4
Modelo de Espaço de Estado para o Triângulo de runoff – a abordagem de De Jong & Zehnwirth

4.1
O Triângulo de runoff

No contexto de reservas de sinistros (tais como IBNR), os dados são apresentados na forma do chamado "triângulo de *runoff*", intoduzido na seção 2.2. Linhas consecutivas deste triângulo indicam os montantes pagos ao longo do tempo, referentes a acidentes originados em um dado "ano de origem". As unidades de tempo propriamente ditas têm pouco significado teórico, e, assim sendo, para representar os "anos" pode-se utilizar, por exemplo, meses ou semestres. A tabela 4.1 mostra como os dados são freqüentemente apresentados, introduzindo a notação utilizada nesta dissertação: $y_d(t)$ é o valor obervado no *Desenvolvimento* d, e *ano de calendário* t; o *ano de origem* é encontrado pela relação $w = t - d$.

Ano de Origem	Desenvolvimento d				
w	0	1	2	$\dots$	$t-1$
1	$y_0(1)$	$y_1(2)$	$y_2(3)$	$\dots$	$y_{t-1}(t)$
2	$y_0(2)$	$y_1(3)$	$\dots$	$y_{t-2}(t)$	
3	$y_0(3)$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$y_1(t)$			
t	$y_0(t)$				

Tabela 4.1: Triângulo de *runoff*.

Cada linha desta tabela indica uma distribuição de pagamento observados ao longo do tempo, em relação a um ano de origem ou de "acidente" específico. A classificação é realizada de acordo com o Desenvolvimento ("development year"). Quanto mais recente for o ano de origem, menos anos de desenvolvimento serão observados; daí a natureza triângular da base de dados.

4.2 Modelo Geral

Nesta seção será apresentado o modelo de espaço de estado proposto por De Jong & Zehnwirth[2], na sua forma mais geral. Na seção 4.3, será apresentado o modelo particular utilizado nas estimações do capítulo 5, juntamente com as premissas adotadas para a obtenção do mesmo.

4.2.1 Equação das Observações

Para modelar o fluxo de pagamento, De Jong & Zehnwirth[2] escrevem $y_d(t)$ como um nível mais um erro de média zero:

$$y_d(t) = m(t-d, d) + u_d(t) \tag{4-1}$$

onde para cada *ano de calendário* fixo t, obtêm-se Desenvolvimentos d entre 0 e $t-1$, e o ano de origem $w = t-d$ de t até 1. Em geral, o termo $m(w, d)$ é o valor total dos pagamentos esperado no ano $t = w + d$ correspondente aos sinistros originados no ano w e defasados d anos. Como definido por De Jong & Zehnwirth[2], está-se modelando $m(w, d)$ como uma função do ano de origem w e desenvolvimento d. Dados são usados para estimação dos parâmetros desconhecidos do modelo. O modelo é então utilizado para prever os pagamentos futuros.

Pagamentos referentes a um "ano de acidente" (ou ano de origem) específico sofrem influência do volume de negócios realizados naquele ano em questão. É fácil perceber que também estão relacionados com o índice de preço do ano no qual foram pagos. Dessa forma serão definidos $n(w)$ como o índice do volume de negócios realizados no ano de origem w, e $\lambda(t)$ como o índice de preço aplicável aos pagamentos do ano de calendário t. No lugar da equação (4-1), é razoável redefini-la como

$$y_d(t) = n(t-d)\lambda(t)m(t-d, d) + u_d(t) \tag{4-2}$$

onde agora $m(w, d) = m(t-d, d)$ é o nível por sinistro após ajuste de inflação.

Os índices $\lambda(t)$ e $n(w)$ devem possuir valores entre zero e um. Dessa maneira, é necessário aplicar uma transformação nos valores absolutos de volume e de preço. Seja $\zeta(t)$ o índice de preço absoluto no ano de calendário t, e $\xi(w)$ o volume absoluto de transações realizadas no ano de origem w. Assim, $\lambda(t)$ e $n(w)$ são definidos como

$$\lambda(t) = \frac{\zeta(t)}{\text{máx}\left(\zeta(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(t)\right)} \tag{4-3}$$

$$n(w) = \frac{\xi(w)}{\text{máx}\left(\xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(t)\right)} \tag{4-4}$$

É possível reescrever (4-1) e (4-2) através da seguinte notação vetorial: seja $y(t)$ o vetor coluna de todas as observações realizadas no tempo t:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{t-1}(t) \end{bmatrix} \tag{4-5}$$

Dessa forma, y_t constitui a t-ésima diagonal do triângulo de *runoff* ordenadas de acordo com seus respectivos Desenvolvimentos d em ordem crescente, ou seja, no sentido baixo-esquerda para cima-direita.

