



**Alessandra Soares Miranda**

## **O Infinito no Ensino Fundamental**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, da PUC-Rio.

Orientadora: Tatiana Fernandes Sodero

**Rio de Janeiro,  
abril de 2025**



**Alessandra Soares Miranda**

## **O Infinito no Ensino Fundamental**

### **Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, da PUC-Rio.

Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Professora Tatiana Fernandes Sodero**

Orientadora

Departamento de Matemática PUC-RJ

**Professora Dania González Morales**

Departamento de Matemática PUC-RJ

**Professora Christine Sertã Costa**

Colégio Pedro II

Rio de Janeiro, 25 de abril de 2025.

**Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial, do trabalho é proibida sem autorização do autor, do orientador e da universidade.**

**Alessandra Soares Miranda**

Formada em Licenciatura em Matemática pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ (2014). Fez pós-graduação em Psicopedagogia Institucional e Educação Especial pela Universidade Veiga de Almeida (2019) e fez MBA em Educação Cognitiva: Gestão da Aprendizagem Mediada pela Universidade Estácio de Sá (2020). Leciona no Município do Rio de Janeiro desde 2015.

Ficha Catalográfica

Miranda, Alessandra Soares

O infinito no ensino fundamental / Alessandra Soares Miranda ; orientadora: Tatiana Fernandes Soderó. – 2025.  
51 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2025.  
Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Infinito. 3. Matemática. 4. Educação. 5. Reta numérica. 6. Números racionais. I. Soderó, Tatiana Fernandes. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus, que me permite a cada dia ter saúde e conquistar meus projetos e sonhos, me dando discernimento e sabedoria. Que sempre me guie no melhor caminho, de acordo com a Sua vontade e me ajude a me tornar cada dia uma pessoa melhor.

Agradeço a meu esposo, por toda paciência e dedicação neste processo, que foi longo e de muita dificuldade. Sempre se mostrando atencioso e solícito, sendo um verdadeiro companheiro de vida.

A meus familiares e amigos, que de perto ou algumas vezes nem tão perto, sempre torcem e ficam felizes com minhas conquistas.

A meus professores, que me levaram de alguma forma a buscar o que busco hoje. Em especial, aos professores da PUC que muito foram competentes e compreensivos, mas também rigorosos no processo, o que nos fez chegar onde estamos agora. De maneira carinhosa, quero agradecer ao professor Luis Eduardo Moreira, que sempre foi muito atencioso com nossa turma, se colocando a nossa disposição sempre que preciso e, à professora Tatiana Soderó, que sempre esteve disponível e paciente em todo processo de orientação, buscando sanar as dúvidas que surgissem a todo instante.

A meus colegas de turma, sempre incentivadores e apoiadores nas aulas e no decorrer do curso. Agradeço pelos momentos de troca e conhecimento que puderam me proporcionar neste processo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## **Resumo**

Miranda, Alessandra Soares; Sodero, Tatiana Fernandes. **O Infinito no Ensino Fundamental**. Rio de Janeiro, 2025. 51p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O ensino do infinito na Educação Básica encontra algumas barreiras e o aluno acaba por não conseguir entender significativamente o conceito que se pretende introduzir. Isto ocorre, muitas vezes, por ele não lidar com a ideia de infinito no dia a dia, apesar de ser possível perceber coisas que pareçam infinitas, elas não são, apenas existem em quantidades muito grandes. Além de não conseguir levar seu pensamento ao abstrato, se remetendo quase sempre ao concreto, sentindo uma necessidade de aprender na prática o que se está sendo ensinado. Com algumas atividades baseadas em conceitos dos Números Racionais, tais como densidade e reta numérica, conteúdos estes a serem tratados no Ensino Fundamental, este trabalho tem como objetivo que os alunos tenham uma aprendizagem mais concreta e significativa do que é o infinito, além de desenvolver uma aprendizagem abstrata e crítica que muito é importante no ensino da Matemática.

## **Palavras – chave**

Infinito, matemática, educação, reta numérica, números racionais.

## **Abstract**

Miranda, Alessandra Soares; Sodero, Tatiana Fernandes. **Infinity in Elementary School**. Rio de Janeiro, 2025. 51p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The teaching of infinity in Basic Education encounters some barriers and the student ends up not being able to significantly understand the concept that is intended to be introduced. This often occurs because he does not deal with the idea of infinity on a daily basis, although it is possible to perceive things that seem infinite, they are not, they just exist in very large quantities. In addition to not being able to take his thinking to the abstract, almost always referring to the concrete, feeling the necessity to learn in practice what is being taught. With some activities based on concepts of Rational Numbers, such as density and number line, contents to be covered in Elementary School, this work aims for students to have a more concrete and meaningful learning of what infinity is, in addition to developing abstract and critical learning that is very important in teaching Mathematics.

## **Keywords**

infinity, mathematics, education, number line, rational numbers.

## Sumário

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Introdução.....                                                          | 9  |
| 2. O Infinito.....                                                          | 11 |
| 2.1. História.....                                                          | 11 |
| 2.2. Alguns interessantes exemplos do infinito.....                         | 18 |
| 2.2.1. Hotel de Hilbert.....                                                | 18 |
| 2.2.2. Paradoxo de Aquiles.....                                             | 19 |
| 3. O Ensino do Infinito.....                                                | 22 |
| 3.1. Dificuldades no estudo do Infinito.....                                | 22 |
| 3.2. Onde aparece o infinito no ensino.....                                 | 23 |
| 3.3. Casos do infinito.....                                                 | 30 |
| 3.4. Como materiais manipulativos e jogos ajudam no ensino do Infinito..... | 31 |
| 4. Produto Educacional.....                                                 | 34 |
| 4.1. Proposta de aula.....                                                  | 35 |
| 4.1.1. Aula 1: conceitos e números decimais.....                            | 35 |
| 4.1.2. Aula 2: reta numérica e ordenação.....                               | 37 |
| 4.2. Aula 3: Desafio dos Intervalos.....                                    | 39 |
| 4.2.1. Passo a passo para o professor.....                                  | 39 |
| 4.3. Relato da parte 1.....                                                 | 41 |
| 4.4. Aula 4: Tecnologia.....                                                | 42 |
| 4.4.1. Passo a passo para o professor.....                                  | 42 |
| 5. Conclusão.....                                                           | 46 |
| 6. Bibliografia.....                                                        | 48 |

## Lista de Figuras

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Zenão de Eleia – imagem de ‘O Livro da Matemática’ .....   | 12 |
| Figura 2: Georg Cantor – ilustração de ‘O Livro da Matemática’ ..... | 13 |
| Figura 3: Ilustração de ‘Alex no País dos Números’ .....             | 19 |
| Figura 4: Ilustração de ‘Alex no País dos Números’ .....             | 20 |
| Figuras 5, 6 e 7: Imagem da BNCC .....                               | 24 |
| Figuras 8 e 9: Imagem da BNCC .....                                  | 25 |
| Figuras 10, 11 e 12: Imagem da BNCC .....                            | 26 |
| Figuras 13 e 14: Imagem da BNCC .....                                | 27 |
| Figuras 15, 16 e 17: Imagem da BNCC .....                            | 28 |
| Figuras 18 e 19: Imagem da BNCC .....                                | 29 |
| Figuras 20 e 21: Imagem da BNCC .....                                | 30 |
| Figura 22: Modelo para parte 1 da atividade .....                    | 40 |
| Figura 23: Demonstração da parte 1 da atividade .....                | 41 |
| Figuras 24: Demonstração da parte 2 da atividade .....               | 43 |
| Figuras 25, 26 e 27: Demonstração da parte 2 da atividade .....      | 44 |
| Figuras 28, 29 e 30: Demonstração da parte 2 da atividade .....      | 45 |



## Epígrafe

“Do paraíso que Cantor criou para nós, ninguém nos expulsará.” (David Hilbert, citado por BELLOS, A., 2011, página 434)

“Cantor nos deu todos os números que quisermos, mas já não existem tantas coisas assim para contar.” (BELLOS, A., 2011, página 436)

## 1. Introdução

Este trabalho tem como propósito a melhor compreensão do conceito de infinito pelos alunos do segundo segmento do Ensino Fundamental. O referido tema é visto de forma bem rápida e superficial por não estar incluído como conteúdo a ser tratado em nenhuma das séries de tal segmento.

Neste trabalho pode-se analisar e, assim, perceber a importância histórica do referido conceito. Na história do estudo do infinito houve grande dedicação de alguns matemáticos por anos. No capítulo 2, foi observado como se deu o estudo do conceito de infinito e como ele foi e, continua sendo desenvolvido, com o passar dos anos, chegando ao que se tem nos dias atuais. É possível também observar como considera-se que tal conceito ainda tem muito a ser desenvolvido e estudado.

É analisada sua importância no ensino da matemática e no desenvolvimento lógico, abstrato e crítico do pensamento do aluno. Especificamente, neste trabalho, será tratado o conceito de infinito nos números racionais, que tem grande importância no Ensino Básico, mais precisamente no Ensino Fundamental, um caminho de muitos que o infinito nos proporciona, pois este é citado e estudado em vários conceitos matemáticos no decorrer do Ensino Fundamental, o que poderá ser visto no capítulo 3 (seção 3.2). Ao longo de sua jornada no Ensino Fundamental, o estudante se depara com conceitos que necessitam do entendimento do que é o infinito em diversos momentos, sendo de suma importância para a aprendizagem do aluno com relação à abstração em conceitos matemáticos.

Serão propostas atividades que, utilizando conceitos sobre Números Racionais, têm o propósito de introduzir a existência do infinito aos alunos, de maneira mais intuitiva e concreta. Além de refletir sobre a dificuldade do aluno em entender o abstrato na Matemática, como no ensino do infinito. Esta dificuldade é apresentada no capítulo 3 (seção 3.1), onde são mostradas algumas explicações possíveis para o seu aumento e até preconceito com determinados conceitos matemáticos. Analisando tais aspectos espera-se gerar no aluno um senso crítico e de forma concreta, introduzir este conceito, para que ele tenha uma aprendizagem significativa do que é o infinito.

No capítulo 3 (seção 3.4), é refletida a influência que atividades diferenciadas, como materiais manipulativos e jogos, têm no melhor entendimento de alguns conceitos abstratos pelo aluno, através de sua autonomia e participação, de maneira mais concreta. Além da importância de atividades em

grupo, que melhoram o desenvolvimento do mesmo, tanto individual como coletivamente, ajudando em sua relação socioemocional e na melhor compreensão de determinados conceitos.

E então, por fim, enquanto estudam tais conceitos dos números racionais, como densidade e reta numérica, e praticam as propostas de atividades apresentadas neste trabalho, que se dão de maneira diferenciada, em grupo e através de materiais manipulativos, espera-se que os alunos percebam a existência do infinito de forma bem prática, tendo um real entendimento do que é de fato este conceito. Diminuindo, assim, um pouco a defasagem escolar destes alunos, principalmente, quando for estudar alguns conceitos posteriores, como plano cartesiano, números irracionais, dentre outros. Projetando que eles obtenham uma aprendizagem mais abstrata, que é de grande importância no ensino da Matemática, e que possam perceber a importância do entendimento do infinito para alguns de seus conceitos, possibilitando que estes alunos construam um raciocínio mais abstrato e crítico para somar aos seus conhecimentos, desenvolvendo melhor seu raciocínio lógico.

