



Carlos Roberto Hollanda Lopes

**Crescimento de instabilidades de
Saffman-Taylor em deslocamentos com três
fluidos confinados numa célula de Hele-Shaw**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Rafael Menezes de Oliveira
Coorientador: Prof. Pedro Henrique Amorim Anjos

Rio de Janeiro
Maio de 2025



Carlos Roberto Hollanda Lopes

**Crescimento de instabilidades de
Saffman-Taylor em deslocamentos com três
fluidos confinados numa célula de Hele-Shaw**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Rafael Menezes de Oliveira

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Pedro Henrique Amorim Anjos

Coorientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Igor Braga de Paula

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Eduardo Olímpio Ribeiro Dias

Departamento de Física - UFPE

Rio de Janeiro, 21 de Maio de 2025

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Carlos Roberto Hollanda Lopes

Graduou-se em Engenharia Mecânica pela Universidade Estácio de Sá em 2019. Atua como Primeiro-Tenente Engenheiro Naval na Marinha do Brasil.

Ficha Catalográfica

Lopes, Carlos Roberto Hollanda

Crescimento de instabilidades de Saffman-Taylor em deslocamentos com três fluidos confinados numa célula de Hele-Shaw / Carlos Roberto Hollanda Lopes; orientador: Rafael Menezes de Oliveira ; coorientador: Pedro Henrique Amorim Anjos. – 2025.

57 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2025.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Célula de Hele-Shaw. 3. Dedos viscosos. 4. Fluxo de três fases. 5. Análise de estabilidade linear. 6. Recuperação avançada de petróleo (EOR). I. Menezes de Oliveira, Rafael. II. Henrique Amorim Anjos, Pedro. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus e aos meus Orixás que me fortaleceram e me mantiveram de pé durante toda esta jornada acadêmica. Expresso também minha profunda gratidão à minha família, pelo amparo constante e pelo apoio emocional nos momentos mais desafiadores.

Sou grato aos meus amigos do laboratório, em especial ao Bruno Jorge, pela valiosa colaboração nos experimentos. Estendo meus agradecimentos à equipe do Grupo de Reologia (GReo) da PUC-Rio, em particular aos professores Paulo Roberto de Souza Mendes e Mônica Feijó Naccache, pelo acesso às instalações experimentais, bem como aos técnicos Alexandre Fernandes e Márcio, pelo apoio técnico e pelas inúmeras adaptações realizadas na célula experimental.

Agradeço ao Departamento de Engenharia Mecânica, especialmente a Carina Beline e a Simone Cordeiro, pelo suporte administrativo ao longo do curso. Aos professores Igor Braga de Paula e Eduardo Olímpio Ribeiro Dias, registro meu agradecimento pela disponibilidade e por integrarem esta banca examinadora.

Dedico um agradecimento especial ao amigo e professor Rafael Menezes de Oliveira, por sua confiança, amizade e incentivo incondicional, fundamentais para a conclusão deste trabalho, e ao amigo e professor Pedro Henrique Amorim Anjos, pela orientação dedicada, prontidão e suporte na redação desta dissertação. Obrigado por não desistirem de mim, sem o apoio de vocês, este trabalho não teria sido possível.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Lopes, Carlos Roberto Hollanda; Menezes de Oliveira, Rafael; Henrique Amorim Anjos, Pedro. **Crescimento de instabilidades de Saffman-Taylor em deslocamentos com três fluidos confinados numa célula de Hele-Shaw**. Rio de Janeiro, 2025. 57p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Investigamos as instabilidades de dedos viscosos que surgem nas duas interfaces formadas pela injeção sequencial de três fluidos newtonianos em uma célula de Hele-Shaw retangular. Para este fim, utilizamos a análise de estabilidade linear e desenvolvemos um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, formuladas para descrever a evolução das perturbações nas interfaces. A partir dessa abordagem, avaliamos o problema de forma perturbativa, com ênfase na análise do efeito de acoplamento entre as duas interfaces, quantificada pela espessura do fluido intermediário, no regime linear do escoamento.

Em paralelo ao estudo teórico, realizamos uma série de testes experimentais para investigar o crescimento das instabilidades de Saffman-Taylor no problema de três fluidos e duas interfaces. A construção do dispositivo experimental é descrita detalhadamente e inclui as adaptações realizadas no aparato ao longo deste estudo. Os resultados indicam que a interação entre as interfaces é governada por um nível de acoplamento entre elas, influenciando tanto o tempo de formação das instabilidades quanto a morfologia dos dedos viscosos. Este efeito foi identificado inicialmente através da análise linear. Em seguida, verificamos experimentalmente que a manipulação da espessura do fluido intermediário permite atrasar o desenvolvimento das instabilidades e que esses efeitos perduram no regime não linear. Isso indica que o volume da fase intermediária pode ser controlado para minimizar as deformações das interfaces e, conseqüentemente, aumentar a eficiência do processo de deslocamento.

Este fenômeno é relevante para o setor industrial, servindo como estratégia para processos de recuperação avançada de petróleo (EOR). Destacamos a aplicabilidade desses métodos em processos de injeção alternada, nos quais fluidos são bombeados sequencialmente em meios porosos para otimizar o processo de extração.

Palavras-chave

Célula de Hele-Shaw; Dedos viscosos; Fluxo de três fases; Análise de estabilidade linear; Recuperação avançada de petróleo (EOR).

Abstract

Lopes, Carlos Roberto Hollanda; Menezes de Oliveira, Rafael (Advisor); Henrique Amorim Anjos, Pedro (Co-Advisor). **Growth of Saffman-Taylor instabilities in displacements between three fluids confined in a Hele-Shaw cell.** Rio de Janeiro, 2025. 57p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We investigate the viscous finger instabilities that arise at two interfaces formed by the sequential injection of three Newtonian fluids into a rectangular Hele-Shaw cell. For this purpose, we use linear stability analysis and develop a set of first-order ordinary differential equations, formulated to describe the evolution of the perturbations at the interfaces. Based on this approach, we evaluate the problem in a perturbative manner, with emphasis on the analysis of the coupling effect between the two interfaces, quantified by the thickness of the intermediate fluid, in the linear flow regime.

In parallel to the theoretical study, we performed a series of experimental tests to investigate the growth of Saffman-Taylor instabilities in the three-fluid, two-interface system. The construction of the experimental device is described in detail, including all the adaptations made to the apparatus throughout this study.

The results indicate that the interaction between the interfaces is governed by the coupling level between them, influencing both the time required for instability development and the morphology of the viscous fingers. This effect was initially identified through linear stability analysis. Then, we experimentally verified that manipulating the intermediate fluid thickness allows for the delay of instabilities' development, and that these effects persist in the nonlinear regime.

Such findings indicate that the volume of the intermediate phase can be controlled to minimize the deformations of the interfaces and, consequently, increase the efficiency of the displacement process. This phenomenon may be relevant to the industrial sector, serving as a strategy for enhanced oil recovery (EOR) processes. We highlight, in particular, the applicability of these methods in alternating injection processes and in chemical methods, in which fluids are pumped sequentially into porous media to optimize the extraction process.

Keywords

Hele-Shaw cell; Viscous fingering; three-phase flow; linear stability analysis; Enhanced oil recovery (EOR).

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Motivação	14
2	Revisão Bibliográfica	18
2.1	Definição do problema	18
2.2	Deslocamento com dois fluidos	18
2.3	Deslocamento com três fluidos	19
3	Metodologia	24
3.1	O Problema Físico	24
3.2	Equações governantes e dinâmica linear das perturbações interfaciais	25
3.3	Discussão	29
4	A Célula de Hele-Shaw	35
4.1	Descrição e Características	35
4.2	Primeira bancada	39
4.2.1	Resultados da primeira bancada	39
4.3	Segunda bancada	44
4.3.1	Resultados da segunda bancada	46
4.4	Terceira bancada	48
4.4.1	Resultados da terceira bancada	51
5	Conclusões e Perspectivas	54
	Referências bibliográficas	56

Lista de figuras

- Figura 1.1 Ilustração comparativa das interfaces (a) estável e (b) instável resultantes da ordem de injeção de dois fluidos na célula de Hele-Shaw. 13
- Figura 1.2 Bombeamento de água no meio poroso para deslocamento de petróleo (<http://www.youtube.com/watch?v=Y4Ipuo1IBdk>). 15
- Figura 2.1 Exemplo experimental de interfaces obtidas durante experimentos de escoamento de dois fluidos realizados no laboratório GReo (Grupo de Reologia). Em (a) temos uma interface estável, em (b), podemos verificar uma interface instável e a presença de dedos viscosos quando o escoamento é inverso, ou seja, óleo deslocando glicerina. 19
- Figura 2.2 Interfaces instável, à esquerda, onde o óleo penetra na glicerina formando dedos viscoso ao deslocá-la e estável, à direita, caracterizada por um perfil retilíneo quando a glicerina desloca o óleo. 20
- Figura 3.1 Configuração esquemática do problema de fluxo de três fluidos em uma célula de Hele-Shaw horizontal e retangular de espessura b . A velocidade de fluxo externo constante é dada por \mathbf{V}_∞ e as viscosidades dos três fluidos envolvidos são denotadas como η_1 , η_2 e η_3 . Entre os fluidos 1 e 2 está a interface esquerda inicialmente plana localizada em $y = 0$ (representada por uma linha tracejada), com sua forma perturbada descrita por $y_l = \zeta(x, t)$, onde $0 \leq x \leq L$. Da mesma forma, entre os fluidos 2 e 3 está a interface direita inicialmente plana localizada em $y = D$ (representada por uma linha tracejada), com sua forma perturbada descrita por $y_r = D + \epsilon(x, t)$. As tensões superficiais da interfaces mais a esquerda e mais a direita são representadas por σ_l e σ_r . 25
- Figura 3.2 Taxas de crescimento linear $\lambda_l(k)$ [ver equação (3-29)] e $\lambda_r(k)$ [ver equação (3-30)] como função do número de onda k para $D \rightarrow \infty$. Além disso, definimo $b = 3 \times 10^{-3}\text{m}$, $V_\infty = 4 \times 10^{-3}\text{m/s}$, $\eta_2 = 7.36 \times 10^{-3}\text{Pa s}$ e $\sigma = 47 \times 10^{-3}\text{N/m}$. 32
- Figura 3.3 Número de onda crítico k_c da interface esquerda como uma função do tempo t para $D = 6 \text{ cm}$, $D = 7 \text{ cm}$, $D = 8 \text{ cm}$, $D = 10 \text{ cm}$, $D = 15 \text{ cm}$ e $D \rightarrow \infty$. Casos associados a valores finitos de D são representados por pontos, enquanto no caso de $D \rightarrow \infty$ é ilustrado por uma linha contínua. Todos os outros parâmetros físicos são idênticos aos utilizados na figura 3.2. Uma aproximação (valores menores de D) entre as interfaces estreita a faixa de modos instáveis para a interface esquerda, que é instável. 34
- Figura 4.1 Desenho renderizado da célula de uma Hele-Shaw retangular. 35

Figura 4.2	Reservatório 1 em acrílico e reservatório 2 em alumínio usado para evitar que o fluido no interior da célula recuasse.	36
Figura 4.3	Desenho renderizado dos reservatório em acrílico. Na figura (a), temos o reservatório 1, na (b) o segundo reservatório e em (c) temos a montagem do conjunto na célula.	37
Figura 4.4	Na imagem (a) temos a visão superior do conjunto e o suporte para fixação; em (b) podemos ver os drenos na parte inferior da peça e em (c) constatamos as válvulas de alívio e de entrada do óleo, glicerina e ar ou água, além da fixação lateral do suporte.	37
Figura 4.5	Primeira bancada usada com bomba à vazão constante.	39
Figura 4.6	Sequência de injeção dos fluidos na célula Hele-Shaw.	41
Figura 4.7	Comparação da camada intermediária pequena e grande na bancada 1 à vazão constante.	41
Figura 4.8	Segunda bancada usada com ar comprimido à pressão constante.	44
Figura 4.9	Instalação da gaxeta, o-ring e batentes nos reservatórios 1 e 3.	45
Figura 4.10	Comparação da camada intermediária pequena e grande na bancada 2 à pressão constante.	46
Figura 4.11	Na imagem (a), observa-se a injeção do fluido intermediário na célula. Já na imagem (b), com a abertura do reservatório 2 para iniciar a substituição da glicerina pelo óleo, uma rachadura presente no reservatório provoca o recuo do fluido no interior do dispositivo, resultando na formação de fingering na interface anteriormente estável, localizada à direita.	47
Figura 4.12	Terceira bancada usada com duas bombas à vazão constante.	48
Figura 4.13	Versão final do reservatório 1 com inclusão da válvula guilhotina.	50
Figura 4.14	Renderização do protótipo completo e uma ilustração esquemática da formação das Instabilidades de Saffman-Taylor. Fica evidente a formação de duas interfaces ao utilizar três fases.	51
Figura 4.15	Comparação da camada intermediária pequena e grande na bancada 3 à vazão constante.	52

Lista de Símbolos e Abreviaturas

A	–	Contraste de viscosidade
σ	–	Tensão superficial
b	–	Espessura da célula de Hele-Shaw
D	–	Distância entre as interfaces
\hat{e}_γ	–	Vetor unitário na direção azimutal
η	–	Viscosidade
κ	–	Número de ondas
λ	–	Taxa de crescimento linear
p	–	Pressão do fluido
r	–	Raio
R	–	Raio da interface
\hat{y}	–	Vetor unitário na direção do comprimento da interface
t	–	Tempo
\vec{v}	–	Velocidade do fluido
ζ	–	Amplitude na interface à esquerda
$\dot{\zeta}$	–	Taxa de deformação da amplitude
ϵ	–	Amplitude na interface à direita
$\dot{\epsilon}$	–	Taxa de deformação da amplitude
∞	–	Infinito
L	–	Largura da célula de Hele-Shaw
∇	–	Operador diferencial
Q	–	Vazão
Σ	–	Somatório

"Se vi mais longe, foi por estar sobre os ombros de gigantes."

"If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants"

Isaac Newton, .

1

Introdução

Ao longo da história da ciência, o estudo dos fluidos tem despertado constante interesse entre os pesquisadores. Na Antiguidade, destaca-se Arquimedes, com a formulação do princípio do empuxo. Durante a Idade Média, Pascal contribuiu significativamente com seus estudos sobre a pressão nos fluidos. No período Renascentista, estudiosos como Newton e Bernoulli avançaram na compreensão da viscosidade e da dinâmica dos fluidos. Já na era Moderna, o foco se desloca para o comportamento dos escoamentos, com importantes contribuições de Reynolds e Prandtl. No século XX, o engenheiro mecânico Henry Hele-Shaw destacou-se por sua contribuição ao estudo do escoamento de fluidos, tendo desenvolvido um dispositivo experimental efetivamente bidimensional, conhecido como célula de Hele-Shaw, destinado à visualização das linhas de corrente da água ao contornar obstáculos. Além disso, foi o inventor do hélice de passo variável. Philip Saffman e Geoffrey Taylor desenvolveram estudos fundamentais e estabeleceram as bases para o fenômeno das instabilidades interfaciais regidas por diferenças na viscosidade entre dois fluidos em um fluxo dentro de uma célula de Hele-Shaw, que constituem o objeto principal de investigação deste trabalho.

No escoamento envolvendo dois fluidos imiscíveis no interior de uma célula de Hele-Shaw, podemos observar a formação de uma fronteira que separa estas duas fases, a qual denominamos de interface. A Figura 1.1 ilustra o deslocamento de dois fluidos em duas configurações distintas. A imagem 1.1(a) representa uma interface estável, caracterizada por sua interface retilínea, na qual o fluido mais viscoso, representado na cor preta, desloca o menos viscoso na cor cinza. Por outro lado, a Figura 1.1(b) demonstra a configuração instável, quando um fluido mais viscoso é deslocado por outro de menor viscosidade, dando origem a padrões complexos. Esse fenômeno provoca deformações na interface, impulsionadas pelo contraste de viscosidade entre os fluidos (grandeza adimensional que será abordada no capítulo 3), evoluindo por meio da amplificação competitiva em modos de Fourier, culminando na formação de estruturas alongadas e pontiagudas conhecidas como dedos viscosos (*viscous fingering*). Esse fenômeno, denominado Instabilidades de Saffman-Taylor [1], é caracterizado pela sensível dependência da morfologia da interface à sequência

de injeção dos fluidos.