Será definida também $u(t)$ de forma semelhante, com suas componentes sendo $u_d(t)$ e seja $f(t)$ o vetor coluna composto ou pelas entradas $m(t-d, d)$ ou por $n(t-d)\lambda(t)m(t-d, d)$, correspondendo respectivamente às equações (4-1) e (4-2). Logo, para cada período de tempo t pode-se construir a seguinte relação:

$$y(t) = f(t) + u(t). \tag{4-6}$$

Ou ainda considerando $f(t) = X(t)\beta(t)$,

$$y(t) = X(t)\beta(t) + u(t) \tag{4-7}$$

onde $X(t)$ é uma matriz conhecida e variante no tempo e $\beta(t)$ é um vetor de parâmetros desconhecidos. No modelo completo (4-2), o vetor $f(t)$ será definida como abaixo:

$$f(t) = \begin{bmatrix} n(t)\lambda(t)m(t, 0) \\ n(t-1)\lambda(t)m(t-1, 1) \\ \vdots \\ n(1)\lambda(t)m(1, t-1) \end{bmatrix} \tag{4-8}$$

Entretanto, para facilitar o entendimento do modelo básico, será analisada a matriz $f(t)$ referente ao modelo (4-1):

$$f(t) = \begin{bmatrix} m(t,0) \\ m(t-1,1) \\ \vdots \\ m(1,t-1) \end{bmatrix} \tag{4-9}$$

Cada entrada do vetor $f(t)$ da equação (4-9) interpola a superfície $m(w,d)$ através de uma linha conectando os pontos $(t,0)$ e $(1,t-1)$ no plano (w,d). Fixando o argumento w, e considerando $m(w,d)$ como uma função de d, obtém-se uma seqüência de constantes que formam a *distribuição de atrasos ou Desenvolvimentos*. Cada ano de origem w dá origem a uma *distribuição de Desenvolvimentos* e, para cada ano, amostra-se uma componente de cada uma dessas distribuições.

Para se modelar essas seqüências de atrasos (ou Desenvolvimentos), é preciso formalizar a noção de que elas tendem a ser 'suaves' como funções de d. Possivelmente, para um determinado w fixo, o gráfico de $m(w,d)$ em função de d primeiro cresce, então passa a decair suavemente com uma possibilidade de ter um 'calombo' em sua cauda, refletindo altos pagamentos provenientes de sinistros com bastante atraso. Comportamentos suaves deste tipo podem ser modelados usando relativamente poucas 'funções de base'. Ou seja, pode-se supor que para cada w

$$m(w,d) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(d) b_j(w), \tag{4-10}$$

onde $\phi_j(d), j = 1,2,\ldots,p$ são p funções conhecidas em d e $b_j(w), j = 1,2,\ldots,p$ são parâmetros desconhecidos dependentes do ano de origem w. A abordagem utilizada nesta dissertação, baseado no estudo de De Jong & Zehnwirth[2], é similar à utilizada em modelos econométricos onde as distribuições dos 'lags' são modelados através de polinômios. Esta metodologia é conhecida como 'Almon lag technique'.

Pode-se colocar a equação (4-10) na forma vetorial

$$m(w,d) = \phi'(d) b(w) \tag{4-11}$$

onde $\phi(d)$ e $b(w)$ são vetores colunas definidos como:

$$\phi(d) = \{\phi_1(d), \phi_2(d), \ldots, \phi_p(d)\}',$$
$$b(w) = \{b_1(w), b_2(w), \ldots, b_p(w)\}'.$$

Substituindo (4-11) em (4-9) tem-se

$$f(t) = \begin{bmatrix} \phi'(0)b(t) \\ \phi'(1)b(t-1) \\ \vdots \\ \phi'(t-1)b(1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \phi'(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi'(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi'(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(t) \\ b(t-1) \\ \vdots \\ b(1) \end{bmatrix}$$
$$= X(t)\beta(t),$$

a igualdade final servindo para definir a matriz $X(t)$ e o vetor $\beta(t)$. Esta é a *equação das observações* que estabelece a relação entre as observações – em cada instante de tempo – e um conjunto de parâmetros desconhecidos. Podemos perceber que dada uma função de base $\phi(d)$, a matriz $X(t)$ varia com t e é conhecida.