A inspiração para esta atividade ocorreu em uma aula de Cálculo, onde foi explanado o método da Bisseção, que consiste em analisar intervalos cada vez menores dentro de determinado conteúdo. Pude assim associá-lo a uma atividade que é aplicada a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental do Município do Rio de Janeiro (Material Rioeduca 2024), que fala sobre uma formiga que quer chegar ao seu destino. Sendo assim questionado aos alunos se ela conseguirá cumprir seu objetivo, se andar sempre metade da distância que falta. Essa atividade tem como propósito, mostrar aos alunos a infinidade de números entre um intervalo, no ensino dos Números Racionais. Com a citada inspiração do método da bisseção, idealizei este trabalho com o propósito de ensinar números racionais, com a utilização de intervalos, e assim, permitir que o aluno possa perceber e concluir sua infinidade.

Depois de alguns anos lecionando no Ensino Fundamental, pude perceber a dificuldade que os alunos encontram não só na aprendizagem do conceito do infinito, como na aprendizagem de assuntos que tenham determinada abstração<sup>1</sup> no ensino da Matemática.

---

<sup>1</sup> Abstrato: Que não é concreto nem real; que não tem existência como objeto, como coisa, como realidade palpável; irreal.

## 2. O Infinito

Neste capítulo será refletido como se deu o estudo do conceito de infinito com o passar dos anos e será mostrado como alguns matemáticos tiveram grande contribuição no desenvolvimento da sua história.

Além de serem mostrados dois casos interessantes que utilizam o conceito de infinito: o paradoxo do Hotel de Hilbert e um dos paradoxos de Zenão, o paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

### 2.1. História

O infinito é apenas uma figura de linguagem: uma forma abreviada para a afirmação de que existem limites dos quais certas relações podem se aproximar tanto quanto nós desejarmos, desde que permitamos que outras magnitudes cresçam sem qualquer restrição. (Gauss, citado por GARBI, G., G., página 285)

O infinito foi objeto de muita curiosidade por diversos pesquisadores, por ser um conteúdo de grande complexidade e ter sido objeto de estudo desde muito tempo, em diversas áreas de conhecimento, de diversas formas, a respeito de sua etimologia, crença ou significado, como na Física, na Religião ou na Matemática. Apesar disso, só ao final do século XIX, o infinito começou a ser mais desenvolvido por George Cantor, chegando ao que temos hoje de conhecimento sobre tal conceito, sendo ainda este considerado um assunto a ser muito desenvolvido no ramo da Matemática.

Matematicamente, o termo infinito está relacionado a algo que não tem fim, que não tem limite. É um conceito abstrato que é muito importante em diversos estudos na Matemática. Essa abstração, além de primordial para o aprendizado de diversos outros conteúdos matemáticos, também ajuda a desenvolver o raciocínio e senso crítico do aluno.

A história do Infinito, ou seja, a história do conceito de Infinito, não é somente uma história da Matemática; é antes uma história da evolução do pensamento científico e de como é possível se pensar em algo que transcende qualquer possibilidade de compreensão. (Morris, 2003, citado por Fernandes et. al., 2023, página 2)

Zenão, nascido por volta de 495 a.c., numa cidade grega chamada Eleia, na atual Itália, foi um dos primeiros a lidar com o conceito de infinito usando seus paradoxos e, foi definido por Aristóteles (que deu conhecimento aos seus paradoxos no tratado Física) como inventor do método dialético de argumentação lógica.

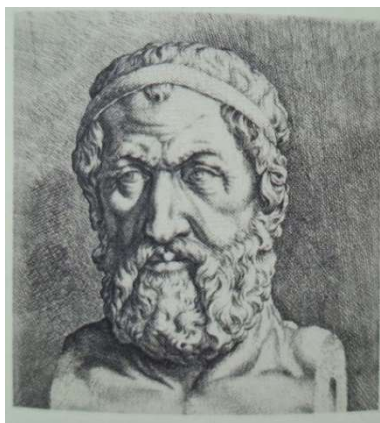


Figura 1: Zenão de Eleia – imagem de ‘O Livro da Matemática’

Foi ele que correlacionou o discreto e o contínuo, sendo alguns de seus argumentos seguidos por Aristóteles. Seus paradoxos são estudados até hoje, sendo reconhecidos como problemas que relacionam o infinito potencial e o infinito real. Porém, para alguns estudiosos eles têm relação com outros aspectos. Mas o consenso é de que, de uma forma ou de outra, seus estudos influenciaram na Matemática em diversas gerações.

Foram os gregos (pitagóricos), mais especificamente Hipaso, que estudando a diagonal de um quadrado com lado unitário, observou que ela não poderia ser escrita como uma divisão de números inteiros e que era representada pelo número  $\sqrt{2}$ , que é composto por infinitas casas decimais não periódicas.

Já Arquimedes de Siracusa, que foi um matemático que viveu no século III a.C., teve grande contribuição na descoberta do número  $\pi$ , pois o observou fazendo uma estimativa e com algumas aproximações, chegou a seguinte:

$$3,14084507 < \pi < 3,142857142$$

Além também de ter tido uma grande contribuição, diferenciando o infinito da ideia de números grandes. Calculando quantos grãos de areia ocupariam todo o universo, estimando o tamanho do universo e criando uma representação para números muito grandes, mostrou que nem assim este seria um número infinito, já que o universo é finito. Como caberia um número infinito em algo que é finito, como o universo?

O símbolo do infinito  $\infty$ , foi introduzido nos estudos do infinito pelo matemático e sacerdote britânico John Wallis (1616-1703) em 1655. Especula-se que sua ideia veio do símbolo utilizado na época para representação do número 1000 em algarismos romanos “CIO”.

No século XVI, Galileu observou que se podia colocar o conjunto dos números naturais em correspondência biunívoca com o conjunto dos seus quadrados. Indo contra a noção euclidiana de que o todo é sempre maior que a

sua parte, chegando à conclusão de que quando se trata do infinito, termos como ‘mais que’, ‘menos que’ não fazem sentido.

Podemos entender melhor essa ideia pensando no conjunto dos números inteiros e no conjunto dos números racionais. Não podemos concluir que o conjunto dos números racionais tem mais elementos que o conjunto dos números inteiros, mesmo este estando contido no primeiro.

Alguns outros autores que podemos citar, a respeito do estudo do infinito, são: Cavalieri (1598-1647), Bernhard Bolzano (1781-1848), Richard Dedekind (1831-1916), George Cantor (1845-1918).

Gauss, em 1831, relacionou o infinito a algo como um limite que nunca se alcança, que se continua indefinidamente. E somente nos anos 1870 que George Cantor e Richard Dedekind notaram que é essa propriedade que caracteriza os números infinitos.

Bernhard Bolzano foi quem falou primeiro sobre os conjuntos infinitos. Foi publicado, de modo póstumo, um livro em 1859, que abordou diversos de seus aspectos filosóficos e matemáticos acerca do infinito. Richard Dedekind foi além, utilizando o estudo dos conjuntos na teoria dos números reais. Porém, foi George Cantor (1845-1918) quem mais teve avanços nos conceitos de conjuntos.

As ideias de Cantor não foram muito bem aceitas em sua época por matemáticos e também pelo clero. Seus pensamentos começaram a ser levados em conta no início do século XX. Em um de seus trabalhos, ele usa o seguinte conceito de conjunto, segundo ÁVILA, G. (2005, página 38):

Por conjunto entenderemos qualquer coleção numa totalidade  $M$  de objetos distintos, produtos de nossa intuição ou pensamento.

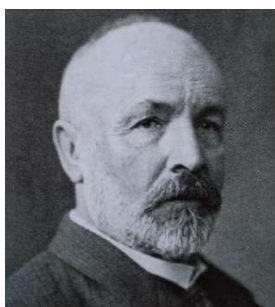


Figura 2: Georg Cantor – ilustração de ‘O Livro da Matemática’

E por volta de 1872, no início de sua carreira profissional, começou o estudo dos conjuntos. Sua ocupação estava a respeito do estudo de funções, o que o levou à investigação dos conjuntos como pontos de descontinuidade dessas funções. Inicialmente, conjuntos com um número finito de pontos, porém ao irem aparecendo conjuntos mais complexos, ele foi levado a desenvolver os conjuntos infinitos. E iniciando a equivalência entre conjuntos chegou aos seus estudos

sobre cardinalidade e bijeção. Ele relacionou o infinito aos números racionais, objeto de estudo deste trabalho, demonstrando sua enumerabilidade, assim como os naturais e os inteiros. Descobriu que existe mais de um tipo de infinito e que eles são uns maiores que outros, no sentido de que existem conjuntos infinitos com cardinalidades (número de elementos) diferentes.

Segundo Araldi, A., A., R. temos a seguinte definição:

Definição: Dois conjuntos  $A$  e  $B$  têm a mesma cardinalidade, se e somente se, existe uma bijeção (uma função  $f: A \rightarrow B$  que é bijetora, ou seja, esta função é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo) entre  $A$  e  $B$ .

E a seguinte definição segundo Fernandes et. al., 2023:

Definição: Um conjunto  $A$  é dito enumerável quando é finito ou se há uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, ou seja, quando existe uma função bijetora  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ .

Para CRILLY, T. (2017), se colocamos um conjunto em relação biunívoca com  $\mathbb{N}$ , o chamamos de ‘contável infinito’ e isso significa que podemos colocá-lo em uma lista.

Para mostrar tal situação, baseado em exemplos segundo CRILLY, T. (2017), dois casos serão apresentados abaixo para reflexão.

Exemplo 1: Pode-se considerar que o conjunto de números pares positivos e o conjunto de números ímpares positivos tem a mesma cardinalidade?

Refletindo a respeito desse caso tem-se a impressão que sim, de que eles possuem a mesma quantidade, analisando a ideia de que nos números inteiros ‘metade’ dos números são pares e ‘metade’ dos números são ímpares.

E de fato, pelas ideias desenvolvidas por Cantor, isso é real, pois possuem a mesma cardinalidade. Pode-se estabelecer uma relação entre eles, associando um número ímpar para cada número par.

Considerando o conjunto dos números ímpares positivos:

$$V = \{2x - 1 / x \in \mathbb{N}\}$$

E o conjunto dos pares positivos:

$$U = \{2x / x \in \mathbb{N}\}$$

Considere  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

Tomando a função  $f: V \rightarrow U$  tal que  $f(x) = x + 1$ , temos:

Para  $x = 1$ ,

$$f(1) = 1 + 1$$

$$f(1) = 2$$

$$1 \rightarrow 2$$

Para  $x = 3$ ,

$$f(3) = 3 + 1$$

$$f(3) = 4$$

$$3 \rightarrow 4$$

Para  $x = n$ ,

$$f(n) = n + 1$$

$$n \rightarrow n + 1$$

Demonstração: Para que uma função seja bijetora, ela deve ser injetora e sobrejetora.

Considerando a função  $f: V \rightarrow U$  tal que  $f(x) = x + 1$ , com  $V = \{2x - 1 / x \in \mathbb{N}\}$  e  $U = \{2x / x \in \mathbb{N}\}$ , sendo  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

(i) Injetora

Uma função  $f: V \rightarrow U$  é dita Injetora se para quaisquer  $a$  e  $b$  naturais e pertencentes ao conjunto  $V$ , se  $f(a) = f(b)$ , logo  $a = b$ . Isto significa que para cada valor do domínio, temos uma imagem diferente, ou seja, não podendo ter mais de um elemento do conjunto  $V$  para o mesmo elemento de  $U$ .

