Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Augusto Rodrigues Canedo

Aplicação do método de otimização topológica com restrição à flambagem no projeto de estruturas: modelagem, manufatura aditiva e análise experimental

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Anderson Pereira

Rio de Janeiro,
Julho de 2025

Resumo

Canedo, Augusto Rodrigues; Pereira, Anderson. **Aplicação do método de otimização topológica com restrição à flambagem no projeto de estruturas: modelagem, manufatura aditiva e análise experimental**. Rio de Janeiro, 2025. Projeto de Graduação – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Foram modeladas no software FreeCad e posteriormente impressas cinco colunas. Duas delas tiveram sua geometria obtida através do código MatLab educacional topBuck250.m de otimização topológica; sem e com restrição de flambagem. As outras três, foram independentes do algoritmo. Para cada uma das cinco colunas, foi realizado um teste numérico, no próprio FreeCad, e um experimental, nos quais foi obtido a carga crítica de flambagem da estrutura. Ao final, os resultados foram comparados e o objetivo do presente trabalho, de verificar qual é a coluna que melhor resiste contra à flambagem, foi concluído. A coluna que melhor resistiu contra à flambagem, tanto pelos resultados numéricos quanto pelos experimentais, foi a otimizada com restrição de flambagem, comprovando assim a eficiência do código topBuck250.m utilizado.

Palavras-chave

Coluna; Flambagem; Otimização topológica; topBuck250.m.

Abstract

Canedo, Augusto Rodrigues; Pereira, Anderson (Advisor). **Application of a topological optimization method with buckling constraint in design of structures: modeling, additive manufacturing and experimental analysis**. Rio de Janeiro, 2025. Projeto de Graduação – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Five columns have been modeled in software FreeCad and subsequently printed. Two of them had their geometry obtained through the educational MatLab code topBuck250.m for topological optimization; with and without buckling constraint. The other three were independent of the algorithm. For each of the five columns, a numerical and experimental test have been performed, in which the critical buckling load of the structure has been obtained. At the end, the results were compared and the objective of the present work, to verify which column best resists against buckling, has been concluded. The column that best resisted against buckling, based on the numerical and experimental results, has been the one optimized with buckling constraint, thus proving the efficiency of the topBuck250.m code used.

Keywords

Column; Buckling; Topology optimization; topBuck250.m.

Sumário

1

Introdução

Estruturas que sustentam carregamentos podem falhar de várias formas, dependendo do tipo da estrutura, das condições de apoio, dos tipos de carregamentos e dos materiais usados. Por exemplo, um eixo de um veículo pode fraturar repentinamente devido a ciclos repetidos de carregamento, ou uma viga pode defletir excessivamente, de forma que a estrutura fique impossibilitada de realizar suas funções projetadas. Esses tipos de falhas são prevenidos dimensionando-se as estruturas de forma que tensões e deslocamentos máximos permaneçam dentro dos limites toleráveis. Dessa forma, a resistência e a rigidez são fatores importantes no dimensionamento.

Outro tipo de falha é a flambagem. Ela pode ocorrer em vários tipos de estruturas (como em tubulações, colunas, pontes, vigas) e pode tomar muitas formas, isto é, a estrutura pode flambar para frente, para trás, para a direita ou para a esquerda, por exemplo. A flambagem é uma das maiores causas de falhas em estruturas e, por isso, sua possibilidade deve sempre ser considerada no dimensionamento (GERE; GOODNO, 2009).

Neste contexto, a busca por soluções inovadoras e eficientes na engenharia estrutural tem se tornado cada vez mais essencial diante dos desafios contemporâneos, como a necessidade de reduzir custos e maximizar a performance dos materiais. A otimização topológica, como uma abordagem avançada para o design de estruturas, surge como uma ferramenta poderosa para atender a essas demandas (AUTODESK, 2025). E, nesse âmbito, a restrição à flambagem se torna um aspecto crítico a ser considerado, por se tratar de uma das causas mais comuns de falhas em estruturas (GERE; GOODNO, 2009).

Assim, neste trabalho pretende-se estudar algoritmos de otimização topológica, já prontos na literatura, e usar um deles, o topBuck250.m (FERRARI et al., 2021), para gerar dois tipos de colunas: sem e com restrição à flambagem. Essas colunas, junto com outras três independentes do algoritmo de otimização, serão modeladas no software FreeCad (FREECAD, 2024) e posteriormente serão impressas. Para cada uma das cinco colunas, será realizado um teste numérico, no próprio FreeCad, e um experimental, nos quais será obtida a carga crítica de flambagem da estrutura. Ao final, os resultados serão comparados e o objetivo é verificar qual, de todas as colunas feitas, é a que melhor resiste contra à flambagem. O que se espera é que a coluna otimizada com restrição à flambagem apresente as maiores cargas críticas, comprovando assim a eficiência do algoritmo.

2

Revisão bibliográfica

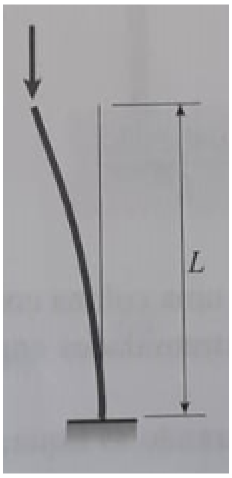
2.1

Flambagem em colunas

A seguir, serão abordados dois tipos de colunas que serão mencionados no presente trabalho, assumindo que elas são elásticas ideais: coluna engastada na base e livre no topo e coluna engastada na base e apoiada por pinos no topo.

A Figura 1 a seguir mostra uma coluna engastada na base e livre no topo, submetida a uma carga axial perfeitamente centrada no topo da coluna.

Figura 1 – Coluna engastada na base e livre no topo sofrendo flambagem.



Fonte: Gere e Goodno (2009)

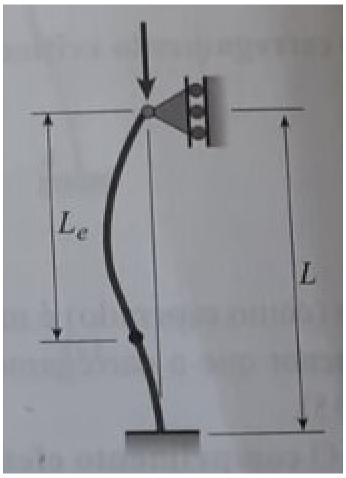
A carga crítica de flambagem de Euler para essa coluna é dada por (GERE; GOODNO, 2009):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{1}$$

onde L é o comprimento da coluna e EI é a rigidez de flexão para flexão no plano xy, em que E é o módulo de elasticidade do material da coluna e I é o menor momento de inércia da seção transversal. Vale lembrar que, se uma coluna estiver apoiada apenas em suas extremidades e estiver livre para flambar em qualquer direção, então a flexão ocorrerá sobre o eixo centroidal principal tendo menor momento de inércia. Se a seção transversal for quadrada ou circular, todos os eixos centroidais têm o mesmo momento de inércia e a flambagem pode ocorrer em qualquer plano longitudinal.

A seguir, é mostrada na Figura 2 uma coluna engastada na base e apoiada por pinos no topo, também submetida a uma carga axial perfeitamente centrada no topo da coluna.

Figura 2 – Coluna engastada e apoiada por pinos sofrendo flambagem.



Fonte: Gere e Goodno (2009)

Para essa coluna, a carga crítica de flambagem de Euler é (GERE; GOODNO, 2009):

$$P_{cr} = \frac{2.046\,\pi^2 EI}{L^2} \tag{2}$$

Por essas equações, vê-se que a estabilidade da estrutura é ampliada pelo aumento de sua rigidez (E e/ou I, em que E é propriedade do material e I é propriedade da geometria) ou pela diminuição de seu comprimento (L).

Entretanto, vale lembrar que o cálculo da carga crítica de cada coluna mencionada acima é válido apenas se a coluna for perfeitamente reta antes de o carregamento ser aplicado, se ela e seus apoios não tiverem imperfeições e se a coluna for feita de um material elástico linear que siga a lei de Hooke (GERE; GOODNO, 2009), que é o que será assumido para o presente trabalho.

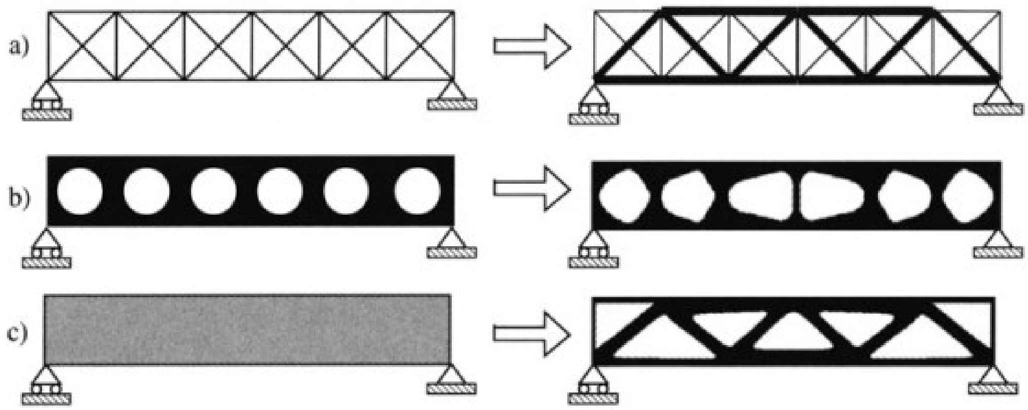
2.2

Otimização topológica

Otimização estrutural se traduz por identificar a melhor distribuição de material capaz de suportar eficientemente um conjunto de cargas. Ou seja, é encontrar a melhor configuração estrutural para cumprir uma dada função, respeitando restrições específicas; exemplos de metas que podem ser traçadas incluem produzir uma estrutura com a menor massa possível ou com a maior rigidez possível. Essas metas são escritas na forma de uma função objetivo $f(x)$, que orienta o desempenho da solução, podendo ser otimizada em termos de minimização ou maximização. Os problemas de otimização estrutural também contam com variáveis de projeto x, que indicam as características da estrutura estudada, podendo corresponder tanto à geometria quanto às propriedades dos materiais utilizados (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

Existem três diferentes tipos de otimização estrutural, ilustradas na Figura 3: otimização paramétrica, de forma e topológica. Na otimização paramétrica, as variáveis de projeto são referentes à geometria já definida da estrutura, como a espessura de um componente ou a área de uma seção transversal. Nessa otimização, apenas as dimensões da estrutura são acertadas durante o processo, já que sua configuração básica permanece a mesma. A otimização de forma, por sua vez, é caracterizada pelas variáveis de projeto representarem a forma das fronteiras de elementos da estrutura. Assim, nesse tipo de otimização se faz a modificação das fronteiras dos elementos estruturais, redesenhando essas bordas, mas sem mudar a conectividade entre os componentes da estrutura, impossibilitando a criação de novas regiões ou conexões. Por fim, a otimização topológica estabelece a melhor forma de distribuir material em uma estrutura previamente definida. Para executá-la, basta conhecer as condições de carregamento, os apoios, as restrições de projeto, o volume de material permitido e os limites do domínio onde a estrutura deve estar contida. No campo da otimização estrutural, a otimização topológica é frequentemente considerada a estratégia mais poderosa, por permitir que as variáveis de projeto representem ao mesmo tempo tanto a forma quanto a distribuição dos elementos estruturais, sendo assim uma ferramenta flexível e abrangente (BENDSØE; SIGMUND, 2004; CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

Figura 3 - Tipos de otimização estrutural: a) paramétrica; b) de forma; c) topológica.

