



Jessica Lailla Ferreira Bittencourt Neto

**Soluções Analíticas para Pseudopressão
Dependente da Permeabilidade em
Escoamento Monofásico**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio .

Orientador : Prof. Sinésio Pesco
Co-orientador: Prof. Abelardo Borges Barreto Júnior

Rio de Janeiro
Abril de 2025



Jessica Lailla Ferreira Bittencourt Neto

**Soluções Analíticas para Pseudopressão
Dependente da Permeabilidade em
Escoamento Monofásico**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio . Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Sinésio Pesco

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Abelardo Borges Barreto Júnior

Co-orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Adolfo Puime Pires

LENEP - UENF

Prof. Malú Grave

Departamento de Engenharia Civil - UFF

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

Dra. Tahyz Gomes Pinto

DeepSoft Desenvolvimento de Software

Rio de Janeiro, 25 de Abril de 2025

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Jessica Lailla Ferreira Bittencourt Neto

Mestra em Matemática Aplicada pela PUC-Rio.

Ficha Catalográfica

Bittencourt Neto, Jessica Lailla Ferreira

Soluções Analíticas para Pseudopressão Dependente da Permeabilidade em Escoamento Monofásico / Jessica Lailla Ferreira Bittencourt Neto; orientador: Sinésio Pesco; co-orientador: Abelardo Borges Barreto Júnior. – 2025.

113 f: il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2025.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Pseudopressão. 3. Funções de Green. 4. Permeabilidade dependente da pressão. I. Pesco, Sinésio. II. Borges Barreto Júnior, Abelardo. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

A todos que torceram pelo meu sucesso, me apoiaram nos momentos difíceis
e sempre me encorajaram a seguir em frente, minha eterna gratidão.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Sinésio pelo estímulo e parceria para a realização deste trabalho.

Ao meu professor Abelardo Borges Barreto Júnior, pelas importantes contribuições, incentivos e palavras de apoio em diversos momentos.

À PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Às companheiras de vida Fernandha, Isabella, Maria Fernanda, Mariana e Mellina, por sua amizade leal, apoio generoso e constante presença ao longo de toda esta trajetória.

Aos meus colegas da PUC-Rio.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A todos os professores e funcionários do Departamento pelos ensinamentos e pela ajuda.

Ao meu companheiro Átila por sempre me apoiar e acreditar no meu potencial.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Adicionalmente, contou com o apoio do Programa Bolsa Nota 10 – Doutorado, da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

Abstract

Bittencourt Neto, Jessica Lailla Ferreira; Pesco, Sinésio (Advisor); Borges Barreto Júnior, Abelardo (Co-Advisor). **Analytical Solutions for Permeability-Dependent Pseudopressure in Single-Phase Flow**. Rio de Janeiro, 2025. 113p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The combined use of mathematical and computational modeling has become essential for optimizing the exploration and management of oil and gas reservoirs. Various mathematical techniques are employed to develop analytical solutions, particularly in reservoir simulation, where parameters such as permeability remain unknown, requiring testing for information extraction. A classic approach to solving the diffusivity equation, which describes fluid flow in porous media, is the pseudopressure function. Its purpose is to linearize part of the equation, facilitating the solution calculation, but its application requires complementary methods to handle nonlinearities and achieve greater accuracy. This thesis proposes two analytical solutions for single-phase oil flow in two types of reservoirs: multilayer homogeneous and single-layer heterogeneous with two homogeneous regions, considering pressure-dependent permeability. The solutions utilize Green's function problem combined with the perturbation method and asymptotic expansion, enabling a detailed analysis of reservoir properties and permeability-pressure curves. The model validation was carried out through the implementation of an algorithm and comparison with a commercial finite-difference based flow simulator. Given the increasing demand for more robust techniques in the oil industry, advanced mathematical methods, such as the proposed approach, are essential for optimizing decision-making and improving production efficiency. Thus, this work contributes to the advancement of analytical tools in reservoir modeling and simulation.

Keywords

Pseudopressure; Green's Function; Pressure dependent permeability.

Resumo

Bittencourt Neto, Jessica Lailla Ferreira; Pesco, Sinésio; Borges Barreto Júnior, Abelardo. **Soluções Analíticas para Pseudopressão Dependente da Permeabilidade em Escoamento Monofásico**. Rio de Janeiro, 2025. 113p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O uso combinado de modelagens matemáticas e computacionais tornou-se essencial para otimizar a exploração e o gerenciamento de reservatórios de petróleo e gás. Diferentes técnicas matemáticas são empregadas para desenvolver soluções analíticas, especialmente na simulação de reservatórios, onde parâmetros como a permeabilidade ainda são desconhecidos, exigindo testes para extração de informações. Uma abordagem clássica para resolver a equação da difusividade, que descreve o escoamento de fluidos em meios porosos, é a função de pseudopressão. Seu objetivo é linearizar parte da equação, facilitando o cálculo da solução, mas sua aplicação requer métodos complementares para tratar as não-linearidades e obter maior precisão. Esta tese propõe duas soluções analíticas para o escoamento monofásico de óleo em dois tipos de reservatórios: homogêneo de multicamadas e heterogêneo de camada única com duas regiões homogêneas, ambos considerando a permeabilidade dependente da pressão. As soluções utilizam o problema de Green associado ao método da perturbação e expansão assintótica, permitindo uma análise detalhada das propriedades do reservatório e curvas de permeabilidade-pressão. A validação do modelo foi realizada por meio da implementação de um algoritmo e comparação com um simulador comercial baseado em diferenças finitas. Diante da crescente demanda por técnicas mais robustas na indústria do petróleo, métodos matemáticos avançados, como o proposto, são fundamentais para otimizar a tomada de decisões e aumentar a eficiência dos processos de produção. Assim, este trabalho contribui para o avanço das ferramentas analíticas na modelagem e simulação de reservatórios de petróleo.

Palavras-chave

Pseudopressão; Funções de Green; Permeabilidade dependente da pressão.

Sumário

1	Introdução	16
2	Modelo para escoamento monofásico com permeabilidade dependente da pressão: Reservatório com múltiplas camadas	20
2.1	Modelo para pseudopressão adimensional	22
2.2	Problema de Green Associado	25
2.3	Cálculo Numérico da Solução por Camada	27
2.4	Solução do Modelo	31
3	Modelo para escoamento monofásico com permeabilidade dependente da pressão: Reservatório de camada única com duas regiões	33
3.1	Modelo para Pseudopressão Adimensional	33
3.2	Problema de Green Associado	39
3.3	Solução do Modelo	42
3.4	Cálculo Numérico da Solução	52
4	Resultados	58
4.1	Aspectos Computacionais	59
4.2	Modelo Comparativo: Simulador Numérico de Fluxo	62
4.3	Análise dos Resultados Comparativos: Modelo Múltiplas Camadas	63
4.4	Análise dos Resultados Comparativos: Modelo de Duas Regiões	69
5	Conclusão e trabalhos futuros	83
	Appendices	85
	Apêndice A Verificação da Solução	85
A.1	Substituição Direta CI	87
A.2	Substituição Direta CCE	88
A.3	Substituição Direta EDP	89
A.4	Substituição Direta nas Condições de Acoplamento	93
	Apêndice B Solução para Escoamento Monofásico de Óleo em Reservatório Composto	96
B.1	Hipóteses do Modelo	96
B.2	Variáveis Adimensionais	97
B.3	Solução no Campo de Laplace	98
	Apêndice C Funções de Green para modelo com duas regiões	102
C.1	Função de Green para Fonte na Região Interna ($r_{0D} \leq r_{1D}$)	103
C.2	Função de Green para Fonte na Região Externa ($r_{1D} \leq r_{0D}$)	107
6	Referências bibliográficas	112

Lista de figuras

Figura 2.1	Modelo de reservatório multicamadas e permeabilidade dependente da pressão	20
Figura 3.1	Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade	33
Figura 3.2	Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte	39
Figura 3.3	Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte na região interna	42
Figura 3.4	Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte na região externa	51
Figura 4.1	Curva de Permeabilidade de Referência	61
Figura 4.2	Caso A1: Curva de Permeabilidade	64
Figura 4.3	Caso A2: Curva de Permeabilidade	64
Figura 4.4	Caso A1: Pseudopressão e derivada adimensional	65
Figura 4.5	Caso A2: Pseudopressão e derivada adimensional	65
Figura 4.6	Caso A1: Termo de primeira ordem	66
Figura 4.7	Caso A2: Termo de primeira ordem	66
Figura 4.8	Casos B1 e B2: Curvas de Permeabilidade Linear	67
Figura 4.9	Casos B3 e B4: Curvas de Permeabilidade Linear e Exponencial	67
Figura 4.10	Caso B1: pseudopressão e derivada adimensional	67
Figura 4.11	Caso B1: Termo de primeira ordem	67
Figura 4.12	Caso B2: pseudopressão e derivada adimensional	68
Figura 4.13	Caso B2: Termo de primeira ordem	68
Figura 4.14	Caso B3: Pseudopressão e derivada adimensional	68
Figura 4.15	Caso B3: Termo de primeira ordem	68
Figura 4.16	Caso B4: Pseudopressão e derivada adimensional	69
Figura 4.17	Caso B4: Termo de primeira ordem	69
Figura 4.18	Casos C: Curva de permeabilidade	70
Figura 4.19	Caso C1: Pseudopressão e derivada adimensional	71
Figura 4.20	Caso C2: Pseudopressão e derivada adimensional	71
Figura 4.21	Caso D1: Pseudopressão e derivada adimensional	73
Figura 4.22	Caso D2: Pseudopressão e derivada adimensional	73
Figura 4.23	Casos E1 e E2: Curva de permeabilidade	74
Figura 4.24	Caso E1: pseudopressão e derivada adimensional.	75
Figura 4.25	Caso E1: Termo de primeira ordem.	75
Figura 4.26	Caso E2: Pseudopressão e derivada adimensional.	76
Figura 4.27	Caso E2: Termo de primeira ordem.	76
Figura 4.28	Casos E3 e E4: Curva de permeabilidade	77
Figura 4.29	Caso E3: Pseudopressão e derivada adimensional.	77
Figura 4.30	Caso E3: Termo de primeira ordem.	78
Figura 4.31	Caso E4: Pseudopressão e derivada adimensional.	78
Figura 4.32	Caso E4: Termo de primeira ordem.	79
Figura 4.33	Caso F1: Pseudopressão e derivada adimensional	80
Figura 4.34	Caso F1: Termo de primeira ordem	81

Figura 4.35	Caso F2: Pseudopressão e derivada adimensional	81
Figura 4.36	Caso F2: Termo de primeira ordem	82
Figura B.1	Modelo de Reservatório com 2 Regiões	96
Figura C.1	Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade	102
Figura C.2	Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte na região interna	103
Figura C.3	Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte na região externa	108

Lista de tabelas

Tabela 4.1	Tipos de Curva de Permeabilidade	61
Tabela 4.2	Modelo Duas Camadas: Propriedades do Reservatório por camada	63
Tabela 4.3	Propriedades Casos A	64
Tabela 4.4	Propriedades Casos B	66
Tabela 4.5	Modelo Duas Regiões: Propriedades do Reservatório	70
Tabela 4.6	Propriedades Casos C	71
Tabela 4.7	Propriedades Casos D	72
Tabela 4.8	Propriedades Casos E	74
Tabela 4.9	Propriedades Casos F	80

Lista de algoritmos

Algoritmo 1	Pseudopressão reservatório com n-camadas	60
Algoritmo 2	Pseudopressão reservatório com duas regiões	60

Lista de Abreviaturas

c_t – Compressibilidade total

h – Espessura do reservatório

h_j – Espessura da camada j

h_t – Espessura total do reservatório

G_{Dj} – Função de Green na camada j

G_{jD}^i – Função de Green adimensional na região j com fonte na região i

$\bar{G}_{jD}^i$ – Função de Green adimensional no campo de Laplace na região j com fonte na região i

$k(p)$ – Permeabilidade dependente da pressão

$k_j(p)$ – Permeabilidade dependente da pressão na camada/região j

$k(p_i)$ – Permeabilidade na pressão inicial

$k_j(p_i)$ – Permeabilidade na camada/região j na pressão inicial

k_{eq} – Permeabilidade equivalente do reservatório

reservatório na região de dano

$m(p)$ – Pseudopressão

$m_j(p)$ – Pseudopressão na camada/região j

m_{Dj} – Pseudopressão adimensional camada j

$m_{Dj}^{(k)}$ – Pseudopressão adimensional camada j de ordem k

m_{jD} – Pseudopressão adimensional região j

$m_{jD}^{(k)}$ – Pseudopressão adimensional região j de ordem k

m_{wD} – Pseudopressão adimensional no poço j

p – Pressão

p_i – Pressão inicial

p_{wf} – Pressão no poço

q – Vazão de produção

r – Raio

r_{1D} – Raio adimensional na posição r_1

r_D – Raio adimensional

r_w – Raio do poço

t – Tempo

t_D – Tempo adimensional

u – Variável de Laplace

w_{Dj} – Desvio hidráulico adimensional na camada j

w_{jD} – Desvio hidráulico adimensional na região j

$\alpha_p = 19.03$ – Constante de adequação de medidas do sistema brasileiro

$\alpha_t = 0.0003484$ – Constante de adequação de medidas do sistema brasileiro

$\eta_j(p)$ – Coeficiente de difusividade hidráulica da camada/região j

$\eta_{Dj}(p)$ – Coeficiente de difusividade hidráulica adimensional da camada j

$\eta_{jD}(p)$ – Coeficiente de difusividade hidráulica adimensional da região j

η_R – Razão de difusividade hidráulica na pressão inicial

ϵ – Parâmetro de perturbação

μ_j – Viscosidade do fluido na camada/região j

ϕ – Porosidade

ρ – Massa específica do óleo

*Freedom is what you do with what's been
done to you.*

Simone de Beauvoir, *La Vieillesse*.

1

Introdução

Nas últimas décadas, a pesquisa sobre as propriedades de rocha dependentes da pressão, como compressibilidade, porosidade e permeabilidade, avançou significativamente. Novas abordagens analíticas e numéricas foram desenvolvidas para caracterizar o escoamento de fluidos em reservatórios. Como resultado, diversas soluções teóricas foram propostas, e diferentes problemas específicos passaram a ser resolvidos com o uso de algoritmos. Um dos modelos matemáticos amplamente utilizados na engenharia de reservatórios é a solução da linha fonte, que descreve o comportamento da pressão ao redor de um poço em um meio poroso. Muitos estudos se baseiam nessa formulação, e Ramey (1966) aplicou seus resultados à modelagem geral do escoamento de fluidos, propondo uma nova solução analítica para descrever a resposta da pressão em reservatórios estratificados com fluxo cruzado.

A literatura mostra que, à medida que os problemas se tornam mais complexos, é necessário adotar formulações e modelos matemáticos que se aproximem melhor da realidade dos reservatórios, considerando suas geometrias e propriedades físicas. Com essa evolução, a estimativa de parâmetros de reservatório tornou-se um tema central em estudos voltados à engenharia de produção. Um exemplo é o trabalho de Duong (1989), que desenvolveu um novo conjunto de curvas-tipo para análise de testes de poço em reservatórios homogêneos, levando em conta a estocagem no poço e os efeitos de dano (*skin*). Essas novas curvas-tipo ajudaram a reduzir a incerteza na interpretação de testes de pressão, permitindo identificar regimes de fluxo com mais precisão e aumentando a confiabilidade dos resultados. Por outro lado, outros estudos exploraram a interpretação gráfica da resposta da pressão ao longo do tempo (BOURDET, 1985). A análise da pressão e de sua derivada em reservatórios estratificados trouxe descobertas importantes sobre a dinâmica desses sistemas. Esse tipo de abordagem estabelece com mais clareza os limites de aplicabilidade dos modelos, auxiliando na interpretação de testes de produção.

Um parâmetro fundamental que define como os fluidos escoam no meio poroso é a permeabilidade. No entanto, medi-la diretamente pode representar um alto custo e, em muitos casos, ser inviável. Por isso, muitos estudos na literatura focam na análise da resposta da pressão em diferentes cenários para estimar essa propriedade (RAGHAVAN, 1993). O impacto da pressão sobre a permeabilidade tem sido explorado, mas estudos como o de Civan (2016)

mostram que essa relação é essencial para uma melhor gestão dos reservatórios e para otimizar os processos de extração. Um entendimento mais preciso desse efeito pode levar ao desenvolvimento de modelos de simulação mais realistas, que melhor representam as condições reais dos reservatórios. Além disso, ao considerar a variação da permeabilidade com a pressão, é possível melhorar os fatores de recuperação, otimizar estratégias de extração e obter informações valiosas para a exploração de reservatórios não convencionais, onde modelos tradicionais podem não ser adequados. O trabalho de Chen, Huan e Ma (2006) destaca que tratar a permeabilidade como uma variável dependente da pressão permite previsões mais confiáveis sobre o comportamento da produção, garantindo uma extração mais eficiente e sustentável dos recursos.

A equação que governa o escoamento de fluidos em meios porosos, conhecida como equação da difusividade hidráulica, é não linear. Essa característica levou ao desenvolvimento de métodos de linearização para facilitar sua solução. Uma das abordagens mais utilizadas é o método da pseudopressão, mas ele não lineariza completamente o problema, o que exige técnicas alternativas para lidar com a parte não linear da equação (GRINGARTEN; RAMEY, 1973). As Funções de Green são ferramentas matemáticas poderosas para resolver problemas de escoamento em meios porosos. No contexto da modelagem de reservatórios de petróleo, elas permitem a linearização parcial da equação diferencial que governa o escoamento dos fluidos. A solução analítica obtida por esse método pode ser expressa como uma integral que incorpora as condições iniciais e de contorno. Diversos trabalhos utilizam essa metodologia. Por exemplo, Duff (2001) apresenta aplicações das Funções de Green em problemas matemáticos aplicáveis à engenharia e física, servindo de base para vários pesquisadores que buscam soluções aproximadas para o escoamento em reservatórios.