Tomando  $a$  e  $b$  naturais, pertencentes ao domínio, ou seja,  $a, b \in V$  e  $f: V \rightarrow U$  tal que  $f(x) = x + 1$

Se  $f(a) = f(b)$ , considerando  $f(a) = a + 1$  e  $f(b) = b + 1$ , temos que  $a + 1 = b + 1 \Rightarrow a = b$

Logo, é demonstrada a injetividade da função  $f$ .

(ii) Sobrejetora

Uma função  $f: V \rightarrow U$  é dita sobrejetora se para cada elemento  $y$  do contradomínio  $U$  existe um elemento  $x$  do domínio  $V$ , sendo  $f(x) = y$ . Isto significa que não pode sobrar nenhum elemento em  $U$  que não seja imagem de  $V$ .

Como  $f(x) = x + 1$ , sabendo que como  $y \in U$ ,  $y$  é par, para  $f: V \rightarrow U$  ser sobrejetora, precisamos verificar se  $x$  é ímpar, pois  $x \in V$ .

Pegando um elemento  $y$  qualquer do contradomínio, se  $x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1$ . Logo se  $y$  é par,  $y - 1$  é ímpar.

Pegando o primeiro natural par,  $y = 2$  do contradomínio, temos que  $x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$ , que é o primeiro elemento do domínio da função. Logo  $y = 2$  é imagem de  $x = 1$ .

Demonstrando assim a sobrejetividade da função  $f$ .



(iii) Logo, como a função  $f$  é injetora e sobrejetora, pode-se concluir que ela é bijetora.

Como há uma bijeção entre estes dois conjuntos, pode-se dizer que eles possuem a mesma cardinalidade. Pois para cada elemento em  $V$  se tem um, e somente um elemento em  $U$ , para cada elemento de  $U$  se tem um, e somente um elemento de  $V$ .

Exemplo 2: Pode-se considerar que o conjunto de números naturais e o conjunto de números pares positivos também possuem a mesma cardinalidade?

Já analisando este caso, a impressão é contrária. Intuitivamente, pensa-se que o primeiro conjunto tem uma quantidade maior do que o segundo. Porém, matematicamente, temos que para cada número natural tem-se um número par que representa o seu dobro.

Podemos definir tal situação da seguinte forma.

Considerando o conjunto dos números naturais  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = V$

E o conjunto dos pares positivos, como definido no exemplo anterior:

$$U = \{2x / x \in \mathbb{N}\}$$

Tomando a função  $g: V \rightarrow U$  tal que  $g(x) = 2x$ , temos:

Para  $x = 1$ ,

$$g(1) = 2.1$$

$$g(1) = 2$$

$$1 \rightarrow 2$$

Para  $x = 2$ ,

$$g(2) = 2.2$$

$$g(2) = 4$$

$$2 \rightarrow 4$$

Para  $x = n$ ,

$$g(n) = 2.n$$

$$n \rightarrow 2n$$

Demonstração: Como visto anteriormente, para que uma função seja bijetora, ela deve ser injetora e sobrejetora.

Considerando a função  $g: V \rightarrow U$  tal que  $g(x) = 2x$ , com  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = V$  e  $U = \{2x / x \in \mathbb{N}\}$

(i) Injetora

Tomando  $a$  e  $b$  naturais, pertencentes ao domínio, ou seja,  $a, b \in V$  e  $g: V \rightarrow U$  tal que  $g(x) = 2x$

Se  $g(a) = g(b)$ , considerando  $g(a) = 2a$  e  $g(b) = 2b$ , temos que  $2a = 2b \Rightarrow a = b$

Logo, é demonstrada a injetividade da função  $g$ .

(ii) Sobrejetora

Como  $g(x) = 2x$ , sabendo que como  $y \in U$ ,  $y$  é par, para  $g: V \rightarrow U$  ser sobrejetora, precisamos verificar se  $x \in \mathbb{N}$ , pois  $x \in V$ .

Pegando um  $y$  qualquer do contradomínio, se  $2x = y \Rightarrow x = \frac{y}{2}$ . Logo se  $y$  é par,  $\frac{y}{2} \in \mathbb{N}$ .

Pegando o primeiro natural par,  $y = 2$  do contradomínio, temos que  $2x = 2 \Rightarrow x = 1$ , que é o primeiro elemento do domínio da função. Logo  $y = 2$  é imagem de  $x = 1$ .

Demonstrando assim a sobrejetividade da função  $g$ .

(iii) Logo, como a função  $g$  é injetora e sobrejetora, pode-se concluir que ela é bijetora.

Sendo assim, esses dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade, demonstrando que o conjunto dos números pares positivos é enumerável.

Logo, o conjunto dos números ímpares positivos também é enumerável, pois se mostra analogamente que ele possui a mesma cardinalidade de  $\mathbb{N}$ , além de ter a mesma cardinalidade que o conjunto dos pares positivos, como mostrado no exemplo 1.

Após refletir sobre estes casos, pode-se analisar também o caso dos números racionais, conceito que mais adiante será tratado neste trabalho. Intuitivamente, tem-se a impressão que ele é bem maior do que o conjunto dos números naturais. Porém, como Cantor mostrou<sup>2</sup>, ele possui a mesma cardinalidade dos naturais, sendo assim também um conjunto enumerável.

Cantor começou suas publicações em 1870, desenvolvendo importantes estudos sobre o infinito, ganhando grande aceitação de suas ideias quando sua teoria se tornou mais evidente para estudos sobre a teoria das funções reais e estudos sobre topologia.

Do paraíso que Cantor criou para nós, ninguém nos expulsará. (David Hilbert, citado por BELLOS, A., 2011, página 434)

---

<sup>2</sup> Pode-se observar esta demonstração mostrada por Cantor em MENDES, M., T.; OLIVEIRA, R., C.; BURIASCO, R., L., C., de: O conceito de conjunto finito e infinito por meio de tarefas: uma proposta à luz da educação matemática realística.

Cantor nos deu todos os números que quisermos, mas já não existem tantas coisas assim para contar. (BELLOS, A., 2011, página 436)

Suas teorias são de grande contribuição para os estudos que temos hoje. Porém, o infinito é um conteúdo que muito tem a ser desenvolvido. É um assunto que causa grande curiosidade, mas que muitas vezes desencoraja por sua complexidade.

## **2.2. Alguns interessantes exemplos do infinito**

Nesta seção, serão trazidos dois exemplos interessantes que nos fazem refletir a respeito do infinito. Foram escolhidos estes exemplos por se tratarem de dois casos diferentes do infinito: o infinito em um intervalo ilimitado e o infinito em um intervalo limitado.

O primeiro, o paradoxo do Hotel de Hilbert, criado por David Hilbert (1862-1943), em 1925, para o estudo de conjuntos infinitos. Podemos comparar este exemplo com um dos casos de infinito que será tratado no capítulo 3, que é o infinito em um intervalo não limitado.

E o segundo exemplo, o paradoxo de Aquiles, um dos paradoxos de Zenão, dentre outros como o paradoxo da dicotomia e o paradoxo do arqueiro, por exemplo. Este paradoxo pode ser comparado com outro caso que também será apresentado no capítulo 3, que é o caso do infinito em um intervalo limitado.

### **2.2.1. Hotel de Hilbert**

Abaixo temos a descrição da teoria do Hotel de Hilbert.

Um hotel com um número infinito de quartos se encontra lotado. Porém, chega um hóspede para se alocar e pergunta à recepcionista se há vaga. Ela então responde que dará um jeito de hospedá-lo e pede para que todos os hóspedes passem para o quarto seguinte. O que estava no quarto 1, que vá para o quarto 2, o que estava no quarto 2, que vá para o quarto 3 e assim por diante, até que o hóspede que se encontre no quarto  $n$  vá para o quarto  $n + 1$ .

No dia seguinte, chegam hóspedes querendo vagas no hotel, porém agora, chegou um ônibus com um número infinito de assentos, todos ocupados. E a recepcionista diz que há um jeito de aloca-los neste hotel. Ela então pede para que todos os hóspedes passem do quarto que estão para o quarto que possui o número que é o dobro do que estavam antes, esvaziando assim todos os quartos que possuem número ímpar e alocando todos os passageiros do ônibus.

No terceiro dia, chegam mais hóspedes atrás de quartos livres. Dessa vez, um número infinito de ônibus, todos com número infinito de assentos, todos ocupados. A recepcionista utiliza a mesma estratégia do dia anterior e, só precisa então contar todos os passageiros para alocá-los nos quartos ímpares. O que ela faz da seguinte forma.

Ela representa cada passageiro pela forma  $\frac{m}{n}$ , onde  $m$  é o número do ônibus e  $n$  é o número do assento. E com a ajuda da tabela mostrada na figura 3 consegue listar todos os passageiros que acabaram de chegar.

O paradoxo<sup>3</sup> do Hotel de Hilbert é considerado um paradoxo por possuir a ideia de que, mesmo lotado, sempre há vaga neste hotel.

Este paradoxo remete ao infinito em um conjunto ilimitado. O infinito que cresce e cresce como podemos ver no conjunto dos naturais, dos inteiros. Além de ser possível observar com ele o fato de um infinito caber dentro de outro.

|          | Assento 1 | Assento 2 | Assento 3 | Assento 4 | Assento 5 | ... |
|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| Ônibus 1 | 1/1       | 1/2       | 1/3       | 1/4       | 1/5       |     |
| Ônibus 2 | 2/1       | 2/2       | 2/3       | 2/4       | 2/5       |     |
| Ônibus 3 | 3/1       | 3/2       | 3/3       | 3/4       | 3/5       |     |
| Ônibus 4 | 4/1       | 4/2       | 4/3       | 4/4       | 4/5       |     |
| Ônibus 5 | 5/1       | 5/2       | 5/3       | 5/4       | 5/5       |     |
| ...      |           |           |           |           |           |     |

Figura 3: Ilustração de 'Alex no País dos Números'<sup>4</sup>

### 2.2.2. Paradoxo de Aquiles

A seguir, temos a história de um dos paradoxos de Zenão de Eleia, o paradoxo de Aquiles.

Considere que Aquiles ande mais rápido do que a tartaruga, que ela anda numa velocidade duas vezes menor que Aquiles e que o ponto B em que ela se encontra está a uma distância de um metro do ponto A que Aquiles está, como pode-se observar na figura 4.

<sup>3</sup>Paradoxo ou oximoro é uma figura de linguagem caracterizada pela expressão de uma ideia contrastante e contraditória. Contudo, se o enunciado apresenta apenas contraste, ele se configura em uma antítese, portanto, para ocorrer o paradoxo, obrigatoriamente, é preciso haver uma contradição' (Mundo Educação).

<sup>4</sup> Na figura 3, em ônibus 1 e assento 4, considere  $\frac{1}{4}$ .

