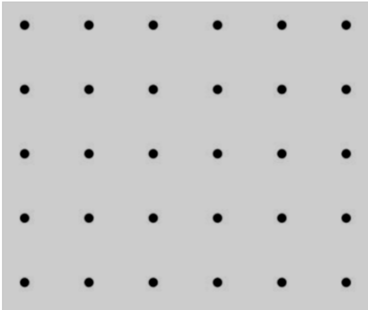

Figura 6 – Rede de pontos. Fonte: Extraída de (SENTO-SÉ, 2016).

Um polígono reticulado é aquele cujos vértices são pontos da malha quadriculada.

Definição 1.6. Um triângulo chama-se fundamental quando possui os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) sobre a rede de pontos na malha.

3.2.

O Teorema de Pick

De forma primaz enunciaremos os conceitos de malha quadriculada e de polígono simples, pois tais conceitos são basilares para o tema abordado no contexto desse trabalho.

> *"Uma rede no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a um. Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (m, n) são números inteiros."* (https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/14606/pdf/88169)

> "*Polígono simples é uma figura geométrica plana formada por segmentos de reta que não se cruzam, ou seja, não há intersecção entre dois lados não consecutivos e somente convergindo nos extremos."* (http://clubes.obmep.org.br/blog/um-pouco-sobre-poligonos poligonos-uma-primeira-definicao-2/)

3.2.1.

Exemplos

Antes de discorremos sobre o Teorema vamos apresentar o cálculo do polígono da figura 7 onde seus vértices encontram-se sobre pontos da malha.

Exemplo 1: Dado o polígono expresso na figura abaixo cujos vértices são pontos de uma malha, como podemos efetuar o cálculo da área desse polígono.

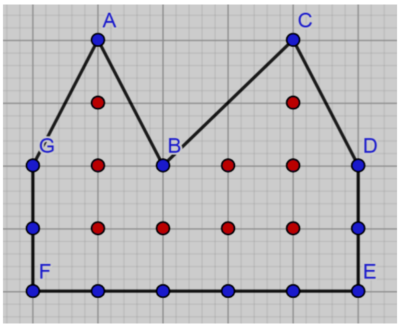

Figura 7 - Heptágono ABCDEFG não regular

Repare que a área da figura 7 pode ser calculada completando o retângulo como indicado na figura 8. Essa área pode ser obtida calculando-se a soma das áreas dos triângulos AGH, ABC e CDI e do heptágono ABCDEFG.

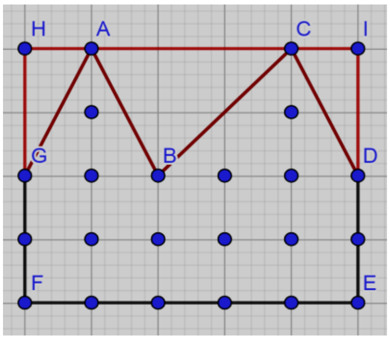

Figura 8 – Retângulo EFHI

$A_{EFHI} = A_{AGH} + A_{ABC} + A_{CDI} + A_{ABCDEFG}$

$4 \text{ x } 5 = \frac{1 \, x \, 2}{2} + \frac{3 \, x \, 2}{2} + \frac{1 \, x \, 2}{2} + A_{ABCDEFG}$

$20 = 1 + 3 + 1 + A_{ABCDEFG}$

$A_{ABCDEFG} = 15 \text{ u}^2$

O resultado foi encontrado, com a resalva de que esse não seria o método mais lúdico.

No entanto, o Teorema de Pick é uma fórmula que permite calcular a área de polígonos simples, contidos em uma malha reticulada, contando os pontos de intersecção das retas da malha. O referido teorema afirma que:

"Considerando certo polígono P com vértices cujas coordenadas na malha são números inteiros, sua área pode ser definida pela fórmula:

Área(P) = i + $\frac{b}{2}$ − 1,

sendo que i representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras interiores ao polígono e b representa a quantidade de pontos de coordenadas inteiras pertencentes às arestas do polígono."

Vamos aplicar o Teorema de Pick para o cálculo da área da figura 9, onde acrescentamos o ponto H que é um ponto de intersecção da malha quadriculada:

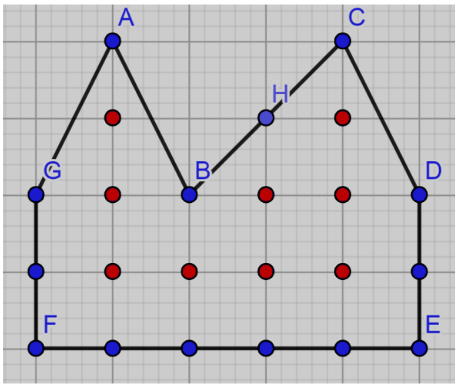

Figura 9 – Heptágono ABCDEFG não regular

Observando a figura temos que i = 9 e b = 14 e inserindo na fórmula temos:

$A = 9 + \frac{14}{2} - 1$

$A = 9 + 7 – 1 = 15\ u^2$

Concluímos então que o resultado confere com o obtido no exemplo 1.

Mais alguns exemplos de aplicação do Teorema de Pick:

Exemplo 2: (OBMEP, 2011) Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?

a) 10 cm^2

b) 12, 5 cm^2

c) 14.5 cm^2

d) 16 cm^2

e) 18 cm^2

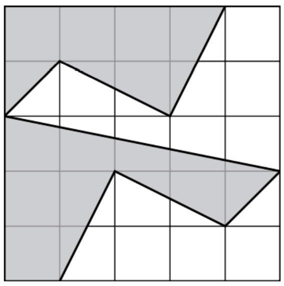

Figura 10 – Polígono. Fonte – PROVA OBMEP 2011

Solução sem utilizar o Teorema de Pick:

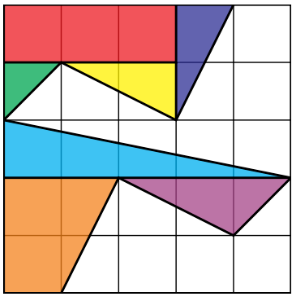

Figura 11 – Polígono complexo decomposto em polígono simples. Fonte – Construção no Geogebra

Desenvolvendo o cálculo de cada área destacada tem-se:

1. Retângulo vermelho: A = b.h → A= 3.1 = 3 cm^2
2. Triângulo verde: A = $\frac{b.h}{2}$ → A = $\frac{1.1}{2}$ = A = $\frac{1}{2}$ cm^2
3. Triângulo amarelo: A = $\frac{b.h}{2}$ → A= $\frac{2.1}{2}$ = 1 cm^2
4. Triângulo roxo: A = $\frac{b.h}{2}$ → A = $\frac{1.2}{2}$ = 1 cm^2
5. Triângulo azul: A = $\frac{b.h}{2}$ → A = $\frac{5.1}{2}$ = $\frac{5}{2}$ cm^2
6. Triângulo lilás: A = $\frac{b.h}{2}$ → A = $\frac{3.1}{2}$ = $\frac{3}{2}$ cm^2
7. Trapézio laranja: A = $\frac{(B+b).h}{2}$ → A = $\frac{(2+1).2}{2}$ = 3 cm^2