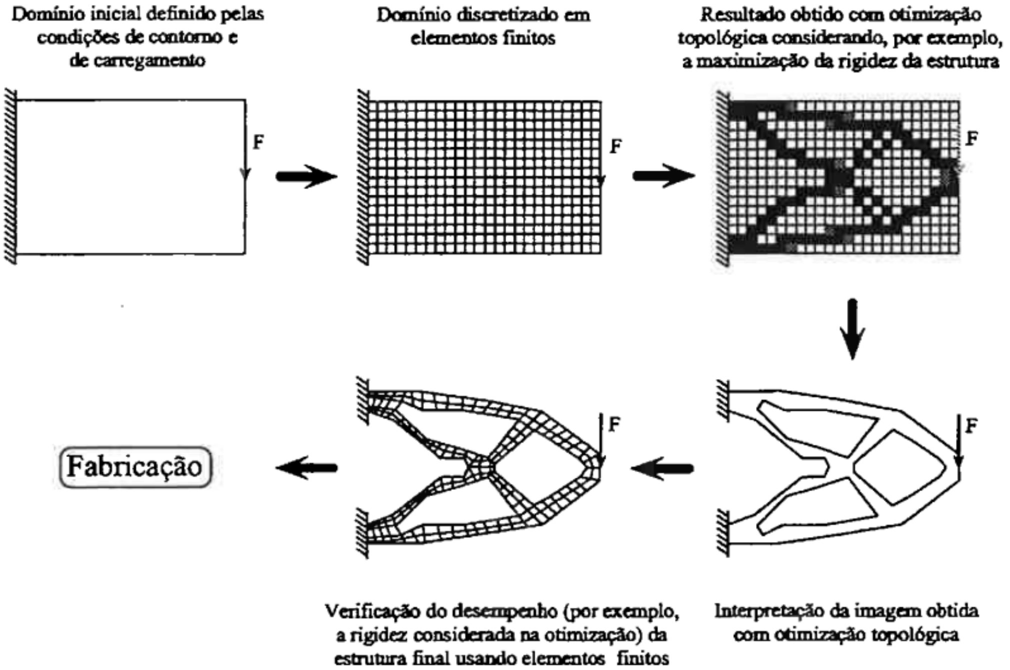


Fonte: Bendsøe e Sigmund (2004)

A elaboração do problema de otimização topológica teve origem com os trabalhos de Bendsøe e Kikuchi (1988), por meio do uso da técnica de homogeneização. A partir daí, surgiram desenvolvimentos que ampliaram as formas de abordar e resolver esse tipo de problema. Na literatura, os métodos mais comuns podem ser organizados em duas grandes classes: os de fronteiras e os de densidade. A diferença entre esses métodos é a forma como as variáveis de projeto modelam a configuração topológica final. No presente trabalho, será feito uso dos métodos de densidade.

Nos métodos baseados em densidade, a estrutura é representada por meio de um campo de densidades distribuído sobre uma malha discreta. As densidades assumem valores que variam entre 0 e 1, onde 0 indica ausência de material (vazio) e 1 indica uma região sólida (BENDSØE; SIGMUND, 2004). A Figura 4 mostra um exemplo de otimização topológica de uma estrutura utilizando o método de densidades. No processo, parte-se de um domínio inicial tendo definido o carregamento e o apoio, até a fabricação da estrutura final. É importante ressaltar que o detalhamento da solução depende diretamente do nível de refinamento da malha, de forma que, quanto mais refinada for a malha, melhor o detalhamento da solução, porém maior o custo computacional.

Figura 4 – Projeto de uma peça pela otimização topológica usando o método de densidades.



Fonte: Silva (2003)

De modo geral, os métodos baseados em densidade utilizam variáveis de projeto contínuas, que mudam a rigidez dos elementos da malha por meio de funções de parametrização. Um método de densidade eficaz dentro dessa abordagem é o SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

2.3

Método SIMP

Conforme indicado na seção anterior, no SIMP o domínio do problema é dividido em uma malha, na qual a cada elemento dessa malha é atribuída uma variável conhecida como densidade artificial. Cada uma delas pode variar continuamente entre 0 e 1, servindo para ajustar localmente as propriedades mecânicas do material. Daí, o objetivo dessa otimização é encontrar a melhor distribuição dessas densidades, de forma a alcançar o valor ótimo de uma função objetivo respeitando as restrições impostas (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

O SIMP é muito usado em problemas de minimização de compliance, que pode ser entendida como o inverso da rigidez de uma estrutura. Ela é obtida pelo produto do vetor global de forças $\boldsymbol{F}$ pelo vetor global de deslocamentos nodais $\boldsymbol{u}$. Nesses problemas de minimização de compliance, usualmente eles têm restrições relacionadas ao volume total de material que pode ser usado para criar a estrutura. Problemas desse tipo podem ser escritos como mostrado na eq. (3) (BENDSØE; SIGMUND, 2004), onde a variável de projeto é um vetor x, de distribuição de densidades ao longo da malha, em que x_e é a densidade de cada elemento.

$$Minimizar: c(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{F}$$

$$Sujeito\ a:$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} x_e - v_{max} \leq 0$$

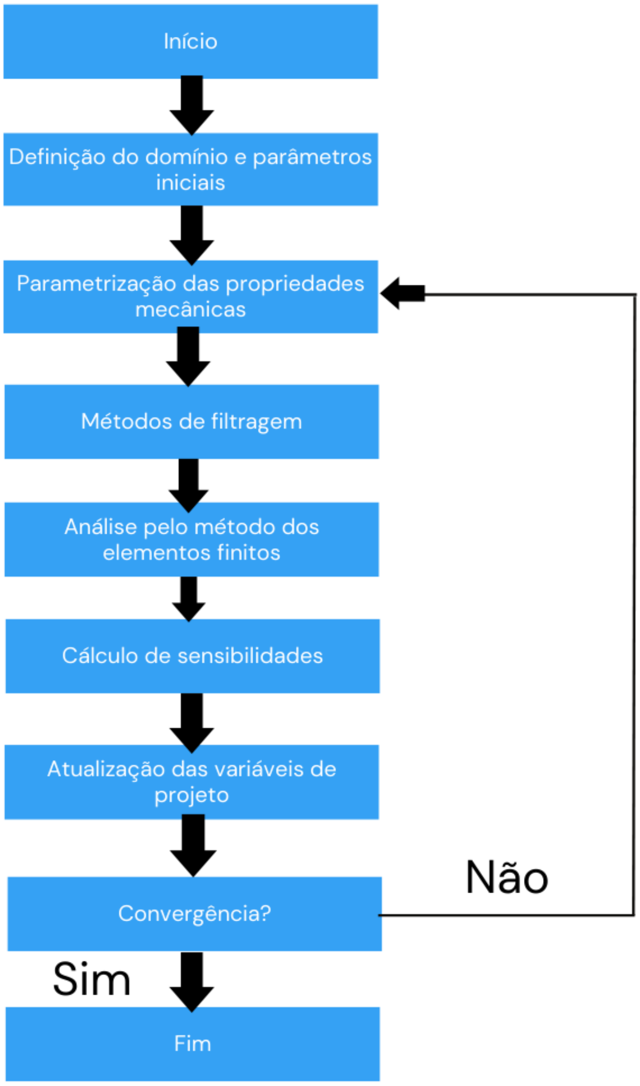
$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}$$

$$0 \leq x_{min} \leq \boldsymbol{x} \leq 1 \tag{3}$$

A função objetivo é representada pela compliance $c(x)$, na presença de uma restrição que impõe um limite ao volume total de material, que não pode ultrapassar o valor máximo v_{max}. Esse volume total de material é determinado pela soma dos volumes dos elementos, levando-se em conta um total de N_e elementos. Quanto à equação de equilíbrio linear elástico, $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}$, a matriz de rigidez $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$ depende diretamente das densidades x_e, já que elas controlam a rigidez de cada elemento. É importante também estabelecer um limite inferior para as densidades artificiais, evitando que elas assumam valores nulos. A definição de um valor mínimo x_{min} não nulo a elas garante que não ocorra singularidade na solução do problema.

A Figura 5 mostra um fluxograma com as etapas do processo de otimização topológica utilizando o método SIMP. No bloco de "Definição do domínio e parâmetros iniciais", é onde se define as condições de contorno, carregamentos, valores iniciais das variáveis e outros parâmetros que regem a otimização, além de também obviamente se definir o domínio de projeto.

Figura 5 – Fluxograma mostrando como funciona o método SIMP.



O método SIMP tem como principal característica a modelagem das propriedades estruturais em função das densidades artificiais x, partindo do pressuposto de que, em cada elemento, as propriedades são constantes, em que a função de penalização parametriza essas propriedades. Essa função assume a forma de uma potência, em que a base são as densidades artificiais e o expoente é um parâmetro denominado fator de penalização fp.

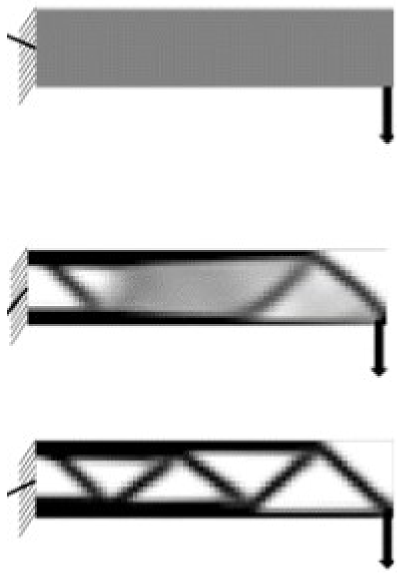
Para um elemento penalizado, seu módulo de elasticidade E_e é calculado multiplicando o módulo de elasticidade E_0 associado ao material sólido pela função de penalização, conforme aponta a eq. (4). Assim, uma densidade artificial igual a zero representaria uma região vazia, enquanto a densidade igual a 1 representaria um material com rigidez definida por E_0.

$$E_e = x_e^{fp} E_0 \tag{4}$$

O valor do fator de penalização a ser definido é importante, já que, além de influenciar a geometria da estrutura avaliada, também parametriza o seu comportamento mecânico. Idealmente, se busca na otimização topológica modelos compostos exclusivamente por regiões com ou sem material, ou seja, apenas densidades iguais a 1 ou zero, evitando-se os valores intermediários. Essas densidades intermediárias, também conhecidas como regiões cinzentas, não são desejadas, uma vez que representam materiais parcialmente presentes (porosos), o que compromete a viabilidade de fabricação de estruturas com métodos de manufatura tradicionais.

A Figura 6 mostra duas soluções para um mesmo problema de otimização. No modelo, cada elemento tem sua densidade mapeada, e a malha é estabelecida numa escala de cinza em que a cor preta indica uma densidade igual a 1 (de material sólido) e a cor branca indica a densidade mínima (vazio). Assim, pode-se observar que, na primeira solução, não se evita as regiões com densidades intermediárias (solução não penalizada), enquanto que na segunda solução sim (solução penalizada).

Figura 6 – Comparação de soluções pelo método SIMP com densidades intermediárias (não penalizada) e sem densidades intermediárias (penalizada), respectivamente.