Houve avanços significativos na formulação de soluções analíticas para o escoamento de gás em reservatórios utilizando Funções de Green e técnicas matemáticas avançadas. Barreto (2011) apresentou uma solução geral para poços de gás próximos a falhas selantes, combinando expansão assintótica com Funções de Green, obtendo alta precisão em comparação com modelos numéricos. Posteriormente, Barreto, Pires e Peres (2012) desenvolveram uma solução baseada em pseudopressão para analisar o escoamento em meios fraturados, refinando a expansão assintótica para melhorar a concordância com simuladores. Em seguida, Barreto, Peres e Pires (2013) aprimoraram esses métodos ao considerar os efeitos não lineares da viscosidade e compressibilidade, desenvolvendo uma solução perturbativa para testes de taxa variável em reservatórios infinitos de gás. Esses avanços foram validados

por meio de comparações com dados sintéticos e simuladores comerciais. Estudos mais recentes, como os de Sousa, Barreto e Peres (2015) e Sousa, Barreto e Peres (2016), incluíram efeitos de raio finito do poço e estocagem, resultando em soluções que se ajustam bem a simulações numéricas mesmo em tempos longos. Além disso, Neto (2019) expandiu o uso das Funções de Green para reservatórios heterogêneos com regiões de permeabilidade distintas, fornecendo novas perspectivas para a modelagem de sistemas compostos. Essas contribuições mostram como as Funções de Green podem ser uma ferramenta robusta e versátil na engenharia de reservatórios.

A maior parte desses estudos tem se concentrado no escoamento de gás, mas recentemente Fernandes (2022) desenvolveu um modelo analítico para o escoamento de óleo, considerando a dependência da permeabilidade com a pressão. Sua abordagem combina expansão assintótica de primeira ordem, Funções de Green e uma formulação integral-diferencial de Volterra. O modelo foi validado comparando suas previsões com resultados de simuladores numéricos. Esse tipo de estudo é fundamental para entender melhor o comportamento da pseudopressão em reservatórios de petróleo, levando a modelagens matemáticas mais próximas da realidade física desses sistemas. Ao tornar a modelagem mais realista, essas pesquisas fornecem subsídios importantes para a tomada de decisões na indústria petrolífera.

Em suma, o estudo do comportamento da pressão é essencial para garantir a eficiência operacional e o sucesso econômico na exploração de petróleo, principalmente porque o escoamento de fluidos em meios porosos é um fenômeno complexo. Muitos modelos assumem que a permeabilidade do reservatório é constante, mas sabe-se que essa propriedade pode variar significativamente ao longo do tempo e do espaço. Diante da escassez de trabalhos referentes ao escoamento de óleo com essa abordagem e visando a tornar as previsões do escoamento de óleo monofásico mais realistas ao utilizar a hipótese da permeabilidade como função da pressão, este trabalho propõe dois novos modelos que consideram a permeabilidade como uma função da pressão. Essa abordagem contribui para a precisão das análises e para otimizar a extração de petróleo. Os estudos a serem apresentados são referentes às soluções analíticas que são aproximadas por métodos numéricos para o escoamento em dois tipos de reservatórios, partindo da definição da pseudopressão dependente da permeabilidade, o que oferece uma estrutura mais fiel à realidade para a modelagem e otimização de reservatórios.

Nos Capítulos 2 e 3 será apresentada a aplicação e o desenvolvimento do método de Funções de Green para dois tipos de reservatório. No capítulo 2 a abordagem é constituída a partir de um reservatório com múltiplas

camadas, onde cada camada possui uma curva de permeabilidade dependente da pressão. Nesse caso, a solução no poço é obtida a partir do acoplamento das soluções por camada. Já no capítulo 3, o modelo proposto é referente a um reservatório heterogêneo composto por duas regiões. Nesse modelo cada região pode ser caracterizada por uma curva de permeabilidade dependente da pressão. Em ambos os modelos, as soluções obtidas são implícitas, portanto fez-se necessário o uso de métodos numéricos para o cálculo numérico das soluções. No Capítulo 4 são discutidos diferentes cenários de produção para os resultados comparativos entre um simulador de fluxo bem como os aspectos computacionais, configuração do simulador de fluxo e a relação da curva permeabilidade dependente da pressão. Por fim, no Capítulo 5 são expostas as conclusões do estudo, aplicabilidade dos modelos na indústria e sugestões para trabalhos futuros.

2

Modelo para escoamento monofásico com permeabilidade dependente da pressão: Reservatório com múltiplas camadas

Neste capítulo, apresenta-se uma formulação para o escoamento monofásico de líquido (óleo) em um reservatório multicamadas, considerando a permeabilidade como uma função da pressão ($k_j(p_j)$). A compreensão dessa formulação é fundamental, pois constitui a base estrutural da formulação principal deste trabalho. O reservatório e uma curva de permeabilidade dependente da pressão são considerados, conforme ilustrado pela Fig. 2.1.

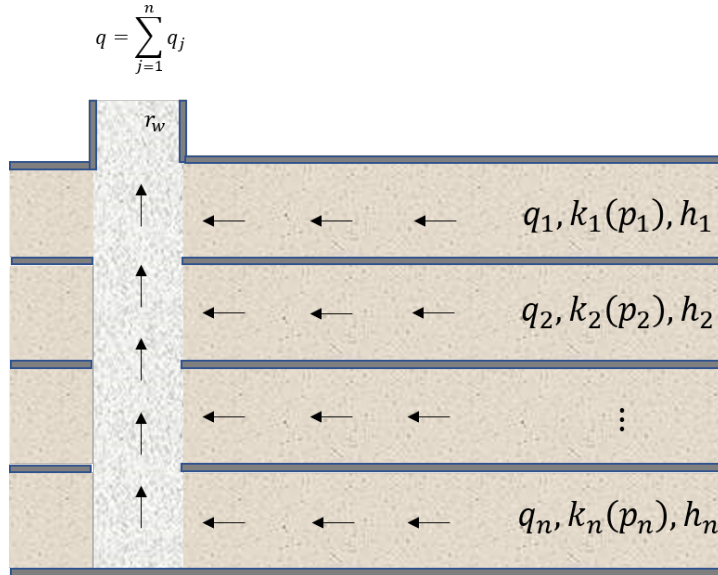


Figura 2.1: Modelo de reservatório multicamadas e permeabilidade dependente da pressão

Com o objetivo de simplificar a modelagem e a análise do problema, adotam-se as seguintes hipóteses:

- Permeabilidade Inicial (k_i) constante em todas as direções em cada camada;
- Vazão de produção constante no poço ($q = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(r_w, t)$);
- Fluxo monofásico, isotérmico e radial;
- Fluido com baixa compressibilidade;
- Reservatório infinito e isotrópico por camada;
- Efeitos gravitacionais desprezíveis;

- Efeito de estocagem e dano de formação no poço serão desconsiderados.

Considerando a Equação da Continuidade de fluidos temos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_j v_j) = - \frac{\partial}{\partial t} (\phi_j \rho_j) \quad (2-1)$$

Pela Lei de Darcy:

$$v_j = - \frac{k_j(p_j(r, t))}{\mu_j} \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \quad (2-2)$$

Substituindo a Eq. (2-2) na Eq. (2-1):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho_j \frac{k_j(p_j(r, t))}{\mu_j} \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_j \rho_j) \quad (2-3)$$

Aplicando a Regra da Cadeia do lado direito da Eq. (2-3):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_j \rho_j) = \phi_j \frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \rho_j \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \quad (2-4)$$

Sabendo que as compressibilidades do fluido e da rocha são $c_{f_j} = \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial p_j}$ e $c_{r_j} = \frac{1}{\phi_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_j}$ então:

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = c_{f_j} \rho_j \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial t} \quad (2-5)$$

e

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial t} = c_{r_j} \phi_j \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial t} \quad (2-6)$$

Substituindo as Eqs. (2-4), (2-5) e (2-6) na Eq. (2-3):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_j \frac{k_j(p_j(r, t))}{\mu} r \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \right) = \phi \rho c_t \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial t} \quad (2-7)$$

onde $c_{t_j} = c_{f_j} + c_{r_j}$.

De acordo com as hipóteses do modelo, a Equação (2-7) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_j(p_j(r, t)) r \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \right) = \phi \mu c_t \frac{\partial p_j}{\partial t} \quad (2-8)$$

A Equação (2-8) governa o escoamento de líquido no meio poroso e é conhecida como equação da difusividade hidráulica. A partir das hipóteses apresentadas, as seguintes condições modelam o problema:

Condição Inicial (CI)

$$p_j(r, t = 0) = p_i \quad (2-9)$$

Condição de Contorno Interno (CCI):

$$q_j = \frac{2\pi h_j}{\mu} \left(k_j(p_j(r, t)) r \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_w} \quad (2-10)$$

Condição de Contorno Externa (CCE):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_j(r, t) = p_i \quad (2-11)$$

Considerando que o acoplamento das soluções por camada ocorre no poço, temos as seguintes Condições de Acoplamento entre Camadas (CAC):

Condição de Acoplamento entre Camadas Pressões (CAC-P):

$$p_1(r_w, t) = \dots = p_n(r_w, t) \quad (2-12)$$

e

Condição de Acoplamento entre Camadas Vazões (CAC-V):

$$q = q_1(r_w, t) + \dots + q_n(r_w, t) \quad (2-13)$$

2.1

Modelo para pseudopressão adimensional

Definiremos a função pseudopressão dependente da permeabilidade na camada j ($m_j(p_j)$) por:

$$m_j(p_j(r, t)) = \int_{p_B}^{p_j(r, t)} k_j(x) dx \quad (2-14)$$

onde p_B é uma pressão de referência.

Sendo assim, considerando as propriedades de integração para integrais definidas, a variação da pseudopressão ($\Delta m_j(p_j)$) na camada j é dada por:

$$\Delta m_j(p_j(r, t)) = m_j(p_i) - m_j(p_j(r, t)) = \int_{p_j(r, t)}^{p_i} k_j(x) dx \quad (2-15)$$

Para reescrever as equações do problema original, é necessário considerar as derivadas parciais obtidas através da definição da variação de pseudopressão. Portanto, considerando a simplificação da notação de $\Delta m_j(p_j(r, t))$ para $\Delta m_j(r, t)$:

$$\frac{\partial \Delta m_j(r, t)}{\partial r} = -k_j(p_j(r, t)) \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \quad (2-16)$$

e

$$\frac{\partial \Delta m_j(r, t)}{\partial t} = -k_j(p_j(r, t)) \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial t} \quad (2-17)$$

Portanto, partindo da Equação da Difusividade (Equação (2-8)) em termos da função pseudopressão obtemos:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta m_j(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\phi c_t \mu}{k_j(p_j(r, t))} \left(\frac{\partial \Delta m_j(r, t)}{\partial t} \right) \quad (2-18)$$

Pelas hipóteses do problema, temos as seguintes condições iniciais e de contorno em termos da pseudopressão em cada camada ($\Delta m_j(p_j(r, t))$):

CI:

$$\Delta m_j(r, t = 0) = m_j(p_i) - m_j(r, t = 0) = 0 \quad (2-19)$$

CCI:

$$q_j = -\frac{2\pi h_j}{\mu} \left(r \frac{\partial \Delta m_j(p_j(r, t))}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \quad (2-20)$$

CCE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta m_j(p_j(r, t)) = 0 \quad (2-21)$$

Com as seguintes Condições de Acoplamento entre Camadas (CAC) no poço:

Condições de Acoplamento entre Camadas Pseudopressões (CAC-PP)

$$\Delta m_1(r_w, t) = \dots = \Delta m_n(r_w, t) \quad (2-22)$$

e

Condições de Acoplamento entre Camadas Vazões (CAC-V)

$$q = q_1(r_w, t) + \dots + q_n(r_w, t) \quad (2-23)$$

Logo, pela Lei de Darcy:

$$q = -\frac{2\pi h_1}{\mu} \left(r \frac{\partial \Delta m_1(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} - \dots - \frac{2\pi h_n}{\mu} \left(r \frac{\partial \Delta m_n(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \quad (2-24)$$

Para simplificar as equações do problema, variáveis adimensionais relativas ao espaço e ao tempo serão definidas por:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (2-25)$$

e

$$t_D = \frac{k_{eq}(p_i)}{\phi \mu c_t r_w^2} t \quad (2-26)$$

onde $k_{eq}(p_i)$ é a permeabilidade equivalente na pressão inicial dada por:

$$k_{eq}(p_i) = \frac{k_1(p_i)h_1 + \dots + k_n(p_i)h_n}{h_1 + \dots + h_n} \quad (2-27)$$

Portanto, ao substituir as variáveis adimensionais na Eq. (2-18) e após manipulações algébricas a seguinte equação é obtida:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \Delta m_j(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{k_{Dj}} \frac{\partial \Delta m_j(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (2-28)$$

Onde a permeabilidade adimensional será definida por:

$$k_{D_j}(p_j) = k_{D_j}(m_{D_j}) = \frac{k_j(p_j)}{k_{eq}(p_i)} \quad (2-29)$$

Portanto, as condições de contorno podem ser reescritas por:

CI:
$$\Delta m_j(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (2-30)$$

CCI:
$$q_j = -\frac{2\pi h_j}{\mu} \left(r_D \frac{\partial \Delta m_j(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (2-31)$$

CCE:
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta m_j(r_D, t_D) = 0 \quad (2-32)$$

Com a finalidade de completar a adimensionalização das equações do modelo, definiremos a pseudopressão adimensional (m_{D_j}):

$$m_{D_j}(r_D, t_D) = \frac{2\pi h_t}{q\mu} \Delta m_j(r_D, t_D) \quad (2-33)$$

Sendo assim, em termos de m_{D_j} tem-se na camada j :

EDP:
$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{k_{D_j}} \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (2-34)$$

CI:
$$m_{D_j}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (2-35)$$

CCI:
$$\left(r_D \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{q_j h_t}{q h_j} = -C_j \quad (2-36)$$

CCE:
$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{D_j}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-37)$$

Com as seguintes Condições de Acoplamento entre Camadas:

CAC-PP:

$$m_{1D}(r_D = 1, t_D) = \dots = m_{nD}(r_D = 1, t_D) \quad (2-38)$$

CAC-V:

$$\frac{h_1}{h_t} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} + \dots + \frac{h_n}{h_t} \left(r_D \frac{\partial m_{nD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -1 \quad (2-39)$$

Considerando agora a Equação Diferencial do problema com termo fonte (f_{D_j}) temos:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{1}{k_{D_j}(m_{D_j})} \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = f_{D_j}(r_D, t_D) \quad (2-40)$$

Note que a não-linearidade do problema está contida no termo $k_{D_j}(m_{D_j})$. Sendo assim, para reescrever a parte linear da Eq. (2-40) adotaremos o desvio hidráulico (w_{D_j}) que será definido por:

$$w_{D_j}(m_{D_j}) = \frac{1}{k_{D_j}(m_{D_j})} - 1 \quad (2-41)$$

Sendo assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ = w_{D_j}(m_{D_j}) \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{D_j}(r_D, t_D) \end{aligned} \quad (2-42)$$

2.2

Problema de Green Associado

A técnica de Funções de Green é uma poderosa ferramenta matemática utilizada para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Essa técnica permite transformar o problema diferencial em um problema integral, o que, em muitos casos, é mais fácil de analisar ou resolver. O problema de Green associado está relacionado com a formulação de um problema cuja solução pode ser expressa em termos da função de Green. Essa função é uma solução fundamental que representa a resposta do sistema a uma fonte pontual e é usada para reconstruir soluções gerais através da superposição de efeitos pontuais. Esse método é particularmente útil na análise de escoamento em meios porosos, facilitando a obtenção de soluções exatas ou aproximadas para a distribuição de pressão. Em outras palavras, resolver o problema de Green associado significa descobrir como o sistema responde à fonte pontual representada pela função delta de Dirac (δ) (DUFF, 2001).

Definiremos o problema de Green associado para cada camada j , de acordo com condições de contorno sujeitas ao Princípio da Causalidade (PC). O princípio da causalidade garante que a função de Green respeite a ordem temporal natural dos eventos em sistemas físicos. Para modelagem de escoamento em reservatórios, isso assegura que a propagação da pressão siga uma evolução coerente com o tempo. Portanto, as seguintes equações modelam o Problema de Green Associado na camada j é a solução fundamental da equação de difusão associada a uma fonte pontual no espaço r_{0D} e no tempo t_{0D} :

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D}$$

$$= -C_j \delta(r_D - r_{0D}) \delta(t_D - t_{0D}) \quad (2-43)$$

PC:

$$G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (2-44)$$

para $t_D \leq t_{0D}$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (2-45)$$

onde $C_j = \frac{-q_j h t}{q h_j}$.

O problema adjunto é frequentemente utilizado para determinar propriedades da função de Green, como sua simetria e comportamento assintótico. O problema de Green associado e o problema adjunto associado estão conectados pelo fato de a função de Green poder ser interpretada como a solução do problema adjunto. De fato, considerando o problema adjunto $G_{D_j}^*(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})$ as equações referentes à camada j são dadas por:

EDP:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{D_j}^*(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) + \frac{\partial G_{D_j}^*(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} \\ = -C_j \delta(r_D - r_{0D}) \delta(t_D - t_{0D}) \end{aligned} \quad (2-46)$$

PC:

$$G_{D_j}^*(r_D, r_{0D}, t_D = 0, t_{0D}) = 0 \quad (2-47)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{D_j}^*(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (2-48)$$

Neto (2019) demonstrou o princípio da reciprocidade:

$$G_{D_j}^*(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \quad (2-49)$$

Logo, o problema associado passa a ser da seguinte forma para cada camada j :

EDP:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) + \frac{\partial G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} \\ = -\frac{C_j \delta(r_D - r_{0D}) \delta(t_D - t_{0D})}{2\pi r_D} \end{aligned} \quad (2-50)$$

CI:

$$G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D = 0, t_{0D}) = 0 \quad (2-51)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{D_j}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (2-52)$$

2.3

Cálculo Numérico da Solução por Camada

A função de Green associada ao problema em questão é diretamente influenciada pela geometria radial do sistema. Na literatura, essa abordagem foi amplamente aplicada a casos com configurações geométricas semelhantes para escoamento de gás (BARRETO, 2011; SOUSA, 2014) demonstrando sua eficácia na modelagem de problemas dessa natureza. A solução para o modelo referente ao escoamento de óleo pode ser determinada por meio da equação integral-diferencial de Volterra, a qual é obtida após uma série de manipulações matemáticas envolvendo a integração espacial e temporal da equação governante do problema, juntamente com a formulação do problema de Green associado (FERNANDES et al., 2023a; FERNANDES et al., 2023b; FERNANDES, 2022). Esse processo resulta na seguinte expressão analítica para a solução do sistema:

$$m_{D_j}(r_D, t_D) = \frac{-2\pi}{M_j} \int_0^\infty \int_0^{t_D} \left[w_{D_j}(m_{D_j}) \frac{\partial m_{D_j}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} + f_{D_j}(r_{D'}, t_{D'}) \right] G_{D_j}(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} dr_{D'} \quad (2-53)$$

Onde a função de Green (G_{D_j}) é dada por:

$$G_{D_j}(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) = \frac{\exp\left(-\frac{(r_D - r_{D'})^2}{4(t_D - t_{D'})}\right)}{4\pi(t_D - t_{D'})} I_0\left(\frac{r_D r_{D'}}{2(t_D - t_{D'})}\right) \quad (2-54)$$

A função fonte f_{D_j} pode ser definida como:

$$f_{D_j}(r_D, t_D) = -2\pi q_{D_j}(t_D) \delta(r_D - r_{D'}) \quad (2-55)$$

onde δ é a função delta de Dirac e q_{D_j} representa a vazão adimensional na camada j :

$$q_D(t_D) = \frac{q_{sc}(t)}{q_{ref}} \quad (2-56)$$

Substituindo (2-54) e (2-55) em (2-53) e aplicando a propriedade da delta de Dirac:

$$m_{D_j}(r_D, t_D) = \frac{1}{C_j} p_{D_j}(r_D, t_D) - \frac{2\pi}{M_j} \int_0^\infty \int_0^{t_D} w_{D_j}(m_{D_j}) \frac{\partial m_{D_j}(r'_D, t'_D)}{\partial t_D} G_{D_j}(r_D, r'_D, t_D, t'_D) dt'_D dr'_D \quad (2-57)$$

A solução da clássica para escoamento monofásico de líquidos $p_{D_j}(r_D, t_D)$ é representada pela solução da linha-fonte dada pela seguinte equação:

$$p_{D_j}(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} Ei \left(\frac{-r_D^2}{4t_D} \right) \quad (2-58)$$

onde Ei representa a função integral exponencial definida por:

$$Ei(x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (2-59)$$

Verifica-se que a solução apresentada na Equação (2-57) possui caráter implícito, o que inviabiliza sua aplicação direta em procedimentos numéricos. Diante disso, torna-se necessário empregar uma abordagem alternativa que permita a obtenção de soluções aproximadas de forma mais acessível computacionalmente.