Somando-se todas as áreas temos:

A= 3+ $\frac{1}{2}$ + 1 +1 + $\frac{5}{2}$ + $\frac{3}{2}$ + 3 → A= $\frac{25}{2}$ = 12,5 cm^2

Solução utilizando o Teorema de Pick:

Nesse procedimento dividiremos a figura em dois polígonos simples I e II:

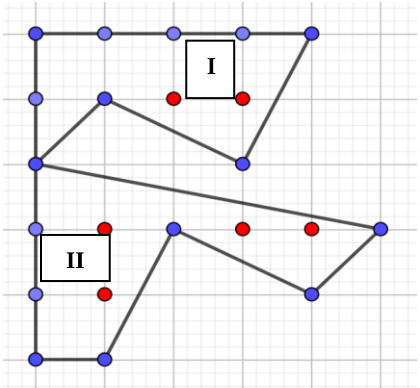

Figura 12 – Polígono decomposto em dois polígonos simples. Fonte – Construção Geogebra

- Polígono I: i = 2 e b = 9

Área (P_1) = i + $\frac{b}{2}$ − 1 → Área (P_1) = 2 + $\frac{9}{2}$ - 1 → Área (P_1) = $\frac{11}{2}$ = 5,5 cm^2

- Polígono II: i = 4 e b = 8

Área (P_2) = i + $\frac{b}{2}$ − 1 → Área (P_2) = 4 + $\frac{8}{2}$ - 1 → Área (P_2) = 7 cm^2

Somando as duas áreas têm a área da região cinza:

Área (P_1) + Área (P_2) = 5,5 + 7 = 12,5 cm^2

Exemplo 3: Calculando a área de polígonos com lados sobrepostos.

Denílson que é agricultor no município de Paty do Alferes no estado do Rio de Janeiro fez o arrendamento de dois terrenos para a plantação de tomates que estão representados na figura abaixo na malha quadriculada cuja distância entre os pontos da malha representa a medida de 1 km. Ele espera conseguir plantar 200 mil pés de tomates nesses dois terrenos e para isso ele precisa calcular a área dos mesmos. Utilizando o Teorema de Pick, para calcular a área dos terrenos arrendados por Denílson qual o valor encontrado em km^2?

a) 90 km^2

b) 91 km^2

c) 92 km^2

d) 93 km^2

e) 94 km^2

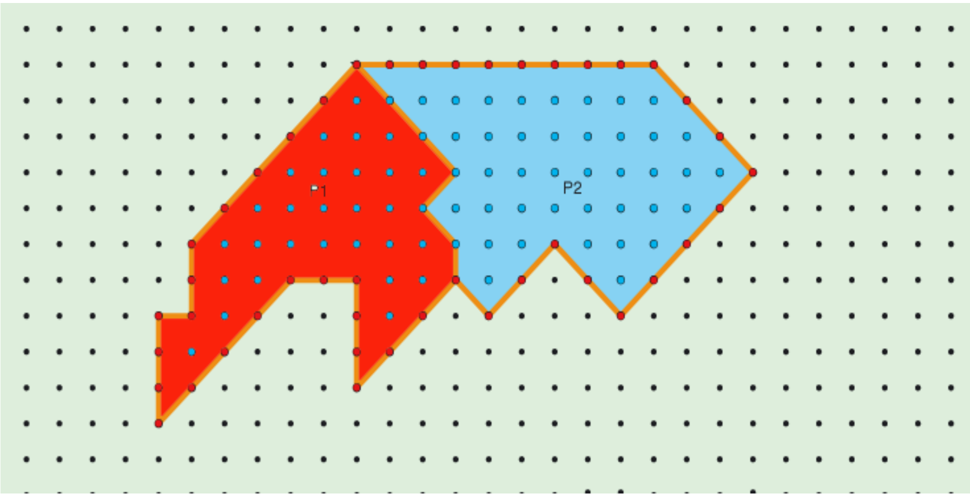

Figura 13- Justaposição de polígonos. Fonte: https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html

Solução: Analisando a figura observa-se que há um lado em comum entre os polígonos P1 e P2. O valor da área da figura pode ser encontrado separando as duas figuras, calculando suas áreas e depois somando os resultados, no entanto, abordaremos um desenvolvimento diferente. Os pontos do lado comum exceto os seus dois pontos extremos serão contados como pontos do interior do polígono maior formado pela junção de P1 e P2. Sendo assim os valores de i = 72 e b = 44, logo utilizando a fórmula do teorema de Pick temos que:

Área(P) = i + $\frac{b}{2} - 1$

Área(P) = 72 + $\frac{44}{2}$ - 1

Área(P) = 72 +22 – 1

Área(P) = 93 km^2 (Resposta letra D)

Exemplo 4: Nesse exemplo temos uma interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia

(Adaptada de Souza (2010)) Considere a rede construída sobre o mapa do estado da Paraíba, cuja menor distância entre dois pontos seja 1 cm e considere a escala indicada na figura seguinte. Usando a fórmula de Pick e a de escala linear entre áreas, calcule a área aproximada da Paraíba. (Segundo o IBGE, o estado possui 56.439 km^2 de área).

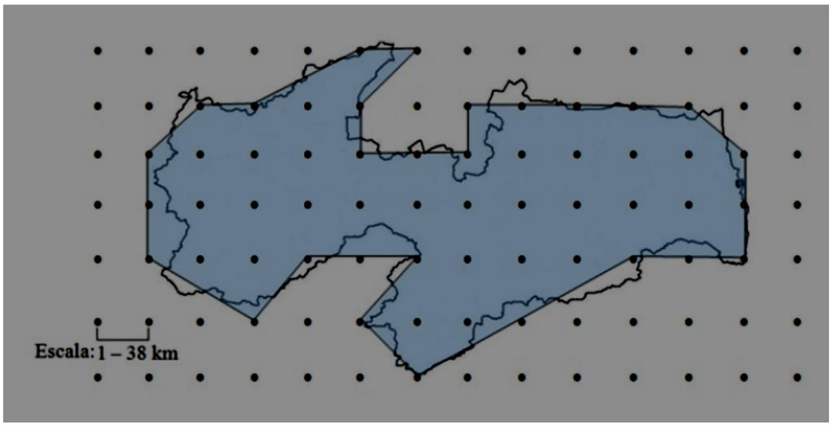

Figura 14 – Mapa da Paraíba. Fonte: Imagem extraída de (SOUZA, 2010)

Solução: Para calcular a área aproximada, definimos a área da figura 14 do desenho do mapa de A e de S, a área real. Analisando a figura 14 temos que b = 28 pontos de borda e i = 25 pontos internos. Então, pelo Teorema de Pick, tem-se:

$A = i + \frac{b}{2} - 1$

$A = 25 + \frac{28}{2} - 1$

A= 25 +14 – 1

A = 38 u.a

A relação entre escala linear *E* e áreas de figuras planas é dada por $E^2 = \frac{A}{S}$. Dessa maneira, temos que:

$E^2 = \frac{A}{S} \rightarrow \left(\frac{1}{38}\right)^2 = \frac{38}{S} \rightarrow S = 54872\ km^2$

Logo, o estado da Paraíba apresenta uma área de aproximadamente 54.872 km^2.