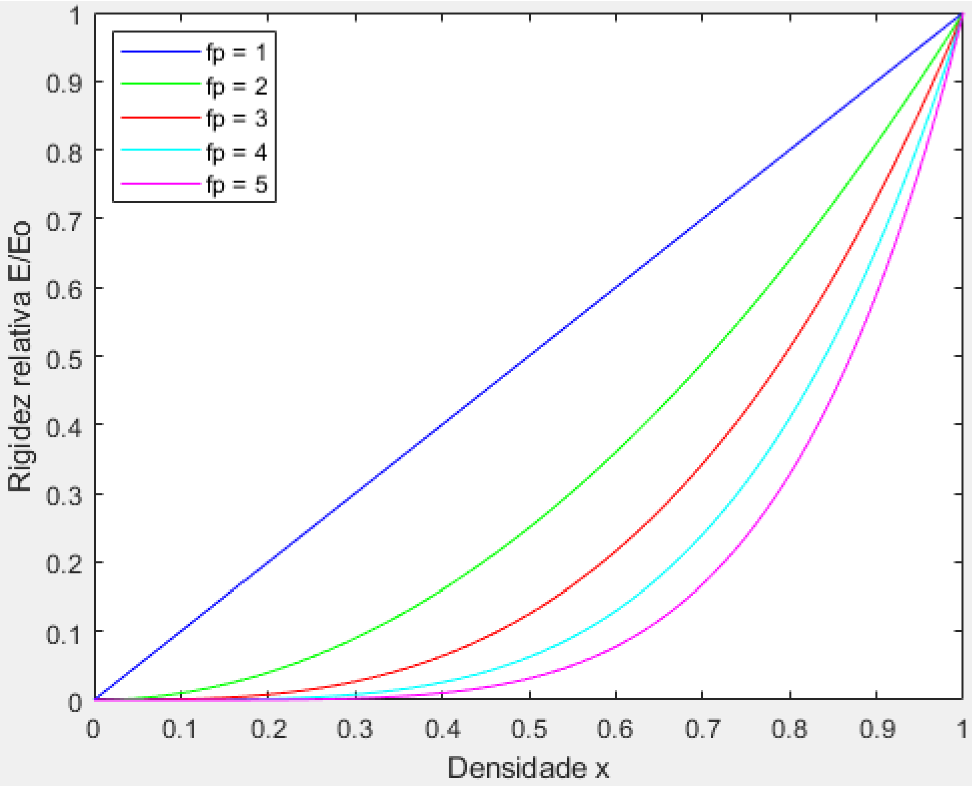


Fonte: Moreira et al. (2020)

A presença de densidades intermediárias nas soluções pode ser controlada por meio da escolha adequada do valor do fator de penalização fp. Utilizar um valor de fp maior que 1 faz com que a rigidez relativa $\frac{E}{E_0}$ dos elementos que apresentam densidade intermediária seja desproporcionalmente baixa com relação à densidade, o que se traduz por uma utilização ineficiente de material da estrutura otimizada. Em outras palavras, especificar um valor de fp maior que 1 torna "antieconômico" ter densidades intermediárias no projeto ótimo. (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

A Figura 7 mostra esse princípio, que, levando em conta uma parametrização como a do método SIMP, apresenta o comportamento da rigidez relativa de um elemento em função da densidade. São exibidas cinco curvas: uma com $fp = 1$, representando uma relação linear, e outras com $fp = 2$, $fp = 3$, $fp = 4$ e $fp = 5$.

Figura 7 – Gráfico rigidez relativa versus densidade artificial para fatores de penalização diferentes.



É possível observar que, na faixa intermediária (densidades não próximas a 0 ou 1), a diferença entre a curva de $fp = 1$ e a de $fp = 2$ se acentua, o que indica que, na curva de $fp = 2$, os valores de rigidez são significativamente mais baixos com relação aos da curva de $fp = 1$ em valores iguais de densidade, e essa rigidez diminui ainda mais com o aumento de fp. Já nas extremidades (densidades próximas a 0 ou 1), os valores de rigidez relativa são semelhantes entre todas as curvas.

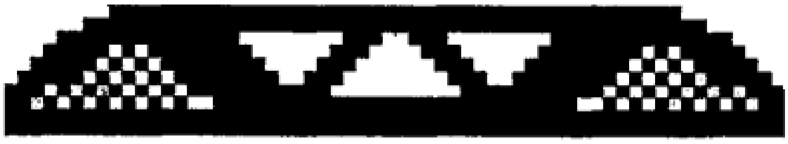
Considerando os valores de densidade artificial como uma medida de custo no contexto da otimização sob restrição de volume de material, vê-se que no problema com $fp = 2$ os valores de densidade intermediários são vistos como menos vantajosos com relação aos de $fp = 1$, e quanto maior fp, esses valores de densidade intermediários são vistos como menos vantajosos ainda, sendo, portanto, descartados pela solução do problema. Tipicamente, usar $fp = 3$ já é suficiente para se evitar as densidades intermediárias de forma efetiva (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

2.4

Problemas numéricos

Quando se aplica a penalização no método SIMP, é possível surgir algumas complicações nos resultados da otimização, como por exemplo dependência de malha, padrões de tabuleiro e mínimos locais. O padrão de tabuleiro é caracterizado por áreas da solução onde os elementos alternam entre sólido e vazio, como ilustrado na Figura 8.

Figura 8 – Ilustração do padrão de tabuleiro.



Fonte: Sigmund e Petersson (1998)

Em uma solução assim, tem-se uma rigidez estrutural artificialmente elevada, não refletindo a realidade física dessa estrutura. Por esse motivo, é desejável evitar tais padrões, já que não representam distribuições de densidade verdadeiramente otimizadas (DÍAZ; SIGMUND, 1995; SIGMUND; PETERSSON, 1998).

Sobre a dependência de malha, ela se caracteriza por diferentes níveis de discretização da malha levarem a soluções qualitativamente distintas para um mesmo problema, como observado por Sigmund e Petersson (1998). Para resolver esses problemas mencionados, podem-se utilizar métodos de filtragem, que atuam ajustando a densidade de cada elemento com base nas densidades dos elementos vizinhos.

Por fim, outro problema que o uso do método SIMP pode trazer são os mínimos locais na solução do problema, que implica que pequenas variações nos parâmetros iniciais, como num parâmetro de filtro, na geometria do domínio de projeto, no número de elementos etc., podem levar a soluções finais drasticamente diferentes para um mesmo problema. Para mitigar essa complicação, é comum recorrer aos métodos de continuação. Nessa técnica, com um fator de penalização igual a 1, a otimização se inicia, e esse valor vai sendo aumentado gradualmente até que seja alcançado o seu valor desejado originalmente (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

2.5

Restrições de flambagem na otimização topológica

Resolver problemas de otimização minimizando compliance com uma limitação de volume tende a gerar estruturas resistentes simplesmente à compressão ou tração. Contudo, projetos assim podem falhar por flambagem, uma vez que a carga crítica de flambagem é associada à rigidez à flexão (CLAUSEN; AAGE;

SIGMUND, 2016). Analogamente, Neves et al. (1995) apontavam que, impor uma restrição puramente de volume máximo, muitas vezes faz com que o resultado da otimização seja de estruturas pouco rígidas à flexão, esbeltas. Em situações como essa, a flambagem passa a ser o principal fator limitante da resistência estrutural, e por isso, torna-se imprescindível considerar também a flambagem para o processo de otimização. Nesse propósito, a formulação dos problemas pode ser dada conforme mostrado na eq. (5) abaixo (BENDSØE; SIGMUND, 2004):

$$Maximizar: \lambda_f = min\,\{\lambda_i\}, i = 1,2, \dots, n$$

$$Sujeito\ a:$$

$$\left(\boldsymbol{G} - \frac{1}{\lambda_i}\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{w_i} = 0\ , i = 1,2, \dots, n, w_i \neq 0$$

$$\sum_{e=1}^{N_e} x_e - v_{max} \leq 0$$

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{U^T F} \leq \boldsymbol{c_{max}}$$

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F}$$

$$0 \leq x_{min} \leq x \leq 1 \tag{5}$$

Em que $\boldsymbol{K}$ é a matriz de rigidez, $\boldsymbol{G}$ é a matriz de rigidez geométrica da estrutura, λ é um autovalor, que representa uma carga de flambagem, e w é um autovetor, correspondente a um modo de flambagem. O índice i indica o modo de flambagem, e n é o número total de modos de flambagem. Dessa forma, cada um dos autovalores obtidos é atrelado a um dos autovetores e corresponde à carga de um determinado modo de flambagem, em que λ_f representa a menor dessas cargas. Porém, deve-se destacar que nessa abordagem estão envolvidos alguns desafios típicos, como a presença de modos de flambagem espúrios em estruturas isotrópicas, que surgem em regiões com baixa densidade, e a aproximação/troca dos modos de flambagem.

Para uma melhor convergência de solução de problemas de otimização topológica como o mostrado na eq. (5), Gao e Ma (2015) propõem uma estratégia em duas fases. Na primeira, o problema é resolvido sem considerar as restrições de flambagem, e esses resultados são usados como ponto de partida para a segunda fase, para resolver o problema agora considerando as restrições de flambagem.

2.6

Problemas devido à inclusão de restrições de flambagem

Conforme mencionado anteriormente, a adição de restrição de flambagem para a otimização traz problemas adicionais ao processo, correspondidos pela aproximação/troca dos modos de flambagem e a presença de modos de flambagem espúrios em regiões com baixa densidade.

Os elementos da malha num problema de otimização topológica têm o seu valor de densidade entre 1 e um valor mínimo, suficientemente baixo para que sua contribuição à rigidez da estrutura seja desprezível. Então, numa estrutura otimizada topologicamente, as regiões onde não há material são, na verdade, regiões com densidade muito baixa, o que evita o aparecimento de singularidades na análise por elementos finitos, não precisando mudar a malha para inserir regiões vazias. O problema é que nessas regiões de baixa densidade podem surgir os chamados modos de flambagem espúrios. Normalmente, eles têm autovalores muito inferiores com relação aos notados nos modos que envolvem as regiões sólidas da estrutura (NEVES et al., 1995). Visando lidar com esse problema, Neves et al. (1995) sugeriram que os elementos com densidade menor que um determinado valor mínimo tivessem sua influência descartada na formação da matriz global de rigidez geométrica. Essa técnica de fato impede a presença dos modos espúrios, mas também pode levar a instabilidades no processo de otimização, já que a eliminação brusca dessa influência de alguns elementos pode impactar em modificações nas restrições e na função objetivo, não sendo portanto uma opção viável. Assim, uma outra opção, essa sim viável, é empregar uma parametrização da rigidez conforme indicado nas eqs. (6) e (7) (BENDSØE; SIGMUND, 2004):

$$E_k = [x_{min} + (1 - x_{min})x^{fp}]E_0 \tag{6}$$

$$E_g = [x^{fp}]E_0 \tag{7}$$

em que x_{min} representa o valor mínimo de densidade adotado no problema, E_0 refere-se ao módulo de elasticidade correspondente a um elemento completamente denso (material sólido) e E_k e E_g são os módulos de elasticidade usados para formar, respectivamente, as matrizes de rigidez e rigidez geométrica. É importante salientar que, em se tratando de mitigar a ocorrência dos modos espúrios de flambagem, a eficácia dessa forma de parametrização depende muito de uma escolha apropriada para o valor de x_{min}. Um valor de x_{min} muito pequeno não é capaz de suprimir o surgimento dos modos espúrios, uma vez que, para que se consiga isso, é necessário uma distinção de magnitude significativa o suficiente entre a matriz de rigidez e a matriz de rigidez geométrica, e com um x_{min} tão pequeno, não se tem o suficiente desse "afastamento". Em contrapartida, definir um x_{min} alto leva a uma contribuição excedente dos elementos vazios na rigidez da estrutura, podendo levar a resultados errôneos. Em problemas bidimensionais resolvidos por meio do método SIMP, estudos indicam que, ao se adotar valores de x_{min} entre 10^{-8}e 10^{-6}, há uma considerável diminuição na ocorrência de modos espúrios, sem comprometer o cálculo da rigidez estrutural (GAO; MA, 2015; GAO et al., 2020).