Entre as metodologias disponíveis, destaca-se o Método de Perturbação em combinação com uma Expansão Assintótica, cuja principal vantagem reside na capacidade de aproximar equações diferenciais não lineares por meio de uma série de problemas de equações de mesma ordem, que são significativamente mais simples de resolver. No presente trabalho, aplica-se tal metodologia à equação de difusividade com permeabilidade dependente da pressão (Equação 2-42), introduzindo-se o parâmetro de perturbação ε , o qual multiplica o termo responsável pela não linearidade:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = \varepsilon w_{D_j}(m_{D_j}) \frac{\partial m_{D_j}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{D_j}(r_D, t_D) \quad (2-60)$$

Considerando que a pseudopressão pode ser representada por uma Expansão Assintótica em potências de ε :

$$m_{D_j}(r_D, t_D) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k m_{D_j}^{(k)}(r_D, t_D) \quad (2-61)$$

Substituindo (2-61) em (2-60) e rearranjando os termos de acordo com as potências de ε , obtém-se uma sequência de EDPs mais simples, que podem ser resolvidas de forma sistemática:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 \left[\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - f_{D_j}(r_D, t_D) \right] + \dots + \\ & \varepsilon^k \left[\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{D_j}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - w_{D_j}(m_{D_j}^{(k-1)}) \frac{\partial m_{D_j}^{(k-1)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \right] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2-62)$$

A seguinte definição foi adotada para simplificar a visualização dos termos das equações:

$$w_{D_j} \left(m_{D_j}^{(k-1)} \right) = w_{D_j} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i m_{D_j}^{(i)}(r_D, t_D) \right) \quad (2-63)$$

Esse procedimento permite tratar a complexidade do problema de forma sistemática, fornecendo aproximações úteis mesmo quando a solução exata é inalcançável. Portanto, o problema se torna um sistema de acordo com as ordens de ε da forma:

Ordem 0:

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - f_{D_j}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-64)$$

CI:

$$m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-65)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-66)$$

Ordem $k \geq 1$:

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{D_j}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - w_{D_j}(m_{D_j}^{(k-1)}) \frac{\partial m_{D_j}^{(k-1)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = 0 \quad (2-67)$$

CI:

$$m_{D_j}^{(k)}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-68)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{D_j}^{(k)}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-69)$$

A problema de ordem 0 representa a solução do problema homogêneo, portanto considerando a solução clássica para escoamento de óleo:

$$m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D) = \frac{1}{C_j} p_{D_j}(r_D, t_D) \quad (2-70)$$

Além disso, considerando a equação integral-diferencial de Volterra:

$$m_{D_j}^{(k)}(r_D, t_D) = \int_0^\infty \int_0^{t_D} w_{D_j}(m_{D_j}^{(k-1)}) \frac{\partial m_{D_j}^{(k-1)}}{\partial t_D} G_D(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} dr_{D'} \quad (2-71)$$

Note que a solução obtida a partir do termo de primeira ordem é recorrente. Portanto, como em Barreto (2011) e Fernandes (2022), consideramos que a truncagem no termo de ordem um é suficiente, uma vez que a contribuição das ordens superiores se torna cada vez mais complexa do ponto de vista computacional.

Ordem 0:

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - f_{D_j}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-72)$$

CI:

$$m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-73)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-74)$$

Ordem 1:

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{D_j}^{(1)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{D_j}^{(1)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - w_{D_j}(p_{D_j}) \frac{\partial m_{D_j}^{(1)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = 0; \quad (2-75)$$

CI:

$$m_{D_j}^{(1)}(r_D, t_D) = 0; \quad (2-76)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{D_j}^{(1)}(r_D, t_D) = 0 \quad (2-77)$$

Portanto, para cada sistema de equações, as soluções são dadas por:

$$m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D) = \frac{1}{C_j} p_{D_j}(r_D, t_D) \quad (2-78)$$

e

$$m_{D_j}^{(1)}(r_D, t_D) = -\frac{2\pi}{C_j} \int_0^\infty \int_0^{t_D} w_{D_j}(p_{D_j}) \frac{\partial p_{D_j}}{\partial t_D} G_D(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} dr_{D'} \quad (2-79)$$

Ademais, observa-se que para $\varepsilon = 1$, tem-se a solução do problema original. Portanto, a solução para pseudopressão adimensional na camada j (m_{D_j}) é dada por:

$$m_{D_j}(r_D, t_D) = \varepsilon m_{D_j}^{(0)}(r_D, t_D) + \varepsilon m_{D_j}^{(1)}(r_D, t_D) = p_{D_j}(r_D, t_D) + m_{D_j}^{(1)}(r_D, t_D) \quad (2-80)$$

2.4

Solução do Modelo

O principal objetivo desta seção é determinar uma solução para o comportamento da pseudopressão no poço. Até o momento, diversas ferramentas matemáticas foram empregadas para resolver o problema em cada camada individualmente (SOUSA, 2014; FERNANDES, 2022; FERNANDES et al., 2023a; FERNANDES et al., 2023b). A seguir, essas soluções serão acopladas para obter uma única resposta para o comportamento da pseudopressão no poço. Dessa forma, conhecendo a solução da pressão para cada camada (Eq. 2-80), estabelecem-se as seguintes condições de acoplamento no poço:

Condição de Acoplamento entre Camadas da Pseudopressão (CAC-PP):

$$m_{D_1}(r_D = 1, t_D) = m_{D_2}(r_D = 1, t_D) = \dots = m_{D_n}(r_D = 1, t_D) \quad (2-81)$$

Condição de Acoplamento entre Camadas da Vazão (CAC-V):

$$q_1(r_D = 1, t_D) + q_2(r_D = 1, t_D) + \dots + q_n(r_D = 1, t_D) = 1 \quad (2-82)$$

Além disso, no regime monofásico, o óleo não sofre variações significativas de propriedades entre as camadas no poço. Isso implica que a pressão na interface entre cada camada e o poço deve ser a mesma para garantir a continuidade do fluxo e evitar descontinuidades na movimentação do fluido, portanto:

$$p_D(t_D) = p_{D_1}(r_D = 1, t_D) = p_{D_2}(r_D = 1, t_D) = \dots = p_{D_n}(r_D = 1, t_D) \quad (2-83)$$

Substituindo a definição de C_j nas Eqs. (2-78) e (2-79):

$$\begin{aligned} m_{D_j}(r_D, t_D) = & \frac{h_j}{q_{D_j} h_T} p_D(t_D) \\ & - \frac{2\pi h_j}{q_{D_j} h_T} \int_0^\infty \int_0^{t_D} w_{D_j}(p_{D_j}) \frac{\partial p_{D_j}(r'_D, t'_D)}{\partial t_D} G_{D_j}(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} dr_{D'} \end{aligned} \quad (2-84)$$

onde $h_T = h_1 + \dots + h_n$.

Portanto, a equação pode ser reescrita como:

$$q_{D_j} = \frac{h_j}{h_T m_{D_j}(r_D, t_D)} p_D(t_D) - 2\pi \frac{h_j}{h_T m_{D_j}(r_D, t_D)} \int_0^\infty \int_0^{t_D} w_{D_j}(p_{D_j}) \frac{\partial p_{D_j}(r'_D, t'_D)}{\partial t_D} G_{D_j}(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} dr_{D'} \quad (2-85)$$

Substituindo a Equação (2-85) na Condição de Acoplamento da Vazão (Equação (2-82)):

$$\sum_{i=1}^n \frac{h_j}{h_T m_{D_j}(r_D, t_D)} \left(p_D(t_D) - 2\pi \int_0^\infty \int_0^{t_D} w_{D_j}(p_{D_j}) \frac{\partial p_{D_j}}{\partial t_D} G_{D_j}(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} dr_{D'} \right) = 1 \quad (2-86)$$

Denominando a solução da pseudopressão no poço por m_{w_D} , a Condição de Acoplamento da pseudopressão nos permite utilizar:

$$m_{w_D}(t_D) = m_{D_1}(r_D = 1, t_D) = m_{D_2}(r_D = 1, t_D) = \dots = m_{D_n}(r_D = 1, t_D) \quad (2-87)$$

Substituindo a Equação (2-87) na Equação (2-86) e rearranjando os termos, obtemos a solução da pseudopressão no poço:

$$m_{w_D}(t_D) = p_D(t_D) - \frac{2\pi}{h_T} \sum_{i=1}^n h_j \int_0^\infty \int_0^{t_D} w_{D_j}(p_{D_j}) \frac{\partial p_{D_j}(r'_D, t'_D)}{\partial t_D} G_{D_j}(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} dr_{D'} \quad (2-88)$$

3

Modelo para escoamento monofásico com permeabilidade dependente da pressão: Reservatório de camada única com duas regiões

O objetivo principal deste capítulo consiste em obter a distribuição de pseudopressões para o escoamento de óleo em meio poroso heterogêneo, além de apresentar as abordagens de cálculo dessa solução. A dedução da solução consiste em determinar a resposta da pseudopressão no poço, representada pela solução de $m_{1D}(r_D, t_D)$ em $r_D = 1$, sendo esta denotada por $m_{wD}(t_D)$ de acordo com uma metodologia que utiliza as Funções de Green. Essa análise é fundamental para compreender o comportamento do escoamento e otimizar a modelagem do processo de produção.

3.1

Modelo para Pseudopressão Adimensional

Nesta seção consideraremos um reservatório de camada única heterogêneo composto por duas regiões homogêneas conforme o modelo da Figura 3.1.

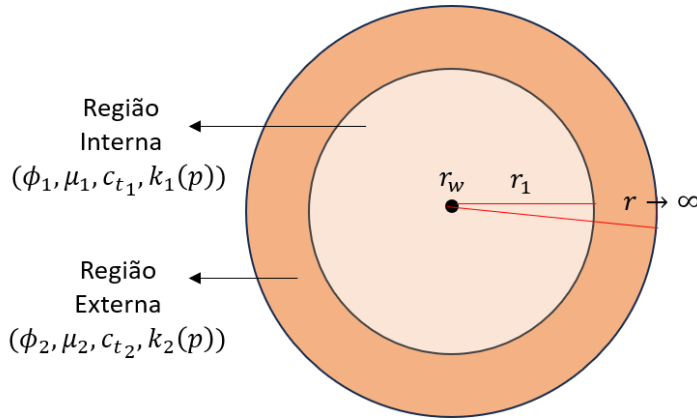


Figura 3.1: Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade

Com respeito ao escoamento no meio poroso em questão, serão consideradas as seguintes hipóteses:

- Reservatório Infinito;
- Meio poroso heterogêneo, composto por duas regiões homogêneas;
- Fluxo monofásico, radial e isotérmico;
- Geometria Cilíndrica;
- Efeitos de estocagem e dano de formação serão desconsiderados.

Analogamente ao Capítulo 2, partindo da Equação da Difusividade Hidráulica, o problema de acordo com cada região é descrito pelas seguintes equações:

Região Interna ($r_w \leq r \leq r_1$)

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_1(p_1(r, t)) \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right) = \phi_1 \mu_1 c_{t_1} \left(\frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial t} \right) \quad (3-1)$$

onde $\Delta p_1(r, t) = p_i - p_1(r, t)$.

CI:

$$\Delta p_1(r, t = 0) = p_i \quad (3-2)$$

CCI:

$$q = -\frac{2\pi h}{\mu_1} \left(r k_1(p(r, t)) \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \quad (3-3)$$

Região Externa ($r > r_1$)

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_2(p_2(r, t)) \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial r} \right) = \phi_2 \mu_2 c_{t_2} \left(\frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial t} \right) \quad (3-4)$$

CI:

$$\Delta p_2(r, t = 0) = p_i \quad (3-5)$$

CCE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta p_2(r, t) = 0 \quad (3-6)$$

Além disso, considerando a interface que delimita as duas regiões ($r = r_1$), podemos definir duas condições de acoplamento entre regiões relativas à pressão e à vazão:

$$\Delta p_1(r_1, t) = \Delta p_2(r_1, t) \quad (3-7)$$

e

$$q_1(r_1, t) = q_2(r_1, t) \quad (3-8)$$

Utilizando a Lei de Darcy:

$$-\frac{2\pi h}{\mu_1} \left(r k_1(p_1(r, t)) \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1} = -\frac{2\pi h}{\mu_2} \left(r k_2(p_2(r_1, t)) \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1} \quad (3-9)$$

Portanto:

$$\left(k_1(p_1(r, t)) \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(k_2(p_2(r, t)) \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1} \quad (3-10)$$

A pseudopressão nas regiões $j = 1, 2$ será denominada $m_j(r, t)$ e será definida por:

$$m_j(r, t) = \int_{p_B}^{p_j(r, t)} k(x) dx \quad (3-11)$$

onde p_B é uma pressão base e o integrando $k(x)$ é dado por:

$$k(x) = \begin{cases} k_1(p_1(r, t)), & r_w \leq r \leq r_1 \\ k_2(p_2(r, t)), & r > r_1 \end{cases} \quad (3-12)$$

Com isso, a variação da pseudopressão ($\Delta m_j(p_j(r, t))$) pode ser escrita por:

$$\Delta m_j(p_j(r, t)) = m_j(p_i) - m_j(p_j(r, t)) = \int_{p_j(r, t)}^{p_i} k(x) dx \quad (3-13)$$

Em cada região j , observe que as derivadas parciais da pseudopressão podem ser obtidas utilizando a regra de diferenciação de integrais de Leibniz:

$$\frac{\partial \Delta m_j(p_j(r, t))}{\partial t} = -k_j(p_j(r, t)) \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial t} \quad (3-14)$$

e

$$\frac{\partial \Delta m_j(p_j(r, t))}{\partial r} = -k_j(p_j(r, t)) \frac{\partial p_j(r, t)}{\partial r} \quad (3-15)$$

Neste modelo, o meio poroso heterogêneo é composto por duas regiões homogêneas por região. Sendo assim, definiremos o coeficiente de difusividade hidráulica η_j na região j como:

$$\eta_j(r, t) = \frac{k_j(p_j(r, t))}{\phi_j \mu_j c_{t_j}} \quad (3-16)$$

Portanto, substituindo as derivadas parciais da pseudopressão temos para cada região as seguintes equações:

Região Interna ($r_w \leq r \leq r_1$)

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta m_1(p_1(r, t))}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_1(r, t)} \left(\frac{\partial \Delta m_1(p_1(r, t))}{\partial t} \right) \quad (3-17)$$

CI:

$$\Delta m_1(p_1(r, t = 0)) = m_1(p_i) - m_1(p_1 = p_i) = 0 \quad (3-18)$$

CCI:

$$q = -\frac{2\pi h}{\mu_1} \left(r \frac{\partial \Delta m_1(p_1(r, t))}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \quad (3-19)$$

Região Externa ($r > r_1$)

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta m_2(p_2(r, t))}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_2(r, t)} \left(\frac{\partial \Delta m_2(p_2(r, t))}{\partial t} \right) \quad (3-20)$$

CI:

$$\Delta m_2(p_2(r, t = 0)) = m_2(p_i) - m_2(p_2 = p_i) = 0 \quad (3-21)$$

CCE:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta m_2(p_2(r, t)) = 0 \quad (3-22)$$

Para as condições de acoplamento, temos:

$$p_1(r_1, t) = p_2(r = r_1, t) \quad (3-23)$$

Utilizando a Lei de Darcy na Equação 3-8, é possível relacionar as vazões na interface entre as regiões da seguinte forma:

$$\left(r \frac{\partial \Delta m_1(p_1(r, t))}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1} = M_R \left(r \frac{\partial \Delta m_2(p_2(r, t))}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_1} \quad (3-24)$$

Onde $M_R = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Por outro lado, pela Condição de Acoplamento entre Regiões relativa à pseudopressão temos:

$$\Delta m_1(p_1(r = r_1, t)) = \Delta m_2(p_2(r = r_1, t)) \quad (3-25)$$

Para dar continuidade à solução do modelo utilizaremos as variáveis adimensionais. A utilização de variáveis adimensionais dá um caráter geral à formulação do problema e possibilita uma escrita mais compacta.

Definiremos as variáveis adimensionais em função das propriedades da região externa. Essa escolha ocorreu devido ao fato de o modelo de reservatório composto por duas regiões poder ser aplicado ao caso em que a região interna representa uma zona danificada, em que se pretende obter estimativas, e a zona externa representa propriedades do reservatório que são conhecidas.