3.2.2. Demonstração do Teorema de Pick

A demonstração do Teorema de Pick não é singular, de tal maneira que o leitor interessado em outras estratégias pode pesquisar nas seguintes fontes:

1. https://rpm.org.br/cdrpm/78/11.html (Demonstração por indução);
2. https://www.repositorio.ufop.br/server/api/core/bitstreams/23c3d831-22ca-4ccd-ad24-bda0357ac8c1/content (Demonstração pela soma dos ângulos internos);
3. https://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick6.html (Utilizando o Teorema de Euler).

Entretanto nessa dissertação a proposta será realizá-la seguindo os seguintes procedimentos:

1º) Demonstrar que se vale para dois polígonos então vale também para a composição deles;

2º) Provar que todo polígono simples pode ser decomposto em triângulos;

3º) Verificar que o Teorema de Pick vale para triângulos retângulos (possui ângulo reto) e como todo triângulo pode ser dividido em triângulos retângulos tem-se assim o fim da demonstração.

Consideremos um polígono simples P onde seus vértices são números inteiros na malha formados por outros dois polígonos simples P_1 e P_2, que contenham apenas um lado em comum, como a figura abaixo:

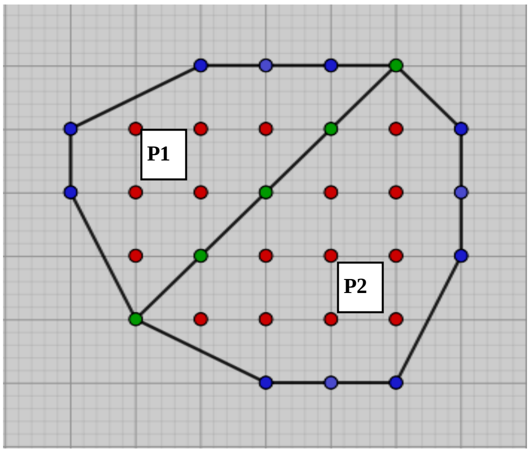

Figura 15 - Polígono P

Convencionamos que B_1 e I_1 são as quantidades de pontos nas bordas e no interior do polígono P_1 respectivamente, e definiremos B_2 e I_2 as quantidades de pontos nas bordas e no interior do polígono P_2 respectivamente. Usando o teorema de Pick temos que:

- $A_P = I + \frac{B}{2} - 1$
- $A_{P1} = I_1 + \frac{B1}{2} - 1$
- $A_{P2} = I_2 + \frac{B2}{2} - 1$

Chamando de α o número de pontos da malha que $P1$ e $P2$ possuem em comum, então, teremos que $I = I_1 + I_2 + (\alpha - 2)$ e $B = B_1 + B_2 - 2\alpha + 2$. Portanto a área de P, ficaria desta forma:

$$A_P = \frac{B}{2} + I - 1 = \frac{(B1 + B2 - 2\alpha + 2)}{2} + (I_1 + I_2 + (\alpha - 2)) - 1$$

$$= \frac{B1+B2}{2} - \alpha + 1 + I_1 + I_2 + \alpha - 2 - 1 = \frac{B1+B2}{2} + I_1 + I_2 - 2$$

Reorganizando passamos a ter:

$A_P = \frac{B1}{2} + I_1 - 1 + \frac{B2}{2} + I_2 - 1$, ou seja, $A_P = A_{P1} + A_{P2}$.

Concluindo então que o Teorema de Pick vale para composição de polígonos simples com vértices na malha. Demonstraremos agora que todo polígono simples pode ser decomposto em triângulos traçando diagonais internas as quais não ocorrem ponto de cruzamento.

Por absurdo vamos supor a possibilidade um polígono P, com L lados, o qual não pode ser decomposto em triângulos. Escolhemos P de modo que o número L seja o menor possível. Seja B um dos vértices de P e que A e C sejam os seus vértices adjacentes, ou seja, vértices que pertencem aos mesmos lados que o ponto B se encontra, segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Podemos ter dois casos possíveis:

1º Caso: Sejam A, B e C são os únicos vértices de P contidos no triângulo ABC, como na figura abaixo:

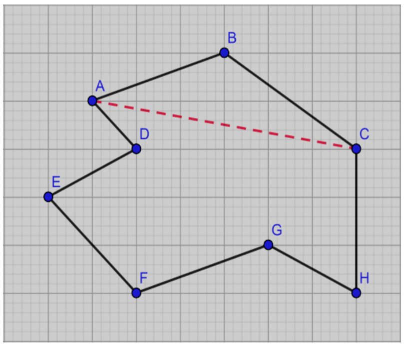

Figura 16 – Construção própria do polígono P'

Substituindo os lados AB e BC por AC, temos L$-$1 lados obtendo assim o polígono P', o que nos permite fazer sua decomposição, uma vez que assumimos anteriormente que n seria o menor número para o qual o polígono não poderia ser decomposto. Sendo L o menor número de lados para o qual o teorema não é válido, observamos que P' pode ser decomposto em triângulos na forma como queríamos. Assim unindo o triangulo ABC ao polígono P', obtemos uma decomposição de P, o que se torna uma contradição findando assim a demonstração desse caso.

2º Caso: Na outra possibilidade temos o caso no qual o triângulo BDG possui outros vértices do polígono P_2 além de B, D e G, como mostra a Figura 17.

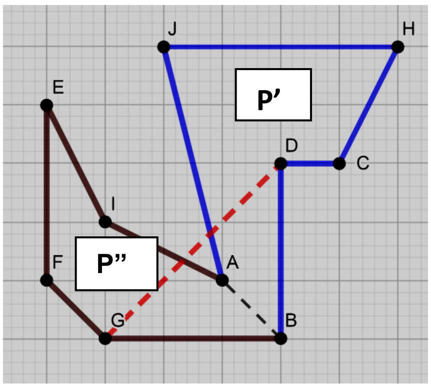

Figura 17 – Polígono P2

Nesse caso o ponto A que está na região triangular do triângulo BDG é o ponto mais distante do lado DG do triângulo, de maneira que quando traçarmos a diagonal BA essa não intercepte o nenhum dos lados do polígono P_2. Quando traçamos a diagonal BA o polígono P_2 se divide em dois polígonos P' e P" os quais ambos possuem números de lados menores do que o polígono P_2 e dessa forma como se estabeleceu anteriormente que L seria o menor número possível para o qual P_2 não poderia ser decomposto, conclui-se que *P'* e *P"* podem ser decompostos. Unindo então P' e P" encontramos a decomposição de P_2, o que é um absurdo, já que assumimos que P_2 não poderia ser decomposto. Logo, isso demonstra o segundo caso. Podendo concluir, então, que todo polígono pode ser decomposto em triângulos.