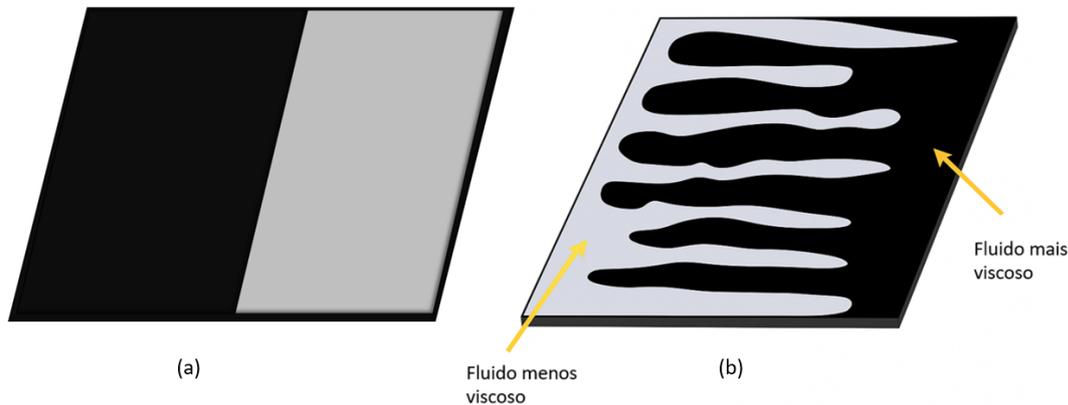


Figura 1.1: Ilustração comparativa das interfaces (a) estável e (b) instável resultantes da ordem de injeção de dois fluidos na célula de Hele-Shaw.

Nesta pesquisa, ao contrário da maioria dos trabalhos realizados até hoje em célula de Hele-Shaw envolvendo o deslocamento de dois fluidos, empregamos o deslocamento com três fluidos, resultando na formação de duas interfaces móveis. Essa temática será melhor discutida no capítulo seguinte.

Investigamos o comportamento do sistema quando essas duas situações, ou seja, uma interface estável e outra instável, são combinadas em um único processo de deslocamento. Nosso interesse foi analisar a dinâmica das duas interfaces. Identificamos que elas estão acopladas já a nível linear e passamos então a realizar experimentos a fim de investigar o surgimento de instabilidades de Saffman-Taylor durante o fluxo retangular de três fluidos newtonianos, imiscíveis e incompressíveis em uma célula de Hele-Shaw. Dessa maneira, vamos verificar o impacto do acoplamento entre as interfaces na geração dos viscous fingering.

Neste estudo, analisamos um escoamento composto por três fluidos confinados na célula de Hele-Shaw, que consiste em duas placas de vidro com um pequeno espaçamento entre elas, por onde ocorre toda a dinâmica abordada. Devido ao fato de o espaçamento entre as placas ser muito menor do que qualquer outra escala de comprimento da célula, o sistema é tratado como bidimensional, sendo governado pela Lei de Darcy e por condições de contorno apropriadas. Essa configuração gera duas interfaces móveis separadas por uma camada intermediária, a qual controla o nível de acoplamento entre as interfaces. Por meio da análise de estabilidade linear, derivamos um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, a partir das quais construímos um modelo teórico para descrever o sistema. Avaliamos o crescimento das amplitudes de perturbação no tempo, observando que a dinâmica das duas interfaces já se encontra acoplada mesmo no regime linear.

Com base nesse modelo, construímos um dispositivo experimental para validar os resultados teóricos. Os testes realizados revelaram que a espessura da camada intermediária, ou seja, o volume desta fase, influencia diretamente a interação entre as interfaces. Essa interação, conhecida como nível de acoplamento, permite controlar tanto o formato quanto a escala de tempo de formação das instabilidades interfaciais.

Os resultados obtidos têm grande relevância em aplicações industriais, especialmente no contexto da recuperação avançada de petróleo (EOR). Nessa técnica, a injeção sequencial de fluidos pode ser otimizada com base no entendimento da dinâmica interfacial, contribuindo para a melhoria da eficiência do processo de extração.

O ponto de partida deste trabalho baseia-se no estudo de Zhao, Anjos e Li (2020) [2], que analisa o deslocamento de três fluidos em uma célula de Hele-Shaw com geometria radial. A partir desse trabalho, propomos uma extensão do problema para uma geometria retangular, considerando o deslocamento sequencial de três fluidos, uma vez que este tópico tem sido relativamente negligenciado pela comunidade científica. Por meio de uma abordagem analítica, complementada por experimentos laboratoriais, demonstramos que as instabilidades são influenciadas pela variação do volume da camada intermediária.

A estrutura desta dissertação está organizada da seguinte maneira: no capítulo 1 é apresentado um breve panorama introdutório com o objetivo de contextualizar o leitor quanto ao tema abordado. No capítulo 2 são discutidos os principais estudos existentes na literatura científica, com destaque para autores que se dedicaram à investigação das instabilidades de Saffman-Taylor. O capítulo 3 aborda as equações governantes do problema, discutindo a formulação teórica, baseada numa análise de estabilidade linear, que fundamenta o desenvolvimento dos experimentos. No capítulo 4, descrevemos detalhadamente os componentes da célula de Hele-Shaw, as diferentes configurações experimentais, os modos de injeção adotados, a evolução do dispositivo ao longo do tempo, considerando as adaptações realizadas frente às adversidades encontradas e os resultados obtidos. Por fim, o capítulo 5 traz uma síntese geral do trabalho, destacando as principais conclusões e contribuições alcançadas.

1.1 Motivação

A configuração de uma interface única entre dois fluidos em deslocamento na célula de Hele-Shaw tem sido amplamente estudada pela comunidade científica. No entanto, vamos além com o estudo que aborda o deslocamento de três fluidos com duas interfaces móveis. Esta pesquisa tem grande relevância

para a indústria, especialmente no setor petrolífero, pois está relacionada a métodos amplamente utilizados na extração de petróleo. Esses métodos envolvem o bombeamento sequencial de fluidos dentro de um meio poroso durante o processo de recuperação avançada de petróleo (EOR).

Gorell e Homsy (1983) [6] destacam a relevância do fenômeno para o setor petrolífero. Após a extração primária do petróleo, que ocorre com base na pressão natural do reservatório, é comum a injeção de água no meio poroso como método secundário de recuperação, devido ao seu menor custo. Todavia, por apresentar menor viscosidade em comparação ao óleo deslocado, a água tende a provocar instabilidades na interface água-óleo, comprometendo a eficiência do processo. Neste contexto, o presente trabalho propõe uma abordagem alternativa, baseada na utilização do bombeamento de três fluidos em sequência, dentro de uma célula de Hele-Shaw, simulando um meio poroso homogêneo. O objetivo é atenuar e/ou atrasar a formação dessas instabilidades e, assim, otimizar o processo de recuperação avançada de petróleo.

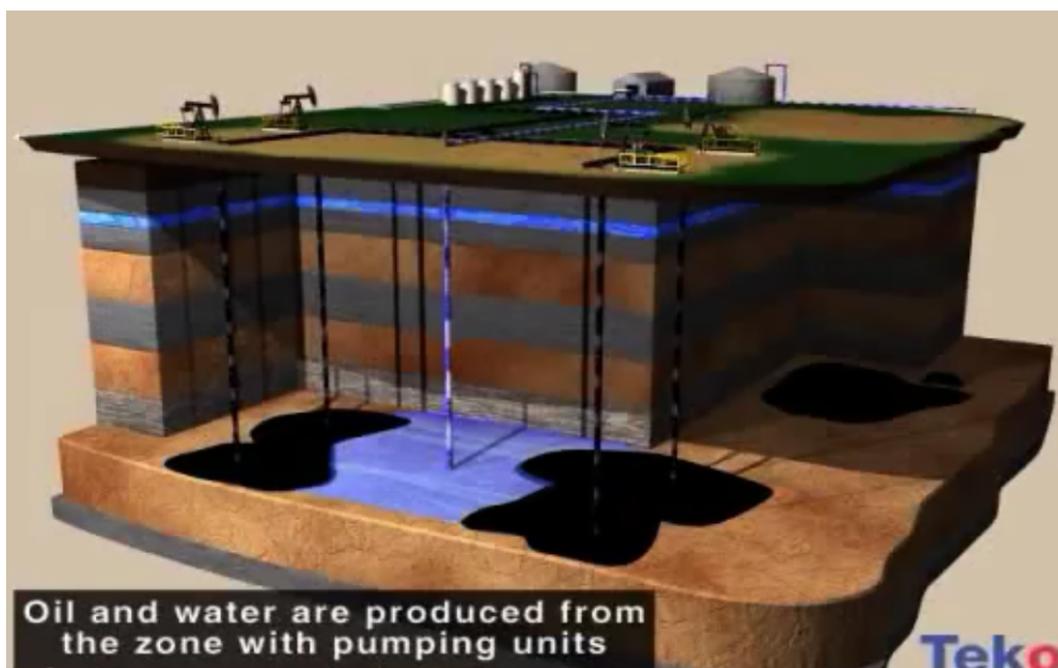


Figura 1.2: Bombeamento de água no meio poroso para deslocamento de petróleo (<http://www.youtube.com/watch?v=Y4Ipuo1IBdk>).

A Figura 1.2 ilustra o processo de injeção de água no meio poroso para promover a extração. Segundo Ragab, A e Eman M. Mansour [4] a recuperação média de petróleo após a fase primária situa-se entre 5% e 20% do volume original presente no reservatório. Esse percentual pode ser elevado para até 40% com a implementação da recuperação secundária. Normalmente, a aplicação de técnicas de recuperação avançada ocorre após essa segunda fase, momento em

que o desafio passa a ser não apenas a reposição da pressão do reservatório, mas, sobretudo, o controle da mobilidade relativa entre os fluidos do reservatório e os fluidos injetados. Há diversas técnicas de EOR disponíveis, incluindo a recuperação térmica, a injeção de gases miscíveis, a injeção de água, de compostos químicos, de dióxido de carbono, de surfactantes e polímeros, de alcalina e a recuperação microbiana.

De acordo com Quintella [5], os fluidos presentes em reservatórios petrolíferos necessitam de energia para vencer a resistência ao escoamento poroso e alcançar os poços produtores. Essa energia, denominada energia primária, decorre da pressão natural acumulada no reservatório e se dissipa progressivamente durante a produção, à medida que os fluidos se descomprimem e enfrentam forças viscosas e capilares no deslocamento. Como consequência, ocorre a redução da pressão do reservatório e da produtividade dos poços. A principal finalidade da injeção de um fluido em um reservatório é promover o deslocamento do petróleo retido nos poros da rocha. Simultaneamente, busca-se preencher o espaço poroso deixado pelos fluidos já produzidos.

Diante do esgotamento dessa energia natural, surgiram técnicas de recuperação de petróleo, geralmente classificadas em três categorias: primária, secundária e avançada. A recuperação primária baseia-se exclusivamente na energia natural do reservatório, permitindo, em média, a extração de cerca de 20% do petróleo originalmente presente, podendo ser ligeiramente superior em casos com presença de gás ou água.

A recuperação secundária visa suplementar essa energia por meio da injeção de fluidos, como água ou gás, a fim de deslocar mecanicamente o óleo remanescente e manter a pressão do reservatório. Dentre esses métodos, a injeção de água é o mais utilizado, embora apresente limitações, como a chegada precoce da água aos poços produtores e a formação de canais de fluxo preferenciais, que comprometem a eficiência do processo, especialmente em óleos pesados. No entanto, as estimativas indicam que esse processo permite a recuperação de apenas 30% a 50% da reserva original.

Essas limitações motivaram o desenvolvimento de métodos de recuperação avançada (EOR), que combinam a injeção de diferentes fluidos com propriedades específicas para mobilizar o óleo residual. Normalmente, injeta-se um fluido de alto desempenho (e alto custo) seguido por um fluido mais barato que atua como empuxo. Os métodos avançados podem ser classificados como térmicos, miscíveis ou químicos. Apesar de promissores, esses métodos envolvem elevados custos operacionais, exigindo estudos integrados — geológicos, laboratoriais e numéricos — para avaliar sua viabilidade técnica e econômica.

Neste contexto, o presente trabalho contribui com a literatura ao de-

monstrar, tanto experimental quanto analiticamente, que é possível controlar o desenvolvimento de instabilidades interfaciais explorando o contraste de viscosidade entre os fluidos e o acoplamento gerado por uma camada intermediária. Esses achados representam um avanço no entendimento e na otimização de métodos de recuperação avançada de petróleo.

2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo, será realizado um aprofundamento do tema previamente abordado, a partir da perspectiva de diversos autores relevantes na mecânica dos fluidos. Serão apresentadas imagens ilustrativas dos experimentos conduzidos, com o objetivo de identificar e analisar as diferentes configurações de injeção de fluidos na célula de Hele-Shaw.

2.1

Definição do problema

O desenvolvimento de instabilidades em células de Hele-Shaw constitui um dos problemas clássicos da mecânica dos fluidos, servindo como modelo representativo para o estudo da dinâmica de interfaces móveis em meios confinados. A célula de Hele-Shaw convencional é formada por duas placas de vidro paralelas, separadas por um pequeno espaçamento b , significativamente menor que suas dimensões longitudinais. Essa geometria permite que o dispositivo funcione como uma analogia simplificada de um meio poroso homogêneo, sendo o escoamento entre as placas descrito por leis fundamentais, como a Lei de Darcy, a equação de Young-Laplace e a condição de contorno cinemática — tópicos que serão discutidos em detalhes no capítulo seguinte.

2.2

Deslocamento com dois fluidos

O deslocamento de dois fluidos é ilustrado esquematicamente na Figura 1.1 com duas configurações diferentes. Já a Figura 2.1(a) apresenta os resultados de dois ensaios experimentais, nos quais a glicerina, representada pela cor marrom, foi utilizada como fluido mais viscoso, e o óleo de soja, de cor branca, como fluido menos viscoso. Nesse formato, observamos a formação de uma interface estável no fluxo entre glicerina e óleo de soja. Por sua vez, a Figura 2.1(b) ilustra a formação de dedos viscosos, que surgem como resultado das instabilidades geradas quando o óleo de soja desloca a glicerina.



Figura 2.1: Exemplo experimental de interfaces obtidas durante experimentos de escoamento de dois fluidos realizados no laboratório GReo (Grupo de Reologia). Em (a) temos uma interface estável, em (b), podemos verificar uma interface instável e a presença de dedos viscosos quando o escoamento é inverso, ou seja, óleo deslocando glicerina.

Nos capítulos seguintes, serão detalhadas tanto a abordagem analítica quanto a metodologia experimental adotada neste trabalho.

2.3 Deslocamento com três fluidos

O caso clássico e mais amplamente estudado na literatura corresponde ao escoamento envolvendo dois fluidos e uma única interface, exatamente como exemplificado pela figura 2.1. No entanto, esta pesquisa se dedica a investigar uma configuração menos explorada em Hele-Shaw: o escoamento envolvendo três fluidos e duas interfaces móveis. Nessa disposição, nosso trabalho se concentra na configuração em que os fluidos são injetados na seguinte ordem: menos viscoso, mais viscoso e menos viscoso, resultando em uma interface instável à esquerda e uma interface estável à direita, como mostrado na figura 2.2. Tanto a análise teórica quanto os resultados experimentais indicam que, nessa configuração, ocorre um acoplamento entre as duas interfaces, o que confere à dinâmica do escoamento características distintas em relação ao caso clássico do deslocamento de dois fluidos.