4.2.2
Equação de Estado

Agora será desenvolvida a *equação de estado*, que estabelece a relação entre $\beta(t)$ e $\beta(t-1)$. Será considerada a idéia da condição de suavidade, mas com outro enfoque. É feita novamente a análise de $m(w, d)$, mas agora considerando as seqüências formadas fixando-se o parâmetro de atraso d e variando o ano de origem w. Para qualquer d pode-se escrever

$$m(w, d) = E\left[m(w, d)|m(w-1, d), m(w-2, d), \ldots\right] + \eta(w, d), \qquad (4\text{-}12)$$

onde o primeiro termo do lado direito da igualdade é uma esperança condicional e $\eta(w, d)$ é um erro de média zero. Assumindo que a esperança condicional seja um polinômio em w de ordem $q-1$, passando por todas as variáveis condicionais $m(w-1, d), m(w-2, d), \ldots, m(w-q, d)$, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$m(w,d) = \sum_{j=1}^{q} a(j)m(w-j,d) + \eta(w,d), \tag{4-13}$$

onde

$$a(j) = \binom{q}{j}(-1)^{j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, q. \tag{4-14}$$

Substituindo a relação (4-11) em (4-13), em ambos os lados – esquerdo e direito – da equação, obtém-se para $d = d_1, d_2, \ldots$.

$$\Phi b(w) = \sum_{j=1}^{q} a(j)\Phi b(w-j) + v(w), \tag{4-15}$$

onde a matriz Φ e o vetor $v(w)$ são definidos como

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi'(d_1) \\ \phi'(d_2) \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad\qquad v(w) = \begin{bmatrix} \eta(w,d_1) \\ \eta(w,d_2) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Considerando $b(w)$ como as variáveis aleatórias básicas do modelo, então $v(w)$ possui uma matriz covariância de posto máximo p. O posto será exatamente p se Φ for inversível. Isso mostra que a equação (4-13) é independente para até p atrasos $d_1, d_2, \ldots, d_p$. Dados este fato, multiplicando ambos os lados da equação (4-15) pelo inverso Ψ de Φ obteremos a relação

$$b(w) = \sum_{j=1}^{q} a(j)b(w-j) + \Psi v(w). \tag{4-16}$$

Assim, é derivado um argumento amplamente aplicável que formaliza a idéia de uma adaptação gradual das seqüências de desenvolvimentos no tempo e que traduz concretamente a descrição da evolução dos parâmetros $b(w)$. Assim, de (4-16) pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} b(t) \\ b(t-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(1)I & \cdots & a(q)I & \cdots & 0 \\ I & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & I & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(t-1) \\ b(t-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} v(t), \tag{4-17}$$

onde I e 0 são matrizes identidade e zero de ordem p, respectivamente. Identificando $H(t)$ com a primeira matriz do lado direito e $G(t)$ como a matriz que multiplica o termo $v(t)$, pode-se reescrever (4-17) como

$$\beta(t) = H(t)\beta(t-1) + G(t)v(t), \tag{4-18}$$

que nada mais é do que a *equação dos estados*. Pode-se perceber que tanto $H(t)$ quanto $G(t)$ são conhecidas.

4.2.3 Previsão dos Pagamentos Futuros

Nesta seção será apresentada uma metodologia para prever a incidência de pagamentos em anos futuros. É importante distingüir esses pagamentos futuros daqueles que são associados a sinistros já ocorridos e os que ainda irão ocorrer. O primeiro é chamado de "outstanding claims" e é o nosso objetivo principal. Em termos de triângulo de *runoff*, o objetivo da previsão de tais pagamentos consiste no preenchimento das células à direita da última diagonal observada. Nesta seção estaremos considerando o modelo completo da equação (4-2).