Quando se vai aplicar uma restrição de flambagem em um projeto de otimização topológica, o que alguns poderiam pensar em fazer é aplicar essa restrição apenas à menor das cargas de flambagem (carga crítica), em que durante a otimização esse valor seria aumentado progressivamente. Porém, isso pode fazer com que o valor dessa carga de flambagem ultrapasse o valor da carga de outros modos que não foram restringidos. Dessa forma, na otimização irá ocorrer uma troca do modo crítico, baseado na restrição implementada, e assim será provocada uma descontinuidade no problema. E, com essa adversidade acontecendo continuamente, diversos modos distintos podem acabar se concentrando em torno de um mesmo valor de carga crítica, além de serem inseridas diversas descontinuidades no problema (BOOM, 2014; DUNNING et al., 2016). Para lidar com essa situação, Dunning et al. (2016) indicam que, ao invés de se considerar somente o menor autovalor, seja incluído um conjunto mais amplo de modos nas restrições, o que permite registrar de maneira mais íntegra o comportamento da estrutura frente a diferentes modos e contribui para evitar os efeitos indesejados da troca de modos.

2.7

Códigos educacionais de otimização topológica

A seguir, serão explicados quatro códigos educacionais de otimização topológica, todos eles disponíveis na literatura.

Sigmund (2001) desenvolveu no software Matlab o código top99.m, que é considerado um dos pioneiros e principais referências de códigos educacionais na área da otimização topológica. Conforme o nome do código sugere, este apresenta 99 linhas, das quais 36 são destinadas ao programa principal, 12 linhas para o “otimizador” baseado em Critério de Otimalidade, 16 linhas para o filtro de sensibilidade, que evita dependência de malha e padrões de tabuleiro, e 35 linhas para o código de Elementos Finitos. O referido código resolve essencialmente o problema formulado pela eq. (3), através do método SIMP, e é aplicado para estruturas 2D estaticamente carregadas, porém pode ser estendido para trabalhar com estruturas 3D. Além disso, o programa é facilmente extensível para mudar condições de contorno/carregamento e acrescentar elementos passivos para a estrutura a ser projetada, necessitando geralmente de poucas linhas para se fazer isso.

O código top88.m, desenvolvido por Andreassen et al. (2011), é visto como sucessor direto do top99.m, trazendo pequenas modificações que contribuíram para a melhoria da eficiência do código, reduzindo-o para 88 linhas. Contudo, a maior novidade foi a implementação de mais uma opção de filtragem. Com o top88.m, é possível escolher entre utilizar o filtro de sensibilidade, que era o usado no top99.m, ou um filtro de densidade, para a solução do problema de otimização.

Posteriormente, Ferrari e Sigmund (2020) deram sucessão ao top88.m e lançaram o código top99neo.m, que é ainda mais eficiente, mesmo apresentando 99 linhas. Neste programa, foram incluídas diversas extensões, como especificação de domínios passivos, projeção de densidades preservativa de volume (GUEST et al., 2004; WANG et al., 2011) e estratégias de continuação para os parâmetros de penalização e projeção.

Mais tarde, Ferrari et al. (2021) desenvolveram e lançaram um outro código, de 250 linhas e para problemas de otimização 2D, como extensão do top99neo.m: o topBuck250.m. O grande diferencial deste código é que, ao contrário do top99neo.m, ele é capaz de resolver problemas de otimização que consideram o fenômeno da flambagem. Neste tipo de problema, para um dado modelo, o código topBuck250.m consegue resolver essencialmente o problema formulado pela eq. (5), utilizando as técnicas para evitar a presença de modos de flambagem espúrios e a aproximação/troca dos modos de flambagem, comentadas anteriormente. Por outro lado, caso o problema a ser resolvido não conte com nenhum tipo de restrição de flambagem, o algoritmo opera de forma essencialmente igual com relação ao top99neo.m.

O código topBuck250.m é inicializado com o input *topBuck250(nelx, nely, penalK, rmin, ft, ftBC, eta, beta, ocPar, maxit, Lx, penalG, nEig, pAgg, prSel, x0).* Os parâmetros *nelx* e *nely* correspondem ao número de elementos na malha nas direções horizontal e vertical, respectivamente, *penalK* é o expoente de penalização fp, usado para a interpolação da eq. (6), e *rmin* é o raio do filtro. O argumento *ft* é usado para selecionar o esquema de filtragem: apenas filtragem de densidade, se *ft* = 1, enquanto *ft* = 2 ou *ft* = 3 também permite uma projeção de densidades denominada projeção relaxada de Heaviside, com *eta* e *beta* como parâmetros para essa projeção. No caso, usar *ft* = 3 faz com que a referida projeção seja preservativa de volume (GUEST et al., 2004; WANG et al., 2011), enquanto que com *ft* = 2 não há essa preservação. Já *ftBC*, especifica as condições de contorno do filtro; 'N' para zero-Neumann ou 'D' para zero-Dirichlect, e *maxit* define o número máximo de iterações para a otimização. *Lx* é o comprimento físico do domínio da malha, e sua altura é obtida pela razão de aspecto (linha 11 do código). O parâmetro *penalG* é o expoente de penalização usado para a interpolação da eq. (7), que aqui pode ou não ser igual a *penalK*. Por sua vez, *nEig* é o número de autovalores λ incluídos na otimização e *pAgg* é o valor inicial de um fator de agregação KS.

ocPar contém os parâmetros que governam a rotina de atualização de projeto. Trata-se de uma lista com os seguintes parâmetros: [$move$, $asReduce$, $asRelax$], e essa lista é usada como parâmetro da função ocUpdate, que atualiza as seguintes variáveis de projeto no código: assíntotas movimentáveis (as), o parâmetro $lmid$ e o vetor de densidades contemplando apenas os elementos ativos, e os parâmetros as e $lmid$ são usados para obter esse vetor de densidades atualizado.

prSel é uma estrutura de dados que especifica o problema de otimização e os limites de restrições correspondentes. Isso pode assumir as formas:

- *prSel* $= \{['B','C','V'],[Cmax, Vfmax]\}$;

- *prSel* $= \{['V','C','B'],[Cmax, Lmin]\}$;

- *prSel* $= \{['C','V'], Vfmax\}$;

- *prSel* $= \{['V','C'], Cmax\}$

A primeira subestrutura, *prSel{1}*, é uma lista de 2 ou 3 caracteres, usada para selecionar o problema de otimização a ser resolvido. O primeiro caractere define a função objetivo e o(s) outro(s) a(s) restrição(ões). Por convenção, define-se 'B' para buckling (flambagem), 'C' para compliance e 'V' para fração de volume. Se 'B' não estiver entre o conjunto de argumentos, todas as operações relacionadas à flambagem são ignoradas e essencialmente recupera-se o código top99neo.m. Os problemas das eqs. (3) e (5) são selecionados definindo *prSel{1}* $= ['C','V']$ e *prSel{1}* $= ['B','C','V']$, respectivamente.

A segunda subestrutura, *prSel{2}*, contém 1 ou 2 valores numéricos, especificando o(s) limite(s) da(s) restrição(ões) de compliance, volume, buckling, representados por $Cmax$, $Vfmax$ e $Lmin$, respectivamente. $Cmax$ é associado a compliance máxima permitida, $Vfmax$ representa a fração de volume máxima permitida e $Lmin$ é o valor mínimo permitido para os autovalores λ.

O último argumento do input, $x0$, é uma string com o nome de um arquivo MatLab de dados e pode ser usado para especificar uma distribuição de material inicial não uniforme. Isso é útil e é uma boa estratégia para resolver problemas de flambagem, a partir de um projeto inicial. No caso, se resolve primeiro o problema de otimização sem considerar flambagem, e, com a distribuição final de material obtida com isso, se usa ela como a distribuição de material inicial para resolver o mesmo problema de otimização, porém agora considerando flambagem. Assume-se que essa distribuição de material é salva como "xInitial" em um arquivo MatLab de dados e, em seguida, atribuída às variáveis de projeto na linha 91 do código. Caso o argumento $x0$ não seja passado para o input do topBuck250.m, o vetor de densidades é inicializado com a distribuição de material uniforme que atende à fração de volume especificada $volfrac$ (linhas 93-94 do código). Para problemas de minimização de volume (ou seja, para $prSel\{1\}(1) = 'V'$), $volfrac = 1$. Mas, se o problema não for de minimização de volume, $volfrac = Vfmax$, definido pelo usuário.

3

Metodologia

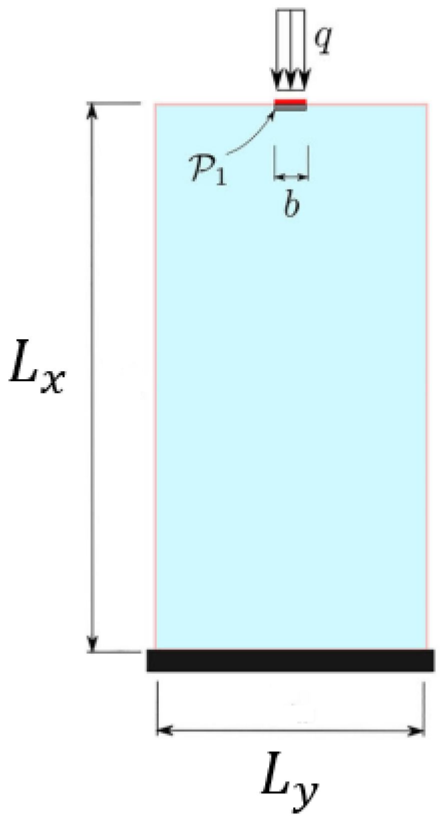
Primeiramente, foram modeladas no software FreeCad 5 colunas distintas, mostradas na figura a seguir.

Figura 9 – Modelagem de colunas no software FreeCad, numeradas.

As colunas 1, 2, 3, 4 e 5 foram denominadas “coluna reta”, “coluna otimizada”, “coluna catenária”, “coluna em V” e “coluna em A”, respectivamente. Elas serão simuladas no próprio FreeCad e também ensaiadas experimentalmente, e os resultados numéricos e experimentais, de carga crítica de flambagem, serão comparados. Além disso, para que a comparação dos resultados entre as colunas seja justa, todas foram modeladas com aproximadamente o mesmo volume, de 38000mm³, com uma espessura de 10mm e com a seção transversal no topo sendo de 10mm x 10mm. Também, as colunas têm uma altura total de 215mm, com a base tendo 15mm de altura e 120mm de comprimento.

A geometria das colunas reta e otimizada foi obtida através do código topBuck250.m. Esse código foi utilizado para otimizar o seguinte modelo:

Figura 10 – Modelo a ser otimizado com o código topBuck250.m.