A investigação principal deste estudo é compreender como uma interface pode impactar a outra, em função do volume da camada intermediária. A

teoria sugere que, quando as interfaces estão próximas — ou seja, com um volume pequeno entre elas — ocorre uma correlação expressiva, tornando as interfaces acopladas. Como resultado, o desenvolvimento dos dedos viscosos é retardado. Detalhes sobre essa dinâmica serão discutidos no capítulo 3. Em contrapartida, quando as interfaces estão mais distantes, a interação entre elas diminui, fazendo com que os dedos viscosos se formem mais rapidamente e em maior quantidade. Os testes experimentais que corroboram essas previsões serão apresentados e analisados no capítulo 4.

A Figura 2.2 refere-se a um ensaio experimental conduzido com três fluidos, no laboratório GReo (Grupo de Reologia), injetados sequencialmente em uma célula de Hele-Shaw caracterizada por uma camada intermediária de pequeno volume. Nesta etapa, o foco recai exclusivamente sobre a observação das interfaces formadas, sem entrar nos resultados quantitativos do teste, os quais serão aprofundados no Capítulo 4.

Essa configuração, com camada intermediária pequena, promove um forte acoplamento entre as interfaces, resultando na formação de dedos viscosos grandes e com pouca ramificação. A seta azul na imagem indica a interface estável, originada do deslocamento de um fluido mais viscoso sobre um menos viscoso, apresentando uma morfologia próxima de uma linha reta. Em contraste, as setas amarelas evidenciam a interface instável, na qual o fluido de menor viscosidade penetra o mais viscoso, dando origem aos dedos viscosos característicos das instabilidades de Saffman-Taylor.

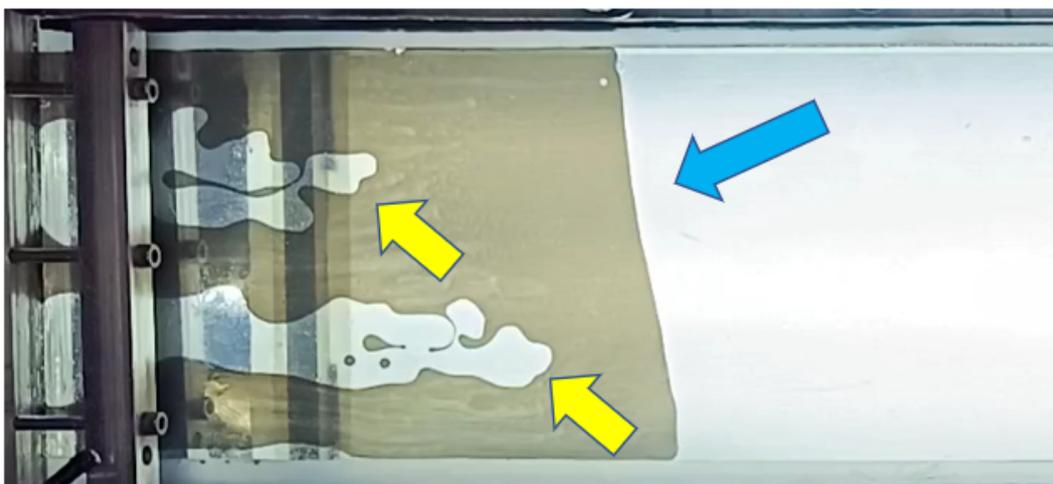


Figura 2.2: Interfaces instável, à esquerda, onde o óleo penetra na glicerina formando dedos viscosos ao deslocá-la e estável, à direita, caracterizada por um perfil retilíneo quando a glicerina desloca o óleo.

Embora o deslocamento de três fluidos e múltiplas interfaces seja menos numeroso em célula de Hele-Shaw na literatura, alguns pesquisadores se

dedicaram a essa configuração específica. Esse tema foi pesquisado por Cardoso e Woods (1995) [6], que realizaram uma análise teórica e experimental de um fluxo radial com três camadas e duas interfaces. Naquele estudo, foi investigado o comportamento da interface intermediária, conhecida como anel intermediário, e observaram que a interface instável eventualmente se fragmentava em gotas devido à diferença de viscosidade entre os fluidos. A tensão superficial e o afinamento da camada intermediária foram identificados como mecanismos de estabilização do fluxo radial.

Quando a interface externa apresenta instabilidade, o anel intermediário também se torna instável. A teoria de estabilidade linear prevê que números de onda elevados se manifestam em raios maiores. Caso as instabilidades cresçam a ponto de os efeitos não lineares se tornarem relevantes, o anel se fragmenta em gotas, cujo número corresponde ao modo linear dominante no momento da ruptura. Os experimentos confirmaram que o sistema de espalhamento radial é estabilizado pela tensão superficial em raios pequenos e pelo afinamento progressivo do anel em raios maiores.

Podemos destacar Jackson (2021) [7], que realizou simulações numéricas do tipo *level-set* e análise de estabilidade linear em fluxos viscosos em uma célula de Hele-Shaw. O autor emprega métodos analíticos e numéricos para investigar a dinâmica desses fluxos, com foco na influência de fatores como gradientes de viscosidade, taxas de fluxo e geometria da célula. O trabalho inclui a derivação de modelos matemáticos, análise de estabilidade linear e simulações para prever padrões interfaciais, contribuindo para a compreensão fundamental e a modelagem de fluxos complexos.

Zhao, Anjos e Li (2020) [2] abordam a formação de padrões interfaciais no contexto do problema de Saffman–Taylor com três camadas de fluidos imiscíveis confinados em uma célula de Hele-Shaw radial. Tradicionalmente, esse problema tem sido investigado considerando apenas duas camadas de fluidos com diferentes viscosidades. No entanto, a introdução de uma terceira camada intermediária acrescenta complexidade significativa ao sistema, ao criar duas interfaces móveis sujeitas a instabilidades distintas e interativas. A motivação para essa abordagem está relacionada a aplicações práticas, como a injeção de polímeros em processos de recuperação de petróleo e o transporte de fluidos em meios porosos heterogêneos.

O modelo proposto pelos autores se baseia na formulação clássica das equações de Darcy para escoamentos em meios porosos, sendo a evolução das interfaces tratada como uma perturbação em torno de soluções circulares simétricas. Por meio da análise fracamente não-linear e simulações numéricas não-lineares, os autores investigam como os contrastes de viscosidade entre as

camadas, as tensões superficiais e a posição inicial da camada intermediária influenciam o desenvolvimento das instabilidades.

Os resultados obtidos revelam que a presença da camada intermediária pode tanto suprimir quanto amplificar as instabilidades, dependendo dos parâmetros do sistema. Em determinados regimes, observa-se o surgimento de instabilidades acopladas entre as interfaces, resultando em padrões interfaciais complexos e altamente ramificados. A análise também mostra a existência de regimes de estabilidade aumentada, nos quais a camada intermediária atua como um mecanismo de controle, retardando o crescimento de dedos viscosos.

Gin e Daripa (2015) [8] investigam a estabilidade linear de perturbações interfaciais em fluxos radiais com um número finito de N fluidos, em célula de Hele-Shaw. O modelo proposto considera uma configuração composta por camadas concêntricas de fluidos imiscíveis, cada uma com viscosidade distinta, onde o fluido mais interno é injetado continuamente a partir do centro da geometria radial. Para a formulação matemática, cada camada é descrita por sua viscosidade, enquanto as interfaces entre os fluidos apresentam tensões superficiais distintas. A equação de Darcy é empregada para modelar o escoamento e a análise de estabilidade linear é realizada por meio da introdução de pequenas perturbações nas interfaces inicialmente circulares. A abordagem matemática consiste na linearização das equações de movimento em torno da solução base, correspondente a interfaces circulares em expansão radial, o que conduz a um sistema linear acoplado de equações diferenciais ordinárias que descreve a evolução temporal das amplitudes das perturbações interfaciais.

A análise conduzida pelos autores revela que a estabilidade do sistema pode ser significativamente influenciada pela presença de múltiplas camadas. A inclusão de camadas adicionais, com viscosidades intermediárias distribuídas de forma adequada, atua de maneira estabilizadora, ao suavizar os gradientes de viscosidade entre os fluidos adjacentes, reduzindo, assim, o desenvolvimento de instabilidades. Além disso, a tensão superficial entre as camadas exerce papel estabilizador importante, especialmente no amortecimento de perturbações associadas a modos de número de onda elevado. O estudo também apresenta expressões analíticas que delimitam o crescimento exponencial das perturbações em função do número de camadas, das viscosidades relativas, das tensões superficiais e do número de onda. Os resultados obtidos generalizam os critérios clássicos de estabilidade de Saffman e Taylor, recuperando-os como casos particulares no limite de duas camadas, e demonstram como tais critérios se estendem a configurações com múltiplas interfaces.

Podemos citar outras aplicações deste tema no meio acadêmico, como a utilização de ferrofluido por Carlos, F, E [9], fluidos não newtonianos

por Varges, P, R [10] e Ward e White (2011)[11] que focaram em métodos experimentais. No capítulo seguinte, serão abordadas a metodologia usada, a formulação do problema físico e as equações que governam a dinâmica do escoamento.

3

Metodologia

3.1

O Problema Físico

No capítulo anterior, foi apresentada uma revisão bibliográfica sobre o escoamento em células de Hele-Shaw, incluindo o caso clássico envolvendo dois fluidos imiscíveis e uma única interface, tanto em representações esquemáticas quanto em figuras experimentais. Além disso, foi introduzida a configuração com três fluidos, destacando sua complexidade adicional.

Neste capítulo, aprofundamos a análise do problema principal, que envolve três fluidos e duas interfaces móveis. Inicialmente, será desenvolvida uma abordagem teórica com base na análise de estabilidade linear, com o objetivo de descrever, de forma analítica, as instabilidades das interfaces e os mecanismos de interação que governam sua evolução. Essa fundamentação será essencial para a posterior análise experimental.

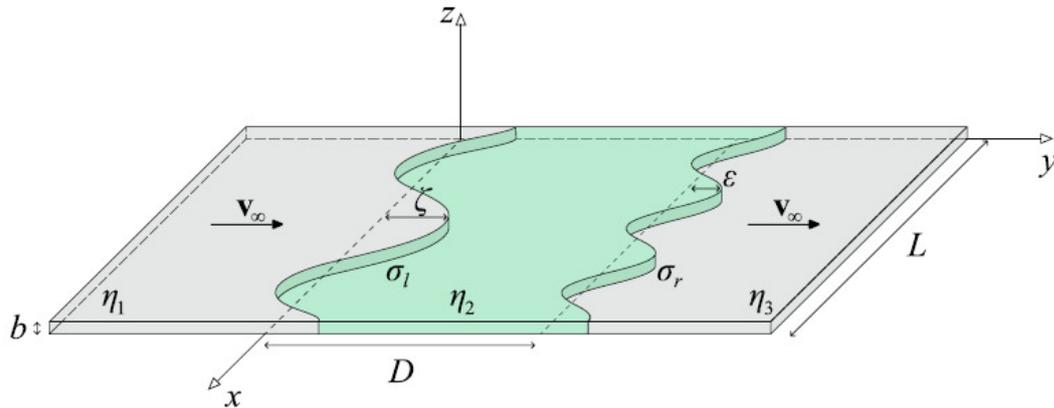


Figura 3.1: Configuração esquemática do problema de fluxo de três fluidos em uma célula de Hele-Shaw horizontal e retangular de espessura b . A velocidade de fluxo externo constante é dada por \mathbf{V}_∞ e as viscosidades dos três fluidos envolvidos são denotadas como η_1 , η_2 e η_3 . Entre os fluidos 1 e 2 está a interface esquerda inicialmente plana localizada em $y = 0$ (representada por uma linha tracejada), com sua forma perturbada descrita por $y_l = \zeta(x, t)$, onde $0 \leq x \leq L$. Da mesma forma, entre os fluidos 2 e 3 está a interface direita inicialmente plana localizada em $y = D$ (representada por uma linha tracejada), com sua forma perturbada descrita por $y_r = D + \epsilon(x, t)$. As tensões superficiais da interfaces mais a esquerda e mais a direita são representadas por σ_l e σ_r .

3.2

Equações governantes e dinâmica linear das perturbações interfaciais

O sistema físico de interesse, representado na Figura 3.1, consiste em uma célula de Hele-Shaw retangular e horizontal de espessura b contendo três fluidos viscosos newtonianos imiscíveis. As viscosidades dos fluidos mais à esquerda e à direita são denotadas como η_1 e η_3 respectivamente. Além disso, essas regiões de fluido semi-infinitas são separadas por um domínio de fluido finito e intermediário de viscosidade η_2 . Nesta configuração, o fluido 1 é injetado a uma velocidade de fluxo externo constante $\mathbf{V}_\infty = v_\infty \hat{y}$ em $y = -\infty$, e desloca os fluidos 2 e 3. Note que este último é retirado na mesma velocidade em $y = +\infty$. Entre os fluidos 1 e 2 (2 e 3) há uma interface com tensão superficial $\sigma_l(\sigma_r)$.

Descrevemos o sistema em um referencial se movendo com velocidade \mathbf{V}_∞ para que as duas interfaces possam se deformar, mas, em média, a interface mais à esquerda não se desloca da posição em $y = 0$. Da mesma forma, a interface mais à direita não se desloca de $y = D$ em média.

Durante o fluxo, as formas perturbadas das interfaces esquerda e direita são descritas, respectivamente, por $y_l = \zeta(x, t)$ e $y_r = D + \epsilon(x, t)$, onde:

$$\zeta(x, t) = \sum_{k \neq 0} \zeta_k(t) e^{ikx} \quad \text{e} \quad \epsilon(x, t) = \sum_{k \neq 0} \epsilon_k(t) e^{ikx} \quad (3-1)$$

são perturbações na interface dada por uma expansão em série de Fourier, enquanto $\zeta_k(t) = \frac{1}{L} \int \zeta(x, t) e^{-ikx} dx$ e $\epsilon_k(t) = \frac{1}{L} \int \epsilon(x, t) e^{-ikx} dx$ são amplitudes complexas de modo de Fourier com números de onda k , e $0 \leq x \leq L$. As expansões (3-1) incluem todos os possíveis modos k , com exceção de $k = 0$, uma vez que estamos em um referencial móvel. Os vetores de onda são limitados a ficar no eixo x , mas podem ser positivos ou negativos. Aplicamos condições de contorno periódicas em x limitando o número de onda k para valores discretos $\frac{2\pi n}{L}$, para n inteiro.

Neste cenário quase bidimensional, nosso problema hidrodinâmico é descrito pela lei de Darcy (Saffman e Taylor (1958)[1]; Bensimon et al. (1986)[12]; Homsy (1987)[13]; Howison (1992)[14]; McCloud e Maher (1995)[15])

$$\mathbf{V}_j + \mathbf{V}_\infty = -\frac{b^2}{12\eta_j} \nabla p_j \quad (3-2)$$

e a média transversal da condição de incompressibilidade

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_j = 0, \quad (3-3)$$

onde \mathbf{V}_j e p_j representam, respectivamente, as médias transversais da velocidade e da pressão no fluido j (com $j = 1, 2$ ou 3). Os movimentos interfaciais são determinados pelas equações governantes (3-2) e (3-3), somadas com duas condições de contorno em cada interface fluido-fluido.

Para a interface mais à esquerda, entre os fluidos 1 e 2, o primeiro conjunto de condições é dado pelo salto de pressão, Young-Laplace, condição de contorno devido à tensão superficial σ_l , e pela condição de contorno cinemática (Saffman e Taylor (1958)[1]; Bensimon et al. (1986)[12]; Homsy (1987)[13]; Howison (1992)[14]; McCloud e Maher (1995)[15]) que afirma que as componentes normais da velocidade de cada fluido são contínuas através da interface esquerda. Estes são dados, respectivamente, por

$$(p_1 - p_2)|_{y=y_l} = \sigma_l \kappa|_{y=y_l} \quad \text{e} \quad (\mathbf{V}_1 \cdot \hat{n})|_{y=y_l} = (\mathbf{V}_2 \cdot \hat{n})|_{y=y_l}. \quad (3-4)$$

Similarmente, o conjunto de condições de contorno atuante na interface mais à direita é

$$(p_2 - p_3)|_{y=y_r} = \sigma_r \kappa|_{y=y_r} \quad \text{e} \quad (\mathbf{V}_2 \cdot \hat{n})|_{y=y_r} = (\mathbf{V}_3 \cdot \hat{n})|_{y=y_r}. \quad (3-5)$$

Nas equações (3-4) e (3-5),

$$\kappa = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (3-6)$$

onde κ é a curvatura interfacial no plano $x - y$, enquanto \hat{n} é o vetor unitário normal às interfaces.