A questão da previsão torna-se bem mais simples ao se imaginar que todas as componentes não observadas da tabela de *runoff* são vetores hipotéticos de observações futuras. Exemplificando, supondo s como o último período observado, e $y(s+1)$ como o vetor coluna consistindo em *todas* as entradas não observadas agrupadas de uma maneira arbitrária, porém fixa. Todos os elementos deste vetor são associados com os anos de origem $1, 2, \ldots, s$ e que, na realidade, são médias parametrizadas por algum $b(1), b(2), \ldots, b(s)$, e estes, por sua vez, parametrizam as diversas seqüências de desenvolvimentos. Assim, o estado $\beta(s+1)$ associado à $y(s+1)$ é dado por

$$\beta(s+1) = \begin{bmatrix} b(s) \\ b(s-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b(1) \end{bmatrix} = \beta(s).$$

Em outras palavras, o estado seguinte hipotético é igual ao estado atual, o que mostra que $H(s+1)$ e $V(s+1)$ serão a matriz identidade e zero, respectivamente.

A equação das observações (4-7), sob essa ótica, é facilmente determinada identificando as posições das entradas "*runoff*" não observadas no vetor $y(s+1)$. Por exemplo, se uma entrada não observada da linha w, coluna d da tabela de *runoff* ocupa a j-ésima posição de $y(s+1)$, então a j-ésima linha de $X(s+1)$ será toda zero, exceto nas posições $(w-1)p+1$ até wp, onde será $n(w)\lambda(w+d)\phi'(d)$.

Assim, utilizando o filtro de Kalman para a previsão de $y(s+1)$, obteremos

$$\hat{y}(s+1) = X(s+1)H(s+1)\hat{\beta}(s) = X(s+1)\hat{\beta}(s), \tag{4-19}$$

com matriz de covariância do erro da previsão $y(s+1) - \hat{y}(s+1)$ dada por

$$X(s+1)C(s)X'(s+1). \tag{4-20}$$

Tanto $\hat{\beta}(s)$ quanto sua matriz covariância $C(s)$ são conhecidas no instante atual s. Em contrapartida a matriz $X(s+1)$ não é conhecida por envolver o índice de preço $\lambda(t)$ em instantes futuros $t > s$. Essa incerteza leva a modificações tanto em (4-19), como em (4-20) de forma a tornar a previsão operacional.

Suponha que o índice de preço nos anos futuros siga um processo aleatório, com média conhecida e estrutura de covariância, independente dos resíduos $u(t)$ e $v(t)$ em (4-7) e (4-18), e que $X(s+1)$ em (4-19) e (4-20) incorpore o índice de preço esperado nos anos futuros. Segundo De Jong & Zehnwirth[2], a fórmula preditiva (4-19) já comporta o estimador ótimo de $y(s+1)$, mas a matriz de covariância de $y(s+1) - \hat{y}(s+1)$ é agora dada por (4-20) mais uma matriz Z representando a incerteza associada a $X(s+1)$.

Previsão com incertezas dos índices de preços futuros

Como apresentado em De Jong & Zehnwirth[2] e por Feldstein[6], o i,j-ésimo elemento de Z é dado por

$$\text{traço}\{D_{ij}[\hat{\beta}(s)\hat{\beta}'(s) + C(s)]\}, \tag{4-21}$$

onde D_{ij} é a matriz de covariâncias entre a i-ésima e a j-ésima linhas de $X(s+1)$ e o traço da matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal. Se i e j correpondem respectivamente às entradas do triângulo de *runoff*, ano de origem w, Desenvolvimento d e ano de origem r, Desenvolvimento e, então D_{ij} será dado por

$$\begin{aligned}\text{Cov}[\lambda(w+d)n(w)x(w,d),\lambda(r+e)n(r)x(r,e)] = \\ n(w)n(r)\text{Cov}[\lambda(w+d),\lambda(r+e)]x(w,d)x'(r,e) \quad (4\text{-}22)\end{aligned}$$

onde Cov denota covariância e as i-ésima e a j-ésima linhas de $X(s+1)$ são representadas como $n(w)\lambda(w+d)x'(w,d)$ e $n(r)\lambda(r+e)x'(r,e)$. Podemos perceber que, por exemplo, $x'(w,d)$ possui todos os elementos zero exceto nas colunas $(w-1)p+1$ até wp, onde é $\phi'(d)$. O mesmo se aplica a $x'(r,e)$.