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (3-26)$$

$$t_D = \frac{k_2(p_i)}{\phi_2 \mu_2 c_{t2} r_w^2} t \quad (3-27)$$

$$\eta_{jD}(r_D, t_D) = \frac{\eta_j(p_j(r, t))}{\eta_j(p_i)} \quad (3-28)$$

$$m_{jD}(r_D, t_D) = \frac{2\pi h}{q\mu_2} \Delta m_j(r, t) \quad (3-29)$$

onde

$$\eta_j(p_i) = \frac{k_j(p_i)}{\phi_j \mu_j c_{tj}}$$

Utilizando as definições das variáveis adimensionais temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial \Delta m_j(p_j(r, t))}{\partial r} = \frac{\partial \Delta m_j(p_j(r_D, t_D))}{\partial r_D} \frac{\partial r_D}{\partial r} = \frac{1}{r_w} \frac{\partial \Delta m_j(p_j(r_D, t_D))}{\partial r_D} \quad (3-30)$$

e

$$\frac{\partial \Delta m_j(p_j(r, t))}{\partial t} = \frac{\partial \Delta m_j(p_j(r_D, t_D))}{\partial t_D} \frac{\partial t_D}{\partial t} = \frac{k_2(p_i)}{\phi_2 \mu_2 c_{t2} r_w^2} \frac{\partial \Delta m_j(p_j(r_D, t_D))}{\partial t_D} \quad (3-31)$$

Substituindo as Equações (3-30) e (3-31) nas Equações (3-17) e (3-20) obtemos respectivamente:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\Delta m_1(p_1(r_D, t_D))}{r_D} \right) = \frac{\eta_R^2}{\eta_{1D}(r_D, t_D)} \left(\frac{\partial \Delta m_1(p_1(r_D, t_D))}{\partial t_D} \right) \quad (3-32)$$

e

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\Delta m_2(p_2(r_D, t_D))}{r_D} \right) = \frac{1}{\eta_{2D}(r_D, t_D)} \left(\frac{\partial \Delta m_2(p_2(r_D, t_D))}{\partial t_D} \right) \quad (3-33)$$

onde o coeficiente $\eta_R = \sqrt{\frac{\eta_2(p_i)}{\eta_1(p_i)}}$ será denominado razão de difusividade. Por outro lado, utilizando a definição da pseudopressão adimensional (3-29) o problema adimensionalizado em cada região é dado por:

Região Interna ($1 \leq r_D \leq r_{1D}$)

Equação Diferencial Parcial (EDP):

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = \frac{\eta_R^2}{\eta_{1D}(r_D, t_D)} \left(\frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \right) \quad (3-34)$$

Condição Inicial (CI):

$$m_{1D}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (3-35)$$

Condição de Contorno Interno (CCI):

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} = -M_R \quad (3-36)$$

Região Externa ($r_D > r_{1D}$)

Equação Diferencial Parcial (EDP):

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{2D}}{\partial r_D} \right) = \frac{1}{\eta_{2D}(r_D, t_D)} \left(\frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \right) \quad (3-37)$$

Condição Inicial (CI):

$$m_{2D}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (3-38)$$

Condição de Contorno Externo (CCE):

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{2D}(r_D, t_D) = 0 \quad (3-39)$$

Com isso, as condições de acoplamento passam a ser da seguinte forma:

Condição de Acoplamento entre Regiões Pseudopressões (CAR-PP)

$$m_{1D}(r_D = r_{1D}, t_D) = m_{2D}(r_D = r_{1D}, t_D) \quad (3-40)$$

Condição de Acoplamento entre Regiões Vazões (CAR-V)

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D = r_{1D}} = M_R \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D = r_{1D}} \quad (3-41)$$

É possível observar que as EDP's (3-34) e (3-37) ainda apresentam um termo não-linear. Adotaremos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$H_{1D}(r_D, t_D) = \frac{\eta_R^2}{\eta_{1D}(r_D, t_D)} \quad (3-42)$$

e

$$H_{2D}(r_D, t_D) = \frac{1}{\eta_{2D}(r_D, t_D)} \quad (3-43)$$

Dessa forma é possível definir o desvio hidráulico de cada região por:

$$w_{1D}(r_D, t_D) = H_{1D}(r_D, t_D) - \eta_R^2 \quad (3-44)$$

e

$$w_{2D}(r_D, t_D) = H_{2D}(r_D, t_D) - 1 \quad (3-45)$$

Sendo assim, as EDPs referentes à região interna e externa podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \eta_R^2 \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ & = w_{1D}(r_D, t_D) \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{1D}(r_D, t_D) \end{aligned} \quad (3-46)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ & = w_{2D}(r_D, t_D) \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{2D}(r_D, t_D) \end{aligned} \quad (3-47)$$

3.2

Problema de Green Associado

Para aplicar a técnica de funções de Green é necessário definir o problema associado de Green sujeito ao Princípio da Causalidade (PC) e condições homogêneas. A técnica de Funções de Green é um método clássico de solução de equações diferenciais parciais aplicável em equações lineares, utilizado em problemas relativos a transferência de calor e escoamento em meios porosos. Entretanto, neste caso as não-linearidades do problema que estão posicionadas à direita da igualdade das EDP's de cada região serão tratadas como termos-fonte no decorrer da dedução. Nesse modelo, considera-se um reservatório heterogêneo que é composto por duas regiões homogêneas, havendo assim duas configurações para a posição da fonte (r_{0D}, t_{0D}) , denotada pela curva tracejada, como exemplificado na Figura (3.2):

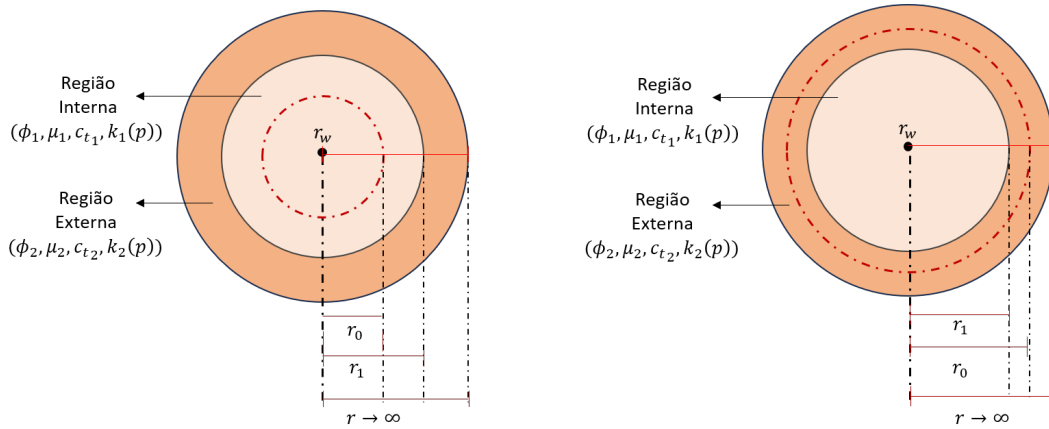


Figura 3.2: Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte

As Funções de Green adotadas nesse capítulo foram obtidas conforme descrito no Apêndice C. A notação das funções de Green utilizadas são referentes à posição da fonte e da posição de resposta. Além disso, a notação possui o índice superior indicando a posição da fonte, ou seja, G_D^1 para fonte posicionada na região interna e G_D^2 para fonte posicionada na região externa. Enquanto a região da posição de resposta é denotada pelo índice inferior. Logo, para fonte na região interna as funções são definidas por:

$$G_D^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \begin{cases} G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}), 1 \leq r_D, r_{0D} \leq r_{1D} \\ G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}), r_D > r_{1D} \end{cases} \quad (3-48)$$

Já para a fonte posicionada na região externa as funções são definidas por:

$$G_D^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \begin{cases} G_{1D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}), 1 \leq r_D \leq r_{1D} \\ G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}), r_D, r_{0D} > r_{1D} \end{cases} \quad (3-49)$$

Para aplicar a técnica do uso de Funções de Green, é necessário definir o seguinte problema associado, sujeito ao princípio da causalidade (PC) e condições de contorno homogêneas.

Região Interna:

EDP:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \eta_R^2 \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} \\ = -M_R \frac{1}{2\pi r_D} \delta(r_D - r_{0D}) \delta(t_D - t_{0D}) \end{aligned} \quad (3-50)$$

para $1 \leq r_D, r_{0D} \leq r_{1D}$ e $t_D, t_{0D} > 0$.

PC:

$$G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (3-51)$$

para $t_D < t_{0D}$.

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (3-52)$$

Região Externa:

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} = 0 \quad (3-53)$$

para $1 < r_D, r_{0D} < r_{1D}$ e $t_D, t_{0D} > 0$.

PC:

$$G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (3-54)$$

para $t_D < t_{0D}$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (3-55)$$

Acoplamento entre Regiões ocorre em $r_D = r_{1D}$, logo:

$$G_{1D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) - G_{2D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (3-56)$$

e

$$\left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \quad (3-57)$$

onde G_{1D}^1 e G_{2D}^1 são as soluções do problema associado que compõem a Função de Green G_D^1 .

O problema adjunto é essencial para a aplicação da identidade de reciprocidade e para a formulação de soluções baseadas na Função de Green. O problema associado adjunto é formulado de maneira semelhante ao problema direto, entretanto a sua estrutura matemática é ajustada de forma a garantir a simetria na Função de Green (DUFF, 2001). Para este problema específico, o problema associado adjunto é dado por:

Região Interna

EDP:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^{1*}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) + \eta_R^2 \frac{\partial G_{1D}^{1*}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_{0D}} \\ & = -M_R \frac{1}{2\pi r_D} \delta(r_D - r_{0D}) \delta(t_D - t_{0D}) \end{aligned} \quad (3-58)$$

para

Princípio da Causalidade Adjunto:

$$G_{1D}^{1*}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (3-59)$$

para

Condição de Contorno Interna:

$$\left(r_D \frac{\partial G_{1D}^{1*}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (3-60)$$

Região Externa

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^{1*}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) + \frac{\partial G_{2D}^{1*}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_{0D}} = 0 \quad (3-61)$$

para

Princípio da Causalidade Adjunto:

$$G_{2D}^{1*}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (3-62)$$

para

Condição de Contorno Externa:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{2D}^{1*}(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (3-63)$$

3.3

Solução do Modelo

Para determinar as soluções para a pseudopressão em cada região ($m_{1D}(r_D, t_D)$ e $m_{2D}(r_D, t_D)$) será necessário manipular algebricamente as equações do modelo proposto e do problema de Green associado. Para melhor compreensão do leitor essas duas soluções serão calculadas separadamente a seguir.

3.3.1

Solução Fonte na Região Interna

Para obter a solução para pseudopressão referente a região interna serão utilizadas as equações do problema proposto e as funções de Green referentes a fonte na região interna, ou seja, G_{1D}^1 e G_{2D}^1 . A Figura 3.3 expressa a geometria do modelo analisado nesse caso.

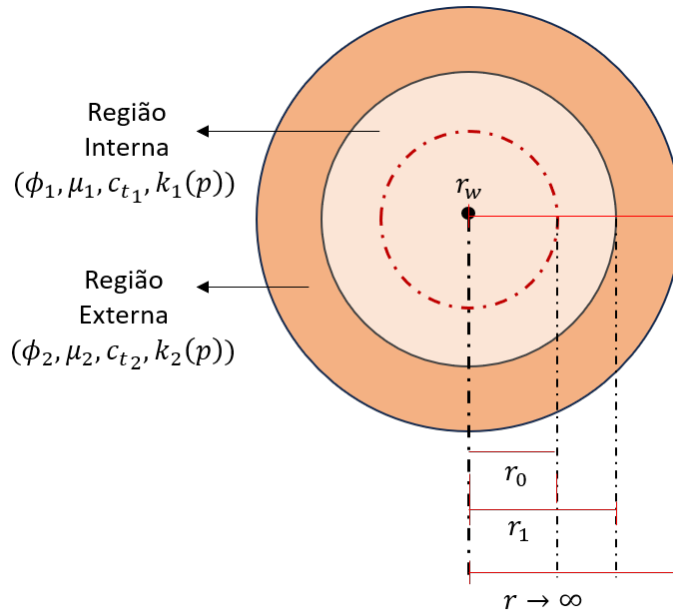


Figura 3.3: Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte na região interna

Multiplicando as Equações (3-46) e (3-50) por $2\pi r_D G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_{0D}, t_D)$ e $2\pi r_D m_{1D}(r_D, t_D)$, respectivamente, as seguintes relações são obtidas:

$$\begin{aligned}
 & 2\pi G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \\
 & - 2\pi r_D G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \eta_R^2 \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\
 & = 2\pi r_D G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \left(w_{1D}(m_{1D}) \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{1D}(r_D, t_D) \right)
 \end{aligned} \tag{3-64}$$

e

$$\begin{aligned}
 & 2\pi m_{1D}(r_D, t_D) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \\
 & + 2\pi r_D m_{1D}(r_D, t_D) \eta_R^2 \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} = \\
 & - M_R m_{1D}(r_D, t_D) \delta(r_D - r_{0D}) \delta(t_D - t_{0D})
 \end{aligned} \tag{3-65}$$

Subtraindo as Equações (3-64) e (3-65) podemos agrupar os termos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \left[G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \right. \\
 & \left. - m_{1D}(r_D, t_D) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \right] \\
 & - 2\pi r_D \eta_R^2 \left[G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \right. \\
 & \left. + m_{1D}(r_D, t_D) \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} \right] \\
 & = 2\pi r_D G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \left(w_{1D}(m_{1D}) \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{1D}(r_D, t_D) \right) \\
 & + M_R m_{1D}(r_D, t_D) \delta(r_D - r_{0D}) (t_D - t_{0D})
 \end{aligned} \tag{3-66}$$

A Equação (3-66) está relacionada com a solução do problema na Região Interna, sendo assim é possível integrá-la com respeito ao tempo de $t_D = 0$ até $t_D = t_{0D}$ e ao espaço $r_D = 1$ até $r_D = r_{1D}$:

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \right. \\
 & \left. - m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & - 2\pi \eta_R^2 \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} r_{D'} \left[G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 & \left. + m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial t_{D'}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & = 2\pi \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} r_{D'} G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \left(w_{1D}(m_{1D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 & \left. + f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'} \\
 & + M_R \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \delta(r_{D'} - r_{0D}) \delta(t_{D'} - t_{0D}) dr_{D'} dt_{D'}
 \end{aligned} \tag{3-67}$$

Analogamente, para as equações referentes à região externa é possível multiplicar as Equações (3-47) e (3-53) por $2\pi r_D G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})$ e $2\pi r_D m_{2D}(r_D, t_D)$, respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} & 2\pi G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \\ & - 2\pi r_D G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ & = 2\pi r_D G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \left(w_{2D}(m_{2D}) \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{2D}(r_D, t_D) \right) \end{aligned} \quad (3-68)$$

e

$$\begin{aligned} & 2\pi m_{2D}(r_D, t_D) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \\ & + 2\pi r_D m_{2D}(r_D, t_D) \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} = 0 \end{aligned} \quad (3-69)$$

Subtraindo as Equações (3-68) e (3-69):

$$\begin{aligned} & 2\pi \left(G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \right. \\ & \left. - m_{2D}(r_D, t_D) \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \right) \\ & - 2\pi r_D \left(G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \right. \\ & \left. + m_{2D}(r_D, t_D) \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} \right) \\ & = 2\pi r_D G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \left((w_{2D}(m_{2D}) \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{2D}(r_D, t_D)) \right) \end{aligned} \quad (3-70)$$

As equações utilizadas são referentes a região externa do reservatório. Além disso, por hipótese, o reservatório tem extensão infinita, ou seja, $r_{1D} < r_D < \infty$ como região espacial. Ademais, após subtrair as Equações (3-68) e

(3-69) e aplicar a integral no tempo e espaço:

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \right. \\
 & \quad \left. - m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty r_{D'} \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 & \quad \left. + m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial t_{D'}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & = 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty r_{D'} G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \left(w_{2D}(m_{2D}) \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 & \quad \left. + f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'}
 \end{aligned} \tag{3-71}$$

Somando a Equação (3-67) com a Equação (3-71) multiplicada por M_R :

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \right. \\
 & \quad \left. - m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & - 2\pi \eta_R^2 \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} r_{D'} \left[G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 & \quad \left. + m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial t_{D'}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & + 2\pi M_R \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \right. \\
 & \quad \left. - m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & - 2\pi M_R \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty r_{D'} \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 & \quad \left. + m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial t_{D'}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & = 2\pi \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[r_{D'} G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \left(w_{1D}(m_{1D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) + M_R m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \delta(r_{D'} - r_{0D})(t_{D'} - t_{0D}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & + 2\pi M_R \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty r_{D'} G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \left(w_{2D}(m_{2D}) \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 & \quad \left. + f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'}
 \end{aligned} \tag{3-72}$$

Com o objetivo de simplificar a Equação (3-72) denotaremos as parcelas do somatório dos membros da equação por T_i , ou seja:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T_5 + T_6 \quad (3-73)$$

onde os termos T_i , com $i = 1, \dots, 6$, são:

$$T_1 = 2\pi \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) - m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (3-74)$$

$$T_2 = -2\pi \eta_R^2 \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} r_{D'} \left[G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} + m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial t_{D'}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (3-75)$$

$$T_3 = 2\pi M_R \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) - m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (3-76)$$

$$T_4 = -2\pi M_R \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty r_{D'} \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} + m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial t_{D'}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (3-77)$$

$$T_5 = 2\pi \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} r_{D'} G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \left(w_{1D}(m_{1D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} + f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'} + 2\pi M_R \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty r_{D'} G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \left(w_{2D}(m_{2D}) \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} + f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'} \quad (3-78)$$

e

$$T_6 = \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} M_R m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \delta(r_{D'} - r_{0D}) (t_{D'} - t_{0D}) dr_{D'} dt_{D'} \quad (3-79)$$

A Formula de Green possibilita simplificar as integrais dos termos T_1 e T_3 obtendo:

$$T_1 = 2\pi \int_0^{t_D} \left[G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) - m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \right]_{r_{1D}}^{r_{1D}} dt_{D'} \quad (3-80)$$

$$T_3 = 2\pi M_R \int_0^{t_D} \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) - m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \right]_{r_{1D}}^{\infty} dt_{D'} \quad (3-81)$$

Utilizando as equações referentes às condições de contorno interno, Equações (3-36) e (3-52), é possível simplificar o termo T_1 :