Para realizar uma análise de estabilidade linear do nosso problema, primeiro notamos a natureza irrotacional observada no domínio dos fluidos, $\nabla \times V_j = 0$, permitindo a definição do potencial de velocidade, $V_j = -\nabla \phi_j$. Portanto, como o fluxo é incompressível, podemos reformular o problema em termos dos potenciais de velocidade laplacianos, $\nabla^2 \phi_j = 0$. Então, realizamos expansões em série Fourier para esses potenciais de velocidade e usamos as condições de contorno cinemáticas para expressar os coeficientes de Fourier em termos das perturbações ζ_k e ϵ_k .

Por fim, substituímos as relações resultantes e as condições de salto de pressão na lei de Darcy [equação (3-2)] mantendo apenas os termos de primeira ordem em ζ e ϵ obtemos, após a transformação de Fourier, o conjunto de equações de movimento acopladas para ambas as amplitudes de perturbação ζ_k e ϵ_k

$$\dot{\zeta}_k = f_1 \left[V_\infty |k| - \frac{b^2 \sigma_l}{12(\eta_2 - \eta_1)} |k| k^2 \right] \zeta_k + f_2 \left[V_\infty |k| - \frac{b^2 \sigma_r}{12(\eta_3 - \eta_2)} |k| k^2 \right] \epsilon_k \quad (3-7)$$

$$\dot{\epsilon}_k = f_3 \left[V_\infty |k| - \frac{b^2 \sigma_l}{12(\eta_2 - \eta_1)} |k| k^2 \right] \zeta_k + f_4 \left[V_\infty |k| - \frac{b^2 \sigma_r}{12(\eta_3 - \eta_2)} |k| k^2 \right] \epsilon_k \quad (3-8)$$

onde

$$f_1 = \frac{A_{12}(1 - A_{23})e^{-2|k|D}}{1 + A_{12}A_{23}e^{-2|k|D}} \quad (3-9)$$

$$f_2 = \frac{A_{23}(1 + A_{12})e^{-|k|D}}{1 + A_{12}A_{23}e^{-2|k|D}} \quad (3-10)$$

$$f_3 = \frac{A_{12}(1 - A_{23})e^{-|k|D}}{1 + A_{12}A_{23}e^{-2|k|D}} \quad (3-11)$$

$$f_4 = \frac{A_{23}(1 + A_{12})e^{-2|k|D}}{1 + A_{12}A_{23}e^{-2|k|D}}. \quad (3-12)$$

Aqui, $A_{12} \equiv \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$ e $A_{23} \equiv \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2}$ são, respectivamente, os contrastes de viscosidade associados às interfaces à esquerda e à direita.

Vale mencionar que há uma forma alternativa mais simples e direta de se obter as equações lineares (3-7)-(3-12) para o problema sem ter que realizar os extensos cálculos da análise de estabilidade linear descritos acima. O ponto de partida consiste em considerar o trabalho Anjos e Li (2020)[16], no qual a análise de estabilidade linear é feita para o escoamento radial de três fluidos em uma célula de Hele-Shaw radial. Nesse trabalho, os autores encontraram as seguintes equações para as perturbações nas interfaces

$$\dot{\zeta}_k = f_1 \left[\frac{Q}{2\pi R_1^2} (|n| - f_1^{-1}) - \frac{b^2 \sigma_1 |n|(n^2 - 1)}{12R_1^3(\eta_2 - \eta_1)} \right] \zeta_k + f_2 \left[\frac{Q|n|}{2\pi R_2^2} - \frac{b^2 \sigma_2 |n|(n^2 - 1)}{12R_2^3(\eta_3 - \eta_2)} \right] \epsilon_k \quad (3-13)$$

$$\dot{\epsilon}_k = f_3 \left[\frac{Q|n|}{2\pi R_1^2} - \frac{b^2 \sigma_1 |n|(n^2 - 1)}{12R_1^3(\eta_2 - \eta_1)} \right] \zeta_k + f_4 \left[\frac{Q|n|f_4^{-1}}{2\pi R_2^2} - \frac{b^2 \sigma_2 |n|(n^2 - 1)}{12R_2^3(\eta_3 - \eta_2)} \right] \epsilon_k \quad (3-14)$$

onde R_1 representa o raio não perturbado da interface mais interna, R_2 é o raio não perturbado da interface mais externa, $R = \frac{R_1}{R_2}$ e Q é a taxa de injeção radial. Além disso,

$$f_1 = \frac{A_{12}(1 - A_{23})R^{2|n|}}{1 + A_{12}A_{23}R^{2|n|}} \quad (3-15)$$

$$f_2 = \frac{A_{23}(1 + A_{12})R^{|n|-1}}{1 + A_{12}A_{23}R^{2|n|}} \quad (3-16)$$

$$f_3 = \frac{A_{12}(1 - A_{23})R^{|n|+1}}{1 + A_{12}A_{23}R^{2|n|}} \quad (3-17)$$

$$f_4 = \frac{A_{23}(1 + A_{12})R^{2|n|}}{1 + A_{12}A_{23}R^{2|n|}} \quad (3-18)$$

Para obtermos as equações (3-7)-(3-12) por meio das expressões (3-13)-(3-18), basta tomarmos o conhecido "limite retangular" de Miranda e Widow (1998)[17]. Tal limite consiste em fazer $R_2 = R_1 + D$, $k = \frac{n}{R_1} = \frac{n}{R_2}$,

$V_\infty = \frac{Q}{2\pi R_1} = \frac{Q}{2\pi R_2}$ e $R_1 \rightarrow \infty$. Após tomarmos esse limite, obtemos as equações (3-7)-(3-12) associadas ao escoamento de três fluidos em uma célula de Hele-Shaw retangular.

Ressaltamos que as equações (3-7) e (3-8) estão de acordo com expressões anteriores obtidas por Jackson (2021)[7] para a estabilidade de uma bolha viscosa se movendo através de uma célula de Hele-Shaw.

3.3

Discussão

Para facilitar nossas análises e melhor conectá-las com as circunstâncias consideradas em nossos experimentos, vamos considerar a situação física em que os fluidos 1 e 3 são iguais e têm viscosidade desprezível, ou seja, $\eta_1 = \eta_3 \ll \eta_2$. Além disso, $\sigma_l = \sigma_r = \sigma$. Sob essas circunstâncias, a interface esquerda tem um contraste de viscosidade positivo,

$$A_{12} \equiv \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \approx 1 \quad (3-19)$$

enquanto a interface direita tem um contraste de viscosidade negativo,

$$A_{23} \equiv \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \approx -1 \quad (3-20)$$

Para esses valores de A_{12} e A_{23} , as equações (3-7) e (3-8) são simplificadas e escritas como

$$\dot{\zeta}_k = f_1(k)\Lambda(k)\zeta_k + f_2(k)\Gamma(k)\varepsilon_k, \quad (3-21)$$

$$\dot{\varepsilon}_k = f_3(k)\Lambda(k)\zeta_k + f_4(k)\Gamma(k)\varepsilon_k, \quad (3-22)$$

onde

$$\Lambda(k) = \left[V_\infty - \frac{\sigma b^2 k^2}{12\eta_2} \right] |k|, \quad (3-23)$$

$$\Gamma(k) = \left[V_\infty + \frac{\sigma b^2 k^2}{12\eta_2} \right] |k|, \quad (3-24)$$

$$f_1(k) = -f_4(k) = \coth(|k|D), \quad (3-25)$$

e

$$f_2(k) = -f_3(k) = -\frac{1}{\sinh(|k|D)}. \quad (3-26)$$

No entanto, chamamos a atenção dos leitores para o fato de que, em oposição ao problema de deslocamento de dois fluidos, no sistema de fluxo de três fluidos não se pode concluir que uma interface é estável devido ao seu contraste de viscosidade negativo. As duas interfaces são acopladas com o nível de acoplamento aumentando para valores menores de D . Assim, a interface instável associada a $A_{12} = 1$ pode induzir o surgimento de instabilidades na interface associada a um salto de viscosidade negativo. O oposto também é verdadeiro, ou seja, uma interface estável também pode impactar a dinâmica de uma interface instável.

As equações (3-21) e (3-22) formam um sistema de EDOs de primeira ordem acopladas com coeficientes constantes (no tempo) que podem ser resolvidas facilmente primeiro isolando ϵ_k na equação (3-21) e, então, substituindo-o na equação (3-22).

No regime linear da dinâmica, conhecimentos importantes relacionados ao nosso problema hidrodinâmico podem ser extraídos diretamente da análise das taxas de crescimento associadas a cada perturbação interfacial ζ e ϵ . Para nosso sistema, as taxas de crescimento são definidas como

$$\lambda_l \equiv \frac{\dot{\zeta}_k}{\zeta_k} = f_1(k)\Lambda(k) + f_2(k)\Gamma(k)\frac{\epsilon_k(t)}{\zeta_k(t)} \quad (3-27)$$

e

$$\lambda_r \equiv \frac{\dot{\epsilon}_k}{\epsilon_k} = f_3(k)\Lambda(k)\frac{\zeta_k(t)}{\epsilon_k(t)} + f_4(k)\Gamma(k) \quad (3-28)$$

Aqui, nosso objetivo é analisar o impacto da interface inicialmente estável mais à direita na dinâmica inicial da interface, inicialmente instável, mais à esquerda à medida que o nível de acoplamento entre elas aumenta, ou equivalentemente, à medida que a distância D diminui. No entanto, antes de nos aprofundarmos neste problema específico de fluxo de três fluidos, primeiro analisamos a situação em que as duas interfaces não interagem. Tal situação ocorre quando as interfaces estão muito distantes e foram referidas na literatura como o limite de dois fluidos e interface única (Anjos e Li (2020)[16]; Zhao et al. (2020)[2]; Livera et al. (2021, 2022)[18, 19]). Este cenário corresponde à configuração $D \rightarrow \infty$ nas equações (3-27) e (3-28). Isso resulta nas seguintes

taxas de crescimento simplificadas:

$$\lambda_l(k) = f_1(k)\Lambda(k) = \left[V_\infty - \frac{\sigma b^2 k^2}{12\eta_2} \right] |k| \quad (3-29)$$

e

$$\lambda_r(k) = f_4(k)\Gamma(n) = - \left[V_\infty + \frac{\sigma b^2 k^2}{12\eta_2} \right] |k| \quad (3-30)$$

Note que, sob essa circunstância, obtemos taxas de crescimento independentes do tempo, em contraste com as dependentes do tempo, equações (3-27) e (3-28), obtidas para interface acoplada com D finito. Além disso, ao inspecionar a equação (3-29), torna-se evidente que a taxa de crescimento da interface esquerda resulta da competição entre o efeito desestabilizador relacionado à velocidade V_∞ e o estabilizador proveniente da tensão superficial σ .

Portanto, a interface esquerda é instável [$\lambda_l(k) > 0$] para números de onda, k , dentro do intervalo $0 \leq k \leq k_c$, onde $k_c = \sqrt{\frac{12\eta_2 V_\infty}{\sigma b^2}}$ é o número de onda crítico, encontrado definindo em [$\lambda_l(k) = 0$]. Por outro lado, pode-se observar que a interface à direita é sempre estável [$\lambda_r(k) < 0$] não importando o valor de k . Isso ocorre porque o salto de viscosidade associado à interface direita é negativo $A_{23} = -1$, tornando o fluxo estável contra pequenas perturbações de amplitude. Como as interfaces são desacopladas $D \rightarrow \infty$, esse fluxo estável não muda ao longo do tempo. Salientamos que essas conclusões de limite de interface única e limite de dois fluidos, bem como as equações (3-29) e (3-30), estão de acordo com resultados de estabilidade linear relatados anteriormente, obtidos por trabalhos anteriores sobre fluxos de deslocamento em uma célula retangular de Hele-Shaw e dois fluidos (Miranda e Widom (1998)[17]).

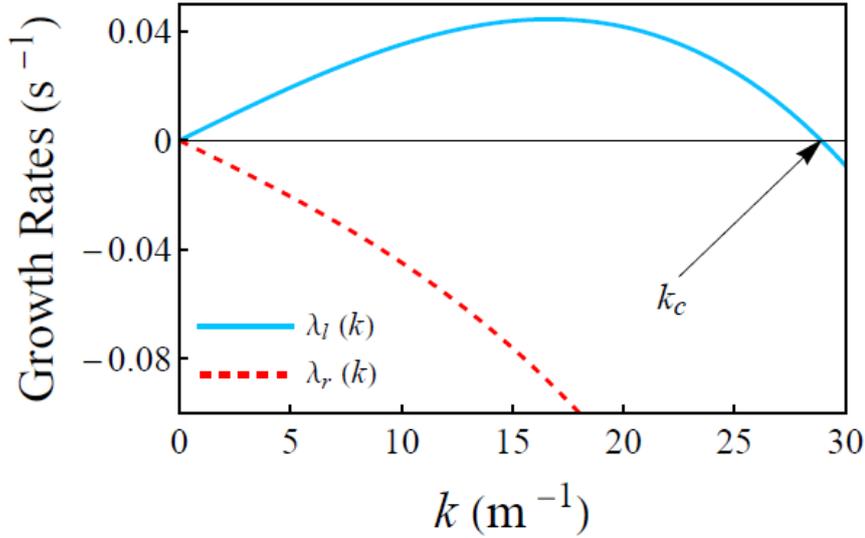


Figura 3.2: Taxas de crescimento linear $\lambda_l(k)$ [ver equação (3-29)] e $\lambda_r(k)$ [ver equação (3-30)] como função do número de onda k para $D \rightarrow \infty$. Além disso, definimo $b = 3 \times 10^{-3}\text{m}$, $V_\infty = 4 \times 10^{-3}\text{m/s}$, $\eta_2 = 7.36 \times 10^{-3}\text{Pa s}$ e $\sigma = 47 \times 10^{-3}\text{N/m}$.

Para melhor ilustrar as conclusões obtidas da análise direta das equações (3-29) e (3-30) e também para apresentar a curva típica da taxa de crescimento obtida de uma análise de estabilidade linear, na Figura 3.2, nós plotamos as taxas de crescimento $\lambda_l(k)$ [equação (3-15)] e $\lambda_r(k)$ [equação (3-16)] como uma função do número de onda k para $D \rightarrow \infty$. Isso é feito considerando os parâmetros $b = 3 \times 10^{-3}\text{m}$, $V_\infty = 4 \times 10^{-3}\text{m/s}$, $\eta_2 = 7.36 \times 10^{-3}\text{Pa s}$ e $\sigma = 47 \times 10^{-3}\text{N/m}$. Os valores adotados nesta análise foram obtidos a partir de experimentos reais envolvendo o escoamento de fluidos em células de Hele-Shaw.

A Figura 3.2 confirma as previsões obtidas das equações (3-29) e (3-30) discutidas no parágrafo anterior. Além disso, indicamos com uma seta preta o número de onda crítico k_c , que define a banda de modos instáveis para a interface esquerda. Note que tal número de onda desempenha um papel importante no nível linear da dinâmica, pois delimita os possíveis comprimentos de onda que podem se manifestar na interface esquerda durante experimentos de fluxo de três fluidos. Portanto, para verificar os efeitos da interface direita na dinâmica inicial da interface esquerda, concentraremos nossa análise na variação de k_c conforme a distância inicial D diminui entre as interfaces.

Na figura 3.3, mostramos variações do número de onda crítico k_c da interface esquerda como uma função do tempo t para diferentes valores de

D . Casos associados a valores finitos de D são representados por pontos e são obtidos utilizando as relações de dispersão linear (3-27) e (3-28). Como referência, exibimos uma linha preta para k_c independente do tempo no caso de $D \rightarrow \infty$, que foi discutido na figura 3.2. Todos os parâmetros físicos restantes são idênticos aos utilizados na figura 3.2.