Substituindo a equação (4-22) em (4-21) e utilizando a propriedade de que traço$\{AB\}$ = traço$\{BA\}$ para matrizes A e B, a equação (4-21) torna-se

$$\begin{aligned}n(w)n(r)\text{Cov}[\lambda(w+d),\lambda(r+e)]\times \\ [\hat{\beta}'(s)x(w,d)x'(r,e)\hat{\beta}(s)+x'(r,e)C(s)x(w,d)]. \quad (4\text{-}23)\end{aligned}$$

Agora, levando-se em consideração a presença dos zeros em $x(w,d)$ e $x(r,e)$, tem-se que

$$\hat{\beta}(s)x(w,d) = \hat{b}(w)\phi(d)$$
$$x'(r,e)\hat{\beta}(s) = \hat{b}'(r)\phi(e),$$

onde $\hat{b}(w)$ e $\hat{b}(r)$ são os subvetores de $\hat{\beta}(s)$ correspondentes à $b(w)$ e $b(r)$. Também temos que

$$x'(r,e)C(s)x(w,d) = \phi(e)\text{Cov}[\hat{b}(r),\hat{b}(w)]\phi(d)$$

onde $\text{Cov}[\hat{b}(r),\hat{b}(w)]$ é uma submatriz de $C(s)$.

Substituindo estas últimas identidades na equação (4-23), obtem-se a relação

$$\begin{aligned}n(w)n(r)\text{Cov}[\lambda(w+d-s),\lambda(r+e-s)]\times \\ \phi'(d)\{\text{Cov}[\hat{b}(w),\hat{b}(r)]+\hat{b}(w)\hat{b}'(r)\}\phi(e), \quad (4\text{-}24)\end{aligned}$$

Todos os termos são conhecidos, exceto as covariâncias envolvendo os $\lambda(t)$. Para se estimar essas covariâncias, foi assumido que os índices de preço futuros são variáveis aleatórias independentes. Assim, para $t > s$

$$\lambda(t) = \lambda(s)\{1+\varepsilon(s+1)\}\{1+\varepsilon(s+2)\}\ldots\{1+\varepsilon(t)\}$$

onde os $\varepsilon(s+1), \varepsilon(s+2), \ldots, \varepsilon(t)$ são os índices de preço futuros com média μ e variância σ^2. Assumindo $t' \geqslant t > s$ temos que

$$E[\lambda(t)] = \lambda(s)(1+\mu)^{t-s}$$

e também

$$\begin{aligned} E[\lambda(t')\lambda(t)] &= \lambda^2(s) \prod_{j=s+1}^{t} E[\{1+\varepsilon(j)\}^2] \prod_{j=t+1}^{t'} E[1+\varepsilon(j)] \\ &= \lambda^2(s)[(1+\mu)^2+\sigma^2]^{t-s}(1+\mu)^{t'-t}. \end{aligned}$$

Subtraindo o produto $E[\lambda(t')]E[\lambda(t)]$ de $E[\lambda(t')\lambda(t)]$, é obtida a seguinte relação

$$\text{Cov}[\lambda(t-s), \lambda(t'-s)] = \lambda^2(s)[\{(1+\mu)^2+\sigma^2\}^{t-s}(1+\mu)^{t'-t} - (1+\mu)^{t+t'-2s}] \tag{4-25}$$

Com esta relação para as covariâncias das previsões futuras, pode-se facilmente derivar as variâncias e covariâncias associadas aos subtotais dos pagamentos futuros. Assim, a previsão do pagamento no ano $t > s$ será a soma de todos os elementos pertencentes à diagonal futura correspondente a t. Essas somas podem ser expressas na forma de matriz por $Ay(s+1)$ onde A é uma matriz de zeros e uns. A matriz covariância associada a este vetor de somas será então

$$AX(s+1)C(s)X'(s+1)A' + AZA' \tag{4-26}$$

onde as entradas de Z são dadas pela relação (4-24). O mesmo método pode ser aplicado para se obter a variância associada ao valor presente total de todas as dívidas futuras.