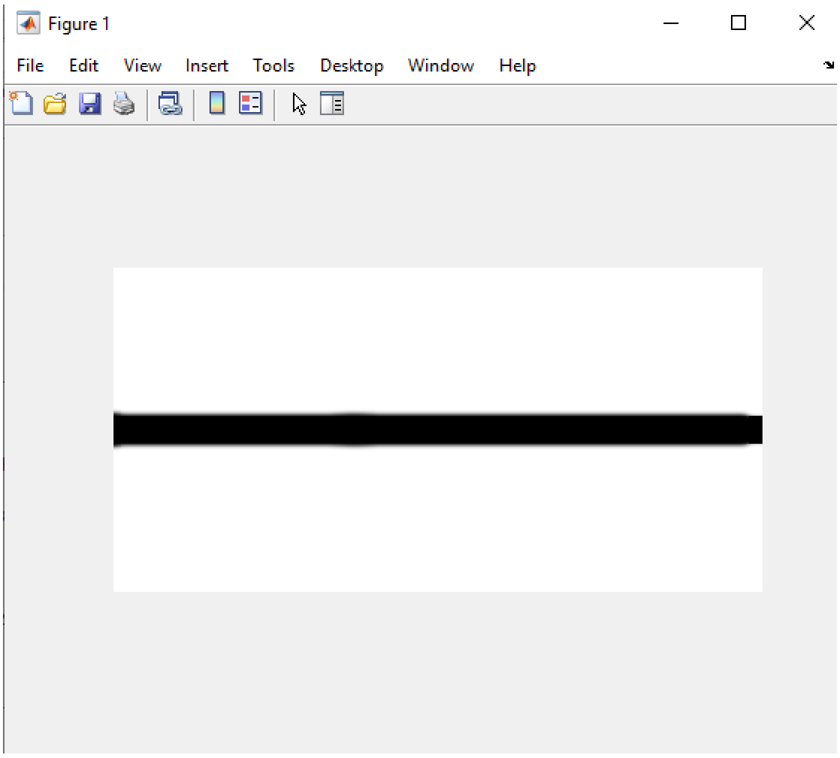


Fonte: Ferrari et al. (2021)

Ou seja, é uma coluna engastada na base, com = L_x = 2, L_y = 1 e um carregamento no topo distribuído pelo comprimento de b = 1/15, tendo magnitude total q = 10^{-3}. A referida coluna foi considerada sendo discretizada por 480 x 240 elementos, com a área retangular de 10x20 elementos logo abaixo do carregamento constituindo um conjunto de elementos passivos sólidos P_1, e não há elementos passivos vazios neste modelo.

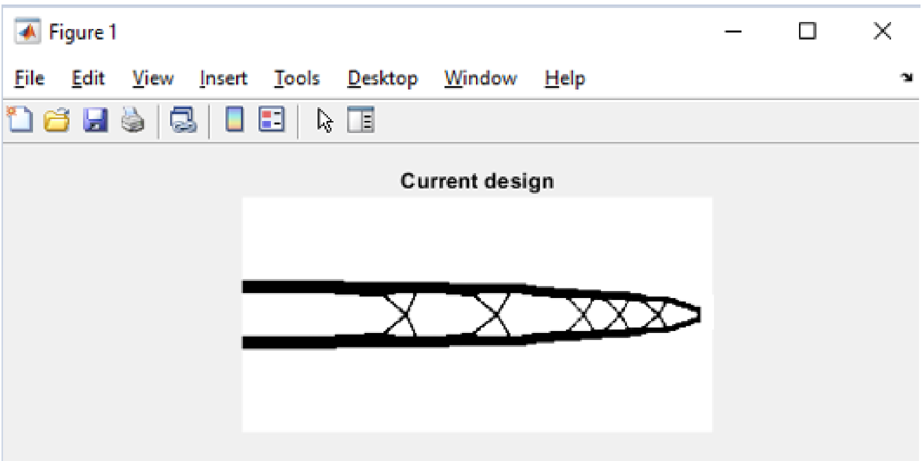
Inicialmente, otimizou-se a estrutura da Figura 10 com o input *topBuck250(480, 240, 3, 4, 2, 'N', 0.5, 2, [0.1, 0.7, 1.2], 300, 2, 3, 12, 200, {['C', 'V'], 0.1})*, gerando o resultado da Figura 11.

Figura 11 – Geometria obtida para a coluna reta, sem restrição de flambagem.



Essa distribuição de material obtida foi salva como "xInitial" em um arquivo MatLab de dados, e depois, o código foi inicializado novamente, com o input *topBuck250(480, 240, 3, 4, 2, 'N', 0.5, 2, [0.1, 0.7, 1.2], 1000, 2, 3, 12, 200, {['B', 'C', 'V'], [2.5, 0.1]}, 'xInitial.mat').* Com isso, foi gerado o resultado abaixo.

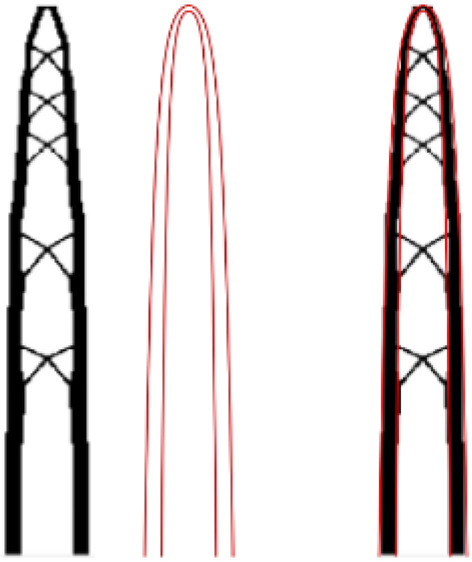
Figura 12 – Geometria obtida para a coluna otimizada, com restrição de flambagem.



Cada uma das geometrias obtidas, mostradas pelas Figuras 11 e 12, foi salva como uma imagem, e essas imagens foram importadas para o FreeCad, onde foi feito um esboço por cima delas para se modelar as colunas reta e otimizada.

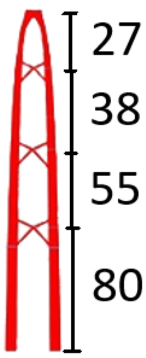
Sobre a coluna otimizada, foi observado que seu formato lembra um arco de catenária. Assim, foi criado um arco de catenária no MatLab para ser sobreposto na coluna otimizada, para verificar se realmente os dois modelos se adequam. Essa sobreposição é mostrada abaixo, na qual pode ser visto que sim, os dois modelos se adequam. O referido arco foi criado a partir do código MatLab mostrado na seção de Apêndice.

Figura 13 – Sobreposição de um arco de catenária na coluna otimizada.



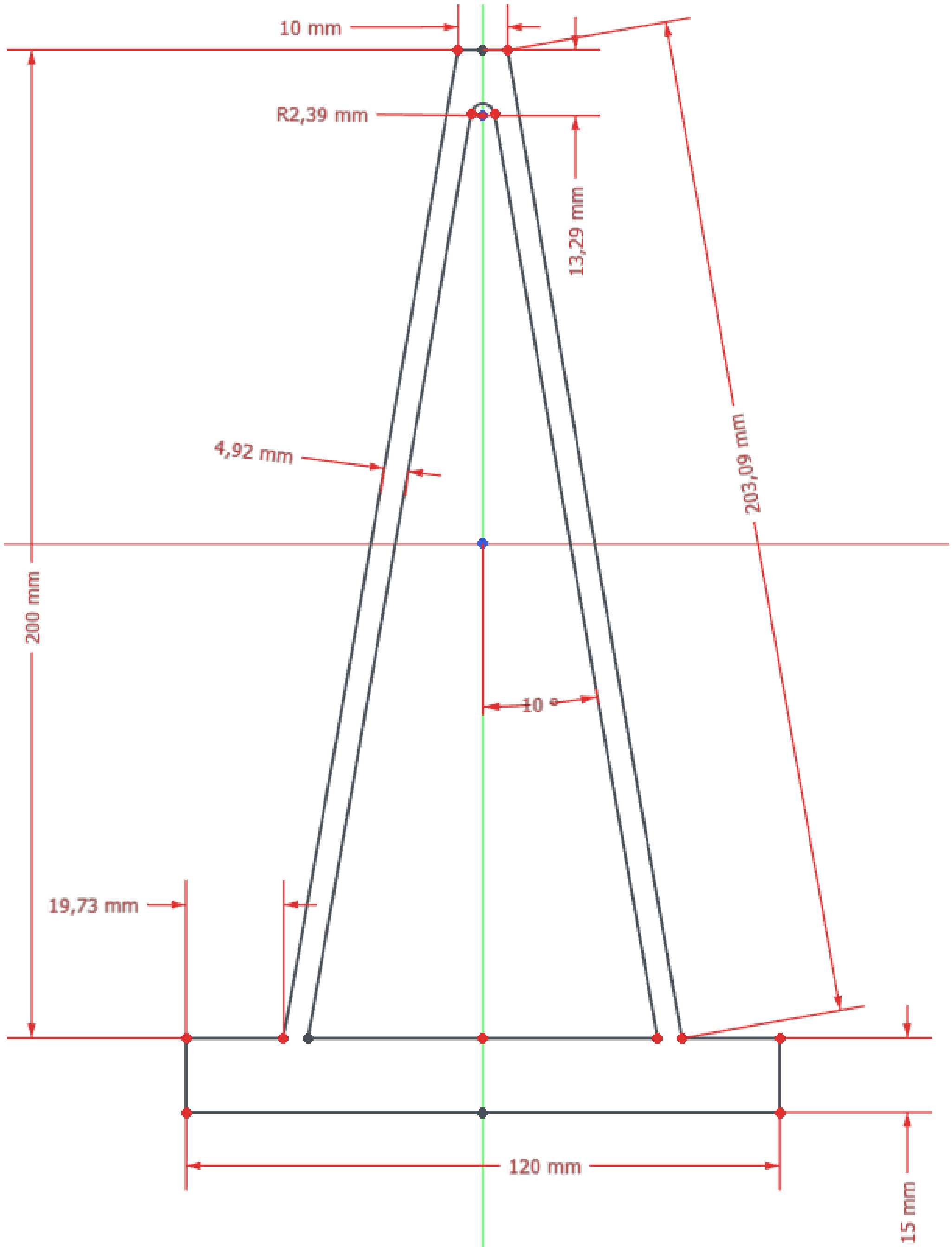
A partir disso, foi criada uma imagem, do arco de catenária com três contraventamentos colocados ao longo dele, para uma melhoria na resistência contra a flambagem. Essa imagem é mostrada abaixo, juntamente com as distâncias consideradas para os contraventamentos, e a referida imagem foi passada para um arquivo FreeCad no qual foi feito um esboço por cima dela para se modelar a coluna catenária.

Figura 14 – Distâncias consideradas para a modelagem da coluna catenária, em mm.



Sobre a coluna em V, ela foi modelada com as seguintes cotas:

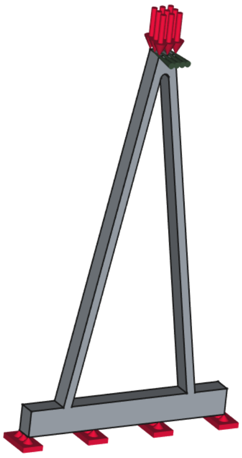
Figura 15 – Cotas utilizadas para a modelagem da coluna em V.



E a coluna em A foi modelada a partir da coluna em V, apenas se acrescentando um contraventamento horizontal na metade de sua altura, a fim de verificar se esse acréscimo melhoraria muito ou não sua resistência contra a flambagem.