Primeiro, podemos observar que valores finitos de D estão sempre associados a um número de onda crítico dependente do tempo, k_c . Além disso, pequenos valores de D diminuem consideravelmente a magnitude de k_c , diminuindo assim a banda de modos instáveis. Tais observações sugerem que, no nível linear, a interface direita impacta a esquerda, diminuindo o número de dedos viscosos formados. Esse efeito estabilizador é particularmente forte nos tempos iniciais, mas diminui com o passar do tempo, com todos os casos se aproximando do valor de k_c observado na situação de interface única desacoplada (para $D \rightarrow \infty$).

A figura 3.3 também revela que, para $D = 6$ cm, observamos um curto período em que k_c é zero, indicando uma ausência completa de instabilidades na interface esquerda, mesmo com um contraste de viscosidade positivo muito grande (≈ 1). No entanto, esse efeito apenas atrasa, mas não impede totalmente o crescimento dos dedos viscosos.

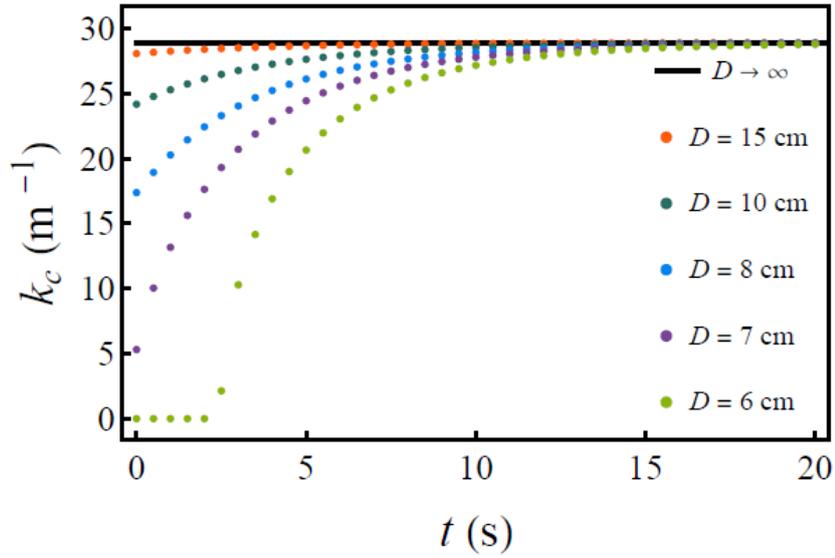


Figura 3.3: Número de onda crítico k_c da interface esquerda como uma função do tempo t para $D = 6$ cm, $D = 7$ cm, $D = 8$ cm, $D = 10$ cm, $D = 15$ cm e $D \rightarrow \infty$. Casos associados a valores finitos de D são representados por pontos, enquanto no caso de $D \rightarrow \infty$ é ilustrado por uma linha contínua. Todos os outros parâmetros físicos são idênticos aos utilizados na figura 3.2. Uma aproximação (valores menores de D) entre as interfaces estreita a faixa de modos instáveis para a interface esquerda, que é instável.

No próximo capítulo, será realizada a descrição detalhada do dispositivo experimental, seguida da apresentação e análise dos resultados obtidos.

4

A Célula de Hele-Shaw

4.1

Descrição e Características

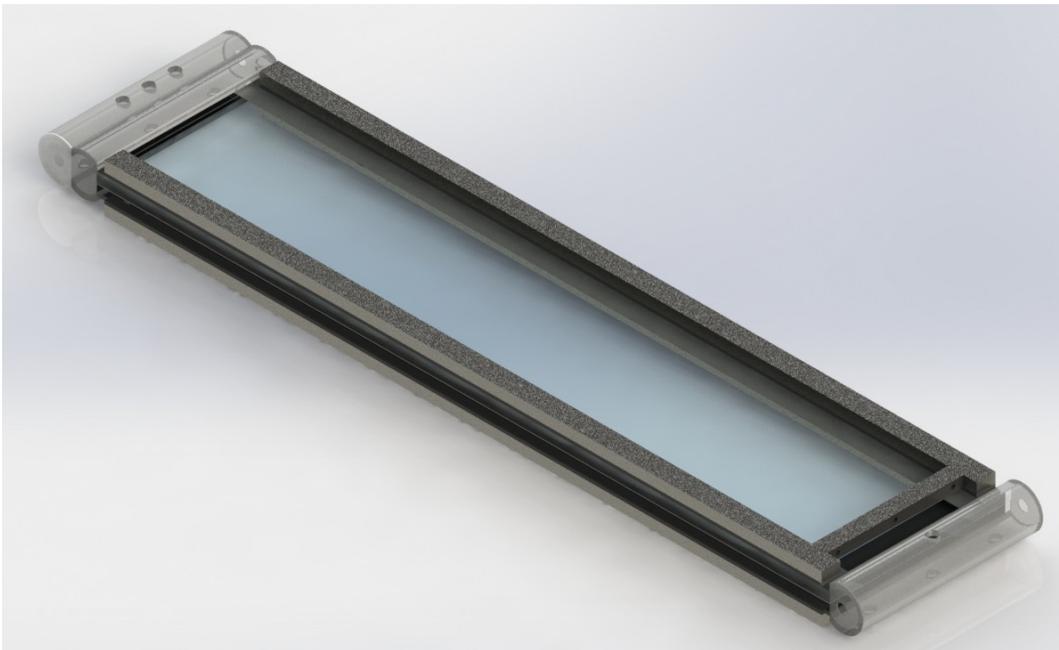


Figura 4.1: Desenho renderizado da célula de uma Hele-Shaw retangular.

Neste capítulo, descrevemos os componentes da célula de Hele-Shaw retangular, suas principais características, as modificações realizadas ao longo do processo e os resultados experimentais obtidos. Durante o desenvolvimento do estudo, diversas dificuldades foram identificadas, o que levou à utilização de três diferentes bancadas experimentais, com o objetivo de aperfeiçoar os testes realizados. Ao longo do capítulo, cada uma dessas bancadas será detalhadamente apresentada, juntamente com a justificativa para as respectivas alterações.

A célula experimental é composta por duas placas de vidro paralelas e retangulares, com uma espessura de 10 mm , e entre elas há duas fitas de polietileno com um espaçamento de $0,75\text{ mm}$, espaço confinado por onde o fluido escoar. Inicialmente, o protótipo possuía, à esquerda, um reservatório de entrada, denominado "reservatório 1", e outro de saída, chamado "reservatório

3", ambos fabricados em acrílico. A Figura 4.1 apresenta o desenho renderizado desses reservatórios.

Durante os testes, observamos que, ao realizar a troca de fluidos no reservatório 1, os fluidos no interior da célula recuavam, impactando na estabilidade das interfaces. Além disso, bolhas de ar presentes no reservatório 1 frequentemente penetravam na célula, comprometendo a validade dos experimentos. Para solucionar esses problemas, implementamos diversas adaptações no sistema.

Primeiramente, introduzimos um reservatório intermediário, denominado "reservatório 2", fabricado em alumínio, localizado entre o reservatório 1 e a célula, a fim de eliminar o problema do recuo dos fluidos. Esse componente desempenha um papel essencial no experimento, pois separa o fluido no interior da célula do fluido nos reservatórios, permitindo, dessa maneira, que o fluido ficasse imóvel dentro do dispositivo durante as trocas. Podemos visualizar o reservatório 2 na Figura 4.2.



Figura 4.2: Reservatório 1 em acrílico e reservatório 2 em alumínio usado para evitar que o fluido no interior da célula recuasse.

No entanto, como o material do reservatório 2 era de alumínio, a presença de bolhas de ar não poderia ser visualizada. Para contornar essa limitação, fizemos o desenho e construímos um reservatório semelhante em acrílico transparente, permitindo tanto a observação quanto a remoção das bolhas. A Figura 4.3 apresenta os modelos desenvolvidos por meio do software Solidworks.

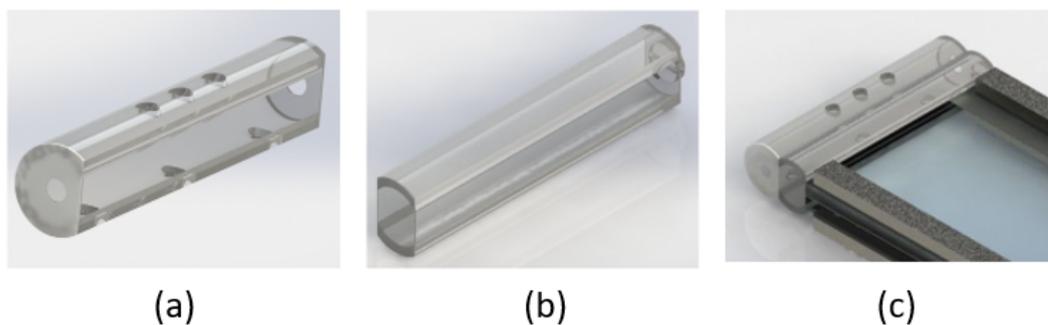


Figura 4.3: Desenho renderizado dos reservatório em acrílico. Na figura (a), temos o reservatório 1, na (b) o segundo reservatório e em (c) temos a montagem do conjunto na célula.

Em seguida, instalamos quatro válvulas de entrada no reservatório 1: uma válvula de alívio, que permitiu a remoção eficiente das bolhas de ar, possibilitando o preenchimento do reservatório apenas com fluido puro, e três válvulas adicionais para a entrada de óleo, glicerina e ar ou água, usadas no processo de limpeza. Utilizamos, também, três drenos na parte inferior do reservatório 1, com o propósito de retirar o fluido completamente durante as trocas.

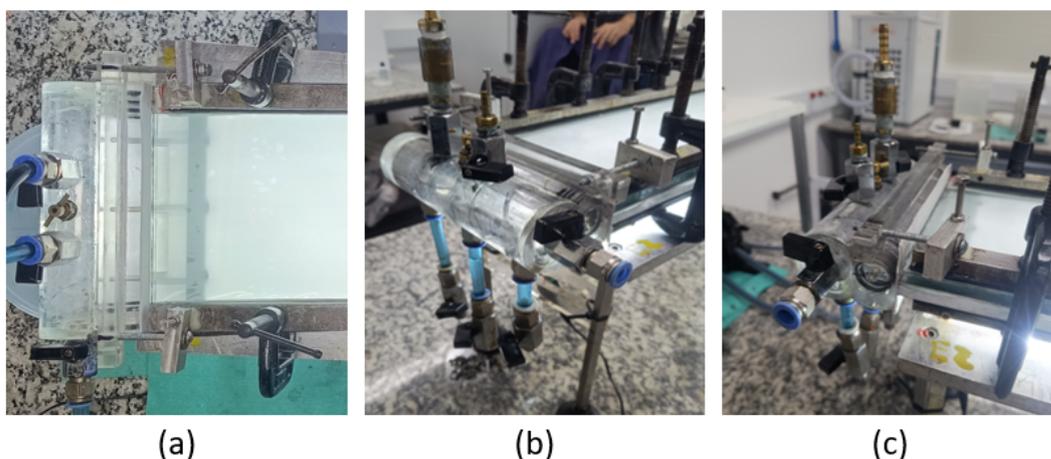


Figura 4.4: Na imagem (a) temos a visão superior do conjunto e o suporte para fixação; em (b) podemos ver os drenos na parte inferior da peça e em (c) constatamos as válvulas de alívio e de entrada do óleo, glicerina e ar ou água, além da fixação lateral do suporte.

A Figura 4.4 (a) ilustra os reservatórios 1 e 2 já construídos em acrílico. Podemos perceber a significativa melhora, uma vez que é possível visualizar o interior do reservatório intermediário.

Outra alteração significativa foi a remoção da haste e dos parafusos que fixavam o reservatório 2 à estrutura metálica da célula. Essa configuração di-

ficultava a visualização do início da formação dos dedos viscosos na célula. Criamos um suporte em acrílico transparente em cima do reservatório 2 com fixação na lateral da célula, retirando qualquer obstrução acima do vidro. A Figura 4.4 apresenta os reservatórios fabricados e devidamente instalados na célula experimental, já incorporando as modificações previamente mencionadas.

Durante o processo de injeção, o reservatório 1 é preenchido e, quando completamente cheio, transfere o fluido para o reservatório 2. Em seguida, o fluido escoava para a célula através do espaçamento entre as placas de vidro. Finalmente, os fluidos utilizados no experimento são descartados pelo reservatório 3.

Nos testes realizados na primeira e na segunda bancadas, constatamos que a concentração do corante preto utilizado para diluir na glicerina não era adequada, pois a mistura começou a apresentar sinais de difusão ao longo dos experimentos. Para solucionar esse problema, optamos por um corante de qualidade superior e realizamos testes com diferentes concentrações, a fim de determinar a mais adequada. A concentração ideal foi usada na bancada 3. Com base nas informações técnicas referentes à diluição do corante, optamos pela utilização de uma concentração de 30 mL de corante para 4 litros de glicerina. Essa proporção foi adotada por proporcionar maior confiabilidade na execução dos experimentos. Deixamos a glicerina com o corante em um misturador durante 24 horas e esperamos 48 horas para iniciar os testes, pois percebemos que o misturador gerava microbolhas que surgiam durante o experimento. Com essas modificações, verificamos uma melhoria significativa nos resultados obtidos.

4.2

Primeira bancada

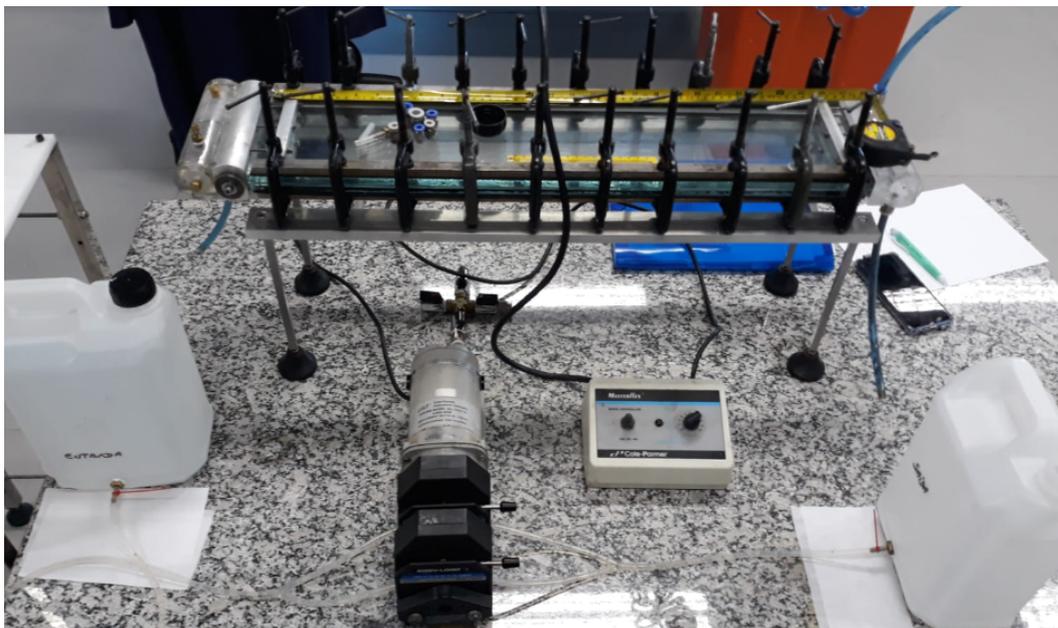


Figura 4.5: Primeira bancada usada com bomba à vazão constante.

Inicialmente, os testes preliminares foram realizados à vazão constante e, aqui, vamos nos referir a essa situação como os experimentos da "bancada 1". O protótipo utilizado é ilustrado na Figura 4.1. A primeira bancada experimental era formada por uma bomba peristáltica da fabricante Cole-Parmer Instrument Co, um controlador de velocidade e duas bombonas pequenas usadas como tanques de armazenamento dos fluidos, conforme a Figura 4.5.