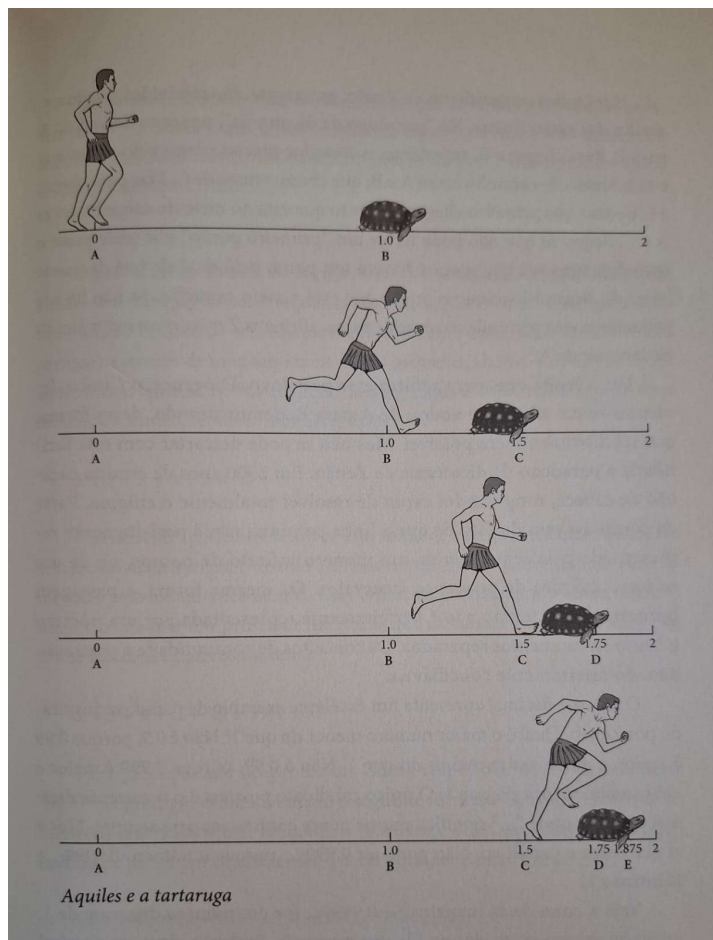


Figura 4: Ilustração de 'Alex no País dos Números'

Aquiles e a tartaruga se movem em linha reta em uma mesma direção. Apesar de Aquiles ser mais veloz que a tartaruga, ele nunca a alcançaria. Pois quando alcançasse o ponto de partida da tartaruga, ela já teria andado mais um pouco. Quando alcançasse o segundo ponto de partida da tartaruga, ela teria andado mais ainda. E assim por diante.

Levando em conta que Aquiles está a um metro da tartaruga, quando ele alcança o ponto em que a tartaruga se encontrava inicialmente, ela já andou meio metro para seu segundo ponto. Quando Aquiles alcança esse segundo ponto, a tartaruga já andou um quarto de metro, e assim por diante.

Logo, a distância de Aquiles antes de alcançar a tartaruga é descrita pela seguinte soma, que como será visto, converge.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Ou considerando que Aquiles leve um segundo para percorrer 1 metro, meio segundo para percorrer meio metro, um quarto de segundo para percorrer um quarto de metro, e assim sucessivamente, a seguinte soma também

representa o tempo que ele leva em segundos para conseguir alcançar a tartaruga. A qual já foi observada que converge para um valor finito e fixo.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

É possível resolver este paradoxo através de uma compreensão mais profunda da matemática, da teoria de sequência e série, que os gregos não possuíam na época, além de ser possível também completar, em um número finito de tempo, um número infinito de pequenas corridas.

A soma mostrada acima é a soma de uma P.G. (progressão geométrica) infinita, com primeiro termo  $a_1 = 1$  e razão  $q = \frac{1}{2}$ .

Esta soma pode ser calculada através da seguinte fórmula, pois esta sequência converge e  $q$  atende a condição da fórmula da P.G. infinita, que diz que  $-1 < q < 1$ .

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Efetuando este cálculo, podemos observar que esta sequência converge para 2.

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Sendo demonstrado, então, que Aquiles poderia sim de fato alcançar a tartaruga.

Este paradoxo faz lembrar o infinito dentro de um intervalo limitado. Pois, dentro do intervalo que compreende o ponto de partida e o ponto em que se encontra a tartaruga sempre existe uma metade do percurso que se falta percorrer.

### **3. O Ensino do Infinito**

Neste capítulo serão apresentadas algumas dificuldades encontradas por professores e alunos no ensino do infinito, baseadas na bibliografia utilizada neste trabalho. Além de relacionar alguns conteúdos que tratam do conceito de infinito no ensino fundamental.

Serão refletidas também as maneiras que o infinito aparece no ensino, dentro de um intervalo limitado e em um intervalo ilimitado. E, serão apresentadas diferentes maneiras de aplicar atividades que facilitam o processo de aprendizagem do aluno.

#### **3.1. Dificuldades no estudo do Infinito**

Nesta seção, será refletido um pouco sobre o estudo do infinito e quais dificuldades são mais encontradas nesse processo. Além de ser analisado o quão importante tal conceito é para o estudo da Matemática e o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento abstrato.

O estudo do infinito traz grandes dificuldades aos alunos, devido a esse ser um assunto de grande abstração e por não possuir ligação direta com o real, o dia a dia, o concreto. Apesar do conceito de infinito estar relacionado a quase todas as áreas da Matemática, a falta de correlação do seu conceito com uma ideia de forma prática, faz do seu aprendizado algo tão difícil. A ideia de que se contando  $1, 2, 3, \dots$ , e nunca parando chega-se ao infinito, pode continuar não esclarecendo o conceito do que ele é, induzindo que seja pensado, por exemplo, que continuando, chega-se ao número infinito. Essa ideia de que o infinito é um número limita estudos desenvolvidos em anos e anos de pesquisas.

Além disso, o estudo do infinito também pode causar uma confusão na distinção do mesmo com números em grandes quantidades. Uma das explicações para isso é a familiaridade com números pequenos. Raramente se lida, na prática, com grupos de milhares de coisas no nosso dia a dia, apesar de existirem diversos exemplos que podem ser visualizados em quantidades muito grandes. Quando se depara com estes exemplos, tem-se a impressão de serem quantidades que não tem fim, que são infinitas.

Segundo Paulo Freire, o conhecimento é algo pessoal, e o papel do professor é estimular tal construção, baseada na experiência e bagagem de cada indivíduo. Mas como aplicar tal metodologia, por exemplo, no ensino do infinito, que é algo que não perpassa essa experiência, que está tão distante do cotidiano? Segundo PIMENTEL et.al. (2010), devido a distanciação da experiência de cada pessoa, por não haver algo infinito no mundo físico, quando se trata desse

conceito, diferentes pessoas podem possuir diferentes ideias e percepções, indo do concreto para o abstrato.

A ideia de infinito tem sido muitas vezes evitada da Matemática da escola básica, talvez porque ela não caiba em procedimentos rotineiros. Mas é justamente aí que está a sua potencialidade: ela pode produzir um ensino de Matemática menos comprometido com a oposição entre o erro e o acerto e mais orientado para a produção de ideias novas e para a criatividade. (Giraldo, 2019, citado por Fernandes et. al., 2023, página 3)

Apesar de ser um assunto que causa grande aversão e dificuldade, o ensino do infinito é algo de grande relevância, pois sem ele, a Matemática não seria o que é nos dias de hoje. Sua aparente complexidade pode tornar seu estudo fascinante, trazendo um olhar mais desafiador e crítico ao estudante. Para alcançar esse objetivo e minimizar tal dificuldade, precisa-se dar uma melhor atenção e didática ao ensinar conteúdos relacionados a este assunto, tais como: infinitos pontos que existem numa reta; infinidade de retas que passam por um ponto; que entre dois números inteiros existem infinitos números, etc.

Para suscitar no aluno esse olhar mais crítico e desenvolver um pensamento mais abstrato, existem muitas habilidades na Base Nacional Curricular (BNCC), que tem como objetivo que o aluno desenvolva problemas e situações e não somente os resolva, a fim de que esse desenvolvimento ajude em diversos assuntos da Matemática, pois ela não se trata só do concreto, como contagem e grandezas, mas também do estudo abstrato, que pode não se referir a coisas do mundo físico, sendo esse estudo fundamental na construção de representações significativas. Na BNCC consta que se espera que o aluno no Ensino Fundamental obtenha o letramento Matemático, desenvolvendo habilidades como raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemática, além de assegurar que o aluno compreenda a relação da Matemática com o mundo e sua importância no desenvolvimento do raciocínio lógico e senso crítico. Espera-se que o aluno nesse segmento obtenha a capacidade de abstrair os conceitos, aplicando algumas relações em outros contextos.

### **3.2. Onde aparece o infinito no ensino**

Como podemos ver na BNCC, temos alguns conteúdos que precisam e se referem ao conceito de infinito no segundo segmento do ensino fundamental, os quais são citados abaixo.

6º ano do ensino fundamental:



- Múltiplos

### MATEMÁTICA – 6º ANO

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                                                                                                |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Números            | Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal |
|                    | Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais<br>Divisão euclidiana                                         |
|                    | Fluxograma para determinar a paridade de um número natural                                                                                             |
|                    | Múltiplos e divisores de um número natural<br>Números primos e compostos                                                                               |

Figura 5: imagem da BNCC

Justificativa: Por existirem infinitos múltiplos de cada número.

- Reta numérica

| HABILIDADES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.                                                                                                                                                                                                                                |
| (EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal. |
| (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.                                                                                                                                    |

Figura 6: imagem da BNCC

Justificativa: Pela reta numérica ser infinita para ambos os lados.

- Plano cartesiano

### MATEMÁTICA – 6º ANO (Continuação)

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                                                                                 |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Álgebra            | Propriedades da igualdade                                                                                                               |
|                    | Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo |
| Geometria          | Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados                                                              |
|                    | Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)                                          |
|                    | Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados    |

Figura 7: imagem da BNCC

Justificativa: Pelo plano cartesiano ser infinito em todos os sentidos.

- Retas

### MATEMÁTICA - 6º ANO (Continuação)

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                                                                                 |  |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Álgebra            | Propriedades da igualdade                                                                                                               |  |
|                    | Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo |  |
| Geometria          | Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados                                                              |  |
|                    | Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)                                          |  |
|                    | Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados    |  |
|                    | Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas                                        |  |
|                    | Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e <i>softwares</i>                                    |  |

Figura 8: imagem da BNCC

Justificativa: Pelas retas serem infinitas.

7º ano do ensino fundamental:

- Múltiplos

### MATEMÁTICA - 7º ANO

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                       |  |
|--------------------|---------------------------------------------------------------|--|
| Números            | Múltiplos e divisores de um número natural                    |  |
|                    | Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples |  |

Figura 9: imagem da BNCC

Justificativa: Por existirem infinitos múltiplos de cada número.

- Números inteiros

### MATEMÁTICA – 7º ANO

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                                         |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Números            | Múltiplos e divisores de um número natural                                                      |
|                    | Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples                                   |
|                    | Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações |
|                    | Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador      |

Figura 10: imagem da BNCC

Justificativa: Pelo conjunto dos números inteiros ter infinitos elementos.

- Reta numérica

### MATEMÁTICA – 7º ANO

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                                         |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Números            | Múltiplos e divisores de um número natural                                                      |
|                    | Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples                                   |
|                    | Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações |
|                    | Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador      |

Figura 11: imagem da BNCC

Justificativa: Pela reta numérica ser infinita para ambos os lados.

- Plano cartesiano

### MATEMÁTICA – 7º ANO (Continuação)

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                                                                                                                   |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Geometria          | Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem |
|                    | Simetrias de translação, rotação e reflexão                                                                                                                               |
|                    | A circunferência como lugar geométrico                                                                                                                                    |

Figura 12: imagem da BNCC

Justificativa: Pelo plano cartesiano ser infinito em todos os sentidos.

- Retas

### MATEMÁTICA – 7º ANO (Continuação)

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                                                                                                                   |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Geometria          | Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem |
|                    | Simetrias de translação, rotação e reflexão                                                                                                                               |
|                    | A circunferência como lugar geométrico                                                                                                                                    |
|                    | Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal                                                                                  |
|                    | Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos                                                                                    |

Figura 13: imagem da BNCC

Justificativa: Pelas retas serem infinitas.