Partindo da premissa que todo triângulo pode ser decomposto em triângulos retângulos, basta comprovar então que o Teorema de Pick vale para triângulos retângulos.

Seja o triângulo RST, retângulo no vértice S com o ângulo $\alpha = 90^{\circ}$ como na figura 18, onde os lados r e t são os catetos e o lado s é a hipotenusa. Então temos a seguinte relação entre a medida dos lados s, t, r e a quantidade de pontos da malha sobre eles:

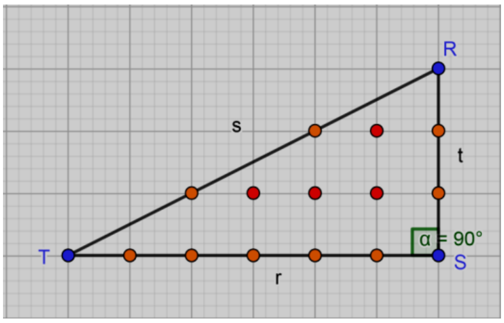

Figura 18 – triângulo RST

✓ O lado t possui tamanho t unidades de comprimento e (t+1) pontos da malha. A distância entre os pontos da malha é definida pela unidade de comprimento;

✓ O lado r tem tamanho r unidades de comprimento e (r+1) pontos da malha;

✓ Lado s tem tamanho de s unidades de comprimento e a quantidade de pontos não é possível definir, caso o triângulo fosse pitagórico, aí sim, essa definição seria possível.

✓ Definiremos somente, de forma geral, a quantidade d de pontos da malha que estão sobre a hipotenusa, excluindo a contabilidade dos vértices.

Na borda do triângulo RST da figura 7 temos (t+r+d+1) /2 pontos e na região interna $\frac{(r-1)(t-1)-d}{2}$ pontos, esta última sendo a quantidade de pontos no interior do retângulo cujas dimensões seriam r e t, retirando os pontos da hipotenusa d. Utilizando o Teorema de Pick, tem-se que:

$A = \frac{B}{2} + I - 1 \rightarrow A = \frac{t+r+d+1}{2} + \frac{(r-1)(t-1)-d}{2} - 1 \rightarrow A = \frac{t+r+d+1+rt-r-t+1-d}{2} - 1$

$A = \frac{rt+2}{2} - 1 \rightarrow A = \frac{rt}{2} + \frac{2}{2} - 1 \rightarrow A = \frac{rt}{2}$ □

Portanto como r e t são as medidas dos catetos do triângulo retângulo RST nota-se que corrobora com a fórmula da área de um triângulo, base vezes altura dividido por dois e também com a fórmula da área de triângulos retângulos, produto dos catetos dividido por dois provando que o Teorema de Pick vale também para triângulos retângulos, como desejava. Concluímos, então, que o Teorema de Pick vale para todos os polígonos simples com vértices na malha.

4.

Registro da aula de campo relacionada à coleta dos dados para a aplicação do Teorema de Pick em sala de aula.

No 4º Bimestre do ano letivo de 2024 as turmas 801 e 802 da Escola Municipal Manoel Rodrigues (escola rural) no município de Paty do Alferes no Estado do Rio de Janeiro tiveram uma aula de campo que relacionou o Teorema de Pick com a matéria de áreas de figuras planas a qual estava discriminada no planejamento pedagógico para ser ministrada naquele bimestre.

No cotidiano de boa parte desses alunos o laborar na lavoura faz parte da sua rotina, afinal muitos ajudam a família nas plantações de estufa principalmente de tomate, no contra turno escolar.

As metodologias da aplicação desenvolvidas na aula de campo foram as seguintes:

1. Apresentar aos alunos como a matemática está presente na rotina das atividades fora da escola e como também pode ser uma grande ferramenta facilitadora no desenvolvimento das atividades durante a rotina de trabalho.

2. Inicialmente identificar algumas figuras poligonais nas estruturas usadas na região das plantações.

3. Os alunos foram divididos em grupos e com o uso de uma trena e de um bloco de anotações coletaram na parte externa da estufa as suas medidas de comprimento, largura e também altura. Essas medidas foram utilizadas por ocasião do uso da fórmula do Teorema de Pick em sala de aula pra o calcula da área da estufa.

Observação:

Cabe resaltar um fato ocorrido na aula de campo, os alunos estavam com dificuldade de tirar a medida da altura da estufa com a trena, por essa ser flexível e por isso quando esticava ela dobrava. Eles tiveram, sem nenhuma interferência do professor, a ideia de pegar um pedaço de madeira, tirar a sua medida, e partir daí, ao esticar a madeira até o topo da estufa, a partir da sua base tirar medida até o chão e somar com o comprimento da madeira conforme se pode comprovar pela foto oito.

4. Na região interna da estufa foram registradas as medidas do distanciamento entre o plantio dos pés de tomate para obter o cálculo da quantidade de pés que poderiam ser plantados na região delimitada pela estufa.

Ao término todos foram reunidos para conferência das medidas anotadas de cada grupo e também para compartilharem as suas opiniões sobre a atividade desenvolvida em um ambiente fora da sala de aula.

Temos a seguir algumas fotos que registraram esse momento de aprendizado prático dos alunos na aula de campo:

Foto 1 - Chegada dos alunos na plantação de estufa

Região interna da estufa:

Foto 2 - Instruções para os alunos que atuaram na área interna

Foto 3 – Coletas de dados

Foto 4 – Coletas de dados

Foto 5 – Coletas de dados

Foto 6 – Registro das Coletas de dados

Região externa da estufa:

Foto 7 – Preparação para traçado das medidas da estufa

Foto 8 – Preparação para traçado das medidas da estufa

Foto 9 – Registro das medidas externas laterais da estufa

Foto 10 – Registro das medidas frontais externas da estufa

Foto 11 – Registro das medidas frontais externas da estufa

5. Aplicação do Teorema de Pick no Simulado Bimestral e registro do desempenho dos alunos

Além da atividade realizada em sala, no Simulado aplicado para as turmas do Ensino Fundamental II no 4º Bimestre, foi colocado uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) que envolvia justamente o conteúdo do referido Teorema. Segue a questão abaixo

Questão 24: No reticulado a seguir, pontos vizinhos na vertical ou na horizontal estão a 1 cm de distância. Qual é a área da região sombreada?

a) $7cm^2$

b) $8cm^2$

c) $9cm^2$

d) $9,5cm^2$

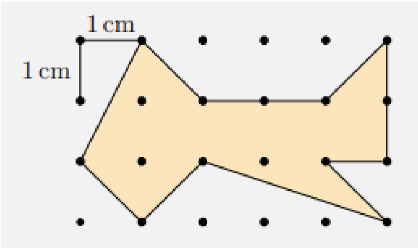

Figura 19 – Questão OBM

Solução: Aplicando a fórmula do Teorema de Pick considerando pela figura 19 temos que i = 3 e b = 12. Sendo assim:

$$A = i + \frac{b}{2} - 1 \rightarrow A = 3 + \frac{12}{2} - 1 \rightarrow A = 3+6-1 \rightarrow A = 8\ cm^2$$

O índice de acerto na questão foi extremamente satisfatório como se pode perceber pelo gráfico de setores abaixo, o que nos leva a concluir que boa parte dos alunos assimilou o conteúdo ministrado.