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi \int_0^{t_D} G_{1D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} \\ &\quad - m_{1D}(r_{1D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} \\ &\quad - G_{1D}^1(1, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_{D'}=1} \xrightarrow{\text{blue arrow}} -M_R \\ &\quad + m_{1D}(1, t_{D'}) \left(\frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_{D'}=1} \xrightarrow{\text{blue arrow}} 0 \\ &= 2\pi \int_0^{t_D} G_{1D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} \\ &\quad - m_{1D}(r_{1D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} \\ &\quad + M_R G_{1D}^1(1, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) dt_{D'} \end{aligned} \quad (3-82)$$

Por outro lado, utilizando as equações referentes às condições de contorno externo, Equações (3-39) e (3-39), é possível simplificar o termo T_3 :

$$\begin{aligned}
 T_3 &= 2\pi M_R \int_0^{t_D} \lim_{r_{D'} \rightarrow \infty} \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \right] \\
 &\quad - \lim_{r_{D'} \rightarrow \infty} \left[m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \right] \\
 &\quad - G_{2D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} \\
 &\quad + m_{2D}(r_{1D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} dt_{D'} \\
 &= -2\pi M_R \int_0^{t_D} G_{2D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_{1D} \frac{\partial m_{2D}(r_{1D}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \\
 &\quad - m_{2D}(r_{1D}, t_{D'}) \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} dt_{D'}
 \end{aligned} \tag{3-83}$$

Somando e reagrupando as integrais dos termos T_1 e T_3 e é possível escrever:

$$\begin{aligned}
 T_1 + T_3 &= 2\pi \int_0^{t_D} G_{1D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \\
 &\quad - G_{2D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) M_R \left(r_{D'} \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} \\
 &\quad - m_{1D}(r_{1D}, t_{D'}) \left(r_{D'} \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} \\
 &\quad + m_{2D}(r_{1D}, t_{D'}) M_R \left(r_{D'} \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_{D'}} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} dt_{D'} \\
 &\quad + 2\pi M_R \int_0^{t_D} G_{1D}^1(1, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) dt_{D'}
 \end{aligned} \tag{3-84}$$

É possível observar que os termos T_1 e T_3 também possuem influência das Condições de Acoplamento que ocorrem em r_{1D} (Equações (3-41), (3-40), (3-57) e (3-56)). Substituindo essas relações tem-se:

$$T_1 + T_3 \quad (3-85)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^{t_D} \left[G_{1D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) - G_{2D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) \right] \left(r_{D'} \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} \\
 &\quad - [m_{1D}(r_{1D}, t_{D'}) - m_{2D}(r_{1D}, t_{D'})] \left(r_{D'} \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_{D'}=r_{1D}} dt_{D'} \\
 &\quad + 2\pi M_R \int_0^{t_D} G_{1D}^1(1, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) dt_{D'} \\
 &= 2\pi M_R \int_0^{t_D} G_{1D}^1(1, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) dt_{D'}
 \end{aligned}$$

Os termos T_2 e T_4 podem ser simplificados aplicando a regra de derivação para o produto de duas funções combinada com o Teorema Fundamental do Cálculo, obtendo assim:

$$\begin{aligned}
 T_2 &= -2\pi\eta_R^2 \int_1^{r_{1D}} \int_0^{t_D} r_{D'} \left[G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right. \\
 &\quad \left. + m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D})}{\partial t_D} \right] dt_{D'} dr_{D'} \\
 &= -2\pi\eta_R^2 \int_1^{r_{1D}} \int_0^{t_D} \frac{\partial}{\partial t_{D'}} \left(r_{D'} G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dt_{D'} dr_{D'} \\
 &= -2\pi\eta_R^2 \int_1^{r_{1D}} r_{D'} G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \Big|_0^{t_D} dr_{D'}
 \end{aligned} \quad (3-86)$$

e

$$\begin{aligned}
 T_4 &= -2\pi M_R \int_{r_{1D}}^\infty \int_0^{t_D} r_{D'} \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \frac{\partial G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, 0, t_{0D})}{\partial t_{D'}} \right] dt_{D'} dr_{D'} \quad (3-87) \\
 &= -2\pi M_R \int_{r_{1D}}^\infty r_{D'} G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{D'}, t_{0D}) m_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \Big|_0^{t_D} dr_{D'}
 \end{aligned}$$

Pelo Princípio da Causalidade do problema de Green (Equações (3-51) e (3-54)) e pela Condição Inicial da pseudopressão (Equações (3-35) e (3-38)) :

$$\begin{aligned}
 T_2 &= -2\pi\eta_R^2 \int_1^{r_{1D}} \left[r_{D'} G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) m_{1D}(r_{D'}, t_D) \right. \\
 &\quad \left. - r_{D'} G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, 0, t_{0D}) m_{1D}(r_{D'}, 0) \right] dr_{D'} \\
 &= 0
 \end{aligned} \quad (3-88)$$

Analogamente para o termo T_4 , tem-se:

$$T_4 = -2\pi M_R \int_{r_{1D}}^{\infty} r_{D'} \left[G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) m_{2D}(r_{D'}, t_D) - G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, 0, t_{0D}) m_{2D}(r_{D'}, 0) \right] dr_{D'} \quad (3-89)$$

$$= 0$$

Não foi identificada nenhuma simplificação para o termo T5. Porém, para simplificar o termo T6 a propriedade da amostragem da função delta de Dirac será aplicada, obtendo assim:

$$T_6 = \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} M_R m_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \delta(r_D - r_{0D})(t_D - t_{0D}) dr_{D'} dt_{D'} \quad (3-90)$$

$$= M_R m_{1D}(r_{0D}, t_{0D})$$

Substituindo as Equações (3-78), (3-85), (3-88), (3-89) e (3-90) na Equação (3-73) e rearrumando os termos:

$$m_{1D}(r_{0D}, t_{0D})$$

$$= -2\pi \int_0^{t_D} G_{1D}^1(1, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) dt_{D'}$$

$$- \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} r_{D'} (w_{1D}(m_{1D})$$

$$+ f_{1D}(r_{D'}, t_{D'})) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right) G_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'} \quad (3-91)$$

$$- 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^{\infty} r_{D'} (w_{2D}(m_{2D})$$

$$+ f_{2D}(r_{D'}, t_{D'})) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right) G_{2D}^1(r_{D'}, r_{0D}, t_{0D}, t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'}$$

Segundo Neto (2019), a reciprocidade espacial da Função de Green nos diz que:

$$G_1^1(r_D, r_{0D}, t_{0D}, t_D) = G_1^1(r_{0D}, r_D, t_{0D}, t_D) \quad (3-92)$$

e

$$G_2^1(r_D, r_{0D}, t_{0D}, t_D) = G_2^2(r_{0D}, r_D, t_{0D}, t_D) \quad (3-93)$$

Além disso, definindo $r_{0D} = r_D$ e $t_{0D} = t_D$ e utilizando a reciprocidade a solução na região interna pode ser obtida:

$$\begin{aligned}
 & m_{1D}(r_D, t_D) \\
 &= -2\pi \int_0^{t_D} G_{1D}^1(1, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} \\
 &\quad - \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} r_{D'} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \left(w_{1D}(m_{1D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty r_D G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \left(w_{2D}(m_{2D}) \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 &\quad \quad \quad \left. + f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\hspace{15em} (3-94)
 \end{aligned}$$

A Equação (3-94) modela a pseudopressão na região interna do reservatório.

3.3.2

Solução Fonte na Região Externa

A solução para pseudopressão referente a região externa pode ser obtida utilizando um processo análogo ao apresentado, porém considerando as equações do problema proposto e as funções de Green referentes a fonte na região externa, ou seja, G_{2D}^1 e G_{2D}^2 . A Figura C.3 expressa a geometria do modelo analisado nesse caso.

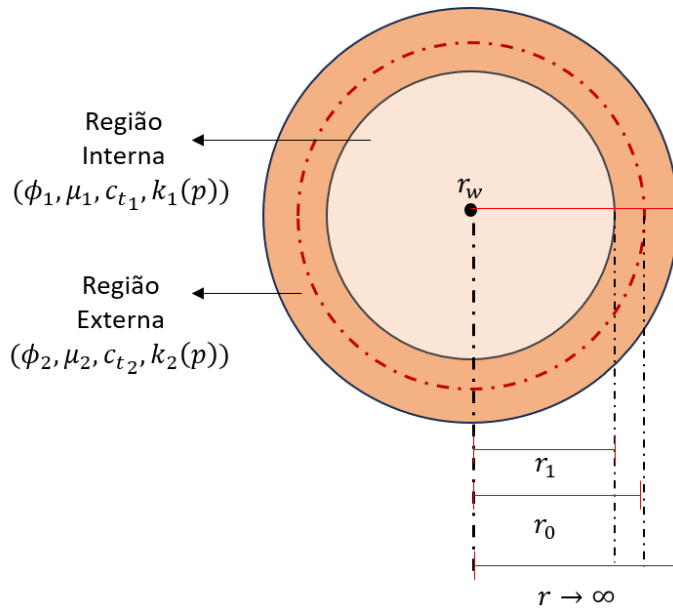


Figura 3.4: Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte na região externa

Considerando o termo fonte na EDP da região externa, uma formulação análoga à apresentada na seção anterior, resultará na solução $m_{2D}(r_D, t_D)$, isto é:

$$\begin{aligned}
 m_{2D}(r_D, t_D) &= -2\pi \int_0^{t_D} G_{2D}^1(1, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dt_{D'} \\
 &\quad - \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} r_{D'} G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \left(w_{1D}(m_{1D}) \frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 &\quad \left. + f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty r_D G_{2D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \left(w_{2D}(m_{2D}) \frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right. \\
 &\quad \left. + f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'}
 \end{aligned} \tag{3-95}$$

As soluções obtidas para a resposta da pseudopressão em cada região, expressas nas Equações 3-94 e 3-95, foram devidamente verificadas por meio de substituição direta nas equações que modelam os respectivos problemas originais. O detalhamento desse procedimento de verificação encontra-se no Apêndice A.

3.4

Cálculo Numérico da Solução

É possível notar que as soluções obtidas nas Equações (3-94) e (3-95) são implícitas, evidenciando o acoplamento entre as regiões do reservatório. Como alternativa, esta seção propõe a aplicação do Método da Perturbação, combinado com uma Expansão Assintótica, para obter uma aproximação da solução apresentada para cada região. Essa abordagem permite simplificar o problema original, facilitando a análise das interações entre as diferentes regiões do reservatório e proporcionando uma solução mais acessível do ponto de vista computacional. Seja ϵ um parâmetro, ao inserir a perturbação no problema original tem-se:

Região Interna ($1 \leq r_D \leq r_{1D}$)

EDP:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\
 &= \epsilon w_{1D}(m_{1D}) \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{1D}(r_D, t_D)
 \end{aligned} \tag{3-96}$$

CI:

$$m_{1D}(r_D, t_D = 0) = 0 \tag{3-97}$$

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -M_R \quad (3-98)$$

Região Externa

EDP:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ = \varepsilon w_{2D}(m_{2D}) \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{2D}(r_D, t_D) \end{aligned} \quad (3-99)$$

CI:

$$m_{2D}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (3-100)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{2D}(r_D, t_D) = 0 \quad (3-101)$$

Onde valem as seguintes Condições de Acoplamento entre Regiões:

CAR - Pseudopressão

$$m_{1D}(r_{1D}, t_D) - m_{2D}(r_{1D}, t_D) = 0 \quad (3-102)$$

CAR - Vazões

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \quad (3-103)$$

Assumindo que a distribuição de pseudopressões no reservatório pode ser representada por uma série assintótica de potências em ε :

$$m_{1D}(r_D, t_D) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D) \quad (3-104)$$

e

$$m_{2D}(r_D, t_D) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D) \quad (3-105)$$

onde $m_{1D}^{(k)}$ e $m_{2D}^{(k)}$ são os coeficientes da série a serem determinados.

Substituindo as Equações (3-104) e (3-105) em (3-96) e (3-99) as EDPs das regiões são representadas por:

Região Interna ($1 \leq r_D \leq r_{1D}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ = \varepsilon w_{1D}(m_{1D}^{(k)}) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{1D}(r_D, t_D) \end{aligned} \quad (3-106)$$

Região Externa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ &= \varepsilon w_{2D}(m_{1D}^{(k)}) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + f_{2D}(r_D, t_D) \end{aligned} \quad (3-107)$$

onde foi adotada a seguinte notação para o desvio hidráulico:

$$w_{1D} \left(\sum_{i=0}^k \varepsilon^i m_{1D}^{(i)}(r_D, t_D) \right) = w_{1D}(m_{1D}^{(k)}) \quad (3-108)$$

Rearranjando os termos em relação às potências de ε temos:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^0 \left[\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - f_{1D}(r_D, t_D) \right] \\ & + \varepsilon^1 \left[\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(1)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{1D}^{(1)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - w_{1D}(m_{1D}^{(0)}) \frac{\partial m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \right] \\ & \vdots \\ & + \varepsilon^k \left[\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} - w_{1D}(m_{1D}^{(k-1)}) \frac{\partial m_{1D}^{(k-1)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \right] \\ & + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3-109)$$

O problema pode ser interpretado como parte de $k = 0, 1, \dots$ sistemas de equações:

Ordem $k = 0$

Região Interna

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = f_{1D}(r_D, t_D) \quad (3-110)$$

CI:

$$m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (3-111)$$

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -M_R \quad (3-112)$$

Região Externa EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{2D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{2D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = f_{2D}(r_D, t_D) \quad (3-113)$$

CI:

$$m_{2D}^{(0)}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (3-114)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{2D}^{(0)}(r_D, t_D) = 0 \quad (3-115)$$

Condições de Acoplamento:

$$m_{1D}^{(0)}(r_{1D}, t_D) - m_{2D}^{(0)}(r_{1D}, t_D) = 0 \quad (3-116)$$

e

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial m_{2D}^{(0)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \quad (3-117)$$

Ordem $k \geq 1$

Região Interna EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = f_{1D}(r_D, t_D) \quad (3-118)$$

CI:

$$m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (3-119)$$

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (3-120)$$

Região Externa EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = f_{2D}(r_D, t_D) \quad (3-121)$$

CI:

$$m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (3-122)$$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D) = 0 \quad (3-123)$$

Condições de Acoplamento:

$$m_{1D}^{(k)}(r_{1D}, t_D) - m_{2D}^{(k)}(r_{1D}, t_D) = 0 \quad (3-124)$$

e

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \quad (3-125)$$

Observe que a metodologia adotada permite capturar efeitos não lineares e variações de permeabilidade de forma sistemática, refinando progressivamente a solução com a inclusão de termos adicionais de potências de ε . Dessa forma, a abordagem sequencial facilita tanto a análise matemática quanto a implementação computacional, tornando o problema mais tratável

do ponto de vista numérico. Os sistemas de equações devem ser resolvidos sequencialmente. Observa-se que o sistema de ordem zero corresponde ao problema clássico homogêneo de escoamento de fluidos com duas regiões de permeabilidade. A solução desse sistema pode ser obtida conforme apresentado no Apêndice B.

Para o sistema de ordem zero, adotaremos a seguinte notação:

$$m_{1D}^{(0)} = p_{1D}(r_D, t_D), \text{ para } 1 \leq r_D \leq r_{1D} \quad (3-126)$$

e

$$m_{2D}^{(0)} = p_{2D}(r_D, t_D), \text{ para } r_D > r_{1D} \quad (3-127)$$

Para os termos de ordem $k \geq 1$, os sistemas se assemelham ao apresentado na seção 2, portanto a solução integro-diferencial obtida nas Equações 3-94 e 3-95 podem ser adaptadas considerando a CCI homogênea, ou seja:

$$\begin{aligned} m_{1D}^{(k)}(r_D, t_D) = & \quad (3-128) \\ & -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} w_{1D}(m_{1D}^{(k-1)}) \left(\frac{\partial m_{1D}^{(k-1)}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right) G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'} \\ & -2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty w_{2D}(m_{2D}^{(k-1)}) \left(\frac{\partial m_{2D}^{(k-1)}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right) G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} m_{2D}^{(k)}(r_D, t_D) = & \quad (3-129) \\ & -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} w_{1D}(m_{1D}^{(k-1)}) \left(\frac{\partial m_{1D}^{(k-1)}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right) G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'} \\ & -2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty w_{2D}(m_{2D}^{(k-1)}) \left(\frac{\partial m_{2D}^{(k-1)}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right) G_{2D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'} \end{aligned}$$

Além disso, em muitos problemas práticos da mecânica dos fluidos, os termos de segunda ordem e superiores representam apenas correções sutis, com impacto mínimo no comportamento global do sistema, o que justifica sua omissão. Analogamente aos trabalhos de Neto (2019), Barreto (2011) e Fernandes (2022), a solução proposta será truncada no termo de primeira ordem. Essa abordagem reduz a complexidade do sistema de equações diferenciais no âmbito computacional, facilitando sua resolução tanto analítica quanto numericamente. Dessa forma a solução passa a ser da forma:

$$\begin{aligned} m_{1D}(r_D, t_D) &= m_{1D}^{(0)}(r_D, t_D) + m_{1D}^{(1)}(r_D, t_D) \\ &= p_{1D}(r_D, t_D) + m_{1D}^{(1)}(r_D, t_D) \end{aligned} \quad (3-130)$$

e

$$\begin{aligned} m_{2D}(r_D, t_D) &= m_{2D}^{(0)}(r_D, t_D) + m_{2D}^{(1)}(r_D, t_D) \\ &= p_{2D}(r_D, t_D) + m_{2D}^{(1)}(r_D, t_D) \end{aligned} \quad (3-131)$$

A solução no poço, que será denotada por $m_{wD}(t_D)$, ocorre em $r_D = 1$. Consequentemente, tal solução é determinada pela solução na Região Interna, ou seja:

$$\begin{aligned} m_{wD}(t_D) &= p_{1D}(1, t_D) \\ &\quad - \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} w_{1D}(p_{1D}) \left(\frac{\partial p_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right) G_{1D}^1(1, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'} \\ &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty w_{2D}(p_{2D}) \left(\frac{\partial p_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_D} \right) G_{2D}^1(1, r_{D'}, t_D, t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'} \end{aligned} \quad (3-132)$$

4

Resultados

A produção de óleo em reservatórios de petróleo envolve a interação complexa entre as propriedades petrofísicas da rocha e características dos fluidos presentes. Os modelos analíticos apresentados visam a descrever matematicamente esses fenômenos, permitindo uma avaliação eficiente do desempenho do reservatório sob diferentes condições operacionais envolvendo a permeabilidade como função da pressão. Nesta seção, serão apresentados os aspectos computacionais que incluem a implementação numérica das soluções analíticas no MATLAB, uma plataforma amplamente utilizada para modelagem matemática. O simulador de fluxo comercial utilizado para validação dos modelos é o IMEX, um simulador de fluxo de fluido multifásico baseado em diferenças finitas, amplamente utilizado na indústria para a modelagem de reservatórios convencionais e não convencionais. O IMEX permite a incorporação de efeitos como a curva de permeabilidade dependente da pressão, além de suportar diferentes métodos numéricos para resolver as equações que governam o fluxo.