O conjunto injetava os fluidos na célula, exigindo dois tipos de mangotes com conexões diferentes. Durante o processo de deslocamento, especificamente nas trocas dos fluidos do reservatório, era necessário interromper o experimento para substituir as conexões por outras de menor diâmetro, devido à diferença entre os mangotes. Como a glicerina é mais viscosa que o óleo de soja, era necessário utilizar um mangote com diâmetro maior. Esse procedimento demandava tempo e, frequentemente, causava o movimento da célula devido à substituição das peças. Embora o encaixe dos mangotes menores fosse simples, o mangote maior apresentava desafios para a bomba, que precisava manter a mesma vazão de escoamento para ambos os fluidos.

4.2.1

Resultados da primeira bancada

Mostraremos as observações obtidas a partir dos diversos testes realizados e a dinâmica do experimento. Inicialmente, a célula é preenchida com o fluido

de menor viscosidade, representado pelo óleo de soja. Em seguida, é introduzido um segundo fluido de maior viscosidade, a glicerina, dessa maneira criando a primeira interface estável entre esses dois líquidos, uma vez que o fluido mais viscoso desloca o menos viscoso. Nessa configuração, o contraste de viscosidade se torna negativo ($A \approx -1$). Por fim, injetamos novamente o óleo de soja, agora como terceiro fluido, resultando no aparecimento de uma segunda interface agora instável, pois temos o fluido menos viscoso deslocando o mais viscoso, apresentando contraste de viscosidade positivo ($A \approx 1$). A sequência — óleo - glicerina - óleo — evidencia de forma clara a transição entre estabilidade e instabilidade no problema de Saffman-Taylor.

As principais propriedades dos fluidos utilizados nos experimentos estão listadas na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Principais propriedades dos fluidos a $25^\circ C$

Propriedade	Glicerina	Óleo de soja
Viscosidade cinemática	$707,18 \text{ mm}^2/\text{s}$	$55,33 \text{ mm}^2/\text{s}$
Densidade	$1,250 \text{ g}/\text{cm}^3$	$0,917 \text{ g}/\text{cm}^3$
Viscosidade dinâmica	$884 \text{ mPa}\cdot\text{s}$	$51 \text{ mPa}\cdot\text{s}$

A bomba utilizada no experimento operou com um controlador de velocidade, responsável pelo ajuste da vazão. O deslocamento foi realizado com a escala 1 do referido controlador, conforme ilustrado na Figura 4.5. A célula experimental apresenta um espaçamento entre as placas de 0,75 mm e comprimento de 750 mm. As mangueiras utilizadas para a condução da glicerina e do óleo de soja correspondem, respectivamente, aos modelos L/S 18 e L/S 14, que, segundo especificações do fabricante, apresentam taxas de vazão de 23 mL/min e 1,3 mL/min. A vazão superficial (ou vazão em área) calculada para cada fluido é de 0,6815 mm/s para a glicerina e 0,0385 mm/s para o óleo de soja.

A figura 4.6 ilustra a ordem de injeção dos fluidos dentro da célula de Hele-Shaw.

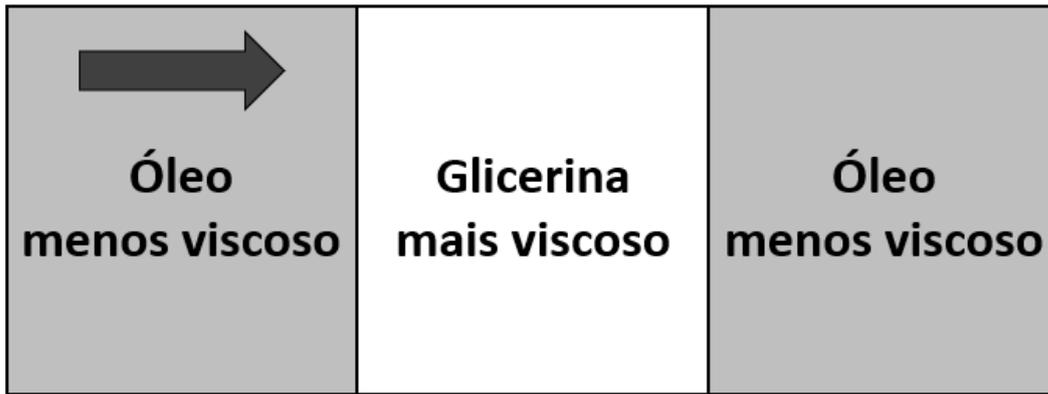


Figura 4.6: Sequência de injeção dos fluidos na célula Hele-Shaw.

Os resultados experimentais serão analisados da seguinte forma: primeiramente, apresentaremos a comparação da camada intermediária D nas suas versões pequena e grande na bancada 1. Posteriormente, discutiremos os resultados obtidos na bancada 2 e, por fim, na bancada 3.

Como nossa intenção é investigar a influência do volume da fase intermediária, adotamos as seguintes dimensões aproximadas para a camada D , sendo 2 cm na versão pequena e 10 cm na versão grande. Apenas na bancada 3 usamos, respectivamente, as distâncias D iguais a 5 cm e 20 cm . Verificaremos na prática como a distância entre as interfaces pode impactar o crescimento e o tempo de formação dos dedos viscosos durante o deslocamento na célula.

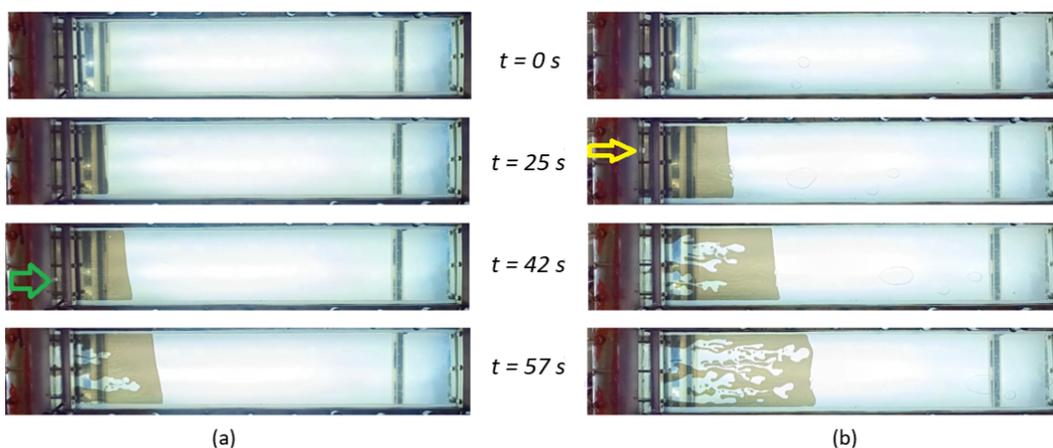


Figura 4.7: Comparação da camada intermediária pequena e grande na bancada 1 à vazão constante.

É importante destacar que o tempo indicado na Figura 4.7 tem início a partir do momento em que se inicia a injeção do terceiro fluido na célula. A preparação do experimento requer, em média, 20 minutos até que se atinja o estágio correspondente ao tempo $t = 0\text{ s}$. Nesse ponto, o dispositivo encontra-se completamente montado, contendo, respectivamente, glicerina e óleo de soja.

A partir dessa configuração inicial, tem início o procedimento de interesse, com a injeção da terceira fase — o óleo de soja — conforme a sequência apresentada na Figura 4.6. Embora o teste em si tenha duração aproximada de 60 segundos, todo o experimento demanda cerca de 2 horas. Esse tempo total inclui as etapas de preparação — que envolvem a injeção da primeira e da segunda fase —, a realização do teste com a injeção do terceiro fluido, o descarte dos materiais utilizados, a desmontagem do protótipo, a limpeza completa da célula e, por fim, a montagem para um novo ciclo experimental.

A Figura 4.7 apresenta a comparação de dois experimentos realizados na bancada 1. Esta bancada opera com vazão constante e baixa velocidade de injeção. Este experimento foi realizado antes das melhorias implementadas na célula, conforme mencionado nos tópicos anteriores. Embora as adaptações no dispositivo tenham proporcionado avanços significativos, observamos que o suporte superior do reservatório interfere parcialmente na visualização inicial dos experimentos.

A dinâmica do teste tem início em um regime linear, correspondente aos tempos iniciais, nos quais ainda não se observam instabilidades no escoamento. À medida que o tempo avança, o sistema evolui para um regime não linear, caracterizado pela formação dos *fingering*. Esta questão foi revisitada por Miranda e Widom (1998) [17] e explicada no capítulo 2.

Separamos a imagem em quatro tempos. Na Figura 4.7(a), temos o tempo inicial marcado com $t = 0\text{ s}$, indicando o início da injeção da terceira fase. Neste momento, a camada intermediária é pequena, com cerca de $D = 2\text{ cm}$. Essa espessura implica forte acoplamento entre as interfaces. Na segunda imagem, em $t = 25\text{ s}$, o óleo continua deslocando a glicerina, entretanto sem a formação de *fingering*. Apenas na terceira imagem temos a formação das primeiras instabilidades, após 42 s do início da terceira injeção. Podemos visualizar, através da seta verde na terceira imagem, a ponta do dedo viscoso penetrando a glicerina. Já na última imagem, com $t = 57\text{ s}$, podemos constatar que se formam dedos largos e pouco ramificados.

A Figura 4.7(b) segue a mesma dinâmica de análise, tendo o tempo inicial em $t = 0\text{ s}$, quando a espessura do fluido intermediário é grande, apresentando aproximadamente $D = 7\text{ cm}$. Essa configuração, de acordo com a teoria, implica fraco acoplamento. O objetivo do teste experimental é verificar essa previsão teórica. Observamos que o primeiro *fingering* se forma com 25 s , conforme a seta amarela indica na imagem. Comparando com a espessura pequena, 4.7(a), temos uma diferença de 17 s , ratificando a teoria proposta neste trabalho. Na terceira imagem, $t = 42\text{ s}$, os dedos viscosos apresentam morfologia completamente diferente do teste anterior.

As instabilidades formadas são mais finas e mais ramificadas, enquanto que no mesmo tempo da Figura 4.7(a), o fingering está iniciando na célula. No tempo $t = 57 s$, o fluido intermediário está completamente tomado pelos dedos viscosos.

Podemos afirmar que a redução do volume do fluido intermediário implica um aumento do acoplamento entre as interfaces. Esse fortalecimento da interação atua como um fator para atrasar a formação dos dedos viscosos, comportamento inicialmente previsto pelas análises teóricas e posteriormente validado pelos resultados experimentais apresentados na Figura 4.7.

Nos dois experimentos, analisamos a relação entre o tempo de formação das instabilidades e a distância entre as interfaces. Os resultados indicam que, à medida que a espessura da camada intermediária diminui, o acoplamento entre as interfaces se intensifica, retardando o surgimento das instabilidades. No caso da Figura 4.7(a), a forte interação entre as interfaces resultou na formação de dedos largos que penetraram na glicerina, gerando poucas ramificações. Por outro lado, no caso 4.7(b), uma maior distância entre as interfaces reduziu o acoplamento, levando à formação de dedos mais finos e numerosos, com instabilidades emergindo mais cedo na dinâmica, em concordância com a previsão teórica. À medida que a distância entre as interfaces aumenta, o acoplamento se enfraquece progressivamente até atingir um limite no qual não há mais interação entre elas. Nesse ponto, o sistema passa a se comportar como duas interfaces independentes, retornando à configuração clássica de dois fluidos separados por uma única interface.

Apesar dos desafios enfrentados, o experimento operou com vazão constante, o que permitiu manter uma baixa velocidade de escoamento e, conseqüentemente, minimizar a formação de bolhas durante o preenchimento dos reservatórios e da célula. No entanto, fatores como as vibrações geradas pela bomba, os choques na célula decorrentes da substituição dos mangotes e o tempo necessário para as manobras operacionais motivaram o desenvolvimento de uma bancada experimental mais eficiente.

4.3 Segunda bancada

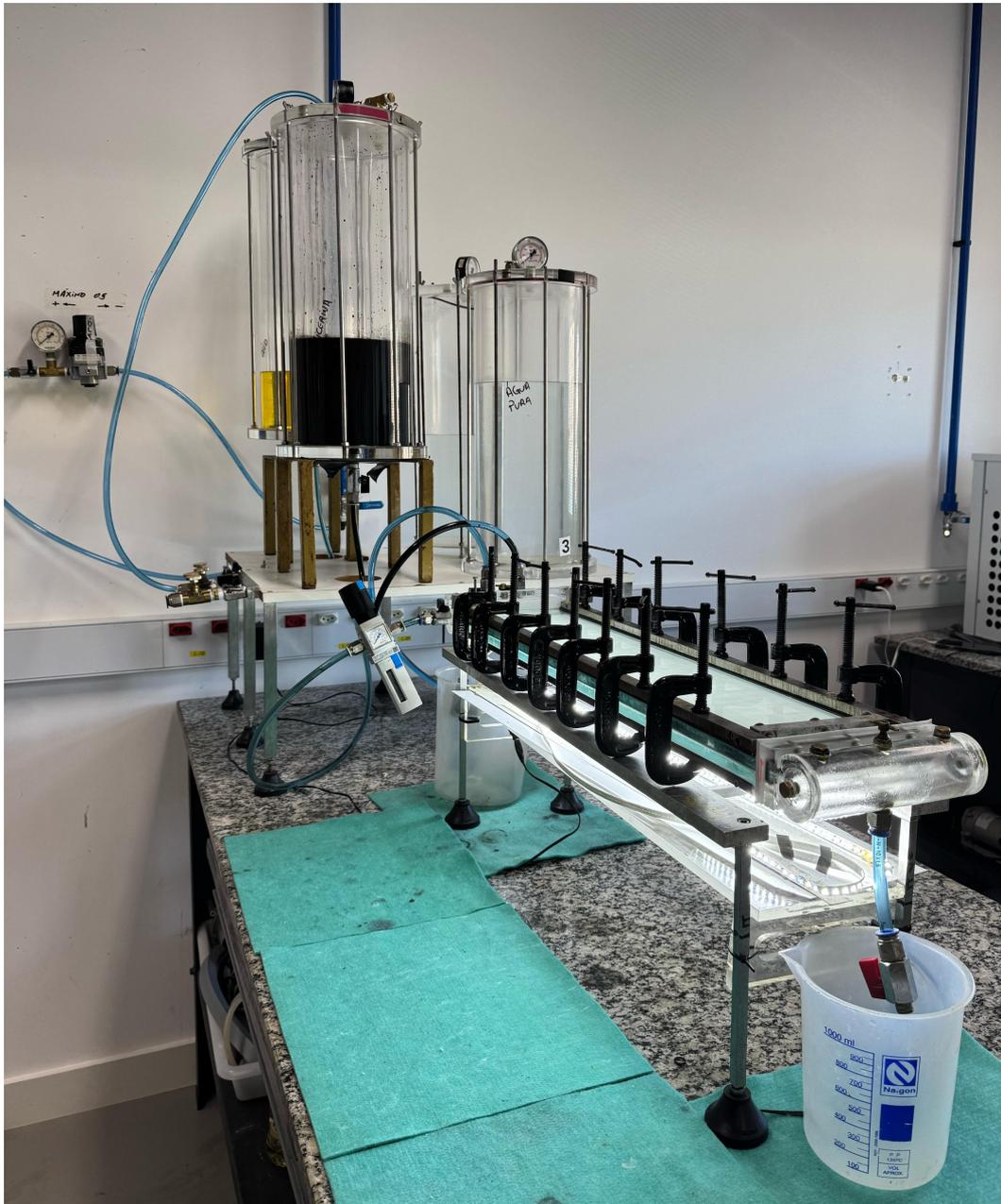


Figura 4.8: Segunda bancada usada com ar comprimido à pressão constante.

Em contraste com a configuração da primeira bancada, optamos por desenvolver uma nova abordagem, com o objetivo de reduzir os impactos negativos gerados pelas trocas do mangote. A solução encontrada foi utilizar ar comprimido para transferir os fluidos dos tanques de armazenamento para os reservatórios da célula, eliminando assim a necessidade de uma bomba.