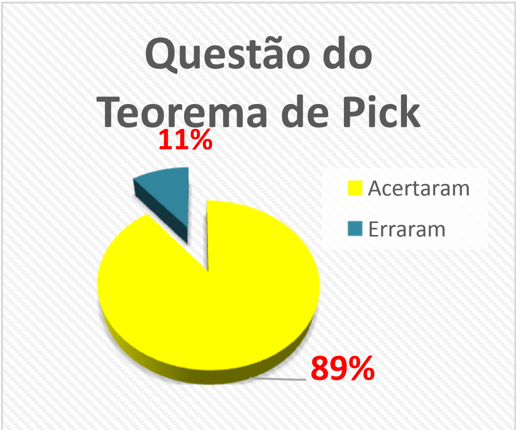

Figura 20 – Gráfico de desempenho na questão do Simulado

6

Aplicação do Teorema de Pick na Prova Bimestral e registro do desempenho dos alunos.

Além do Simulado aplicado para as turmas do Ensino Fundamental II no 4º Bimestre, foram elaboradas as duas questões que se seguem abaixo, para serem inseridas na prova de Matemática do 4º bimestre do ano letivo de 2024.

Questão 1) Utilizando a Fórmula de Pick, é correto afirmar que a área da figura é: **(7 pontos).**

a) 20 u²

b) 22 u²

c) 24 u²

d) 26 u²

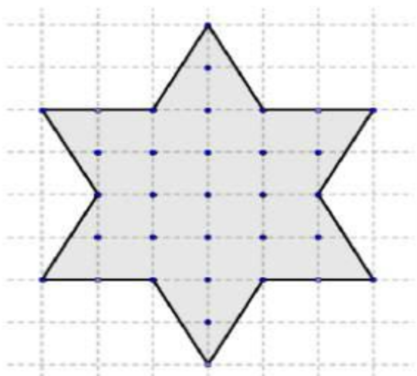

Figura 21 – Questão da prova do 4º Bimestre

Solução: Aplicando a fórmula do Teorema de Pick considerando pela figura 19 temos que i = 17 e b = 12. Sendo assim:

$$A = i + \frac{b}{2} - 1 \rightarrow A = 17 + \frac{12}{2} - 1 \rightarrow A = 17 + 6 - 1 \rightarrow A = 22\ u^2 \text{ (Resposta letra B)}$$

Nessa questão cabe uma observação, pois diferentemente em relação à questão número 2, nem todos os pontos foram demarcados na figura como se pode observar na figura 22 abaixo:

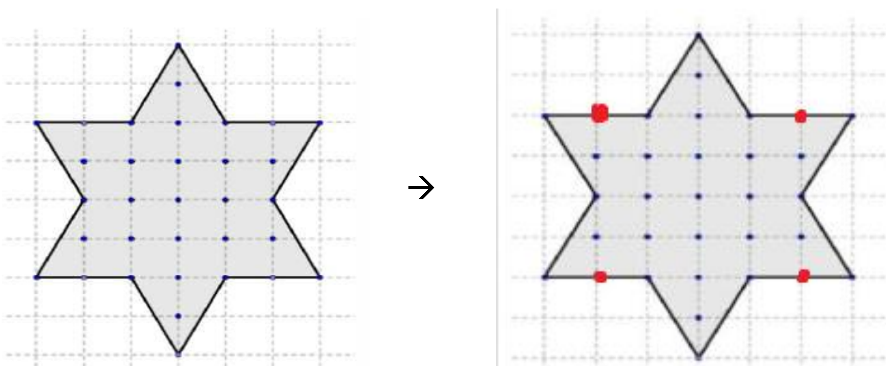

Figura 22 – Desenvolvimento da 2ª questão da prova

Muitos alunos não consideraram para os pontos em vermelho, errando no total de pontos na borda da figura, e, dessa forma errando o cálculo da área e refletindo na estatística de acertos e erros do referido exercício como nota-se no gráfico de setor a seguir:

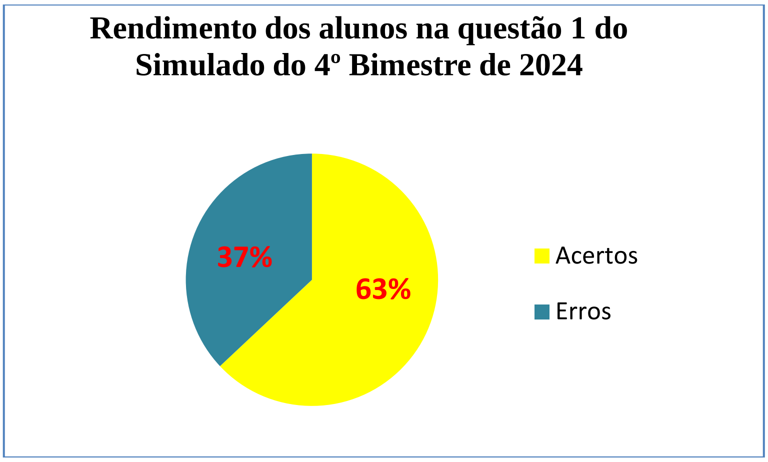

Figura 13 – Gráfico de Setor do rendimento da questão

Questão 2: João comprou um terreno conforme a figura abaixo, para construir nele estufas para plantação de tomate conforme vimos na nossa aula de campo do dia 5 de Novembro desse ano. Para isso ele precisa descobrir a área do terreno utilizando a Fórmula de Pick, a área da figura abaixo é: **(7 pontos)**

a) 16 u²

b) 18 u²

d) 20 u²

d) 22 u²

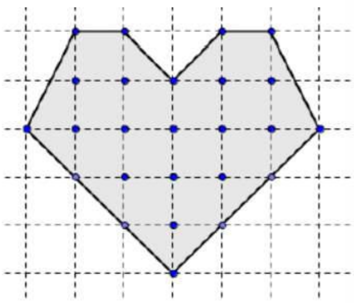

Figura 24 – 2ª questão da prova do 4º Bimestre

Solução: Aplicando a fórmula do Teorema de Pick considerando pela figura 19 temos que i = 13 e b = 12. Sendo assim:

$$A = i + \frac{b}{2} - 1 \rightarrow A = 13 + \frac{12}{2} - 1 \rightarrow A = 13+6-1 \rightarrow A = 18\ u^2 \text{ (Resposta letra B)}$$