A validação dos modelos propostos será feita via comparação direta com a resposta obtida no MATLAB em relação à resposta obtida no IMEX para as mesmas condições físicas. Foram considerados diversos cenários para validação, incluindo variações nas propriedades de rocha e fluido. Essas variações possibilitam avaliar a aplicabilidade dos modelos analíticos em diferentes condições operacionais.

A solução da linha fonte é um dos modelos fundamentais da engenharia de reservatórios para prever o comportamento da pressão em um poço produtor. Apesar de suas simplificações, ela serve como base para a análise de testes de pressão, simulação de reservatórios e planejamento da produção de petróleo. Portanto, nos casos referentes ao escoamento simples a solução clássica dada pela Equação 4-1 pôde ser utilizada como outro fator de comparação.

$$p_{wD}(t_D) = -\frac{1}{2}Ei\left(\frac{-1}{4t_D}\right) \quad (4-1)$$

Os resultados comparativos entre os modelos analíticos implementados no MATLAB e o simulador IMEX demonstram a eficácia das soluções propostas para prever o comportamento da pseudopressão do reservatório em diferentes condições. Os desvios observados foram analisados considerando as simplificações adotadas nos modelos analíticos e a complexidade do simulador numérico. As discussões finais destacam as limitações e vantagens

de cada abordagem, oferecendo diretrizes para a aplicação prática das soluções analíticas no monitoramento e otimização da produção de óleo.

4.1

Aspectos Computacionais

Com alto desempenho em cálculos matriciais, equações diferenciais, simulação e análise de dados, o software MATLAB oferece um ambiente robusto para cálculos precisos e visualização intuitiva, facilitando a interpretação dos resultados e ajustes no modelo. Nessa plataforma, foram implementados os algoritmos baseado nas soluções analíticas desenvolvidas nos Capítulos 2 e 3, na qual os cálculos são realizados numericamente a cada passo de tempo.

A função de Green para o modelo multicamadas é conhecida de acordo com os modelos de camada única (BARRETO, 2011; FERNANDES et al., 2023a). Por outro lado a função de Green para o modelo de duas regiões é calculada no domínio de Laplace e posteriormente convertida para o domínio real por meio do método de inversão de Stehfest, conforme descrito no Apêndice C. Essa abordagem possibilita a correta transformação das soluções analíticas e a precisão nos cálculos numéricos, permitindo a análise detalhada do comportamento do reservatório sob diferentes cenários de permeabilidade inicial.

Ademais, cabe destacar que referente ao cálculo das curvas de derivada da pseudopressão foi utilizado o método numérico apresentado por Bourdet, Ayoub e Plarard (1989). Referente à integral dupla que define as soluções presentes nas Equações (2-88) e (3-132) são calculadas numericamente pelo método clássico de Quadratura Gaussiana.

O pseudocódigo presente nos Algoritmos (1) e (2) são a base da implementação que permitiu a reprodução dos resultados a serem apresentados e pode possibilitar futuras adaptações para diferentes cenários de interesse.

Algoritmo 1: Pseudopressão reservatório com n-camadas

Entrada: Dados de entrada $(q, h_j, p_i, k_j(p_i), \mu, \phi, c_t, r_w, r_1 \dots)$ **Saída:** Vetor Pseudopressão no poço para cada passo de tempo

- 1 *Discretize os passos de tempo t*
 - 2 *Defina a curva de permeabilidade de referência em cada camada k_j*
 - 3 *Compute os passos adimensionais t_D*
 - 4 **para** $i = 0$ **até** $\text{NumeroDePassosDeTempo}$ **faça**
 - 5 *Compute os termos experimentais adimensionais*
 $(p_{Dj}, k_{Dj}, H_{Dj}, w_{Dj})$
 - 6 *Defina os termos fonte de cada camada f_{Dj}*
 - 7 *Defina as funções de Green do problema associado*
 $G_{Dj}(r_D = 1, r_{0D}, t_D, t_{0D})$ (Equação 2-54)
 - 8 *Compute as pseudopressões adimensionais em cada camada*
 $m_{Dj}(r_D = 1, t_D)$ (Equação 2-80)
 - 9 *Compute a pseudopressão adimensional no poço ($m_{wD}(t_D)$)*
 (Equação 2-88)
 - 10 *Compute a derivada da pseudopressão*
 - 11 *Plote os gráficos de pseudopressão e derivada*
-

Algoritmo 2: Pseudopressão reservatório com duas regiões

Entrada: Dados do reservatório $(q, h, p_i, k_{inicial}(p_i), \mu, \phi, c_t, r_w, r_1 \dots)$ **Saída:** Vetor Pseudopressão no poço

- 1 *Discretize os passos de tempo t*
 - 2 *Compute os passos adimensionais t_D*
 - 3 *Defina a curva de permeabilidade em cada região k_j*
 - 4 **para** $i = 0$ **até** $\text{NumeroDePassosDeTempo}$ **faça**
 - 5 *Compute os termos experimentais adimensionais $(p_{Dj}, k_{Dj}, H_{Dj}, w_{Dj})$*
 - 6 *Defina os termos fonte f_{1D} e f_{2D}*
 - 7 *Defina as funções de Green do problema associado*
 $G_j^i(r_D = 1, r_{0D}, t_D, t_{0D})$ de acordo com o Apêndice C
 - 8 *Compute as pseudopressões adimensionais em cada região*
 $(m_{1D}(r_D = 1, t_D), m_{2D}(r_D = 1, t_D))$
 - 9 *Compute a derivada da pseudopressão*
 - 10 ; *Plote os gráficos de pseudopressão e derivada*
-

4.1.1

Curvas de Permeabilidade

A definição da curva de permeabilidade é um fator crucial para a calibragem dos modelos. No entanto, por este trabalho ser realizado na área acadêmica, não foi possível acessar dados reais. Diante dessa limitação, foi adotada uma curva de permeabilidade de referência, permitindo a avaliação de diferentes valores iniciais de permeabilidade onde novas curvas puderam ser geradas através de interpolações. Com base na curva de referência, é possível modelar distintos perfis de permeabilidade conforme as funções apresentadas na tabela a seguir:

Tipo de Curva	Expressão
Linear	$k(p) = Ap + B$
Exponencial	$k(p) = A \exp(Bp)$

Tabela 4.1: Tipos de Curva de Permeabilidade

onde os coeficientes A e B são coeficientes a serem determinados a partir da interpolação dos dados de pressão de acordo com a curva de referência (Figura 4.1).

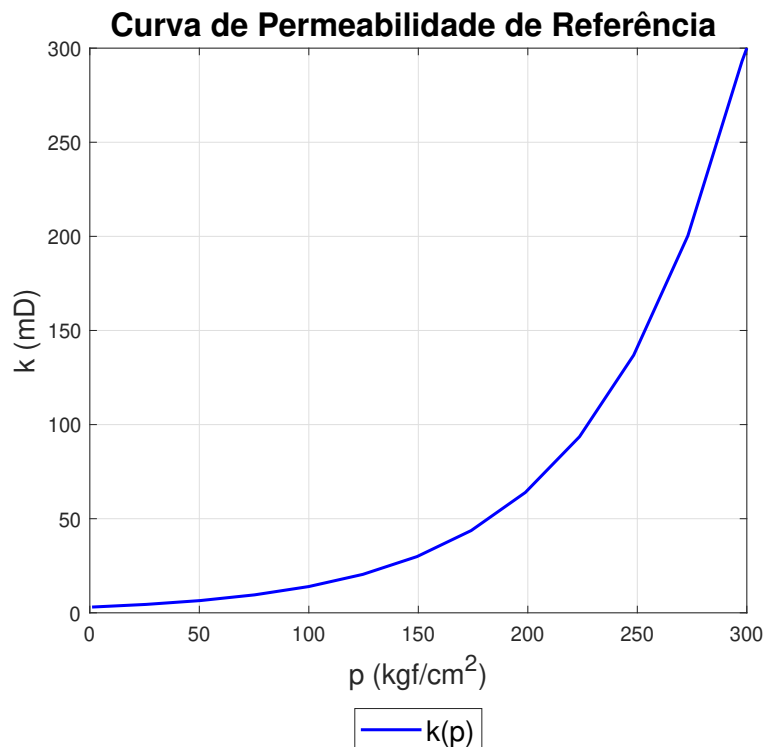


Figura 4.1: Curva de Permeabilidade de Referência

Para fins comparativos, a curva de referência foi utilizada para estabelecer uma relação entre pressão e pseudopressão a partir da definição de pseudopressão apresentada nas Equações 2-15 e 3-13. A partir da Interpolação de Newton, é possível determinar uma curva de pseudopressão correspondente às respostas de pressão obtidas.

4.2

Modelo Comparativo: Simulador Numérico de Fluxo

A validação dos modelos será feita via comparação direta com os resultados obtidos em um simulador numérico de fluxo. O simulador comercial de fluxo escolhido, IMEX, pode ser utilizado para modelar escoamentos em meios porosos a partir da resolução das equações diferenciais que governam o comportamento dos fluidos utilizando métodos numéricos a cada passo de tempo para descrever a resposta do transporte de fluidos em reservatórios no poço. O IMEX é amplamente utilizado na indústria petrolífera para simulações de reservatórios devido à sua capacidade de lidar com múltiplas fases e condições de contorno complexas, permitindo prever a distribuição de pressão ao longo do tempo.

Na modelagem do escoamento de óleo, o IMEX considera propriedades específicas do fluido, como viscosidade e densidade, além das características do meio poroso, como porosidade e permeabilidade. O modelo pode incluir efeitos de compressibilidade do óleo, influência da fase gasosa e interação com a água no reservatório, entre outras propriedades. Para adaptar o modelo à utilização de uma curva de permeabilidade dependente da pressão, é necessário incorporar uma tabela de valores que represente a variação da permeabilidade em função da pressão (CROCKTABLE), garantindo que as mudanças na permeabilidade sejam refletidas corretamente na simulação do escoamento. Neste trabalho a mesma Curva de Permeabilidade de Referência foi utilizada (Figura 4.1) no simulador de fluxo e nos algoritmos desenvolvidos.

A malha radial utilizada corresponde a um grid composto por 200 células por camada em ambos os modelos desenvolvidos no simulador de fluxo. Por outro lado, considerando um teste com duração de 96 horas, a malha temporal adotada segue uma progressão geométrica cujo tempo inicial é 10^{-4} horas. As condições iniciais e de contorno foram adotadas conforme cada modelo apresentado.

4.3

Análise dos Resultados Comparativos: Modelo Múltiplas Camadas

O modelo apresentado no Capítulo 2 permite descrever o comportamento da pseudopressão no poço para Reservatórios de Múltiplas Camadas, a implementação do algoritmo pode ser feita de acordo com a quantidade de camadas do reservatório. Nesta seção serão apresentados resultados referentes à um reservatório com duas camadas. Cumpre destacar que a resposta da pseudopressão será comparada com os resultados obtidos no simulador comercial IMEX para as mesmas condições.

Em relação ao modelo referente a um reservatório com duas camadas, as propriedades de rocha e fluido, em cada camada, comum a todos os casos a serem apresentados constam na Tabela 4.2 referente às propriedades do reservatório.

r_w (m)	p_i	$k_{eq}(p_i)$ (md)	ϕ	μ (cp)	h_j (m)
0.1	300	300	0.3	5.1	45

Tabela 4.2: Modelo Duas Camadas: Propriedades do Reservatório por camada

Onde a permeabilidade equivalente na pressão inicial é dada pela relação:

$$k_{eq}(p_i) = \frac{k_1(p_i)h_1 + k_2(p_i)h_2}{h_1 + h_2} \quad (4-2)$$

Os gráficos analisados estão representados em escala log-log, o que facilita a compreensão do comportamento da pseudopressão.

4.3.1

Casos A: Curva de Permeabilidade Constante

Os Casos A caracterizam dois cenários relativos à curva de permeabilidade constante para um mesmo reservatório de duas camadas. A solução clássica dada pela solução da linha fonte, adaptada para um reservatório equivalente de camada única, também será usada como parâmetro de comparação visto que esse caso se assemelha ao escoamento simples de óleo. No caso A1, em ambas as camadas a mesma curva de permeabilidade é considerada (Figura 4.2). Já no caso A2, dois valores distintos de permeabilidade em cada camada são considerados (Figura 4.3).

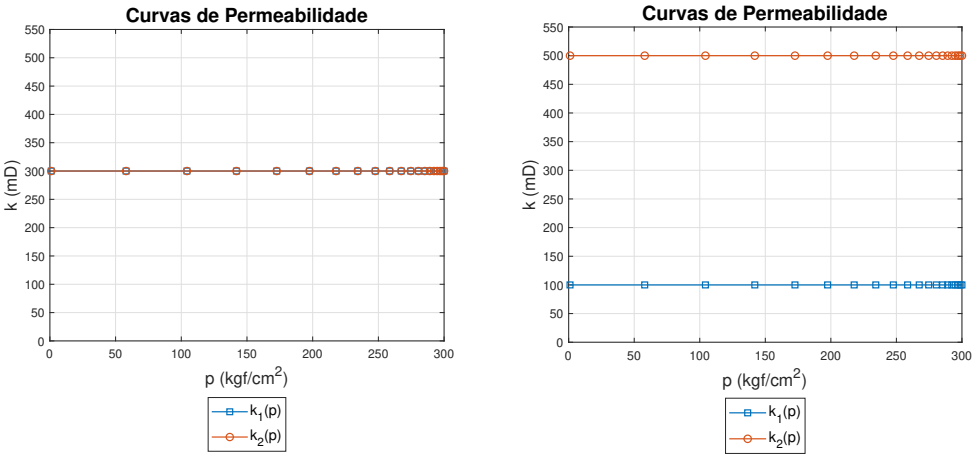


Figura 4.2: Caso A1: Curva de Permeabilidade

Figura 4.3: Caso A2: Curva de Permeabilidade

Os valores de permeabilidade foram escolhidos de forma que a permeabilidade equivalente em ambos os casos seja a mesma. Outras propriedades de rocha e fluido foram atribuídas conforme Tabela 4.3.

Caso	q (m^3/d)	Camada	$k_j(p_i)$ (md)
A1	500	1	300
		2	
A2	500	1	100
		2	500

Tabela 4.3: Propriedades Casos A

As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam a resposta de pseudopressão e sua derivada obtida no poço para os Casos A1 e A2, respectivamente. As curvas apresentam uma ótima concordância ao longo do tempo explicitando a eficácia do modelo proposto para o caso simples de escoamento.

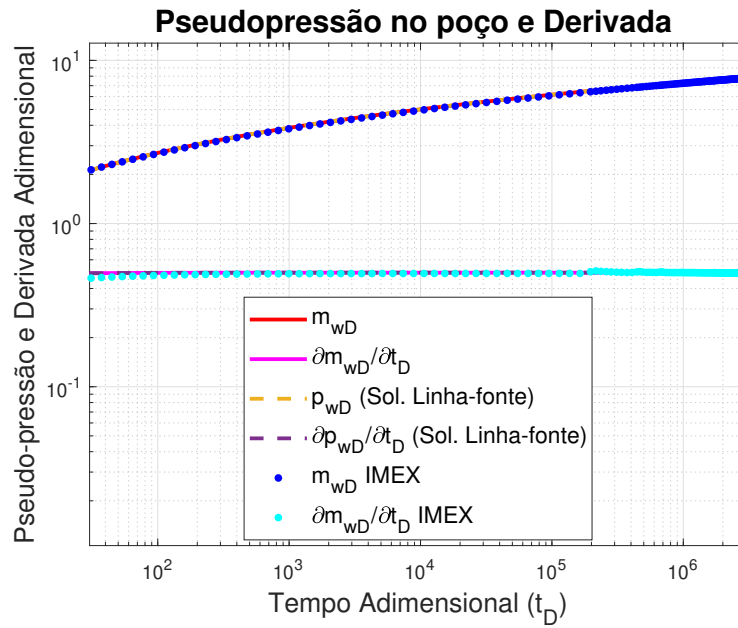


Figura 4.4: Caso A1: Pseudopressão e derivada adimensional

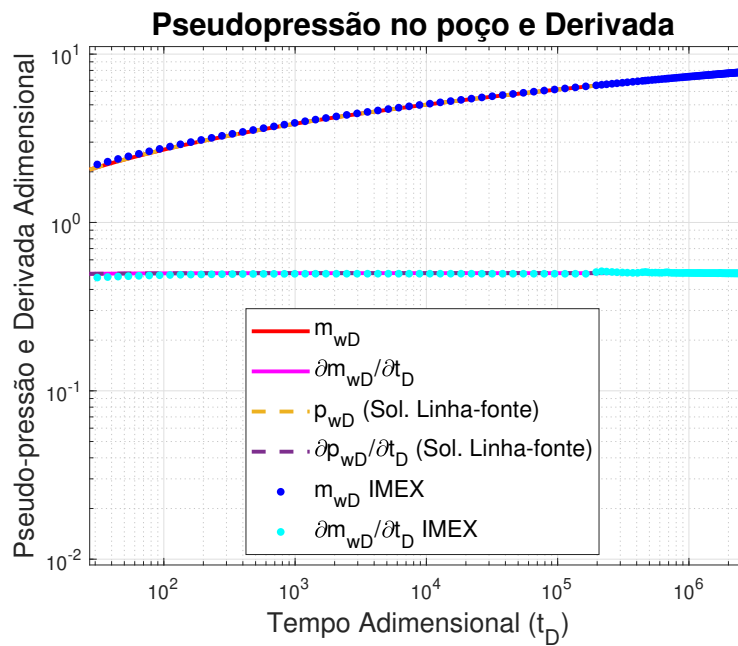


Figura 4.5: Caso A2: Pseudopressão e derivada adimensional

O termo de primeira ordem pode ser interpretado como a influência que a curva de permeabilidade em função da pressão tem sobre o escoamento (Equação (2-79)). Para a curva de permeabilidade constante, o termo de primeira ordem obtido com o algoritmo e o simulador de fluxo, conforme as Figuras 4.6 e 4.7, é nulo. De fato este é o valor esperado devido a relação do desvio hidráulico com a curva de permeabilidade evidenciado na Equação 2-41.