Com todas as 5 colunas tendo sido modeladas, cada uma delas foi simulada no FreeCad em um teste de flambagem. Para isso, foi necessário definir as condições de contorno, material e malha. As colunas tiveram sua base fixada, com um carregamento distribuído aplicado no topo. Além disso, elas tiveram também uma restrição de movimento igual a 0 para frente ou para trás, para evitar flambagens nessas direções, já que o código topBuck250.m usado para obter a geometria da coluna otimizada resolve apenas problemas de otimização 2D, e portanto não gera estruturas resistentes à flambagem em direções para fora do plano 2D. Um exemplo, ilustrando essas especificações aplicadas na coluna em V, é mostrado a seguir.

Figura 16 – Exemplo ilustrativo da aplicação das condições de contorno para os testes de flambagem numéricos.



Quanto ao material, foi definido para os testes que as colunas são feitas de ácido polilático (PLA); um tipo de bioplástico que pode ser utilizado em impressão 3D. Por fim, sobre a malha, a tabela abaixo mostra os parâmetros estabelecidos para se criar a malha, para cada coluna.

Tabela 1 – Definição da malha para cada coluna.

Coluna	Tipo de malha	Dimensão	Ordem	Tamanho máximo (mm)	Tamanho mínimo (mm)	Espessura
Reta	Gmsh	3D	2	1	0	-
Em V	Gmsh	3D	2	1.1	0	-
Em A	Gmsh	3D	2	1	0	-
Otimizada	Netgen	-	-	1	0	Moderada
Catenária	Netgen	-	-	1.20	0.20	Moderada

Feitas todas essas definições, as simulações foram executadas, e as cargas críticas de flambagem e de esmagamento numéricas para cada coluna foram obtidas e registradas, sendo mostradas e comentadas na seção de Resultados e discussões. No caso, a carga de esmagamento corresponde ao momento em que a coluna começa a escoar, baseando-se na tensão de escoamento do PLA de S_y = 35.9MPa, segundo o datasheet disponibilizado na seção de Anexo.

Uma vez que os resultados numéricos foram obtidos, as 5 colunas foram impressas, utilizando o PLA como material e com 100% de preenchimento, para se evitar efeitos de porosidade que modifiquem a resistência das estruturas. A seguir, uma figura ilustrando as colunas impressas.

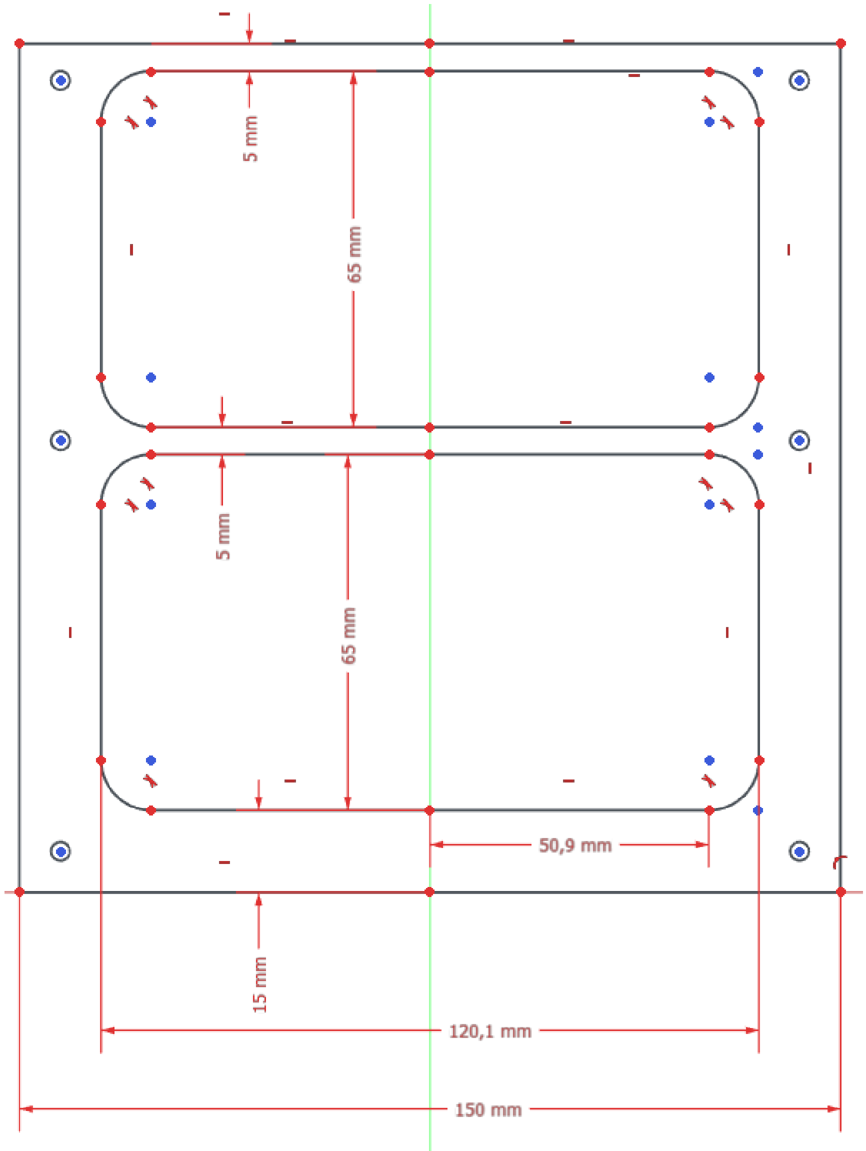
Figura 17 – Da esquerda para a direita: colunas reta, em V, em A, catenária e otimizada impressas.

Essas colunas serão ensaiadas experimentalmente, contudo, para evitar que elas flambem para fora do plano (isto é, para frente ou para trás) nos ensaios, foi desenvolvido um suporte, no qual as colunas serão acopladas, conforme mostrado abaixo.

Figura 18 – Ilustrações mostrando como as colunas são acopladas no suporte desenvolvido.

Algumas partes desse suporte foram modeladas no FreeCad e posteriormente impressas, utilizando também o PLA como material e com 100% de preenchimento. A primeira parte que foi modelada, a principal do suporte, teve as cotas a seguir, com furos de 3.4mm de diâmetro e espessura de 15mm.

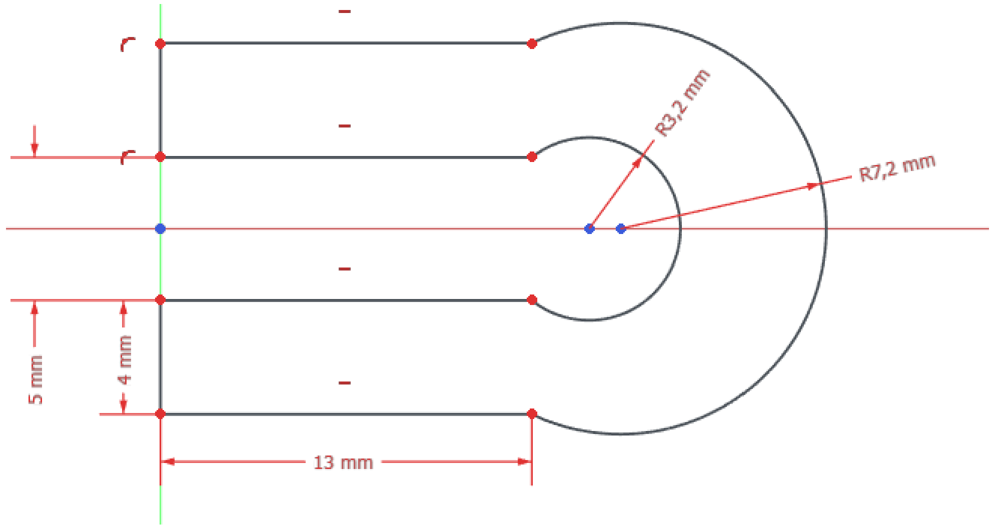
Figura 19 – Cotagem da primeira parte do suporte modelada no FreeCad.



Foram impressas duas dessas partes, uma ficando por trás e outra pela frente da coluna a ser ensaiada, conforme mostrado na Figura 18.

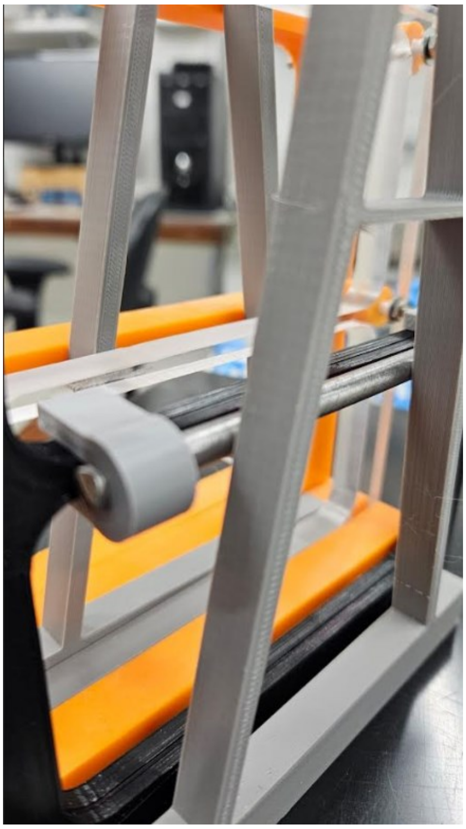
Já para a segunda parte que foi modelada, ela teve as cotas a seguir, com 10mm de espessura.

Figura 20 – Cotagem da segunda parte do suporte modelada no FreeCad.



Foram impressas oito dessas partes, que servem para encaixar eixos de 6mm de diâmetro entre as partes principais do suporte e a coluna, para garantir que a coluna sofra menor atrito durante o ensaio e assim sua flambagem não seja dificultada. O encaixe mencionado pode ser melhor visualizado na figura abaixo, como exemplo.

Figura 21 – Encaixe de um eixo de 6mm entre uma das partes principais do suporte e a coluna em A.



As outras partes mais relevantes do suporte correspondem a dois grampos C e uma barra de aço de seção retangular, usadas para auxiliar na fixação das colunas, conforme mostrado na Figura 18.

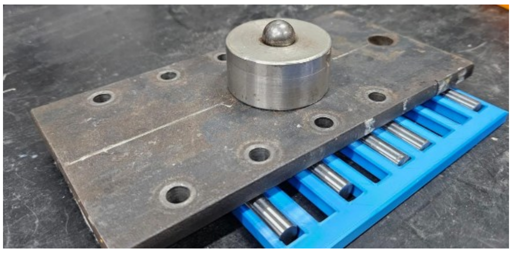
Para a aplicação da carga compressiva nos ensaios, foi utilizada uma máquina Instron. Cada coluna foi preparada na máquina conforme exemplificado abaixo com a coluna reta, e posteriormente comprimida com a descida do pistão.