No início, o principal desafio foi determinar a pressão ideal, considerando a significativa diferença nas viscosidades dos fluidos. Diferentemente da confi-

guração anterior, que utilizava a mesma vazão para injetar ambos os fluidos, esta nova abordagem exigiu pressões diferentes para cada fluido. Além disso, enfrentamos dificuldades relacionadas à perda de pressão no sistema. Para solucionar esse problema, instalamos dois manômetros: um na saída da tubulação de ar comprimido do laboratório, para ajustar a pressão necessária à extração dos fluidos dos tanques, e outro na entrada da célula. Inicialmente, as pressões precisavam ser distintas para movimentar os fluidos até o reservatório, mas deviam ser igualadas para o correto preenchimento da célula. A instalação do segundo manômetro garantiu esse equilíbrio de pressão.

Uma das principais vantagens dessa nova configuração foi a eliminação da necessidade de substituir as conexões ou remover os mangotes, graças à utilização do mesmo tipo de conexão e mangote para todos os fluidos. Essa abordagem não apenas tornou o processo mais dinâmico e menos vulnerável a interferências externas, como também reduziu significativamente a necessidade da troca de componentes. As operações de troca de fluidos passaram a ser realizadas exclusivamente por meio da abertura e fechamento de válvulas, o que otimizou o experimento, preveniu impactos na célula e evitou interrupções nos testes.

Por outro lado, o controle da variação das pressões mostrou-se uma etapa particularmente desafiadora, uma vez que foi realizado de forma manual. De antemão, consideramos que a manipulação manual seria uma alternativa mais prática em relação ao uso do controlador de velocidade empregado na bancada 1. No entanto, em diversas situações, verificamos que os fluidos escoavam a uma velocidade superior à observada na bancada anterior, o que ocasionava vazamentos maiores, sobretudo nos encaixes dos reservatórios com a célula.

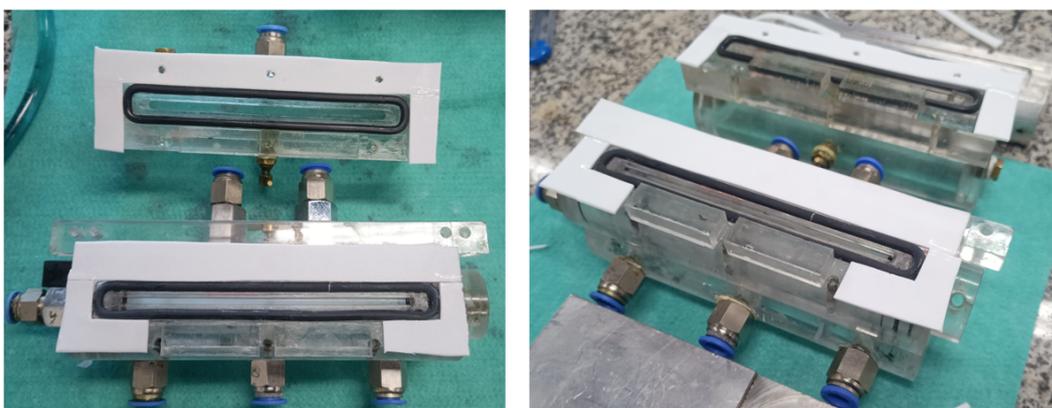


Figura 4.9: Instalação da gaxeta, o-ring e batentes nos reservatórios 1 e 3.

Para mitigar o problema dos vazamentos, desenvolvemos uma gaxeta confeccionada em polímero emborrachado (EVA), com o propósito de vedar o encaixe dos reservatórios na célula. Adicionalmente, foi realizada a adaptação

de um canal ao redor da saída do reservatório, onde se inseriu um anel de vedação (o-ring) emborrachado, destinado a reter eventuais vazamentos de fluido.

Por fim, implementamos a instalação de um batente na parte inferior do reservatório, funcionando como guia no momento da montagem, assegurando o alinhamento adequado dos reservatórios em relação ao espaçamento entre as placas de vidro da célula. A Figura 4.9 ilustra as modificações descritas.

4.3.1

Resultados da segunda bancada

Na Figura 4.10 foram implementadas melhorias no sistema, incluindo a remoção do suporte do reservatório. Essa modificação possibilitou uma visualização mais ampla e detalhada, favorecendo uma análise mais precisa dos fenômenos observados. É importante destacar que a dinâmica dos experimentos manteve-se consistente em todos os ensaios. A sequência de injeção e os fluidos utilizados foram os mesmos em cada repetição.

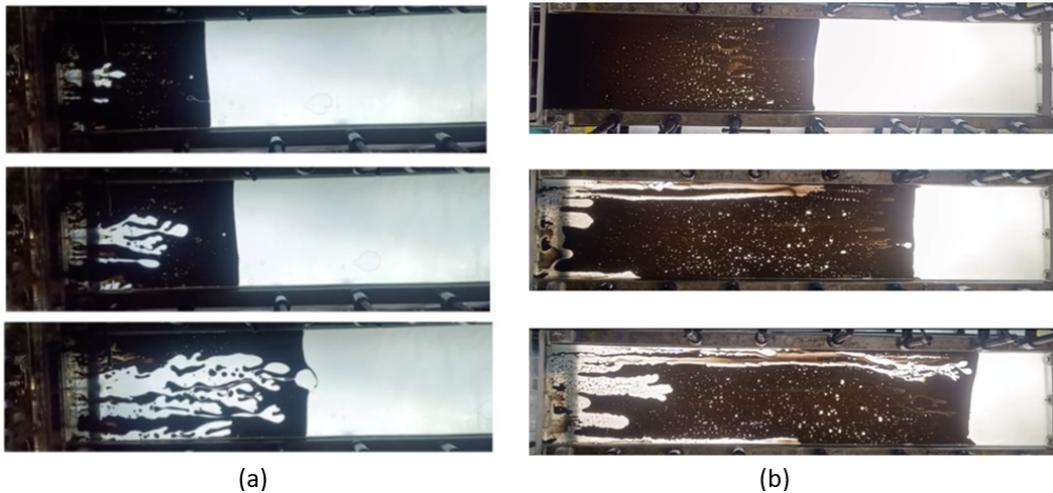


Figura 4.10: Comparação da camada intermediária pequena e grande na bancada 2 à pressão constante.

Nesta etapa apresentamos dois experimentos realizados na bancada 2, sob pressão constante. Nesta bancada, temos a injeção sendo realizada por ar comprimido. As medidas da distância entre as interfaces são equivalentes às aplicadas na bancada 1. No entanto, observamos uma ligeira diferença nos tempos de formação das instabilidades, atribuída ao fato de que a velocidade de injeção foi um pouco superior à da primeira bancada. Essa diferença é justificada pela mudança nos mecanismos de controle das bancadas: enquanto a bancada 1 conta com um controlador de velocidade automatizado, que oferece

maior precisão na condução dos experimentos, na bancada 2 o controle é manual, realizado por meio de uma válvula ajustada no manômetro.

Na Figura 4.10(a), temos a distância entre as interfaces pequena, com formação do primeiro fingering em 22 segundos. Durante esse experimento, inicialmente surgiu um único dedo viscoso largo no centro da célula, começando a se ramificar após 32 segundos do início. Por outro lado, na Figura 4.10(b), observamos uma camada intermediária maior, apresentando uma quantidade significativa de microbolhas que invalidou o teste. Com o decorrer do experimento, verificamos que houve um caminho preferencial, na parte superior da célula, provocado por uma sujeira no interior do dispositivo.

Em função de uma rachadura, o reservatório 2 perdeu a capacidade de isolar os fluidos entre o reservatório e a célula, visto que o mecanismo de abertura e fechamento tornou-se inoperante. Tal limitação provocou a movimentação dos fluidos no interior da célula, uma vez que, ao drenar o fluido do reservatório 1, os fluidos presentes no dispositivo recuavam, comprometendo a estabilidade da interface posicionada à direita. A Figura 4.11 demonstra o problema de recuo do fluido no sistema.

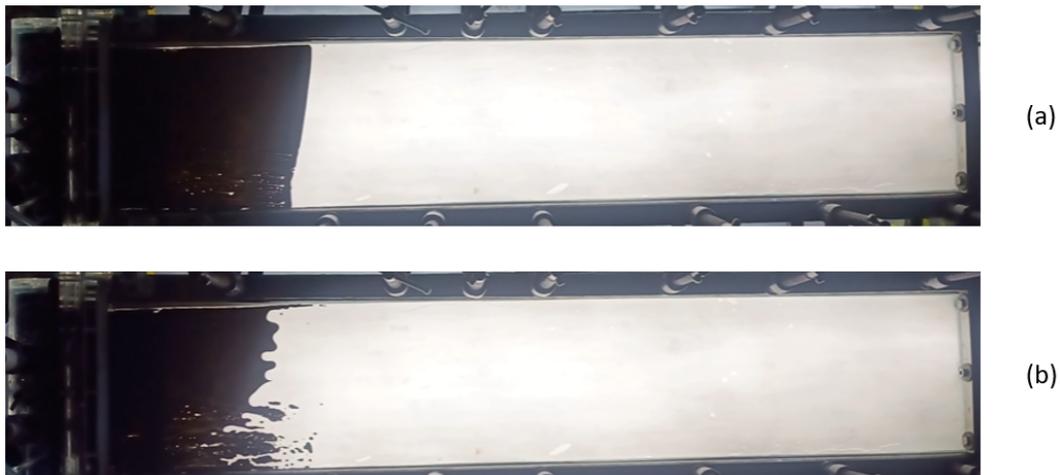


Figura 4.11: Na imagem (a), observa-se a injeção do fluido intermediário na célula. Já na imagem (b), com a abertura do reservatório 2 para iniciar a substituição da glicerina pelo óleo, uma rachadura presente no reservatório provoca o recuo do fluido no interior do dispositivo, resultando na formação de fingering na interface anteriormente estável, localizada à direita.

No entanto, enfrentamos dificuldades significativas para a realização dos testes nesta bancada, impossibilitando a análise pretendida. Especificamente, ocorreram vazamentos excessivos e o reservatório apresentou uma rachadura, comprometendo a integridade do experimento. Diante desses imprevistos, aliado aos problemas recorrentes de vazamentos, optamos por reformular a

bancada 1, com o objetivo de retomar os ensaios em baixa velocidade de injeção e à vazão constante, porém agora utilizando duas bombas para que não houvesse a necessidade de substituir os mangotes do dispositivo.

4.4

Terceira bancada



Figura 4.12: Terceira bancada usada com duas bombas à vazão constante.

Após a reformulação da bancada 1, com a introdução de duas bombas e a implementação de melhorias nos reservatórios, foi possível montar a bancada 3. Com esta configuração, foram iniciados os testes finais sob vazão constante, empregando tanto a camada intermediária de espessura pequena quanto a grande. No caso da glicerina, foi necessário utilizar uma bomba de maior potência, uma vez que sua elevada viscosidade comprometia o desempenho da bomba originalmente empregada.

A bancada 3 representa a consolidação das melhorias desenvolvidas nas bancadas anteriores. Nesta etapa, a utilização de duas bombas eliminou a necessidade de substituição manual das conexões, conferindo maior praticidade e confiabilidade ao processo experimental. Utilizamos calços de borracha na base das bombas, o que permitiu reduzir significativamente as vibrações transmitidas durante o funcionamento do sistema. Cabe destacar que os tanques de armazenamento de acrílico, empregados na bancada 2, utilizavam parafusos com porca tipo borboleta para a fixação das tampas. Contudo, como houve a necessidade de reposição frequente dos fluidos ao longo dos ensaios, optamos pelo retorno aos tanques de PVC, por serem mais práticos e ágeis na operação.

Após o imprevisto ocasionado por uma rachadura no reservatório 2, realizamos uma análise criteriosa do sistema de entrada e optamos por projetar e construir um novo reservatório de acrílico transparente. Utilizando o software Solidworks, desenvolvemos um modelo mais simples e funcional, composto por um único reservatório acoplado a uma válvula guilhotina. A proposta visava facilitar a operação de abertura e fechamento do sistema, eliminando a necessidade de preenchimento sequencial de dois reservatórios. Com essa nova configuração, observamos uma redução significativa na formação de bolhas, permitindo confiabilidade no escoamento durante os experimentos.

Contudo, o problema da rachadura no segundo reservatório permaneceu. Tentamos um reparo utilizando cola instantânea, mas sem sucesso. O segundo reservatório, projetado para atuar como uma espécie de porta, deixou de cumprir sua função. Como alternativa, os testes foram realizados com os reservatórios completamente abertos, o que impossibilitou o isolamento da célula durante a troca dos fluidos no primeiro reservatório.

Observamos que, ao iniciar a substituição dos fluidos, ocorria um recuo dos fluidos dentro da célula, o que impedia a formação de uma segunda interface estável completamente reta, diferentemente do observado nas bancadas 1 e 2. Para mitigar esse efeito, adotamos a estratégia de abrir o dreno do reservatório 1 de maneira lenta e gradual, o que reduziu significativamente a movimentação dos fluidos dentro da célula durante a troca.

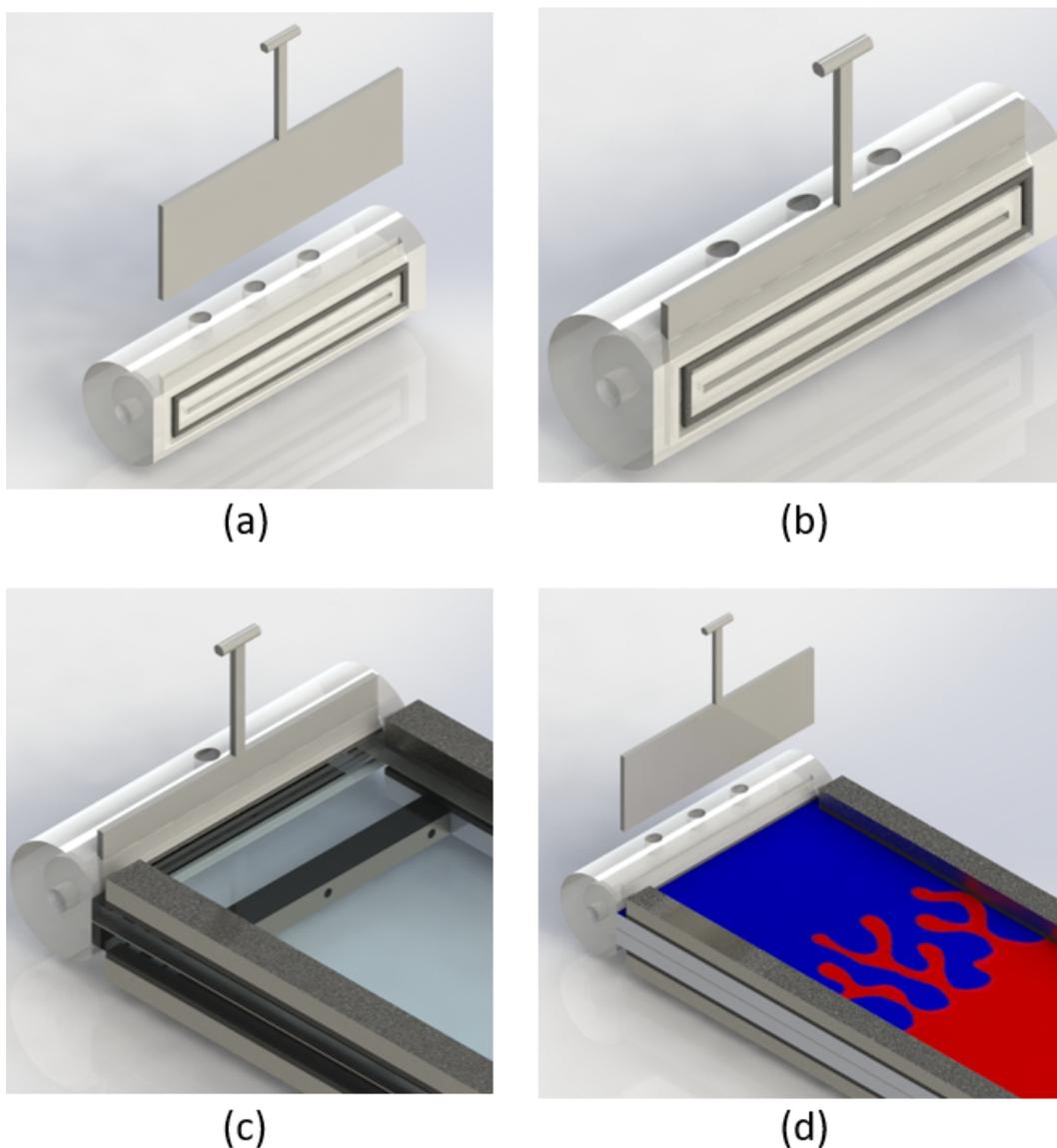


Figura 4.13: Versão final do reservatório 1 com inclusão da válvula guilhotina.