4.3 Modelo Utilizado

Nesta seção serão apresentadas as premissas que irão particularizar o modelo geral, definindo assim um modelo computacionalmente eficiente para as estimações a serem realizadas no capítulo 5.

O fluxo de pagamento será descrito pela equação (4-1), uma vez que não serão utilizados os *índices de preço* nem os *índices de volume*. Assim, pode-se ter uma base melhor de comparação com os resultados obtidos através da utilização do método *chain ladder*.

$$y_d(t) = m(t-d,d) + u_d(t)$$

A ordem do "Almon lag", na equação (4-10), foi definido como 1, isto é, cada média deflacionada $m(w,d)$ sofre influência somente de um parâmetro desconhecido, $b(w)$ e $\phi(d)$.

Para modelar o nível deflacionado $m(w,d)$ para cada ano de origem w, será aplicada a família *exponencial negativa* como *função básica*, que é a mesma utilizada por De Jong & Zehnwirth[2]. Os autores utilizaram em seu trabalho a função básica

$$\phi(d) = (d+1)e^{-d} \tag{4-27}$$

o que implica que, para cada ano de origem, os valores decaem monotônicamente e, eventualmente, exponencialmente à medida que o Desenvolvimento d aumenta. Dessa forma,

$$m(w,d) = b(w)\phi(d) = b(w)(d+1)e^{-d} \tag{4-28}$$

o vetor de coeficientes desconhecidos $b(w)$ consiste em exatamente uma componente, controlando o *nível* de cada w seqüências de desenvolvimentos com decaimento exponencial.

Sob estas especificações, as matrizes $X(t)$ tornam-se relativamente simples. Em geral a j-ésima componente de $y(t)$ só envolve o parâmetro $b(w-j)$. Dessa forma, $X(t)$ é diagonal com a j-ésima entrada da diagonal sendo je^{-j+1}, como definido no modelo básico[1] da equação (4-1).

Todavia é importante ressaltar que, para cada conjunto de dados analisado, uma função básica deve ser inferida. De Jong & Zehnwirth[2] adotaram a equação (4-27), porque aparenta ser bastante adequada para os dados de seu trabalho, que são "bem comportados", isto é, não há mudanças bruscas no nível das observações, e dado o ano de origem fixo, as observações tendem a decair suavemente, conforme o desenvolvimento aumenta (vide figura 5.5– p. 51 – para se ter uma idéia). Serão analisadas, no capítulo 5, as funções básicas aplicadas a cada conjunto de dados.

Para a equação dos estados, que conecta os parâmetros $b(w)$, será

[1]No modelo completo, utilizaríamos os índices de preço e de volume, assim a j-ésima entrada da diagonal de $X(t)$ seria $n(t-j+1)\lambda(t)je^{-j+1}$.

utilizado um modelo de "passeio aleatório":

$$b(w) = b(w-1) + v(w) \tag{4-29}$$

onde $v(w)$ é um ruído de média zero. Essa relação implica que a média condicional de $m(w,d)$ dado $m(w-1,d), m(w-2,d), \ldots$ é $m(w-1,d)$ para cada d. Para se chegar efetivamente à equação de estado correspondendo a relação (4-29), percebe-se que o valor de q – definido na seção 4.2.2 – é 1 e $a(1) = 1$. Assim, $H(t)$ possui zeros em todos os elementos exceto nas posições $(1,1), (2,1), (3,2), \ldots, (t, t-1)$ onde são 1.

Finalmente, a matriz $G(t)$ com dimensões $t \times 1$ terá somente o elemento (1,1) não-zero. Este elemento[2] será dado por $1/e^{-d} = e^{d}$. Segundo De Jong & Zehnwirth[2], é possivel considerar $d = 0$ sem perda de generalidade.