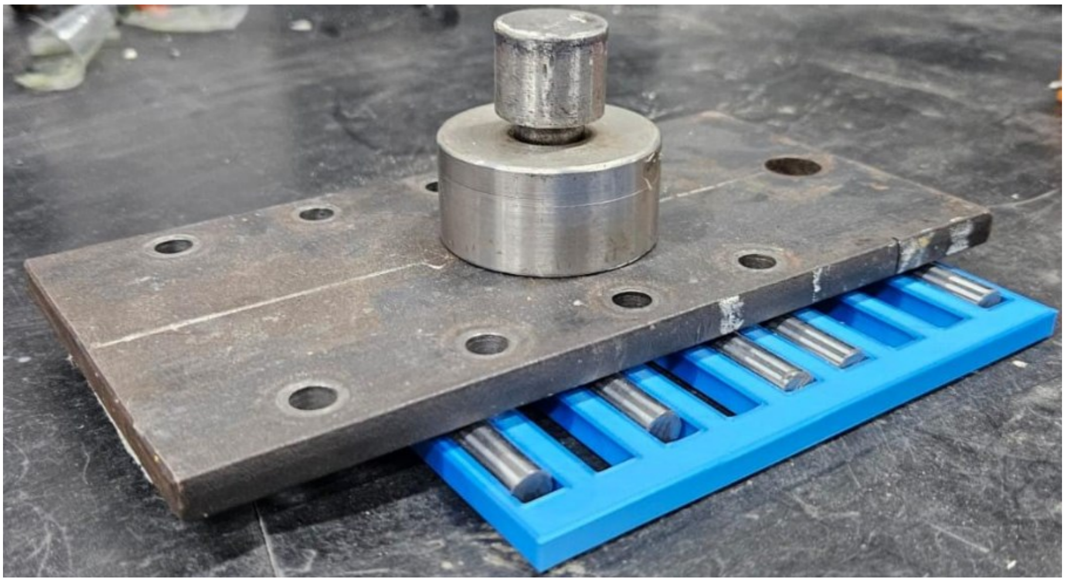
Figura 22 – Coluna reta preparada para o ensaio de flambagem.

Em cada ensaio feito, o pistão descia com uma velocidade de 0.5mm/min, e a carga foi sendo registrada a cada 34ms em um arquivo de dados, até o instante em que ela começasse a baixar, que é o momento em que a carga crítica de flambagem foi atingida. Com isso, a carga crítica de flambagem experimental para cada coluna foi obtida e registrada, sendo mostradas e comentadas na seção de Resultados e discussões.

Como é possível ver na Figura 22, no receptáculo da máquina foi colocado um outro suporte, melhor visualizado pela figura a seguir.

Figura 23 – Um dos suportes utilizado para os ensaios de flambagem.





Ele consiste essencialmente em uma rótula e um conjunto de cilindros, e teve a finalidade de liberar a rotação e deslocamentos na parte do topo das colunas enquanto estiveram sendo comprimidas. Esse suporte foi utilizado porque, anteriormente, havia sido feito os mesmos ensaios, porém sem o referido suporte, e a carga crítica de flambagem das colunas resultava em um valor muito acima do que deveria, pois a parte do topo das colunas durante a compressão se comportava como se fosse fixa, ao invés de livre.

4

Resultados e discussões

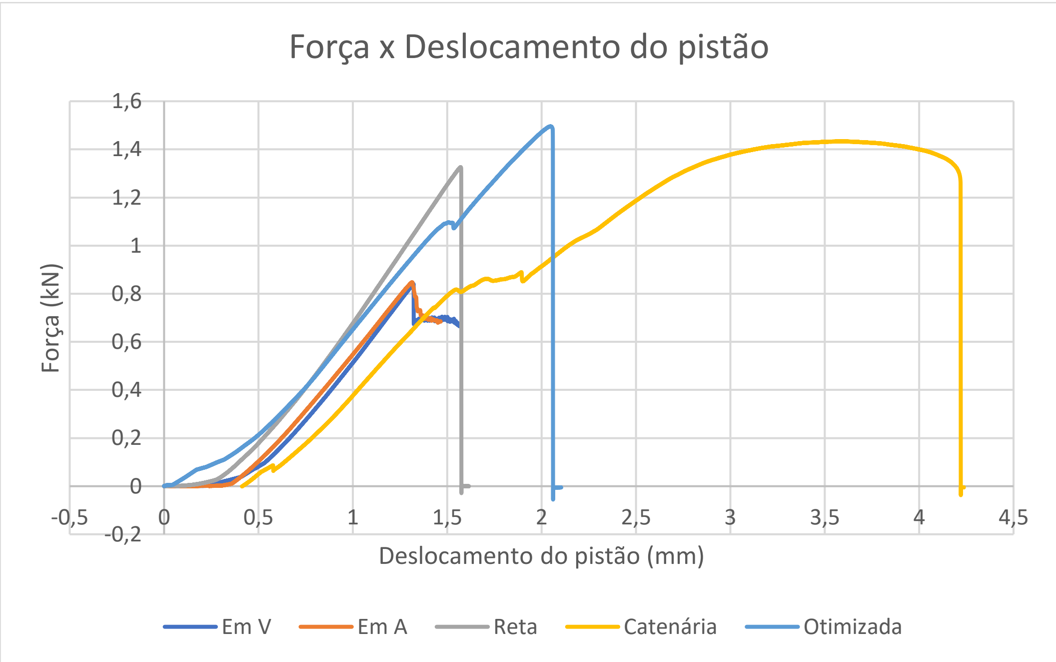
Abaixo, seguem os resultados das cargas críticas de flambagem e de esmagamento numéricas e também as cargas críticas experimentais para cada uma das 5 colunas trabalhadas, juntamente com o tipo de falha que as colunas apresentaram nos ensaios.

Tabela 2 – Cargas críticas numéricas e experimentais para cada uma das colunas trabalhadas.

Coluna	Carga numérica de flambagem (N)	Carga numérica de esmagamento (N)	Carga crítica experimental (N)
Reta	185.45	2400	1326.1 (falhou por flambagem)
Em V	344.40	1890	840.3 (falhou por flambagem)
Em A	449.23	1790	847.8 (falhou por flambagem)
Catenária	1840	670	1434.2 (falhou por flambagem)
Otimizada	2060	770	1495.8 (falhou por esmagamento)

Também, sobre os testes de flambagem experimentais, foi construído um gráfico de Força x Deslocamento do pistão contemplando todas as colunas ensaiadas.

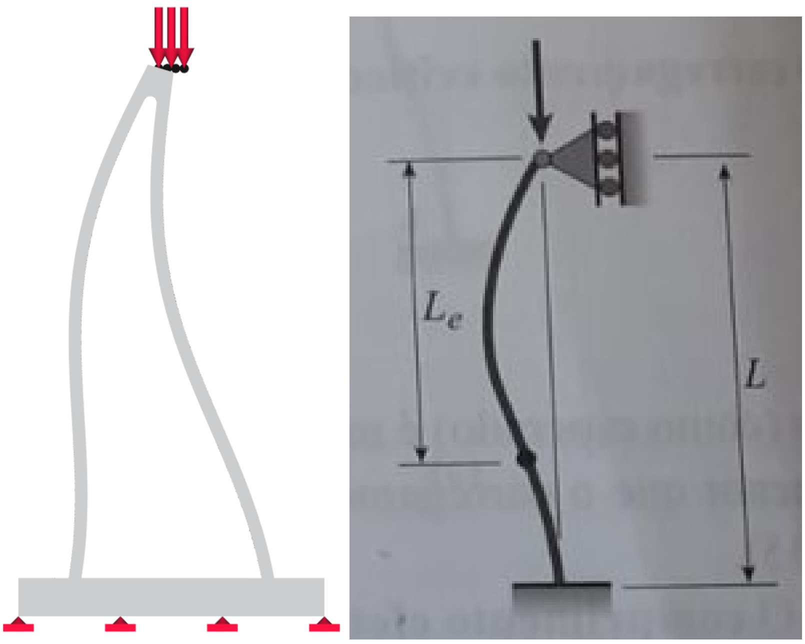
Figura 24 – Gráfico Força x Deslocamento do pistão para cada uma das colunas ensaiadas.



Um primeiro comentário que vale a pena ser feito é sobre o resultado da carga crítica de flambagem numérica da coluna reta. A carga crítica de flambagem de Euler para uma coluna engastada na base e livre no topo, tal como a mostrada na Figura 1, que tem a mesma geometria e condições de contorno da coluna reta simulada, é dada pela eq. (1). Com a coluna reta em si tendo L = 200mm, $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{10mm*(10mm)^3}{12}$ = 833.333 mm^4 e E = 3640MPa para o PLA segundo o FreeCad, a carga crítica de Euler resultaria em P_{cr} = 187.111N, muito próxima dos 185.45N obtidos com a simulação. Assim, isso demonstra que a coluna reta simulada pode ser vista como uma coluna de Euler engastada na base e livre no topo.

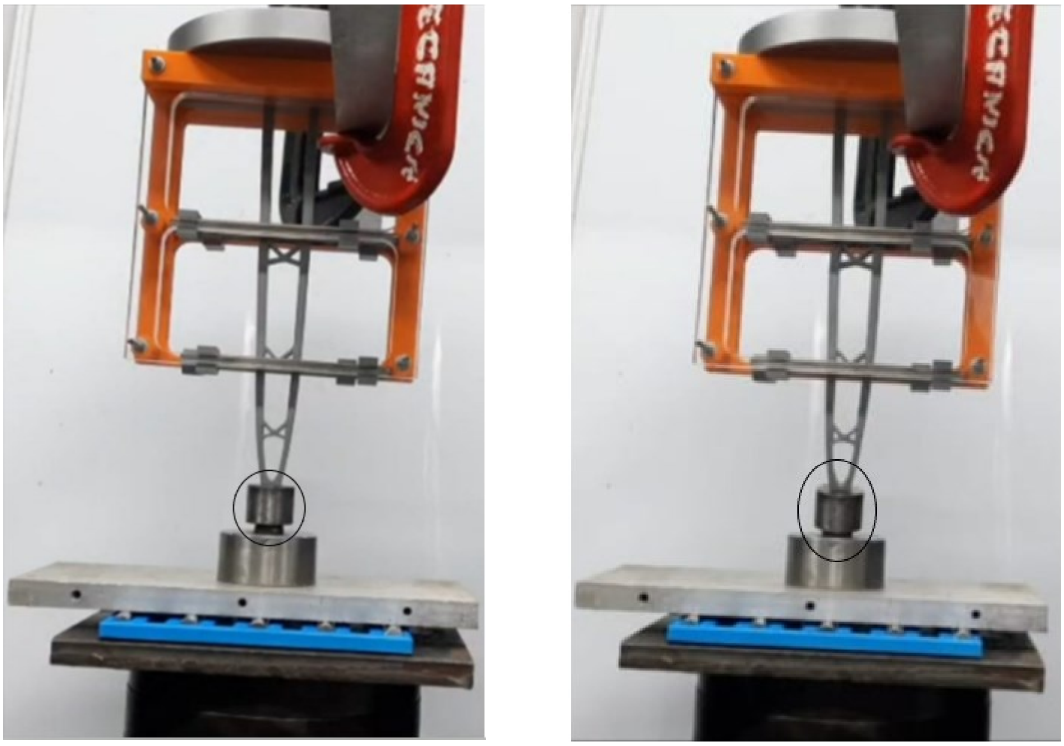
Outro ponto que vale ressaltar é sobre o resultado da carga crítica de flambagem numérica da coluna em V. Tomando a Figura 16 como referência, denomina-se o carregamento aplicado no topo da coluna como P. Considerando isso, a força sentida por cada perna da coluna, na direção da perna, pode ser razoavelmente aproximada como $N = \frac{P}{2\cos\alpha}$, onde α é o ângulo de inclinação de cada perna em relação à vertical, que no caso da coluna em V, é igual a 10°. Assim, quando a estrutura começa a flambar, a força sentida por cada perna, de acordo com o resultado obtido pela simulação, é $N = \frac{344.40N}{2\cos 10°}$ = 174.704N, que seria a carga crítica de flambagem para cada perna. E, quando se calcula a carga crítica de flambagem para cada perna pela eq. (2), considerando que L = 203.09 mm e $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{10mm*(4.92mm)^3}{12}$ = 99.246 mm^4 (ver Figura 15), além de E = 3640MPa, tem-se que P_{cr} = 176.865N, carga muito próxima dos 174.704N mencionados. Assim, isso indicou que cada perna da coluna em V simulada pode ser vista como uma coluna de Euler engastada na base e apoiada por pinos no topo, o que ficou ainda mais evidente vendo como o modo de flambagem dessas duas colunas se assemelham:

Figura 25 – Comparação entre o modo de flambagem da coluna em V simulada e de uma coluna de Euler engastada na base e apoiada por pinos no topo.