8º ano do ensino fundamental:

- Dízimas periódicas

### MATEMÁTICA – 8º ANO

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                 |
|--------------------|-----------------------------------------|
| Números            | Notação científica                      |
|                    | Potenciação e radiciação                |
|                    | O princípio multiplicativo da contagem  |
|                    | Porcentagens                            |
|                    | Dízimas periódicas: fração geratriz     |
| Álgebra            | Valor numérico de expressões algébricas |

Figura 14: imagem da BNCC

Justificativa: pela infinidade de casas decimais.

- Retas

|            |                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (EF08MA03) | Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.                                                                                                                          |
| (EF08MA04) | Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.                                                                                                                        |
| (EF08MA05) | Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.                                                                                                                              |
| (EF08MA06) | Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.                                                                                           |
| (EF08MA07) | Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.                                                                                                                                         |
| (EF08MA08) | Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. |

Figura 15: imagem da BNCC

Justificativa: Pelas retas serem infinitas.

- Plano cartesiano

|            |                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (EF08MA03) | Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.                                                                                                                          |
| (EF08MA04) | Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.                                                                                                                        |
| (EF08MA05) | Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.                                                                                                                              |
| (EF08MA06) | Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.                                                                                           |
| (EF08MA07) | Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.                                                                                                                                         |
| (EF08MA08) | Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso. |

Figura 16: imagem da BNCC

Justificativa: Pelo plano cartesiano ser infinito em todos os sentidos.

### 9º ano do ensino fundamental:

- Números irracionais

### MATEMÁTICA – 9º ANO

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                      |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Números            | Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta           |
|                    | Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica |
|                    | Potências com expoentes negativos e fracionários                             |
|                    | Números reais: notação científica e problemas                                |
|                    | Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos       |

Figura 17: imagem da BNCC



Justificativa: pela infinidade de casas decimais.

- Reta numérica

## MATEMÁTICA – 9º ANO

| UNIDADES TEMÁTICAS | OBJETOS DE CONHECIMENTO                                                      |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Números            | Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta           |
|                    | Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica |
|                    | Potências com expoentes negativos e fracionários                             |
|                    | Números reais: notação científica e problemas                                |
|                    | Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos       |

Figura 18: imagem da BNCC

Justificativa: Pela reta numérica ser infinita para ambos os lados.

- Plano cartesiano

| HABILIDADES                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). |
| (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.                                                                                                 |
| (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.                                                                                                                                                                                  |
| (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.                                                                                                                                                   |
| (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.                         |
| (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.                         |
| (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.                                                                                                                                        |

Figura 19: imagem da BNCC

Justificativa: Pelo plano cartesiano ser infinito em todos os sentidos.

- Gráfico de funções

| HABILIDADES                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). |
| (EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.                                                                                                 |
| (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.                                                                                                                                                                                  |
| (EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.                                                                                                                                                   |
| (EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.                         |
| (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.                         |
| (EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.                                                                                                                                        |

Figura 20: imagem da BNCC

Justificativa: No uso do plano cartesiano na elaboração do rascunho de um gráfico.

- Retas

|           |                                                                                                           |  |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|           | Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis                                                      |  |
|           | Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações                                       |  |
| Geometria | Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal |  |
|           | Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo                                            |  |

Figura 21: imagem da BNCC

Justificativa: Pelas retas serem infinitas.

### 3.3. Casos do Infinito

Ao ensinar conteúdos que contém o infinito, nos deparamos com dois casos diferentes, que podem dificultar ainda mais o processo de aprendizagem do abstrato aos alunos.

O primeiro caso trata do infinito em um conjunto ilimitado, algo que sempre cresce ou decresce, como no ensino dos conjuntos. Pode-se tomar como exemplo deste caso o paradoxo do Hotel de Hilbert, que foi citado e explicado anteriormente. Em sua história é possível perceber o infinito como algo que sempre está crescendo, que não tem fim. Quando se tem a impressão que não cabem mais hóspedes no hotel, mais e mais hóspedes chegam e são hospedados.

Já o segundo caso se refere ao infinito dentro de um conjunto limitado, como um intervalo dos números inteiros ou dos números racionais por exemplo, como é tratado na reta numérica. Este caso pode ser exemplificado com o paradoxo de Aquiles. Apesar de a tartaruga continuar andando, a distância entre ela e Aquiles vai sendo repartida cada vez mais e mais. Primeiro, a tartaruga anda metade do caminho, depois um quarto, depois um oitavo, e assim por diante. Sempre sendo possível andar mais uma metade.

A diferenciação e explanação de ambos os casos pode causar ainda mais confusão no ensino do conceito de infinito, tornando o assunto ainda mais complexo e dificultoso. Como algo que aumenta em extensão a todo tempo também pode caber dentro de um intervalo limitado?

### **3.4. Como materiais manipulativos e jogos ajudam no ensino do Infinito**

Com as dificuldades encontradas no ensino da Matemática, especialmente no caso do infinito, torna-se necessário muitas vezes fazer um trabalho diferenciado para um melhor entendimento dos alunos. Tal diversificação faz com que os alunos, através de suas ações, possam ter uma maior participação e socialização, além de perceberem e absorverem determinados conteúdos, construindo assim uma aprendizagem e não somente recebendo algo pronto.

Lemes et. al. (2024) fala dessa importância e em como atividades diferenciadas, como materiais manipulativos e jogos ajudam na construção do conhecimento e entendimento do aluno, inclusive na abstração, através de sua interação, de uma maneira mais concreta, experimentando e descobrindo.

Entende-se por materiais manipulativos, recursos físicos que podem ser manuseados, não excluindo recursos virtuais. Eles são classificados, principalmente, por sua intencionalidade de ensino. Sendo assim, uma moeda ou uma régua, por exemplo, podem ser consideradas como materiais manipulativos. Através de atividades como estas dinâmicas, o conhecimento é construído pelo aluno e não somente transferido pelo professor a ele.

Tais atividades colaboram para elaboração de problemas e soluções, desenvolvendo um raciocínio lógico e crítico ao aluno, não favorecem apenas a interação e motivação dos alunos, mas os ajudam a relacionar tais atividades à Matemática, desenvolvendo neles um raciocínio matemático, além de reconhecer que esses materiais trazem a eles ideias de abstração. Contribuindo, assim, na diminuição da dificuldade do entendimento de alguns conceitos matemáticos.



Pode-se concluir então, como a utilização de tais materiais é importante para participação do aluno como principal no processo de aprendizagem, além de ser importante também no ensino da matemática, favorecendo o entendimento de alguns conteúdos de abstração e desenvolvimento lógico matemático.

É importante, porém, saber que tal prática não garante a aprendizagem de conceitos matemáticos, mas em conjunto com outros aspectos, como a participação do professor e a interação do aluno. Sendo necessário um cuidado com o nível de conteúdos e escolaridade dos alunos.

Já com relação aos jogos, são analisados dois aspectos. O primeiro, que todo jogo é de certa forma educativo, pois desenvolve física, cognitiva e afetivamente o aluno. Já o segundo aspecto define jogos educativos como objetos que desenvolvem algumas habilidades educacionais, colaborando com a comum aprendizagem. Sendo importante e necessário um cuidado na aplicação do jogo.

A utilização de jogos é considerada facilitadora de uma aprendizagem significativa, além de despertar no aluno um maior interesse pela disciplina. Eles têm grande importância na fixação de conteúdos e minimização de algumas dificuldades que os alunos encontram.

Já no aspecto socioemocional colabora com a iniciativa, tomada de decisão, autonomia, sendo primordial em sua personalidade e autoestima com relação à aprendizagem matemática, além de possibilitar o trabalho em equipe, tendo uma contribuição para habilidades interpessoais.

Pode-se concluir que os jogos ajudam no desenvolvimento sociemocional dos alunos, individualmente ou coletivamente, além de colaborar com a construção e compreensão de alguns conteúdos matemáticos.

Assim como os materiais manipulativos, os jogos não são por si só garantia da aprendizagem do aluno. É necessário o planejamento e observação do professor à atividade.

Tanto os materiais manipulativos quanto os jogos contribuem para diversificar a dinâmica de ensino, além de colocarem o aluno no centro do processo. Nessas dinâmicas são ações praticadas pelos alunos e não somente a exposição dos professores que produzem o conhecimento. Ambos são considerados objetos que facilitam a aprendizagem de conteúdos matemáticos, colaborando para desenvolver o raciocínio e a abstração. Apesar de nos jogos a percepção de conteúdos nem sempre ser tão evidente, os dois são considerados como 'fontes de sentido e significado para aprendizagem matemática' como define Lemes et. al., 2024.

A utilização desses recursos permite que o aluno dê sentido a alguns conteúdos matemáticos, diminuindo assim a impressão negativa que existe acerca da Matemática, com uma visão que a mesma é uma memorização de fórmulas e repetição de algoritmos.

#### **4. Produto Educacional**

Este trabalho tem como objetivo a aplicação de um jogo proposto para desenvolvimento e melhor entendimento do conceito de infinito usando como ferramentas conceitos de números racionais.

O objetivo é que este jogo faça com que o aluno tenha uma melhor interação e autonomia na sua aprendizagem e que ela seja mais significativa para ele, podendo desenvolver um melhor raciocínio lógico e abstrato.

A proposta deste trabalho é que sejam 4 aulas que seguem da seguinte maneira:

Aula 1 e aula 2 – aulas introdutórias de conteúdos importantes para aplicação da atividade.

Aula 3 – parte 1 da atividade

Aula 4 – parte 2 da atividade

As aulas introdutórias são apresentadas como planos de aula a serem desenvolvidos com os alunos antes da aplicação da atividade.

A atividade é dividida em duas partes, que tratam do infinito em um intervalo limitado. A primeira parte, uma atividade sobre intervalos dos números racionais. A segunda parte, uma continuação da primeira, com utilização de tecnologia. Ambas partes da atividade são voltadas para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, onde se fala sobre a existência de infinitos números racionais entre dois números, caso que foi exemplificado com o paradoxo de Aquiles. Sendo possível também a aplicação destas atividades em séries seguintes, com o objetivo de revisão.

As duas partes da atividade têm como propósito que o aluno consiga, além de fixar tais conceitos, chegar a uma aprendizagem do que é o infinito e a um raciocínio mais abstrato, de uma maneira mais dinâmica e concreta.

Propõe-se que ambas as partes sejam feitas após a apresentação dos conteúdos de números racionais, como um complemento a estas aulas, não impedindo que sejam feitas antes de tal exposição, com o propósito de instigar a curiosidade do aluno sobre os conceitos desenvolvidos, por exemplo. Para realizá-las é necessário que o aluno conheça apenas alguns conceitos, como reta numérica e que tenha conhecimento acerca da existência dos números decimais.

A seguir será apresentada uma proposta de aula a ser ministrada antes da elaboração da atividade.

#### 4.1. Proposta de aula

Antes de desenvolver a atividade, sugere-se expor aos alunos os conceitos sobre números racionais com duas aulas introdutórias, contextualizando o conteúdo que se pretende desenvolver para que o aluno chegue à aprendizagem do que é o infinito e de que ele está presente em diversos momentos no ensino da Matemática. Como por exemplo, ao se tratar da reta numérica, temos várias referências ao infinito, como a infinidade dos elementos dos conjuntos, além da infinidade de números que existem entre dois números inteiros, dentre outros conceitos. Logo, para dar uma coerência à aula e ao ensino, é sugerido que estas aulas se desenvolvam como apresentado a seguir em planos de aula, seguidas de mais duas aulas contendo a atividade proposta por este trabalho, sendo a primeira da parte 1 da atividade e a segunda da parte 2 da atividade.