Abaixo encontra-se a representação geral do modelo

$$\begin{aligned}
y(t) &= X(t)\beta(t) + u(t), & u(t) &\sim \mathrm{N}(0, U(t)),\\
\beta(t) &= H(t)\beta\ (t-1) + G(t)v(t), & v(t) &\sim \mathrm{N}(0, V(t))
\end{aligned}$$

Na forma matricial, as equações tornam-se

$$\begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{t-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(t) \\ b(t-1) \\ \vdots \\ b(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ \vdots \\ u_{t-1}(t) \end{bmatrix}$$

e a equação de estado

$$\begin{bmatrix} b(t) \\ b(t-1) \\ \vdots \\ b(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(t-1) \\ b(t-2) \\ \vdots \\ b(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

4.3.1
Inicialização do Filtro de Kalman

Para que se possa iniciar o filtro de Kalman, é preciso obter o *valor inicial* do vetor de estado $\beta(0)$ e sua respectiva matriz de covariância $C(0)$ no ano de origem $w = 0$ não-observado. No 'Apêndice C' do trabalho de De Jong & Zehnwirth[2] encontra-se um método de regressão linear para se

[2] No caso da função básica $\phi(d) = (d+1)e^{-d}$, utilizada no trabalho de De Jong.

obter tais valores, porém será utilizada a tradicional *inicialização difusa* do filtro de Kalman, como descrita em Harvey[13] e Durbin & Koopman[4].

Em termos práticos, segundo Durbin & Koopman[4] a inicialização difusa consiste em fixar $\beta(0)$ em um valor arbitrário qualquer e definir $C(0) = \kappa I$ onde $\kappa \to \infty$. No nosso modelo, será fixado $\beta(0) = 0$ e $\kappa = 10^7$. Para maiores informações sobre esta inicialização e suas implicações, consultar o trabalho de Pizzinga[8].

4.3.2
Matriz covariância do ruído das observações

Devido a características particulares do triângulo de *runoff*, serão consideradas duas formas de abordar a matriz covariância $U(t)$. A primeira forma abordada é através de uma matriz diagonal com todos os termos iguais, ou seja,

$$U(t) = \sigma_u^2 I$$

onde I é a matriz identidade de dimensão $t \times t$.

A segunda forma abordada é através da seguinte "lei de variância"

$$\mathrm{Var}[u_d(t)|\mathbf{Y}_{t-1}] = \sigma_u^2 \left|\mathrm{E}[y_d(t)|\mathbf{Y}_{t-1}]\right|.$$

Nessa abordagem, buscou-se estabelecer um valor diferente entre os ruídos dentro do mesmo instante t. Quanto maior for o Desenvolvimento d, menor será a incerteza da observação, pois assume-se que há um *controle* maior sobre o valor observado, que também tende a ser menor. Tal forma torna o modelo *condicionalmente gaussiano* (vide Harvey[13, p. 156]).

4.3.3
Previsão dos pagamentos futuros

No modelo apresentado em seu trabalho, De Jong & Zehnwirth[2] relaxam o efeito da matriz covariância do ruído das observações $U(s+1)$ no cálculo da matriz covariância do erro de previsão $y(s+1) - \hat{y}(s+1)$. Esta equação (4-20) encontra-se na seção 4.2.3.

Entretanto, no presente enfoque esta equação será ajustada de forma a levar em conta a influência da incerteza proveniente do ruído das observações. Dessa forma, a equação (4-20) torna-se

$$X(s+1)C(s)X'(s+1) + U(s+1). \tag{4-30}$$

Como não será utilizado o *índice de preço* nesta modelagem, a matriz $X(s+1)$ será determinística e não estocástica como prevê o modelo geral. Em decorrência disto a matriz de covariâncias Z, definida no modelo geral, não existirá. A variância da soma de todos os elementos de $\hat{y}(s+1)$ – que nada mais é do que a reserva IBNR total – será dada por

$$aX(s+1)C(s)X'(s+1)a' + aU(s+1)a'. \tag{4-31}$$

onde a é um vetor linha formado por 1's (uns) de dimensão $1 \times s$.

Este resultado é a base para o cálculo da reserva IBNR e seu intervalo de confiança. Resumindo, estas são as equações para a reserva total:

$$\begin{aligned} \text{IBNR} &= a\hat{y}(s+1) = X(s+1)\hat{\beta}(s) \\ \text{std(IBNR)} &= \sqrt{aX(s+1)C(s)X'(s+1)a' + aU(s+1)a'} \end{aligned}$$