Mais uma observação que deve ser feita é que, para as colunas reta, em V e em A, a carga de flambagem experimental é consideravelmente maior do que a carga de flambagem numérica obtida. A explicação para isso foi a dificuldade de se aplicar as devidas condições de contorno nos ensaios. A fixação das colunas com a barra de aço e os dois grampos C não foi a ideal, além do atrito que teve influência nos experimentos mas que não foi considerado nas simulações. A coluna catenária, por sua vez, teve sua carga de flambagem experimental sendo menor do que a numérica, mas isso porque no ensaio essa coluna flambou para fora do plano, enquanto as outras três anteriores flambaram para dentro do plano (isto é, para um dos lados), que se mostrou como um modo de flambagem mais custoso. A coluna catenária flambou para fora do plano porque, especificamente em seu ensaio, a rótula do suporte acabou permitindo que a parte do topo da referida coluna se movimentasse mais do que deveria para frente.

Figura 26 – Início e final do ensaio; rótula do suporte permitindo o movimento do topo da coluna catenária para frente.



Contudo, qualitativamente falando sobre os resultados de flambagem, os resultados experimentais foram um pouco mais coerentes, com os resultados numéricos obtidos. Na análise numérica, a coluna com menor carga de flambagem foi a reta, depois a em V, a em A, posteriormente a catenária e por fim a otimizada. Já na parte experimental, foi a em V, depois a em A, posteriormente a reta e por fim a catenária. A coluna otimizada nem chegou a flambar em seu ensaio, por ter falhado por esmagamento antes. Isso, somado ao fato de que a coluna otimizada teve a maior carga de flambagem numérica, conforme esperado, mostra a eficácia do algoritmo de otimização topológica utilizado contra a flambagem. Assim sendo, de todos os ensaios realizados, apenas a coluna reta teve um comportamento qualitativamente inesperado.

Outra observação é que os resultados numéricos e experimentais mostram que o contraventamento horizontal colocado para formar a coluna em A se mostrou pouco efetivo para melhorar a resistência da coluna em V contra a flambagem.

Um último ponto que vale ressaltar é que percebe-se de maneira geral pela Tabela 2 que, quanto mais se melhora a geometria das colunas para uma maior resistência à flambagem, mais próximo se fica do modo de falha por esmagamento. Mais do que isso, a falha das colunas reta, em V e em A nos ensaios ser por flambagem, e a falha da coluna otimizada ser por esmagamento, são fatos coerentes, já que, para estas três primeiras, a carga numérica de flambagem é menor do que a de esmagamento, e para a última citada, ocorre o contrário. A coluna catenária, mesmo também tendo sua carga numérica de esmagamento sendo menor do que a de flambagem, falhou por flambagem em seu ensaio, o que foi inesperado.

5

Conclusão

Foram criadas cinco diferentes colunas para serem testadas contra a flambagem e o esmagamento em uma análise numérica e experimental. Comparando os resultados das referidas análises, pode-se dizer que o objetivo deste trabalho foi concluído, apesar de haver resultados do experimento que divergiram quantitativamente dos resultados numéricos e das colunas reta e catenária terem apresentado comportamentos qualitativamente inesperados no referido experimento. Conseguiu-se ensaiar todas as 5 colunas que foram testadas no FreeCad, e foi verificado que a coluna otimizada é a que melhor resiste à flambagem, tanto pelas simulações quanto pelos ensaios feitos, demonstrando assim que o código MatLab topBuck250.m utilizado foi eficaz. Por outro lado, foi visto que, teoricamente, a coluna reta é a que melhor resiste ao esmagamento. Percebeu-se com os resultados do presente trabalho que, quanto mais se melhora a geometria das colunas para uma maior resistência à flambagem, mais próximo se fica do modo de falha por esmagamento.

Como sugestão para trabalhos futuros, primeiramente destaca-se o uso de um lubrificante entre o suporte da Figura 18 e as colunas impressas para os ensaios, para diminuir ainda mais o atrito entre as duas estruturas e assim se obter menores cargas críticas de flambagem, mais próximas das verificadas com as simulações no FreeCad. Pode-se pensar também em realizar alterações no código MatLab topBuck250.m para se conseguir gerar uma estrutura 3D otimizada contra a flambagem, para que assim sua flambagem para fora do plano seja melhor evitada e consequentemente não seja necessária a confecção de um suporte voltado para essa função. Por fim, uma última sugestão, para os ensaios, seria trocar a rótula do suporte da Figura 23 por um cilindro disposto na direção longitudinal, como ilustrado na configuração abaixo, para garantir de fato o movimento de flambagem na parte do topo das colunas para dentro do plano, diferentemente da rótula, que possibilita movimentos de rotação para qualquer direção.

Figura 27 - Configuração sugerida para os ensaios de flambagem em trabalhos futuros.

6

Referências bibliográficas

Andreassen, E. et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. Struct Multidisc Optim 43, 1–16 (2011).

Autodesk (2025). What is Topology Optimization? Disponível em: https://autodesk.com/solutions/topology-optimization.

Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 71, p. 197–224, 1988. Disponível em: https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. 2nd edition. ed. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

Boom, S. J. Van den. Topology optimization including buckling analysis. Dissertação (Mestrado) — Delft University of Technology, Delft, 2014.

Christensen, P. W.; Klarbring, A. An Introduction to Structural Optimization. 1st edition. ed. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009.

Clausen, A. et al. Exploiting additive manufacturing infill in topology optimization for improved buckling load. Engineering, v. 2, p. 250–257, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1016/J.ENG.2016.02.006.

Díaz, A.; Sigmund, O. Checkerboard patterns in layout optimization. Structural Optimization, v. 10, p. 40–45, 1995. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF01743693.

Dunning, P. D. et al. Level-set topology optimization with many linear buckling constraints using an efficient and robust eigensolver. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 107, p. 1029– 1053, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1002/nme.5203.

Ferrari, F.; Sigmund, O (2020). A new generation 99 line Matlab code for compliance Topology Optimization and its extension to 3D, 62:2211–2228.

Ferrari, F. et al. (2021). Topology optimization with linearized buckling criteria in 250 lines of Matlab. Structural and Multidisciplinary Optimization, 63:3045–3066.

FreeCad (2024). FreeCad: Your own 3D parametric modeler. Disponível em: https://www.freecad.org/.

Gao, X. et al. Improving the overall performance of continuum structures: A topology optimization model considering stiffness, strength and stability. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 359, p. 112660, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112660.

Gao, X.; Ma, H. Topology optimization of continuum structures under buckling constraints. Computers Structures, v. 157, p. 142–152, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.05.020.

Gere, J. M.; Goodno, B. J. Mecânica dos Materiais. 7ª edição. ed. Cengage Learning, 2009.

Guest, J. K. et al. (2004). Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. International Journal for Numerical Methods in Engineering 61(2):238–254, DOI 10.1002/nme.1064.

Moreira, E. M. D. R. et al. (2020). Otimização Topológica de uma chapa metálica em balanço submetida a uma carga pontual na Extremidade. Revista Augustus, 25(50), 53-65. Disponível em: https://doi.org/https://doi.org/10.15202/1981896.2020v25n50p53.

Neves, M. M. et al. Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. Structural Optimization, v. 10, p. 71–78, 1995. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF01743533.

Sigmund, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. Struct Multidisc Optim 21, 120–127 (2001).

Sigmund, O.; Petersson, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. Structural Optimization, v. 16, p. 68–75, 1998. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF01214002.

Silva, E. C. N. Métodos de Otimização Aplicados ao Projeto de Sistemas Mecânicos e Mecatrônicos. 2003.

Wang, F. et al. (2011). On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization 43(6):767–784.

7

Apêndice

Código MatLab usado para criar o arco de catenária:

```
clc
clear all
t1 = 2.55; t2 = 1; dd = 12;

H = 200-2.08*t2;
d = dd-t1;

syms aa
eq1 = aa+H == aa*cosh(d/aa);
a1 = vpasolve(eq1,aa);

x = -d:0.1:d;
plot(x,-(a1*cosh(x./a1)-(a1+H)));
axis equal
hold on

H = 200;
d = dd+t1; %H*tand(alpha);

syms aa
eq1 = aa+H == aa*cosh(d/aa);
a1 = vpasolve(eq1,aa);

x = -d:0.1:d;
plot(x,-(a1*cosh(x./a1)-(a1+H)));
axis equal
hold on
```

8

Anexo

Datasheet com dados do PLA:

PLA
(Polylactic Acid)

Technical Data Sheet

Tensile Properties ASTM D638 - Type V		
Property	**Imperial**	**Metric**
Toughness*	7.7 ft·lb/in2	16.2 KJ/m2
Tensile Modulus	293000 psi	2.3 GPa
Ultimate Tensile Strength	7080 psi	26.4 MPa
Tensile Strength at Yield	8840 psi	35.9 MPa
Elongation at Yield	2%	2%
Elongation at Break	4%	4%
3D Printing Properties		
Property	**Imperial**	**Metric**
Expected Max Linear Print Speed	3.54 in/s	90 mm/s
Hardness, **ASTM D2240**	95D	95D
Solid Density, **ASTM D792**	4.48 x 10-2 lb/in3	1.24 g/cc
Impact Properties		
Property	**Imperial**	**Metric**
Notched Izod (machined), 23 C, **ASTM D256**	0.3 f·lb/in	16 J/m
Gardner Impact, 23 C, **ASTM D5420**	10.3 ft·lb	14 J
Thermal Properties		
Property	**Imperial**	**Metric**
Glass Transition by DSC, **ASTM E1356**	134 F	57 C
Glass Transition by DMA, **ASTM D792**	145 F	63 C
Heat Deflection Temperature, **ASTM D648**	121 F	49 C
Coefficient of Thermal Expansion, **ASTM E832**	23 x 10-6 in/inR	41 x 10-6 m/m·K
Heat Capacity, **ASTM E1269**	0.43 Btu/lb/°F	1,800 J/kg·K
Thermal Conductivity, **ASTM C518**	0.9 Btu·in/hr/ft^2/°F	0.13 W/m·K
Available Colors		
Black, Blue, Green, Grey, Natural, Orange, Red, White, Yellow		
Suggested Uses		
PLA is one of the most cost-effective FDM printing materials and easiest to process. PLA is best used for complex modeling applications that do not require impact strength or tolerance to heat loads.		

*Toughness is not defined in ASTM D638 though can be calculated by taking the integral of the stress-strain curve collected by tensile data.

Visit www.sd3d.com/materials to learn more