Já na segunda questão o desempenho dos alunos foi mais satisfatório como se pode comprovar pelo gráfico de setor a seguir:

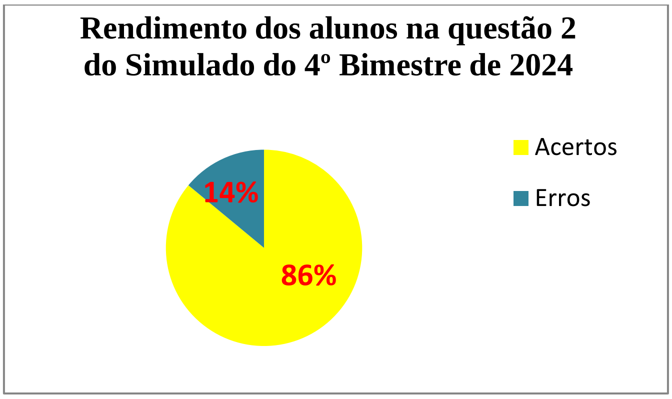

Figura 25 – Gráfico de Setor do rendimento da questão

7

Produto Educacional

Atividade desenvolvida em sala de aula

A proposta da atividade em sala de aula foi baseada no registro das medidas da estufa coletadas na aula de campo onde os alunos fariam a planificação da região da estufa numa folha em malha quadriculada e após inserirem as medidas coletadas calculariam a área da estufa usando o Teorema de Pick como também através das fórmulas.

Após os registros das medidas coletadas na estufa os alunos em sala separados em duplas calcularam a área usando o Teorema de Pick. Primeiramente foi esboçada pelo professor a figura da estufa com as medidas coletadas pelos alunos como se pode verificar na foto 12:

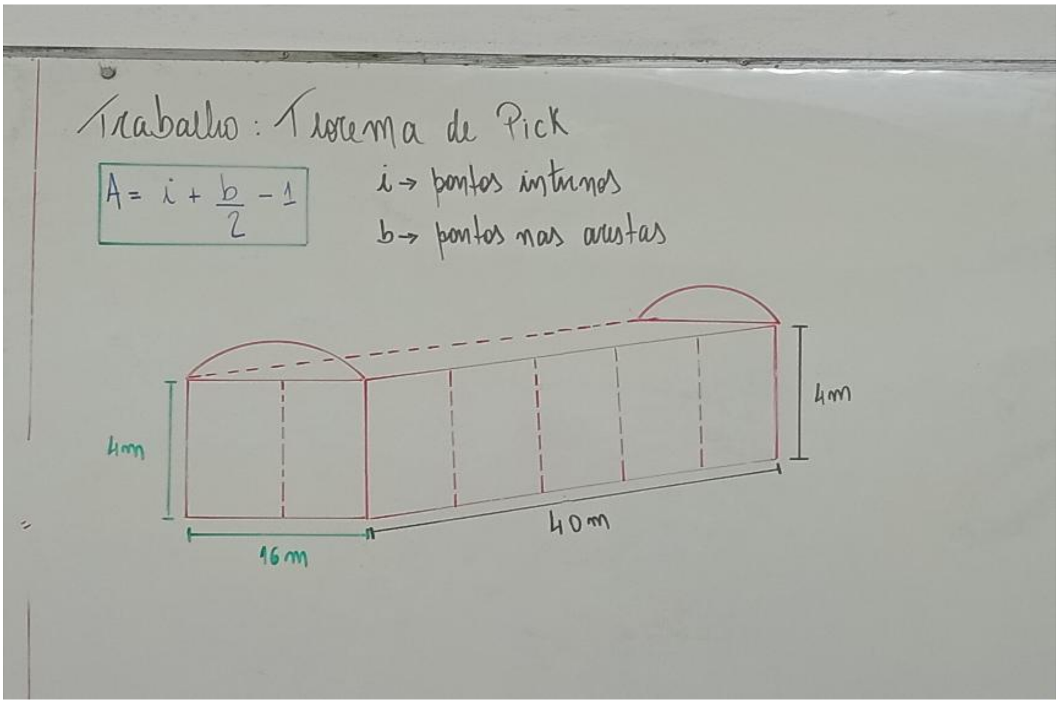

Foto 12 - Esboço da estufa para projetar as medidas coletadas pelos alunos

Foi dado a cada aluno uma folha com a malha quadriculada onde eles deveriam desenhar a planificação da lateral e da frente da estufa e calcularem as suas áreas assim como a área de plantio da estufa.

Foto 13 – Registro dos alunos desenvolvendo a atividade em sala.

Segue-se nas figuras abaixo a resolução do aluno Leonardo da turma 801 e do aluno Rodolfo da 802:

Resolução do aluno Leonardo da turma 801:

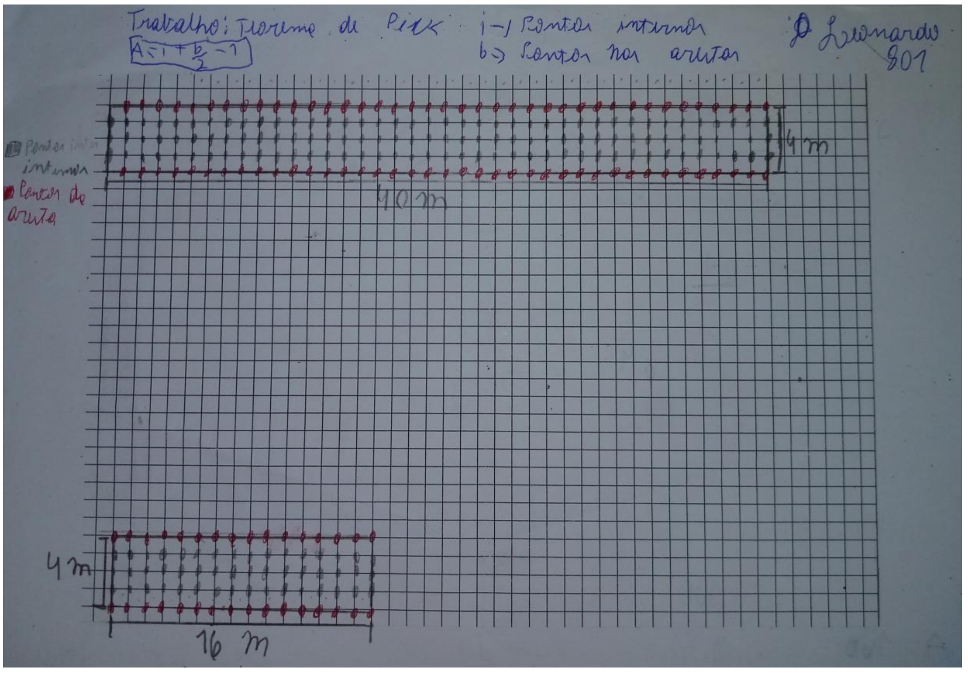

Foto 14 – Trabalho do aluno Leonardo turma 801

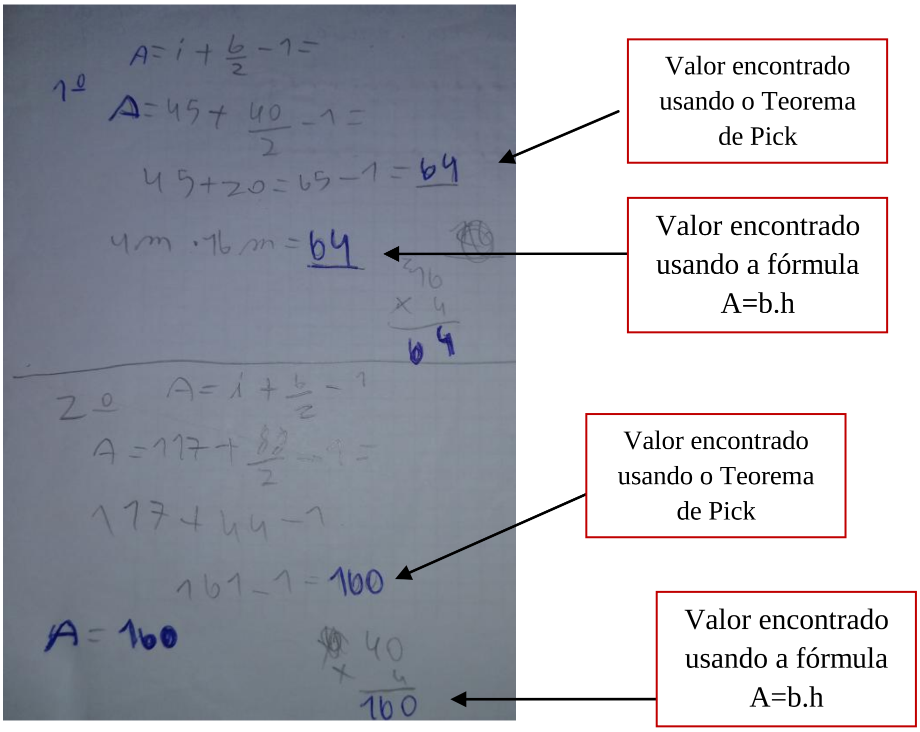

Foto 15 – Resolução da área da estufa aluno Leonardo turma 801

Resolução do aluno Rodolfo da turma 802:

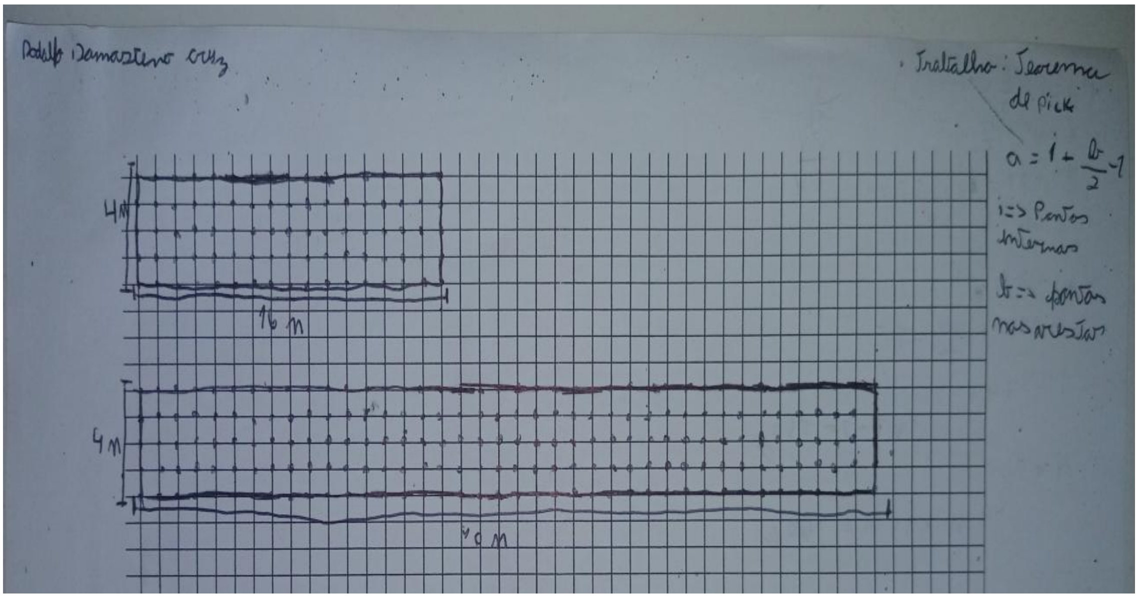

Foto 16 – Trabalho do aluno Rodolfo turma 802

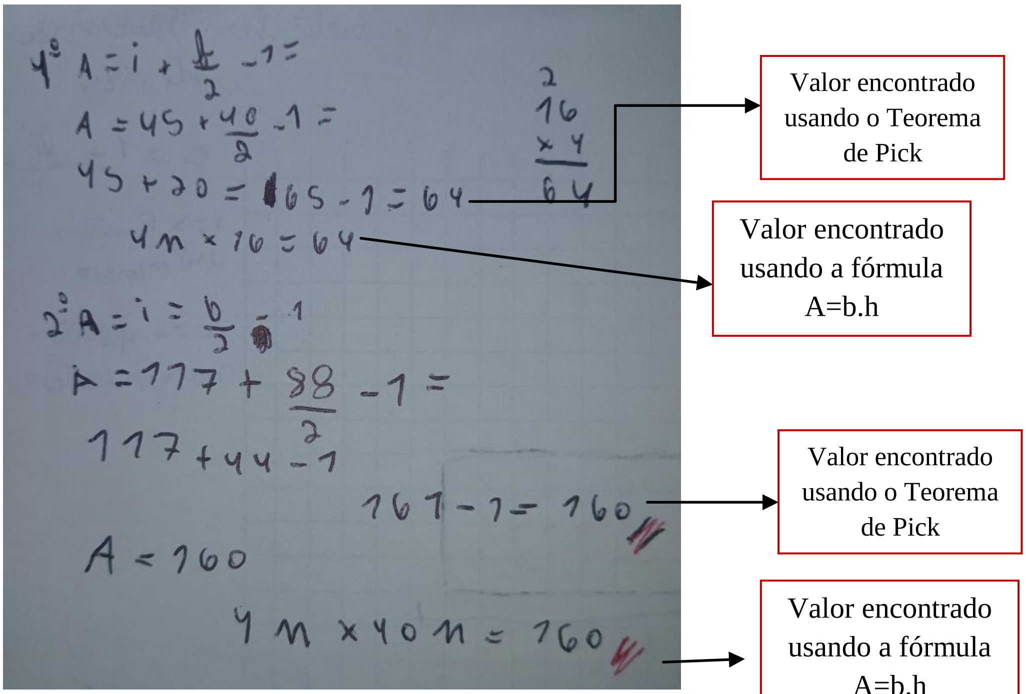

Foto 17 – Resolução da área da estufa aluno Rodolfo turma 802

Foi solicitado aos alunos que calculassem a área das figuras planas usando tanto o Teorema de Pick como a fórmula de certa forma “tradicional” a fim de que verificasse a igualdade dos resultados, o que foi comprovado como podemos ver pela foto 13, foto 14, foto 15 e foto 16.