##### 4.1.1. Aula 1: Conceitos e Números decimais

Objetivo da aula: Os conteúdos apresentados nesta seção são relevantes para que o aluno saiba com que conceito está lidando e possa participar da atividade proposta de uma maneira mais proveitosa.

Público: 8º ano.

Tempo de aula: um tempo de 50 minutos.

Conteúdos: conceitos de números racionais; números decimais e dízima periódica.

Recursos: quadro e caneta de quadro.

Avaliação: através de lista de exercícios.

##### Conceitos

Definição: Número racional é todo número que pode ser escrito na forma  $\frac{a}{b}$ , com  $a$  e  $b$  inteiros e  $b \neq 0$ .

A seguir os racionais serão divididos em três grupos: racionais inteiros, racionais na forma decimal finita e racionais na forma decimal infinita periódica.

Racionais que são inteiros:

$$\frac{6}{2} = 3; \frac{21}{3} = 7; \frac{40}{2} = +20; \frac{900}{3} = +300$$

$$-\frac{5}{5} = -1; -\frac{10}{2} = -5; -\frac{14}{2} = -7; -\frac{2000}{2} = -1000$$

Racionais que não são inteiros podem ser representados de duas formas:

- Forma decimal finita:

$$-\frac{14}{10} = -1,4; -\frac{38}{10} = -3,8; -\frac{781}{100} = -7,81$$

- Forma decimal infinita periódica:

$$\frac{13}{9} = 1,444 \dots; \frac{5}{9} = 0,555 \dots; \frac{119}{90} = 1,3222 \dots; \frac{31}{99} = 0,313131 \dots;$$

O conhecimento a respeito da quantidade de casas decimais, ou se elas são finitas ou infinitas, ajuda o aluno a observar por exemplo que ele pode aumentar a quantidade de casas decimais em um número para que ele ‘caiba’ dentro do intervalo proposto.

### Decimais com finitas e infinitas casas decimais

Sabe-se que toda fração que obtém um número decimal com finitas casas decimais pode ser escrita com seu denominador sendo uma potência de 10 (10, 100, 1000, ...).

As frações, que não podem ser representadas dessa forma, tem sua representação decimal com infinitas casas decimais.

### Dízima periódica

Uma fração é considerada dízima periódica quando é efetuada a divisão do numerador pelo denominador e em algum momento temos um resto que se repete, descartando o resto zero por ser um decimal infinito.

Podemos representar uma dízima periódica das seguintes formas:

$$0,3444\dots \text{ ou } 0,3\overline{4}$$

O período, que são os algarismos que se repetem, geralmente são repetidos três vezes, seguidos por reticências ou aparece com um traço acima dele.

Pode-se demonstrar que a dízima é um número racional multiplicando-a por dois números e subtraindo um resultado do outro, como no exemplo abaixo:

Exemplo: Considerando o número 2,333... como  $x$ , temos que  $x = 2,333\dots$

Multiplicando esta igualdade por 10 temos:  $10x = 23,333\dots$

Multiplicando por 100 temos:  $100x = 233,333\dots$

Subtraindo as duas equações temos:  $90x = 210$

Logo, temos que  $x = \frac{210}{90}$ , mostrando que 2,333... é um número racional.

Tal passo a passo pode ser feito com qualquer dízima periódica e pode ser utilizado para transformar uma dízima periódica em sua fração geratriz.

Chamamos de dízima periódica simples quando na parte decimal só existe o período da dízima, que é o algarismo (ou algarismos) que se repete. Já quando a parte decimal contém outro algarismo além do período, a mesma é chamada de dízima composta.

#### **4.1.2. Aula 2: Reta numérica e ordenação**

Objetivo da aula: Tais conteúdos são de grande importância para que o aluno saiba manipular os números para atividade proposta. Além de entender a ordem dos números, qual número vem antes ou depois na reta numérica e, saber posicioná-lo para participação na atividade.

Público: 8º ano.

Tempo de aula: um tempo de 50 minutos.

Conteúdos: reta numérica; ordenação dos números racionais.

Recursos: quadro e caneta de quadro.

Avaliação: através de lista de exercícios.

##### Reta Numérica

Historicamente, podemos pensar nos números reais positivos como medidas de comprimento de segmentos de reta. E com isso, identificá-los como pontos de uma reta que chamamos de reta real.

Pode-se associar então, um ponto dessa reta ao número real zero (0) e pegando um ponto a sua direita, ao segmento de reta que representa esta distância, definiremos uma unidade de medida  $u$  (segmento unitário).

O ponto que é associado ao 0 chamamos de ponto de origem da reta real.

Colocando este segmento  $u$  sobre a reta real, sendo um de seus extremos no zero, no outro extremo determinamos o número real 1 como ponto.

Esta semirreta com extremo em zero e que contém o número 1 é chamada de semirreta positiva. Logo, todo número real positivo  $y$  que pertence a semirreta positiva, tendo sua origem no zero corresponde a um segmento que mede  $y$  unidades de comprimento.

Continuando, sequencialmente este processo, partindo agora do 1, e assim por diante, obtendo um número natural  $n$  qualquer.

E, considerando números que não pertençam a esta semirreta (à direita do zero), obtemos os números negativos (que estão à esquerda do zero). Convencionamos que a representação dos números reais negativos se obtém acrescentando à esquerda do seu número o sinal ' - '.

Dividindo um desses segmentos unitários (do zero ao um, por exemplo) em  $n$  partes iguais, esses pontos encontrados com esta divisão representam frações com denominador  $n$ . E, então, chamamos estes pontos de números racionais. Fazendo isto para cada inteiro, teremos todos os números racionais representados na reta numérica.

### Ordenação dos números racionais

Definição: Tendo dois números reais  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  é menor que  $B$  (notação  $A < B$ ), se  $B - A > 0$ .

$B$  é maior que  $A$  quando identificamos que o ponto  $B$  está à direita do ponto  $A$  na reta real.

Dizemos então que um número racional  $A$  é menor que  $B$ , se temos como positivo  $B - A$ . E temos que, se  $A$  é menor que  $B$ , temos entre esses números, pontos que são maiores que  $A$  e menores que  $B$ , denominando quaisquer destes pontos como segmento ou intervalo, representado da forma  $[A, B]$ .

Outro fato de grande relevância nos racionais é que eles são densos na reta numérica. Ou seja, dentro de quaisquer intervalos, existem outros números racionais.

Baseado nesses conceitos podemos comparar os números racionais da seguinte maneira, com alguns exemplos.

$$2,5 < 3,4 \text{ pois } 3,4 - 2,5 = 0,9 > 0$$

$$4,39 < 4,7 \text{ pois } 4,7 - 4,39 = 0,31 > 0$$

$$-1,4 < -1 \text{ pois } -1 - (-1,4) = 0,4 > 0$$

$$3,74 = 3,740$$

$$-10,5 > -11,2 \text{ pois } -10,5 - (-11,2) = 0,7 > 0$$

$$14,7 < 15 \text{ pois } 15 - 14,7 = 0,3 > 0$$

Para facilitar o processo, podemos por exemplo igualar a quantidade de casas decimais da seguinte forma.

$$2,5 < 3,4$$

$$3,740 = 3,740$$

$$4,39 < 4,70$$

$$-10,5 > -11,2$$

$$-1,4 < -1,0$$

$$14,7 < 15,0$$

## **4.2. Aula 3: Desafio dos Intervalos**

A primeira atividade é um jogo que aborda o caso do infinito em um intervalo limitado. Nela, os alunos são divididos em dupla, onde um deles desafia o outro a encontrar um intervalo cada vez 'menor' de números, do que o outro aluno encontrou. Um intervalo que esteja contido no intervalo que seu adversário apresentou.

Apesar de serem apresentados aos alunos a regra e o objetivo descritos abaixo, o objetivo principal do jogo é que o aluno perceba que este processo não terá fim, que tem infinitos números dentro de um intervalo limitado, não havendo vencedores neste jogo. Logo, que o aluno perceba que entre dois números racionais existe uma infinidade de números, ou, que basta aumentar a quantidade de casas decimais para obter um intervalo que 'cabe' no outro. Assim, de uma maneira mais simples e concreta, espera-se que o aluno tenha a ideia do que é o infinito e comece a ter uma visão matemática mais abstrata.

É sugerido ao professor terminar o jogo quando a primeira dupla perceber o objetivo principal, sendo possível também que o professor estipule um tempo para que mais duplas possam perceber tal processo. Se, por acaso, nenhuma das duplas tiver tal percepção, o professor encerra o jogo no tempo estipulado e explica o objetivo principal do jogo e o conceito que se pretendia que os alunos percebessem com a atividade.

### **4.2.1. Passo a passo para o professor:**

#### Material necessário:

- caneta ou lápis
- folha

Tempo gasto: uma aula de 50 minutos

1º Passo: Após apresentar os conteúdos referentes à atividade proposta, o professor divide a turma em duplas.

2º Passo: Cada dupla pega uma folha de papel e uma caneta. Fica a critério do professor se os alunos usarão uma folha em branco ou se ele entregará uma folha como o modelo proposto na figura 22.



# Desafio dos Intervalos

Jogador 1:

Jogador 2:

Jogador 1: 

Jogador 2: 

Jogador 1: 

Jogador 2: 

Jogador 1: 

Jogador 2: 

Jogador 1: 

Jogador 2: 

Jogador 1: 

Jogador 2: 

Jogador 1: 

Jogador 2: 

Pontuação:

Jogador 1: 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Jogador 2: 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Figura 22: Modelo para parte 1 da atividade

3º Passo: O professor explica as regras do Jogo e pede que cada dupla defina qual jogador irá começar.

4º Passo: O professor dá início ao desafio.

Fica a critério do professor se ele definirá o primeiro intervalo ou, se cada dupla o fará.

Regras do Jogo: O primeiro jogador cria um intervalo entre dois números quaisquer e o representa no topo do papel. O segundo jogador tem o desafio de, abaixo do intervalo que seu colega escreveu, representar outro intervalo que 'caiba' no intervalo representado por seu colega. E assim, sucessivamente, conforme mostrado na figura 23.

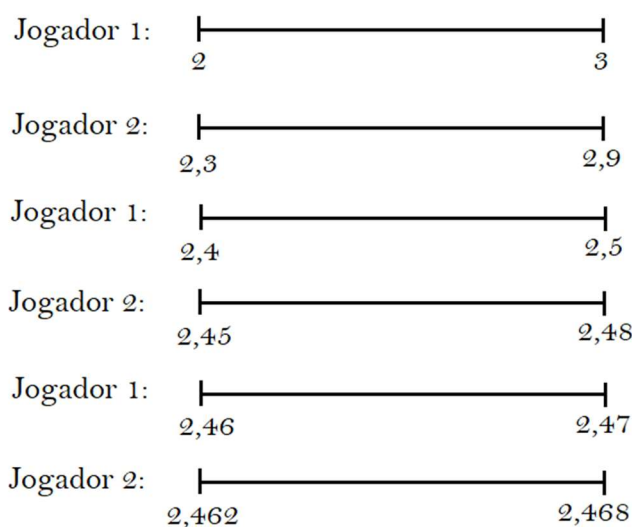


Figura 23: Demonstração da parte 1 da atividade

Objetivo: Para o jogador o objetivo é que encontre dois números que façam com que seu adversário não encontre mais nenhum intervalo que esteja entre esses números, vencendo o jogo quem encontrar um intervalo que faça com que seu adversário não consiga encontrar nenhum outro.