As Figuras 4.13(a) e 4.13(b) apresentam, respectivamente, o reservatório com a válvula guilhotina em suas configurações aberta e fechada. Adicionalmente, foi instalado um anel de vedação emborrachado o-ring para minimizar eventuais vazamentos. A Figura 4.13(c) demonstra o acoplamento do novo conjunto à célula e a 4.13(d) apresenta a válvula aberta e uma ilustração do escoamento.

Com o intuito de aprimorar a visualização dos fluidos sob a iluminação de LED, foi aplicado um adesivo plástico branco na parte inferior da placa de vidro que compõe a base da célula. Destacamos que, nas bancadas anteriores, havia sido utilizado papel manteiga para esse fim; no entanto, devido aos recorrentes vazamentos, optamos pela substituição por um material mais resistente, garantindo, assim, melhor desempenho visual durante os experimentos.

4.4.1

Resultados da terceira bancada

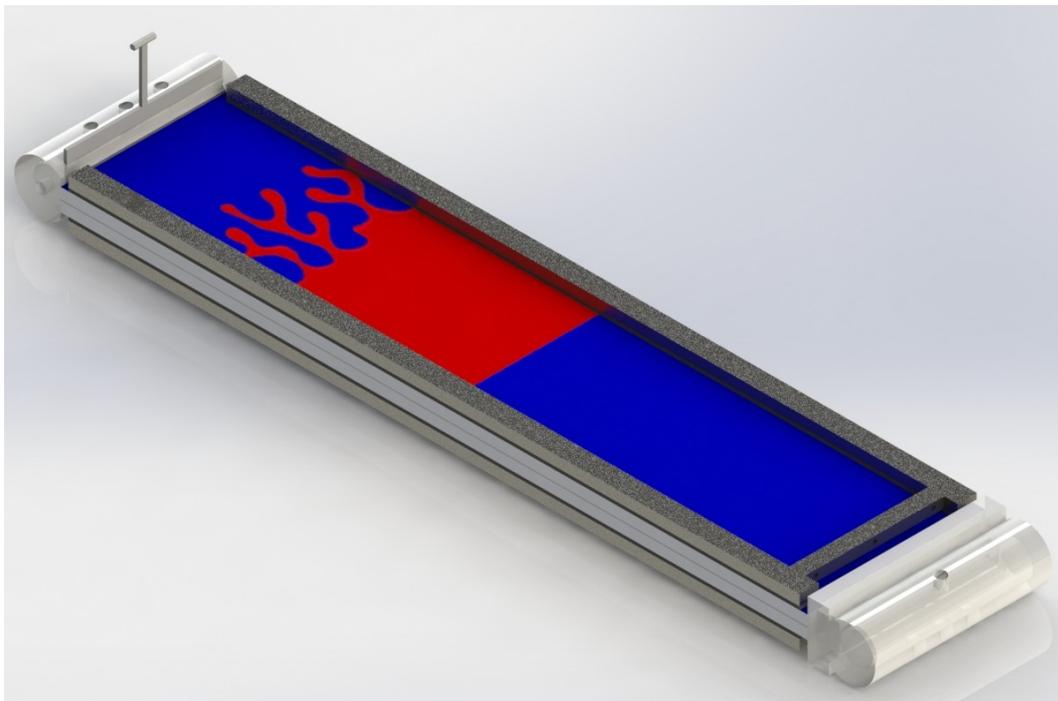


Figura 4.14: Renderização do protótipo completo e uma ilustração esquemática da formação das Instabilidades de Saffman-Taylor. Fica evidente a formação de duas interfaces ao utilizar três fases.

A Figura 4.14 apresenta a renderização do protótipo após a implementação de todas as modificações realizadas. Nela, é possível observar o novo reservatório com a válvula guilhotina acoplada, bem como uma ilustração representativa do escoamento na célula. O fluido azul representa o óleo, enquanto o fluido vermelho corresponde à glicerina. Destaca-se, à esquerda, a interface instável entre os fluidos, contrastando com a interface estável observada à direita.

Um desafio persistente em todas as bancadas experimentais foi a ocorrência de vazamentos. Apesar das diversas melhorias implementadas, a conexão entre os reservatórios e a célula não apresentou a vedação total, resultando em pequenos vazamentos durante a realização dos testes. Em determinados ensaios, essa limitação tornou-se evidente pela formação de bolhas, o que indica a presença de falhas na vedação do sistema.

Considerando que os resultados obtidos na bancada 2 não corresponderam às expectativas iniciais, realizamos modificações na bancada 1, cujos detalhes foram apresentados na seção anterior. Ao analisar os experimentos conduzidos sob condições de vazão e pressão constantes, verificamos que tanto os resultados obtidos quanto a manipulação do sistema foram mais satisfatórios

na bancada 1. No entanto, conforme discutido na seção 4.2, persistia o desafio relacionado às conexões. Diante disso, optamos por reformular a bancada 1, instalando duas bombas: uma dedicada ao óleo e outra, de maior potência, destinada à glicerina. Essa modificação eliminou a necessidade de interromper o experimento para a substituição de peças.

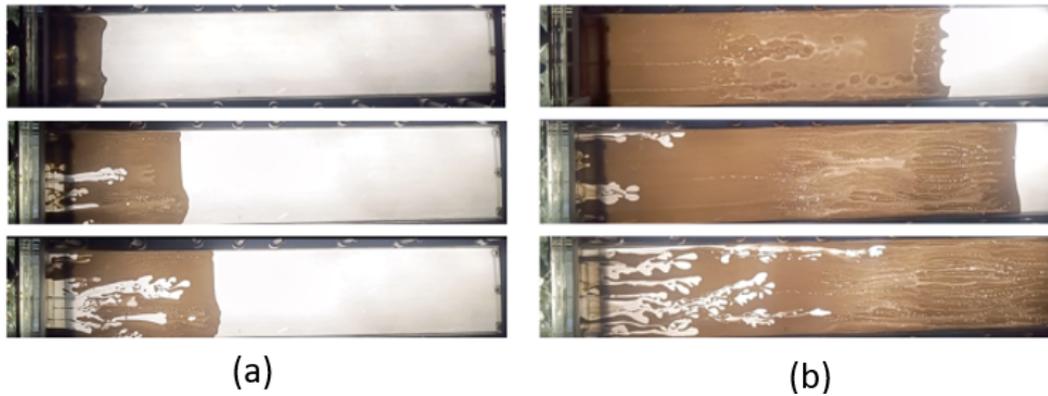


Figura 4.15: Comparação da camada intermediária pequena e grande na bancada 3 à vazão constante.

Na Figura 4.15(a), observamos uma distância D pequena entre as interfaces, com aproximadamente 5 cm , resultando em um tempo de 12 segundos para a formação da primeira instabilidade. Por outro lado, na Figura 4.15(b), a presença de uma camada intermediária D maior, com cerca de 20 cm , levou à formação do primeiro fingering em um tempo de 13 segundos.

Os resultados obtidos não estão em conformidade com as previsões teóricas nem com os testes realizados na bancada 1. A ocorrência de múltiplos vazamentos durante o experimento contribuiu para a formação de microbolhas na fase intermediária, comprometendo a qualidade dos dados. Além disso, a concentração inadequada de corante resultou em uma difusão excessiva na glicerina, interferindo diretamente na dinâmica do escoamento.

Este primeiro teste realizado na bancada 3 não pôde ser validado e, assim como os resultados obtidos na bancada 2, deve ser desconsiderado para fins de análise. No entanto, optamos por mantê-lo registrado nesta dissertação apenas para fins de documentação e histórico do processo experimental, considerando que seu insucesso foi determinante para a reavaliação da metodologia e para a evolução que culminou na realização do experimento final.

É importante destacar que, em todas as bancadas experimentais, foram observados vazamentos, especialmente na junção entre os reservatórios e a célula. Diversas melhorias foram implementadas com o objetivo de minimizar esses efeitos; no entanto, não foi possível garantir uma vedação completa do sistema. Para estudos futuros utilizando esta célula, recomendamos a re-

formulação desse dispositivo, de modo a otimizar sua vedação e desempenho experimental, principalmente no encaixe do reservatório. Acreditamos que a utilização da válvula guilhotina tenha sido fundamental na substituição dos fluidos. Não tivemos tempo suficiente para explorar mais esta nova configuração. Outro aspecto que merece destaque refere-se ao sistema de fixação do suporte metálico da célula. Durante os testes, foram utilizados grampos do tipo sargento, os quais se mostraram inadequados do ponto de vista prático e operacional. Recomendamos, portanto, a adoção de um sistema de fixação com parafusos superior, mais eficiente e estável, que facilite o manuseio e a repetibilidade dos experimentos.

5

Conclusões e Perspectivas

Investigamos o problema do deslocamento imiscível de uma camada intermediária de fluido, finita e viscosa, confinada entre dois fluidos de viscosidade desprezível, em uma célula de Hele-Shaw horizontal com geometria retangular. Esta configuração hidrodinâmica é de particular interesse por duas razões principais: a primeira diz respeito à interação entre duas interfaces acopladas que delimitam uma região de fluido duplamente conectada e, em seguida, destacamos a aplicação na técnica de recuperação avançada de petróleo por métodos de bombeamento, nas quais múltiplos fluidos são injetados sequencialmente em um meio poroso com o objetivo de aumentar a eficiência da extração.

O objetivo principal deste trabalho é analisar como a presença da interface inicialmente estável à direita (com contraste de viscosidade aproximadamente igual a -1) influencia a dinâmica inicial da interface instável à esquerda (com contraste de viscosidade aproximadamente igual a $+1$), à medida que o acoplamento entre ambas se intensifica. Com base na equação de Darcy, desenvolvemos uma abordagem teórica fundamentada em análise de estabilidade linear para investigar o comportamento desse sistema com duas interfaces móveis. A partir dessa formulação, derivamos um conjunto de equações diferenciais acopladas (EDO) que descrevem a evolução das instabilidades interfaciais de ambas as interfaces, obtendo também soluções analíticas que nos permitiram determinar as taxas de crescimento linear do sistema.

Os resultados da análise indicam que as duas interfaces já se encontram acopladas no regime linear. Identificamos que a interação entre elas é fortemente modulada pela distância D entre as interfaces inicialmente planas. Em particular, mostramos que, para valores pequenos de D , a interface inicialmente estável exerce um efeito estabilizador sobre a instável, reduzindo significativamente o número de dedos viscosos formados. Esse efeito é mais pronunciado nos instantes iniciais do deslocamento, mas tende a enfraquecer com o tempo. Adicionalmente, verificamos que, se D for suficientemente pequeno, a formação dos dedos viscosos pode ser completamente suprimida durante um curto intervalo de tempo, mesmo em cenários com elevado contraste de viscosidade.

Foram projetadas três bancadas experimentais ao longo do estudo, com o objetivo de aprimorar a confiabilidade dos testes. Modificações estruturais

relevantes incluíram a inserção de um reservatório intermediário, válvulas de alívio, suportes transparentes e melhorias nos sistemas de vedação e visualização. A primeira bancada utilizou bomba peristáltica com vazão constante; a segunda, ar comprimido com controle manual de pressão; e a terceira, duas bombas independentes para evitar a troca das conexões durante os ensaios. Apesar das melhorias sucessivas, problemas como vazamentos e presença de bolhas comprometeram parte dos testes; contudo, ainda com essa dificuldade, conseguimos extrair excelentes resultados. Os melhores resultados foram obtidos na última bancada 3 (a bancada 1 reformulada), embora ainda haja necessidade de aprimorar o sistema de vedação para experimentos futuros.

De acordo com a teoria, quando as interfaces estão próximas — separadas por um pequeno volume de fluido — há um forte acoplamento entre elas, o que tende a retardar o surgimento das instabilidades. Por outro lado, à medida que a distância entre as interfaces aumenta, essa interação enfraquece, resultando na formação mais rápida dos dedos viscosos. Conseguimos ratificar as previsões da análise de estabilidade linear através dos diversos testes experimentais. Nas figuras do capítulo 4, mostramos como o volume do fluido intermediário impacta na morfologia dos dedos viscosos. Adicionalmente, observamos que, ao surgirem, as instabilidades apresentaram dedos mais largos e com menos ramificações, o que corrobora a hipótese de acoplamento entre as interfaces e indica um efeito estabilizador atuando sobre a interface à esquerda.

Referências bibliográficas

- [1] SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. I.. **The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid.** Proceedings of the Royal Society A, 245(312), 1958.
- [2] ZHAO, M., A. P. H. A. L. J.; LI, S.. **Pattern formation of the three-layer saffman-taylor problem in a radial hele-shaw cell.** Physical Review Fluids, 05(12), 2020.
- [4] RAGAB, A.; MANSOUR, E. M.. **Enhanced oil recovery: Chemical flooding.** Egyptian Petroleum Research Institute, 2020.
- [5] QUINTELLA, J. R. F.. **Simulação da injeção alternada água-emulsão como processo de recuperação avançada de petróleo.** Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2012.
- [6] CARDOSO, S.; WOODS, A.. **“the formation of drops through viscous instability.** Journal of Fluid Mechanics, 289, 1995.
- [7] JACKSON, M.. **Interfacial instability analysis of viscous flows in a Hele-Shaw channel.** PhD thesis, Queensland University of Technology, Queensland, AU, 2001.
- [8] GIN, C.; DARIPA, P.. **Stability results for multi-layer radial hele-shaw and porous media flows.** Texas AM University, 2015.
- [9] CARLOS, F. E.. **Instabilidade magnética induzida por um fio com corrente elétrica de ferrofluido confinado em uma célula de hele-shaw.** Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2024.
- [10] VARGES, P. R.. **Deslocamento de líquidos em célula de hele-shaw considerando efeitos não newtonianos.** Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2010.
- [11] WARD, T.; WHITE, A.. **Gas-driven displacement of a liquid in a partially filled radial hele-shaw cell.** Physical Review E, 83(046316), 2011.

- [12] BENSIMON, D., K. L. L. S. S. B.; TANG, C.. **Viscous flows in two dimensions**. *Reviews of Modern Physics*, 58(4), 1986.
- [13] HOMSY, G. M.. **Viscous fingering in porous media**. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19(271-311), 1987.
- [14] HOWISON, S.. **Complex variable methods in hele–shaw moving boundary problems**. *European Journal of Applied Mathematics*, 3(209-224), 1992.
- [15] MCCLOUD, K. V.; MAHER, J. V.. **Experimental perturbations to saffman-taylor flow**. *Physics Reports*, 260(139-185), 1995.
- [16] ANJOS, P.; LI, S.. **Weakly nonlinear analysis of the saffman-taylor problem in a radially spreading fluid annulus**. *Physical Review Fluids*, 5(054002), 2020.
- [17] MIRANDA, J.; WIDOM, M.. **Weakly nonlinear investigation of the saffman–taylor problem in a rectangular hele–shaw cel**. *International Journal of Modern Physics B*, 12:931–949, 1998.
- [18] LIVERA, P.O., A. P.; MIRANDA, J.. **Magnetically induced interfacial instabilities in a ferrofluid annulus**. *Physical Review E*, 104(065103), 2021.
- [19] LIVERA, P.O., A. P.; MIRANDA, J.. **Ferrofluid annulus in crossed magnetic fields**. *Physics Fluids E*, 105(045106), 2022.