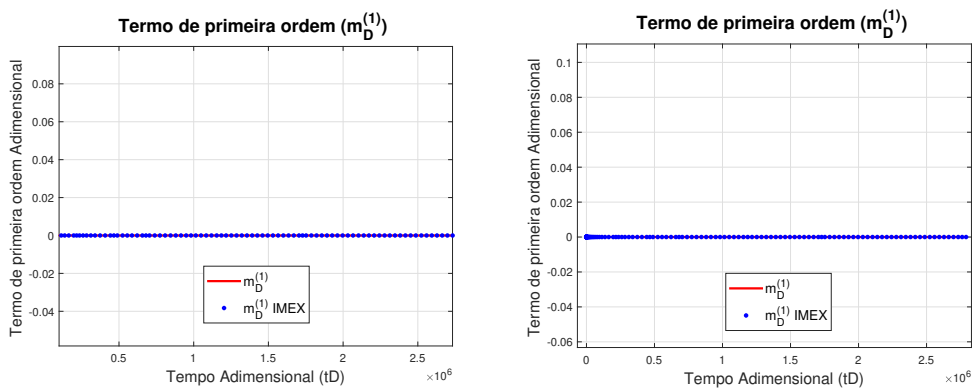


Figura 4.6: Caso A1: Termo de primeira ordem

Figura 4.7: Caso A2: Termo de primeira ordem

4.3.2

Caso B: Curva de Permeabilidade dependente da Pressão

Nesta subseção, a interferência da curva de permeabilidade dependente da pressão será analisada de acordo com quatro casos cujas propriedades estão listadas na Tabela 4.4 para os Casos B.

Caso	q (m^3/d)	Camada	$k_j(p_i)$ (md)	Tipo de Curva de Permeabilidade
B1	500	1	300	Linear
		2		
B2	2000	1	300	Linear
		2		
B3	500	1	100	Linear
		2	500	Exponencial
B4	2000	1	100	Linear
		2	500	Exponencial

Tabela 4.4: Propriedades Casos B

Para os Casos B1 e B2 serão consideradas duas curvas de permeabilidade lineares e idênticas conforme exemplificado na Figura 4.8. Já para os Casos B3 e B4, serão consideradas duas curvas do tipo linear e exponencial, com permeabilidades iniciais distintas (Figura 4.9).

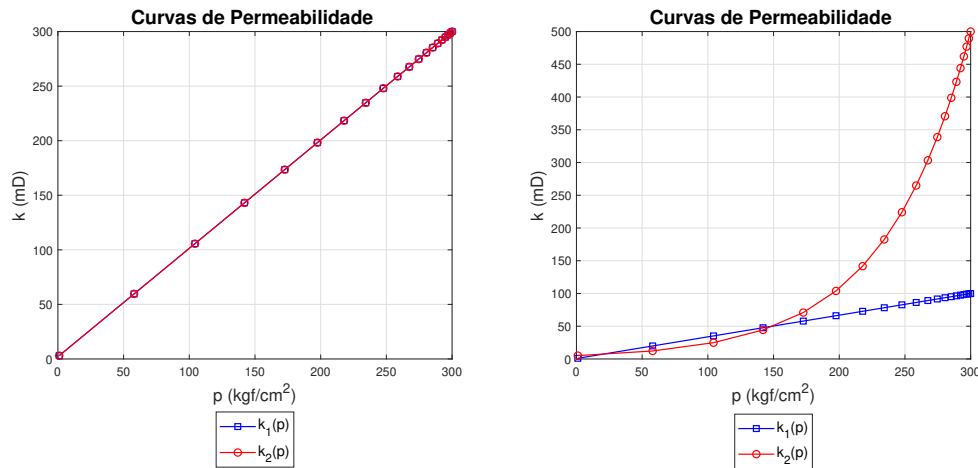


Figura 4.8: Casos B1 e B2: Curvas de Permeabilidade Linear

Figura 4.9: Casos B3 e B4: Curvas de Permeabilidade Linear e Exponencial

Nas Figuras 4.10 a 4.13 tem-se os dados obtidos para pseudopressão no poço comparada com a resposta do Simulador IMEX em relação aos Casos B1 e B2.

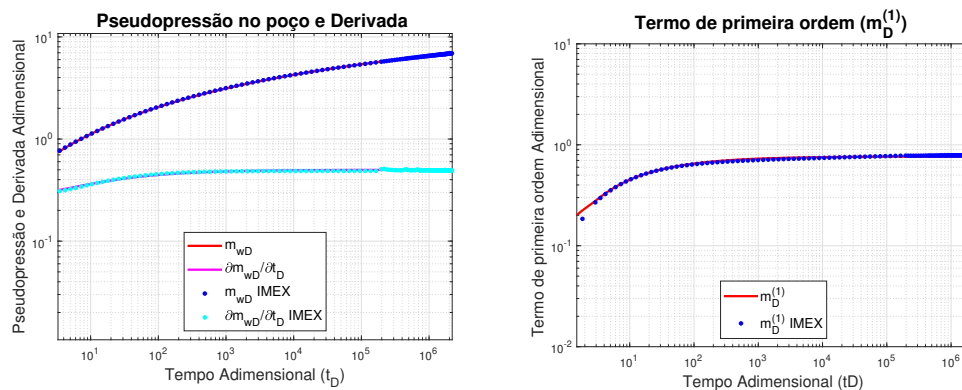


Figura 4.10: Caso B1: pseudopressão e derivada adimensional

Figura 4.11: Caso B1: Termo de primeira ordem

É possível verificar que os gráficos apresentam uma boa concordância. A variação do comportamento inicial da curva de derivada da pseudopressão reflete a variação da curva de permeabilidade dependente da pressão. O fato de a derivada da pseudopressão apresentar uma elevação inicial antes de estabilizar pode ser interpretado como um dano de formação perto do poço.

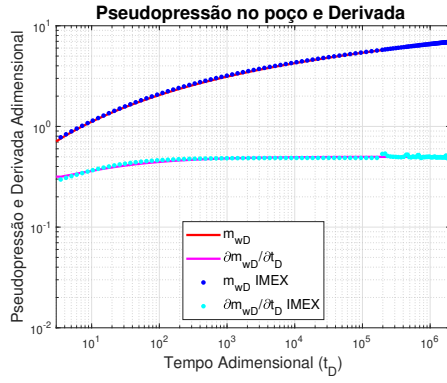


Figura 4.12: Caso B2: pseudopressão e derivada adimensional

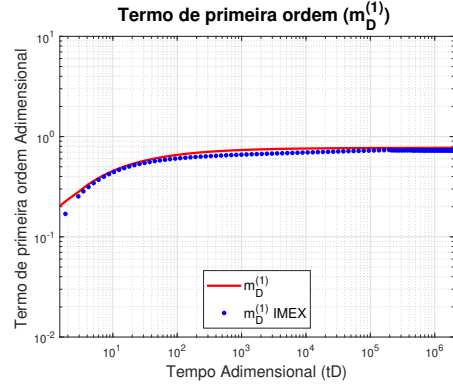


Figura 4.13: Caso B2: Termo de primeira ordem

Os resultados apresentaram uma ótima concordância nos tempos iniciais apresentando pequenas variações ao longo do tempo.

Para os casos relativos à vazão alta, é possível verificar uma discrepância maior entre as curvas. As Figuras 4.14 e 4.15 mostram que as curvas apresentam um comportamento similar.

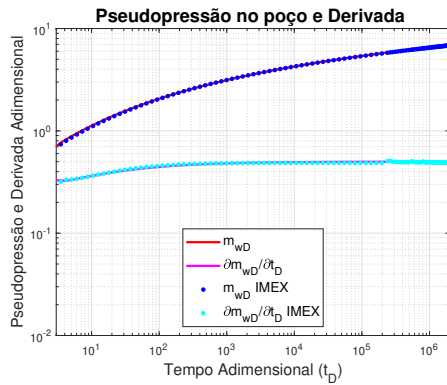


Figura 4.14: Caso B3: Pseudopressão e derivada adimensional

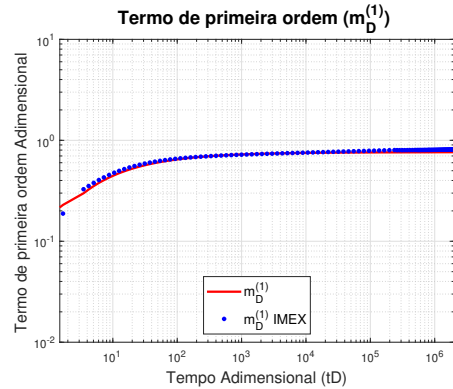


Figura 4.15: Caso B3: Termo de primeira ordem

A seguir as Figuras 4.16 e 4.17 mostram os resultados obtidos para o caso B4. Percebe-se nesse caso que a influência da curva de permeabilidade em conjunto com uma vazão de produção alta influencia a resposta nos tempos iniciais e médios, entretanto, no longo tempo as curvas tendem a um mesmo patamar.

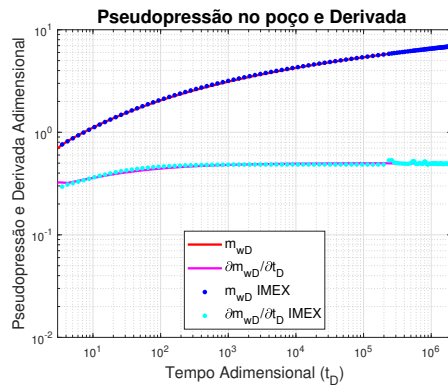


Figura 4.16: Caso B4: Pseudopressão e derivada adimensional

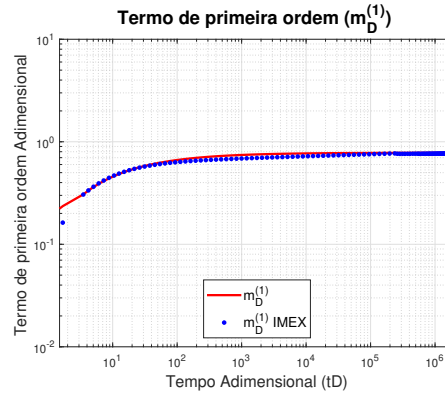


Figura 4.17: Caso B4: Termo de primeira ordem

As Figuras 4.15 e 4.17 mostram que os termo de primeira ordem dos casos B3 e B4 apresentam um comportamento mais acentuado em comparação aos casos B1 e B2, que exibem uma variação mais suave. Essa diferença pode ser atribuída ao uso de uma curva exponencial, o que impacta diretamente a resposta do sistema o tornando mais complexo.

Como consequência, os cálculos numéricos realizados pelo simulador tornam-se mais complexos, podendo resultar em perdas associadas ao processo de interpolação para a obtenção do termo de primeira ordem. Esse efeito pode introduzir pequenas discrepâncias na solução numérica, especialmente em regiões onde a variação da pseudopressão é mais expressiva.

Ainda assim, observa-se que todas as curvas apresentadas demonstram uma excelente concordância entre a solução analítica proposta e a resposta obtida pelo simulador de fluxo, validando a abordagem adotada e reforçando sua precisão na modelagem do fenômeno estudado. Além disso, nota-se que com o decorrer dos passos de tempo, o fluxo se estabelece em um padrão radial ou pseudorradial, levando a uma estabilização da curva referente derivada da pseudopressão pois a mesma atinge um determinado patamar constante. A partir desse ponto, a resposta se torna mais previsível e menos afetada por efeitos de curto alcance, como transientes de pressão e danos ao redor do poço.

4.4

Análise dos Resultados Comparativos: Modelo de Duas Regiões

Esta seção tem como objetivo principal verificar a compatibilidade do modelo proposto a partir do Algoritmo 2 para um reservatório heterogêneo composto por duas regiões homogêneas. Os casos simples, C e D, são referentes ao escoamento considerando permeabilidade constante. Nesses casos, além da resposta do simulador de fluxo, serão comparados com modelos existentes na literatura como a solução da linha-fonte (Equação 4-1) e o modelo apresentado

no Apêndice B (BITTENCOURT NETO et al., 2020), respectivamente. Em relação ao modelo referente a um reservatório com duas regiões de permeabilidade, as propriedades de rocha e fluido, comum a todos os casos a serem apresentados, constam na Tabela 4.5 referente às propriedades do reservatório.

r_w (m)	r_1 (m)	p_i	ϕ	μ (cp)	h_j (m)
0.1	13.06	300	0.3	5.1	50

Tabela 4.5: Modelo Duas Regiões: Propriedades do Reservatório

4.4.1

Casos C: Reservatório Homogêneo com Permeabilidade Constante

Os Casos C representam o resultado clássico referente ao escoamento em um reservatório homogêneo cuja permeabilidade é constante. Para adequar o modelo apresentado no Algoritmo 2, foram consideradas duas curvas de permeabilidade iguais e constantes em ambas as regiões Figura 4.18.

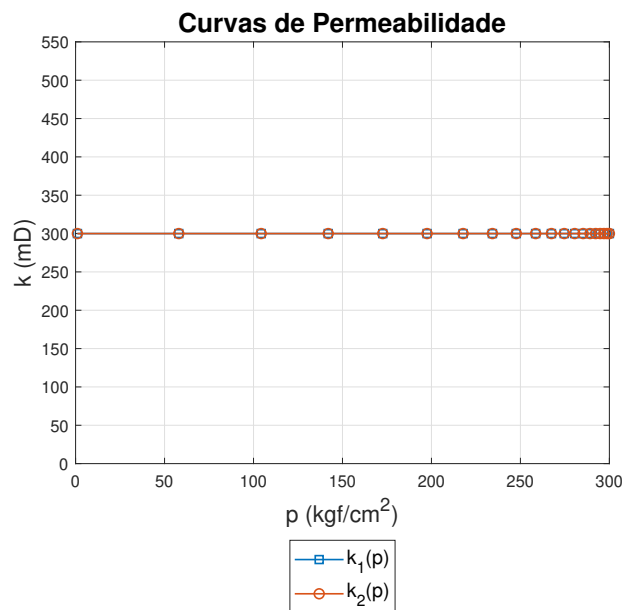


Figura 4.18: Casos C: Curva de permeabilidade

Nessa configuração, os resultados gerados são referentes a dois valores de vazão. As propriedades indicadas na Tabela 4.6 contemplam os casos C1 e C2.

Caso	q	Região	Tipo de Curva de Permeabilidade
C1	500	1 e 2	Constante
C2	2000	1 e 2	Constante

Tabela 4.6: Propriedades Casos C

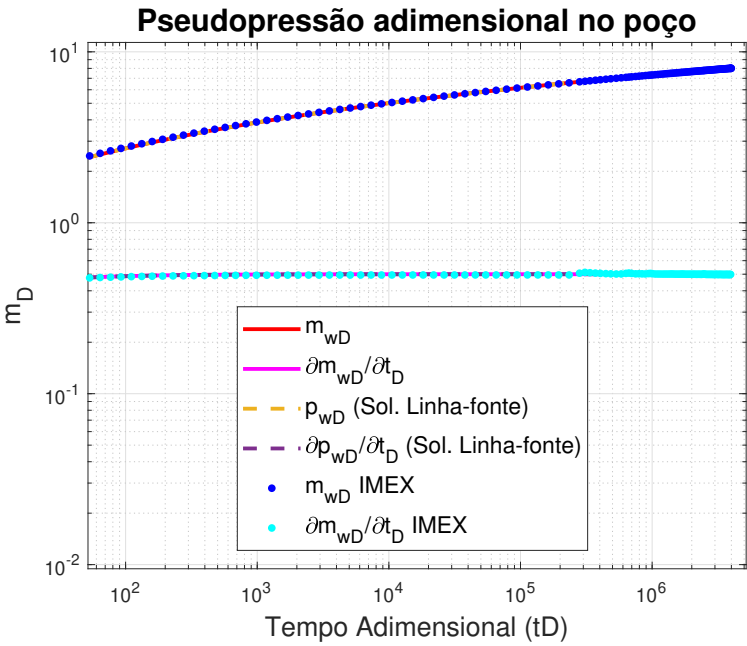


Figura 4.19: Caso C1: Pseudopressão e derivada adimensional

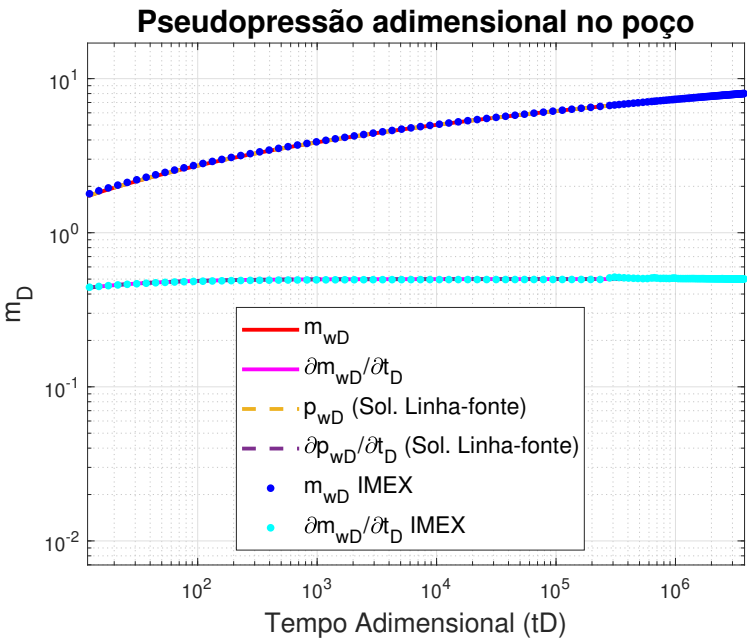


Figura 4.20: Caso C2: Pseudopressão e derivada adimensional

Nos gráficos 4.19 e 4.20 o comportamento esperado é referente a um escoamento monofásico cuja a permeabilidade é constante. De fato, os resultados mostram que se assemelham ao comportamento de um fluxo radial homogêneo devido a curva da derivada da pseudopressão apresentar um patamar constate. Entretanto, o comportamento da curva de derivada pode não apresentar um patamar constante se a permeabilidade dependente da pressão variar significativamente.