#### 4.3. Relato da parte 1

A parte 1 da atividade pôde ser aplicada com alguns alunos. Tal aplicação foi feita em duas turmas, uma do 8º do ensino fundamental e outra do 9º ano do ensino fundamental, sendo possível observar o engajamento e comprometimento dos alunos com a proposta apresentada.

Além de ser exposto o conceito e obter uma aprendizagem mais concreta do que é abstrato, surgiram dúvidas que puderam ser sanadas no momento da

atividade de acordo com os questionamentos e observações feitos pelos alunos.

Tais como:

- ‘É pra fazer até acabar?’;
- Apareceram números com duas vírgulas;
- Ordem dos números decimais, quem é maior, quem é menor;
- Aumento das casas decimais;
- ‘Nunca acaba!’, ‘É infinito!’

Em algum momento da atividade, em ambos os anos que participaram, alguns alunos observaram e perceberam que nunca acabam os intervalos, que ‘não para nunca’, que não tem fim. Em um deles, inclusive, foi percebido por um aluno que bastava aumentar a quantidade de casas decimais para encontrar um intervalo que coubesse dentro do anterior.

Sendo assim, foi possível perceber que tal atividade foi importante tanto para fixação do conteúdo, como para interação e autonomia dos alunos, além de criar um senso crítico e observador nos alunos, que através da prática com atividades mais concretas puderam desenvolver uma aprendizagem abstrata.

#### **4.4. Aula 4: Tecnologia**

Em um outro momento (outra aula), quando o professor for fazer a conclusão da atividade, se a escola possuir ferramentas como tablets ou um laboratório de informática, por exemplo, ele pode fazer com os alunos a parte 2 da atividade, que é uma continuidade da parte 1. Mostrando aos alunos, com o auxílio de algum aplicativo ou programa Matemático, o infinito na reta numérica, de uma maneira simples, utilizando a ferramenta de zoom no plano cartesiano.

##### **4.4.1. Passo a passo para o professor:**

###### **Material utilizado:**

- tablets ou computadores
- internet

###### **Tempo gasto:** uma aula de 50 minutos

**1º Passo:** Ao chegar ao laboratório ou entregar as ferramentas aos alunos, o professor os separa nas mesmas duplas da atividade anterior. Não tendo problema se as duplas mudarem caso algum aluno falte a esta aula, por exemplo.

**2º Passo:** o professor apresenta o aplicativo ou programa para os alunos.

3º Passo: O professor pede que o aluno manipule a parte do eixo ou da reta no local que se encontra o intervalo que ele sugeriu na outra atividade. E que assim ele faça com os seguintes intervalos, usando a ferramenta de zoom quando não for possível visualizá-lo.

As figuras 24, 25, 26, 27, 28, 29 e 30 mostram, no Geogebra<sup>5</sup>, como o aluno pode representar os intervalos que criou com sua dupla na primeira parte da atividade. É possível perceber como o aluno pode visualizar e ter uma melhor ideia de que um intervalo está dentro do outro, usando a ferramenta de zoom.

Na figura 30 pode-se perceber a dificuldade de visualização do aluno sem utilizar a ferramenta de zoom, para perceber que um intervalo se encontra dentro do outro. Comparando com as outras figuras (24, 25, 26, 27, 28 e 29) pode-se perceber a importância da complementação da atividade com o uso da tecnologia.

Ao final da atividade, espera-se que o aluno tenha entendido que apesar de não serem sempre visíveis, existem infinitos números dentro de um intervalo e, que assim, reforce a aprendizagem que teve na primeira parte da atividade.

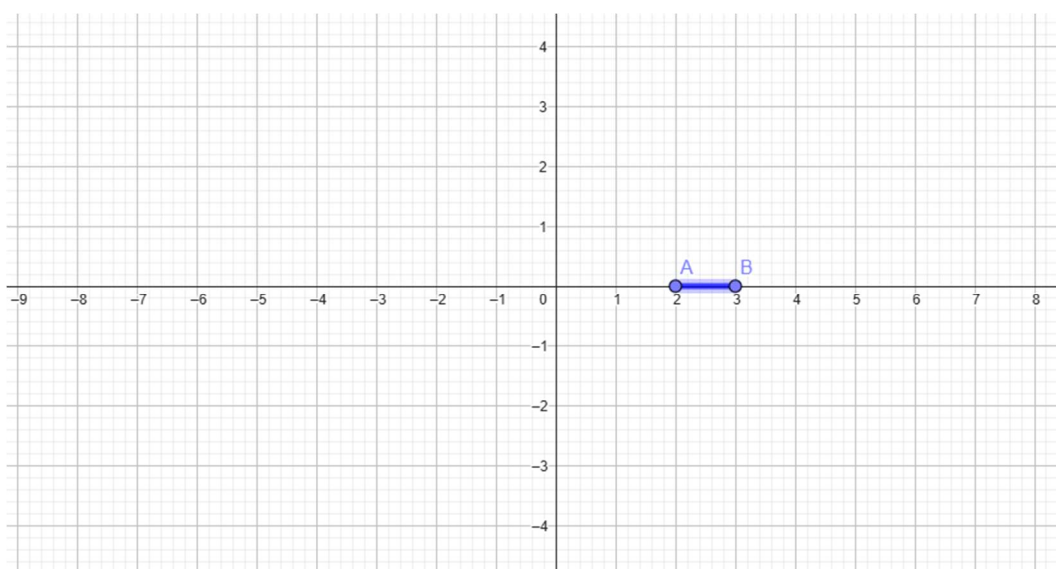


Figura 24: intervalo de 2 a 3

<sup>5</sup> Geogebra: software de Matemática utilizado no Ensino.