Solução:

Na malha foram desenhados dois retângulos, sendo o primeiro com 45 pontos interno (i=45) e 40 pontos nas bordas (b=40). Dessa forma usando a fórmula do Teorema de Pick temos para o retângulo 1:

$$A = i + \frac{b}{2} - 1$$

$$A = 45 + \frac{40}{2} - 1$$

$$A = 45 + 20 - 1$$

$$A = \mathbf{64\ m^2}$$

Calculando usando a fórmula da área do retângulo temos:

A = base x altura → A = 16 x 4 = **64m²,** onde fica comprovada a igualdade nas duas soluções.

Plano de Aula

Instituição:	Escola Municipal Manoel Rodrigues	**Componente curricular:**	Matemática
Professor:	Alexandre	**Duração:**	2 aulas
Turma:	801/802	**Matéria:** Áreas de figuras planas	

Campo de Estudo	Objetivo Geral	Obejetivo Específico	Desenvolvimento Metodológico	Recurso didáticos	Avaliação	Referência
1. Geometria plana: áreas; 2. Teorema de Pick	1. Explanar a demonstração do teorema de Pick usando a malha reticulada	1. Despertar o interesse dos alunos para a matemática usando uma metodologia diferente; 2. Utilizar a comparação entre o cáculo de áreas pelos métodos tradicionais usando as fórmulas, e o cálculo da mesma área usando o Teorema de Pick.	1. Separar os alunos em duplas 2. Apresentar aos alunos a estrutura da estufa na lousa com as medidas coletadsa por els na aula de campo; 3. Entregar a folha A4 com a malha reticulada a cada dupla; 4. Intruir para que calculem a área lateral e frontal da estufa usando tanto oteorema de Pick como a s fórmulas conhecidas.	1. Papel A4 com a malha reticulada, régua, caneta, lápis, caneta esferográfica e borracha; 2. Bloco de anotações onde foram anotadas as medidas coletadas na aula de campo 3. Quadro branco, piloto	1. Verificar a construção e conclusão dos alunos; 2. Correção do exercício realizada ao final da atividade em sala no quadro branco	Livros: 1. Superação Matemática, Editora Moderna; 2. D. C. O. Leite; Teorema de Pick: Relato de uma Pratica Investigativa.

8.
Conclusão

A presente dissertação teve por objetivo apresentar uma maneira não tão usual para o cálculo de área de regiões poligonais através da aplicação do Teorema de Pick, tornado o processo de aprendizagem mais prazeroso e possibilitando ao professor uma abordagem diferente a fim de capturar a atenção do aluno e despertar o interesse pelo aprendizado.

Foram explanados um pouco da historicidade do matemático Georg Alexander Pick e os conceitos básicos, a fim de subsidiar o entendimento do teorema. Alguns exemplos foram apresentados, como a questão da Olimpíada Brasileira de Matemática, a questão da interdisciplinaridade com a Geografia com o cálculo da área do Estado da Paraíba, ambas resolvidas com a aplicação do referido Teorema. Além disso, a demonstração do Teorema procurou-se ater ao campo da Geometria.

Para minha surpresa, no decorrer do desenvolvimento, pesquisa e trabalho de campo para essa dissertação foi perceptível que ainda hoje, o mesmo que aconteceu com o Teorema de Pick que ficou na obscuridade por cerca de 70 anos ainda hoje acontece, poucos colegas professores de Matemática tinham conhecimento do mesmo. No entanto, ao serem apresentados ao Teorema praticamente por unanimidade, não só se agradaram do Teorema como se comprometeram a usá-lo na ministração de suas aulas sobre áreas de figuras planas.

Alguns frutos desse trabalho romperam as margens da sala de aula e os muros das escolas, houve relatos de alunos que aplicaram nas plantações de suas famílias, sendo esse um dos objetivos basilares a serem alcançados. Além disso, a coordenação de matemática do município de Paty do Alferes ao tomar conhecimento do tema e ser apresentado ao mesmo, nos fez o convite para ministrar uma palestra para a equipe de professores de Matemática do município sobre o Teorema de Pick, trazendo dessa forma maior relevância ao tornar conhecido esse Teorema.

Resalto também o maneira receptiva com a qual os alunos receberam o aprendizado, o comprometimento na aula de campo, nas atividades propostas em sala e também ao bom desempenho nas questões nas avaliações.

O produto Educacional foi formulado de maneira que possa contribuir para que o professor em sala tenha êxito na aplicação da atividade, sendo essa aplicação de maneira simples e objetiva onde o aluno possa não só realizar a tarefa, mas entender o que está sendo feito.

Dessa forma, espera-se que este trabalho possa ser utilizado por professores de Matemática do Ensino Fundamental II e Médio, com as devidas adaptações de acordo com o alunado que será ministrado, viabilizando, portanto, que o objetivo principal que é melhorar a qualidade do ensino público seja alcançado.

9
Referências

1 E. L. Lima; *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, IMPA e Fundação Vitae, 1991.

2 A. L. Pereira e S. T. Melo; *Contando Áreas – O Teorema de Pick.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 78, p.36-42, 2º quadrimestre. 2012.

3 T. M. Rocha e Andrade; *Áreas das noções intuitivas ao Teorema de Pick. www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1mad23-4.pdf*

4 J. N. Tavares; *Teorema de Pick*. <*http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html*>.

5 LEITE, Danielle Cristina Oliveira. *Teorema de Pick: Relato de uma Prática investigativa*.

6 *https://astronomiareal.wordpress.com/2019/12/02/conheca-alexander-pick-o-matematico-morto-pelos-nazistas-sua-descoberta-e-sensacional/*

7 SOUZA, J. R. *Um Novo Olhar - Matemática*. 1. ed. [S.l.]: FTD, 2010. v. 2 e 3.

8 WIKIPEDIA. *George Alexander Pick*. 2020. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/ wiki/Georg_Alexander_Pick>. Acesso em: 11 de Dezembro de 2024.