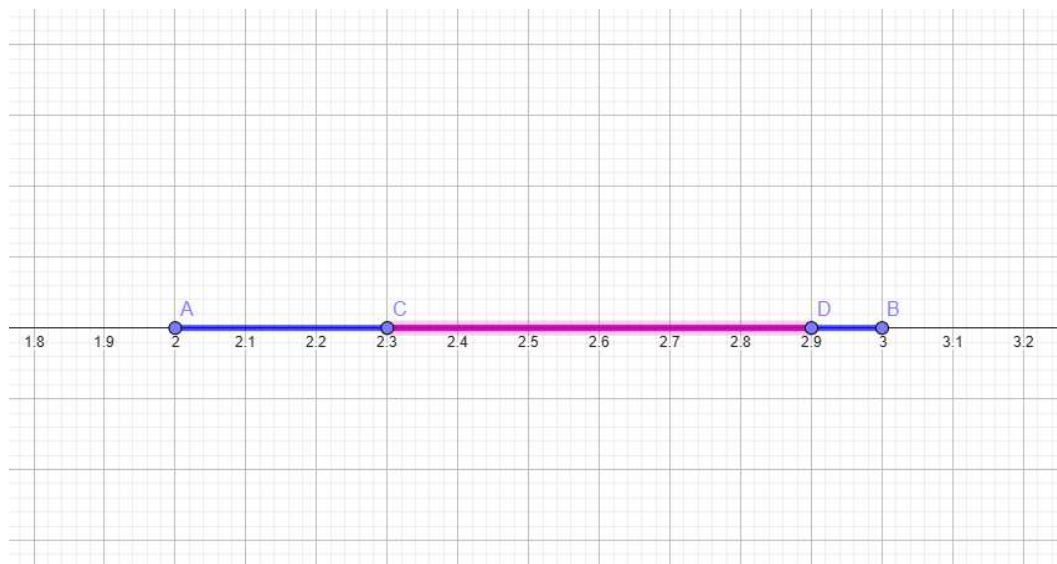


Figura 25: intervalo de 2,3 a 2,9

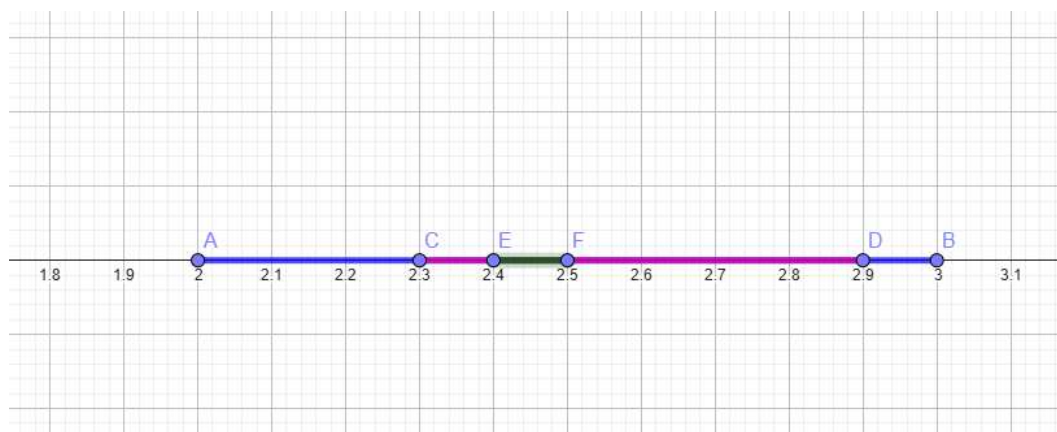


Figura 26: intervalo 2,4 a 2,5

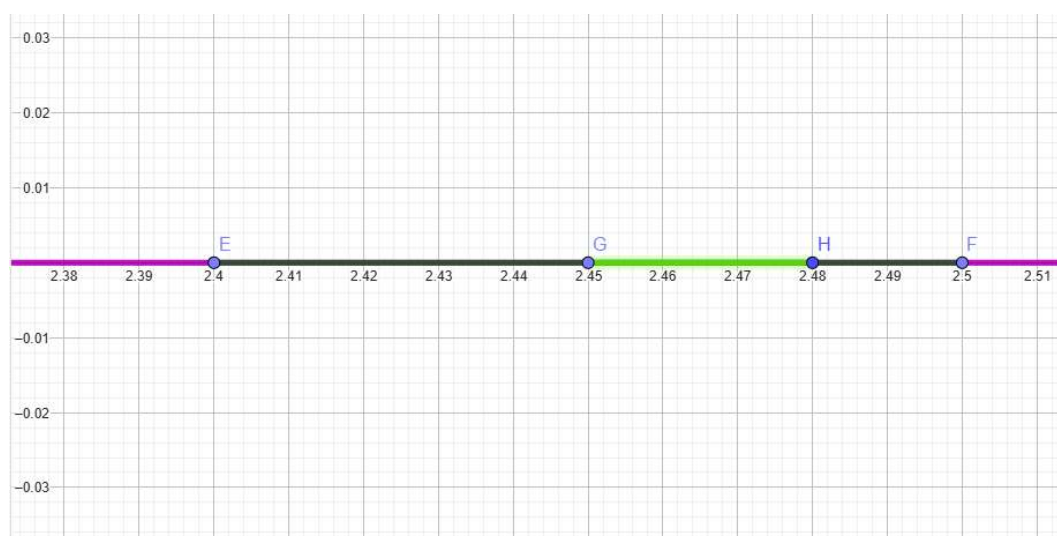


Figura 27: intervalo 2,45 a 2,48



Figura 28: intervalo 2,46 a 2,47

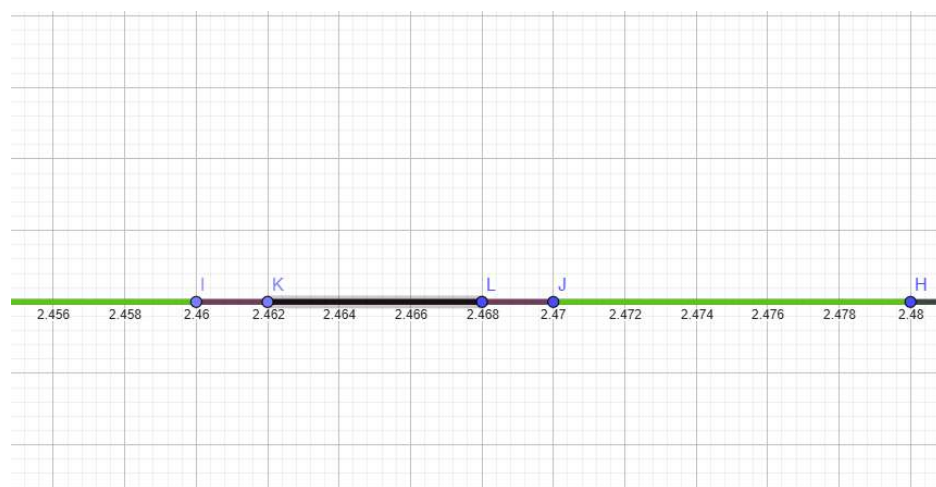


Figura 29: intervalo 2,462 a 2,468

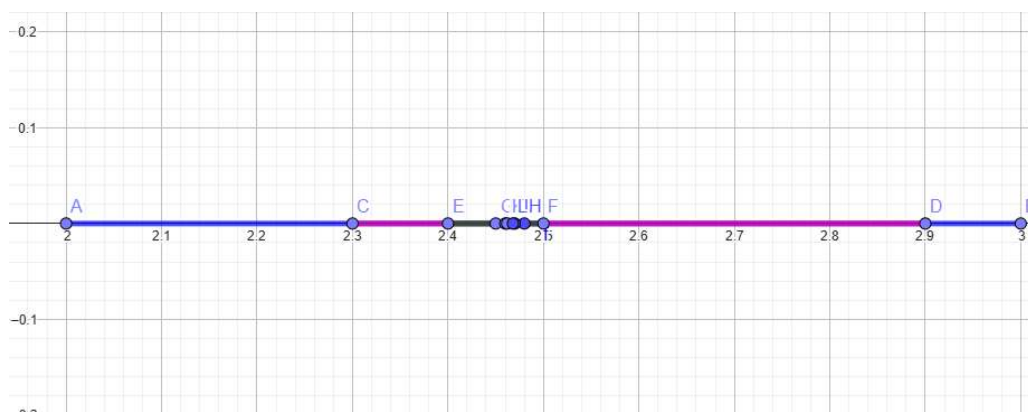


Figura 30: todos os intervalos

“[...] juntando diversas pessoas que interagem, dialogam e refletem em conjunto, criam-se sinergias que possibilitam uma capacidade de reflexão acrescida e um aumento das possibilidades de aprendizagem mútua, permitindo, assim, ir muito mais longe e criando melhores condições para enfrentar, com êxito, as incertezas e obstáculos que surgem”. (BOAVIDA & PONTES, 2002, citado por PIMENTEL et al., 2010, página 3)

## 5. Conclusão

O infinito foi objeto de estudos por anos, sendo considerado que seus conteúdos ainda tenham muito a serem desenvolvidos.

Os estudos desenvolvidos por Cantor contribuíram muito para o que temos hoje. Ele teve grandes avanços nos estudos sobre conjunto, e ao estudar funções, conforme iam aparecendo conjuntos mais complexos, ele foi levado ao desenvolvimento do infinito. Ao iniciar seus estudos sobre equivalência de conjuntos, começou a estudar cardinalidade e bijeção. Descobriu a existência de diferentes tipos de infinito, que possuem ‘quantidades’ de elementos diferentes, cardinalidade diferente.

Para os alunos, o que traz tamanha dificuldade é o grau de abstração que seu estudo propõe. Eles encontram muita dificuldade em não conseguir encontrar no seu dia a dia, por exemplo, algo que possa ser comparado ao infinito.

Apesar de compararem o infinito a coisas observáveis, como os grãos de areia da praia, por exemplo, não é possível notar no concreto algo que seja infinito. Pode-se perceber coisas com quantidades muito grandes, mas não infinitas. Sendo essa outra dificuldade que o infinito traz, diferenciar ele de números muito grandes.

Dando uma melhor atenção ao ensino de alguns conceitos que tratam do infinito, como infinitos pontos em um intervalo, infinitas retas em um ponto, pode-se aproveitar sua complexidade para trazer um olhar crítico e desafiador ao aluno, desenvolvendo melhor seu grau de abstração.

Este senso de abstração é de grande importância para diversos outros conteúdos que o aluno ainda estudará, inclusive conteúdos que precisam do conhecimento do que é o infinito, como o estudo dos múltiplos, do plano cartesiano, da reta numérica, da dízima periódica, dos números irracionais. A BNCC reforça essa importância que a abstração tem, além de ressaltar a importância do desenvolvimento do raciocínio, representação, comunicação e argumentação matemática do aluno. Sendo esperado também que ele relacione a Matemática com o mundo e perceba sua importância no desenvolvimento do raciocínio lógico e senso crítico.

É refletido também a respeito da grande contribuição que o uso de materiais manipulativos e jogos tem para o ensino, pois através de sua interação, o aluno vai desenvolvendo alguns conceitos. Além de trazerem uma contribuição socioemocional, tanto individual quanto coletivamente, colaborando com a

iniciativa, tomada de decisão e autonomia do aluno, melhorando sua compreensão e autoestima com relação ao aprendizado da matemática.

Tanto os materiais manipulativos quanto os jogos colocam o aluno no centro do processo, como principal no processo de aprendizagem, sendo também facilitadores do entendimento de alguns conteúdos de abstração e desenvolvimento lógico matemático.

E após tais reflexões, foram apresentadas duas partes de uma atividade para serem desenvolvidas com os alunos, com o intuito de lhes trazer um senso mais crítico e um raciocínio abstrato. Sua aplicação possibilita que dúvidas sejam observadas e sanadas pelo professor, além de permitir que de forma concreta, interagindo com os colegas e com a atividade, o aluno fixe conceitos matemáticos e chegue a um pensamento abstrato e mais crítico, favorecendo uma aprendizagem que seja significativa.



## 6. Bibliografia

ARALDI, A., A., R.: Revista Ensino e Informação. Análise Matemática – Cardinalidade. <https://www.ensinoeinformacao.com/analise-matematica-cardinalidade> consultada em 30/03/2025.

ÁVILA, G.: Análise Matemática para Licenciatura – 2ª Edição revista e ampliada 2005. Editora Edgard Blücher.

BELLOS, A.: Alex no País dos Números: Uma Viagem ao Mundo Maravilhoso da Matemática. Ilustrações: Andy Riley. Tradução: Berilo Vargas e Claudio Carina. São Paulo: Companhia das letras, 2011.

BNCC: Base Nacional Curricular. Site: [www.gov.br/mec](http://www.gov.br/mec)

Brasil Escola: <https://brasilecola.uol.com.br/filosofia/zenao.htm> consultado em 25/05/2025.

COBIANCHI, A., S.: O Infinito em algumas considerações: Zenão, Kant e Borges. Revista Espacios, Vol. 36 (Nº 22), Ano 2015, Pág. E-1.

COURANT R.; ROBBINS H.: O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

CRILLY, T.: 50 Ideias de Matemática que você precisa conhecer. Editora Planeta, 2017. Traduzido por Helena Londres.

DAVIS, P. J.: The lore of large numbers. New Mathematical Library, Random House, 1961.

Dicionário online de Português: <https://www.dicio.com.br/abstrato/#:~:text=adjetivo%20Que%20n%C3%A3o%20%C3%A9%20concreto,percebida%20pela%20utiliza%C3%A7%C3%A3o%20dos%20sentidos>. consultado em 10/05/2025.

Documentário: Uma Viagem ao Infinito.

FERNANDES, I. V.; AVELINO, E. V. S.; ROCHA, J.I. da: Explorando o infinito: Como introduzir o conceito de infinito com os alunos do ensino fundamental e médio. Anais IX CONEDU, 2023.

GARBI, G., G.: A Rainha das Ciências – Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

GIOVANNI, J., R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR, J. R.: A Conquista da Matemática - 7. Editora FTD, 1998.

GIOVANNI JÚNIOR, J., R.; CASTRUCCI, B.: A Conquista da Matemática – 6º ano. Editora FTD, 2018.

GUNDLACH, B. H.: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Atual editora, 1992. Traduzido por Hygino H. Domingues.

<https://impa.br/noticias/obmep-realiza-o-encontro-do-hotel-de-hilbert/> consultado em 23/02/2025.

<https://www.somatematica.com.br/paradoxos/hotel.php> consultado em 23/02/2025.

<https://www.todamateria.com.br/fracao-geratriz/> consultado em 24/03/2025.

<https://www.mathway.com/pt/popular-problems/Algebra/746422> consultado em 30/03/2025.

<https://mundoeducacao.uol.com.br/gramatica/paradoxo.htm> consultado em 10/05/2025.

<https://ideiasesquecidas.com/2023/05/01/hipaso-o-herege-que-pagou-com-a-vida-pela-descoberta-dos-numeros-irracionais/#:~:text=Hipaso%20foi%20um%20matem%C3%A1tico%20grego%20do%20s%C3%A9culo,tri%C3%A2ngulo%20ret%C3%A2ngulo%20com%20catetos%20de%20medida%201> consultado em 03/06/2025.

<https://edu.gcfglobal.org/pt/conceitos-basicos-da-matematica/breve-historia-dos-numeros-ii/1/> consultado em 06/06/2025.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B.: A Conquista da Matemática – 7º ano. Editora FTD, 2018.

LEMES, J., C.; CRISTOVÃO, E., M.; GRANDO, R., C.: Características e Possibilidades Pedagógicas de Materiais Manipulativos e Jogos no Ensino da Matemática. Artigo: Bolema, Rio Claro (SP), v. 38, e220201, 2024.

MALTA, I.; PESCO, S.; LOPES H.: Cálculo a uma variável: uma introdução ao cálculo, volume 1. Editora PUC Rio.

MARQUES, I., A.; CATANEO, D., M.: Arquimedes: O Contador de Areia. Artigo submetido em 03/10/2022, aceito em 10/02/2023 e publicado em 06/04/2023. Instituto de Física – UFG. Av. Esperança, s/n – Campus Samambaia, Goiânia – GO.

MENDES, M., T.; OLIVEIRA, R., C.; BURIASCO, R., L., C., de: O conceito de conjunto finito e infinito por meio de tarefas: uma proposta à luz da educação matemática realística. Artigo: VIDYA, v. 37, n. 1, p. 239-252, jan./jun., 2017 - Santa Maria, 2017. ISSN 2176-4603.

NIVEN I.: Números: racionais e irracionais. Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984, c1961. Título original: Numbers: rational and irrational.

Profissionais da Educação da Rede Pública Municipal de Ensino do Rio de Janeiro: Material Rioeduca 2025 – 8ºano. Rio Prefeitura Educação.

PIMENTEL, R.; SANTOS A., A., de P.; MOMETTI, A., L.: O Infinito: um estudo sobre as diferentes concepções. Revista Interfaces, SUZANO ANO 2 N° 2 OUT. 2010.

ROMERO, S.: Qual é a Origem do Símbolo Matemático do Infinito? National Geographic Portugal, 2024.

STRUIK, D., J.: História Concisa das Matemáticas. Editora Gradiva.  
WARSI, K. (editor consultor): O Livro da Matemática. Tradução: Maria da Anunciação Rodrigues. 1. Edição. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.