4.4.2

Casos D: Reservatório Heterogêneo com Permeabilidade Constante

No ambiente geológico, os reservatórios de petróleo são frequentemente heterogêneos, apresentando diferentes propriedades físicas e químicas em suas regiões. Essa heterogeneidade é um desafio significativo na engenharia de reservatórios, pois influencia diretamente o comportamento do escoamento do fluido. Compreender como o óleo se comporta em um reservatório heterogêneo é crucial para modelar e prever a produção de forma mais precisa.

Como visto anteriormente, ao considerar um reservatório heterogêneo composto por duas regiões homogêneas, é possível simplificar parte da construção de modelos matemáticos. O modelo apresentado no Apêndice B desenvolvido por Bittencourt Neto et al. (2020) é um dos modelos existentes na literatura referente ao escoamento em reservatório com as características abordadas acima e também será utilizado como um parâmetro de comparação.

A Tabela 4.7 apresenta as propriedades consideradas para os modelos D cuja principal característica é relativa a cada região possuir uma curva de permeabilidade constante diferente.

Caso	q	$k_1(p_i)$	$k_2(p_i)$	Tipo de Curva de Permeabilidade
	(m^3/d)	(mD)	(mD)	
D1	500	500	1000	Constante
D2	500	1000	500	Constante

Tabela 4.7: Propriedades Casos D

Os resultados obtidos para os casos D1 e D2 são expressos nas Figuras 4.21 e 4.22, respectivamente. Os resultados apresentados mostram uma ótima concordância ao longo dos passos de tempo.

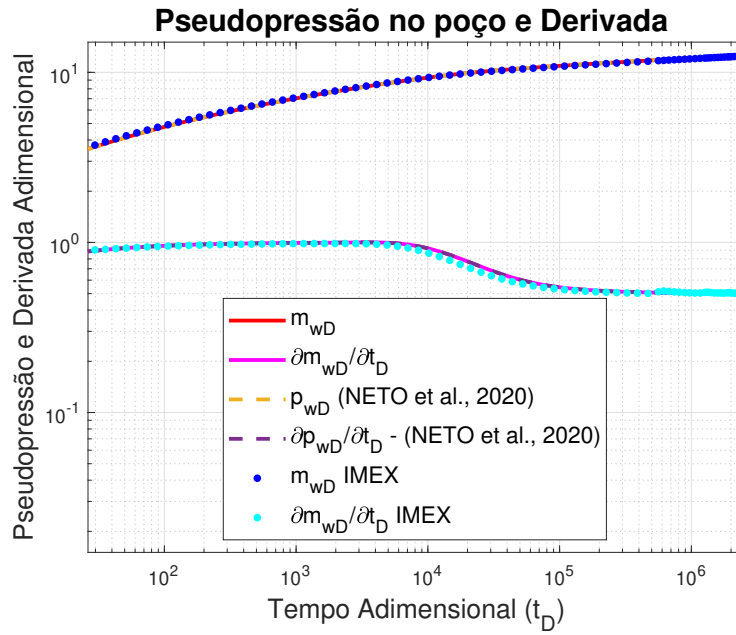


Figura 4.21: Caso D1: Pseudopressão e derivada adimensional

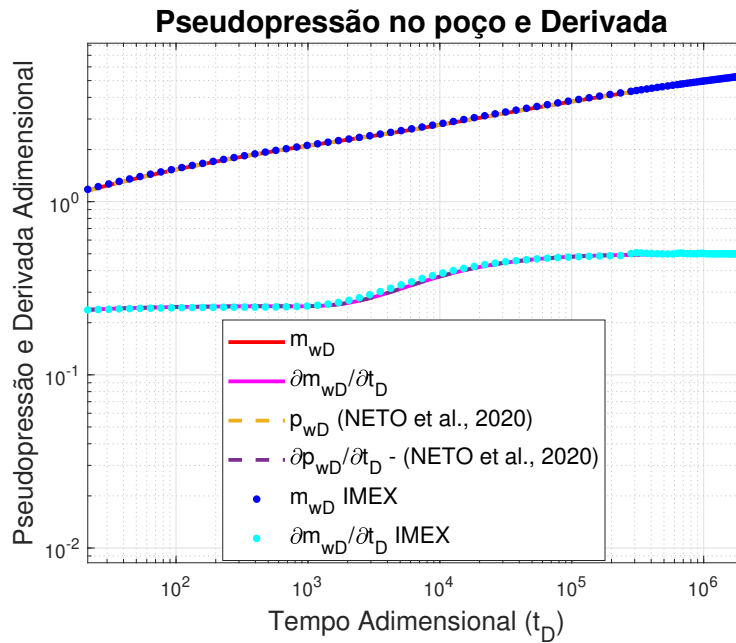


Figura 4.22: Caso D2: Pseudopressão e derivada adimensional

Verifica-se que o comportamento das curvas de derivada da pseudopressão reflete a permeabilidade inicial de cada região. O Caso D1 é caracterizado pelo fato de a região interna possuir uma permeabilidade menor em comparação a região externa. Na Figura 4.21 observa-se que os patamares da curva de derivada da pseudopressão expressam não só a influência da permeabilidades de cada região, mas também o comportamento de transição entre as regiões. O Caso D_2 é o caso contrário ao D_1 em relação à permeabilidade de

cada região, ou seja, a região interna possui permeabilidade maior em relação à permeabilidade da região externa. Novamente, ao observar a Figura 4.22 é possível ver o impacto da permeabilidade de cada região referente aos patamares da resposta da derivada.

4.4.3

Casos E: Reservatório Heterogêneo com Curvas de Permeabilidade dependente da Pressão

Os casos E são caracterizados pela variação linear de permeabilidade no meio poroso de acordo com a pressão. A Tabela 4.8 apresenta as propriedades utilizadas nos casos dessa seção.

Caso	q (m^3/d)	$k_1(p_i)$ (mD)	$k_2(p_i)$ (mD)
E1	500	500	1000
E2	1000	500	1000
E3	500	1000	500
E4	1000	1000	500

Tabela 4.8: Propriedades Casos E

As regiões dos Casos E1 e E2 apresentam um comportamento linear para a permeabilidade onde a permeabilidade inicial da primeira região é menor que a permeabilidade inicial da segunda região, conforme o gráfico apresentado na Figura 4.23: .

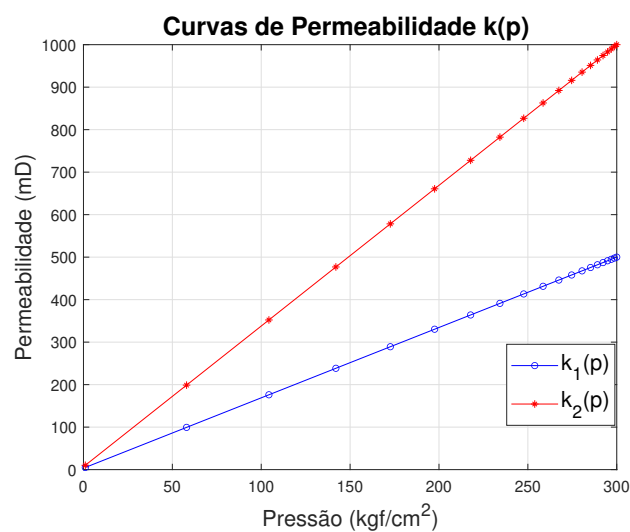


Figura 4.23: Casos E1 e E2: Curva de permeabilidade

A Figura 4.24 apresenta o resultado obtido para pseudopressão no poço e sua derivada logarítmica para o caso E1. Há uma boa concordância entre as curvas e uma variação suave na transição entre as regiões. Já a Figura 4.25 apresenta a variação do termo de primeira ordem ao longo do tempo. É possível verificar a semelhança do formato das curvas referentes ao termo de primeira ordem e a derivada da pseudopressão. Entretanto, tal semelhança, a priori, não possui explicação física.

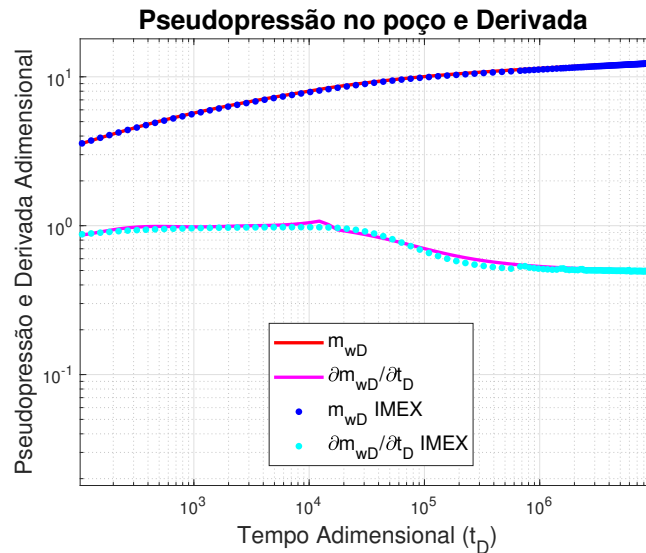


Figura 4.24: Caso E1: pseudopressão e derivada adimensional.

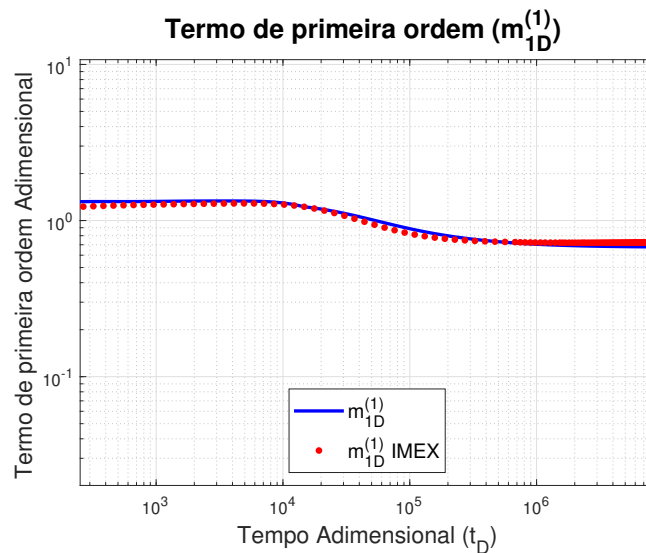


Figura 4.25: Caso E1: Termo de primeira ordem.

Os patamares observados na curva da derivada refletem a influência das curvas de permeabilidade de cada região, evidenciando a transição entre os diferentes domínios do meio poroso. As curvas obtidas exibem um

comportamento semelhante à resposta clássica do escoamento monofásico em um meio com duas regiões de permeabilidade distintas, indicando a presença de contrastes de propriedades hidráulicas. Um comportamento similar ocorre para o caso E2 mostrado nas Figuras 4.26 e 4.27.

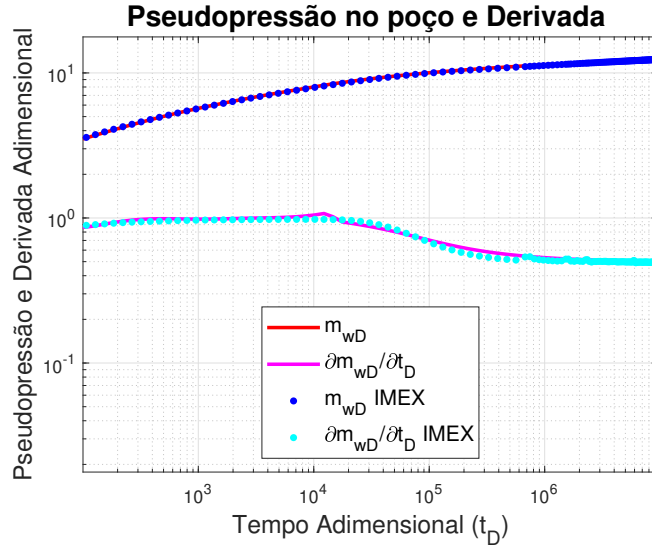


Figura 4.26: Caso E2: Pseudopressão e derivada adimensional.

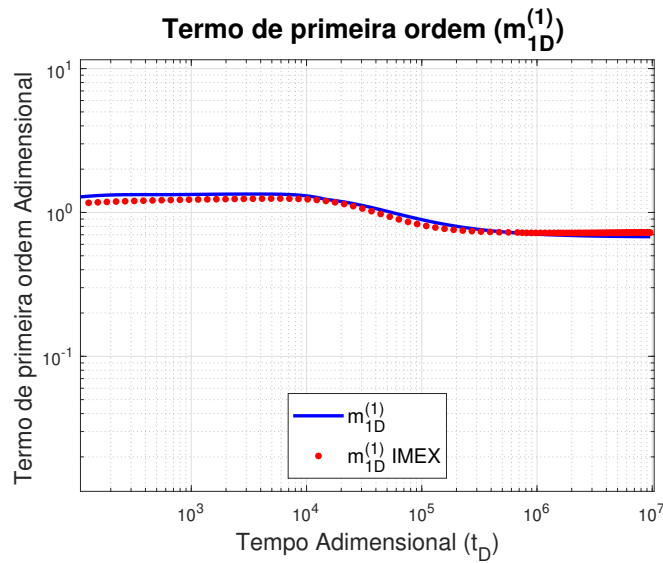


Figura 4.27: Caso E2: Termo de primeira ordem.

Entretanto, em contraste com os casos anteriores, os casos E3 e E4 consideram que a permeabilidade inicial da primeira região é maior que a permeabilidade inicial da segunda região, conforme a Figura 4.28.

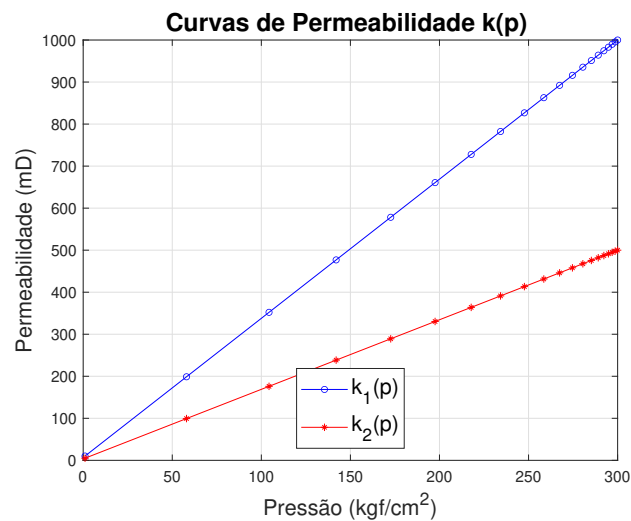


Figura 4.28: Casos E3 e E4: Curva de permeabilidade

Com isso, os resultados obtidos para pseudopressão no poço, sua derivada e o termo de primeira ordem podem ser conferidos nas Figuras 4.29 e 4.30, respectivamente.

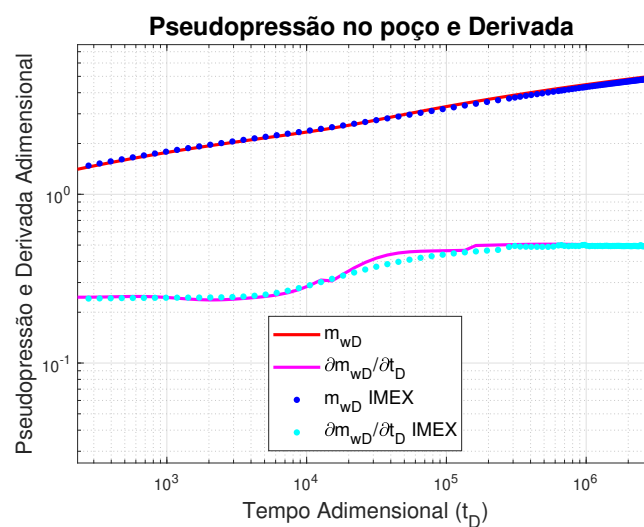


Figura 4.29: Caso E3: Pseudopressão e derivada adimensional.

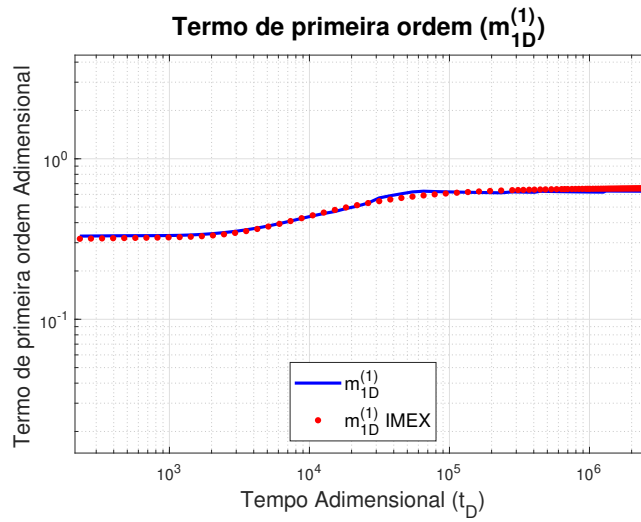


Figura 4.30: Caso E3: Termo de primeira ordem.

A partir de ambos os gráficos, nota-se que a solução desenvolvida em comparação a resposta do simulador de fluxo reproduz a solução de forma satisfatória. O mesmo ocorre para o caso E4 cujos resultados obtidos estão expressos nas Figuras 4.31 e 4.32.

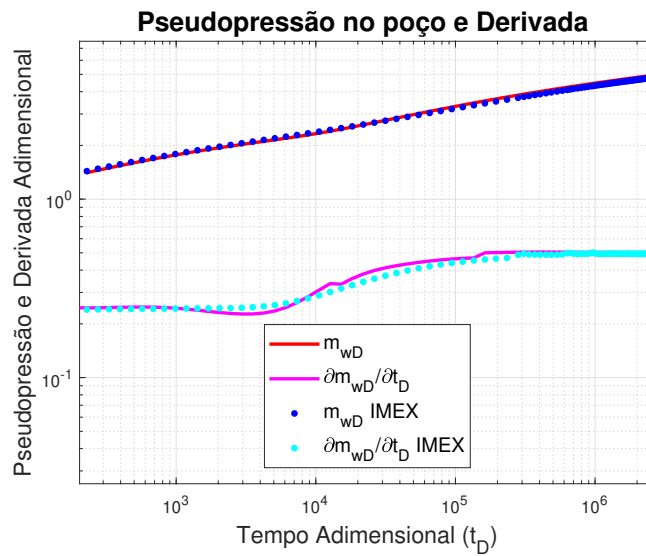


Figura 4.31: Caso E4: Pseudopressão e derivada adimensional.

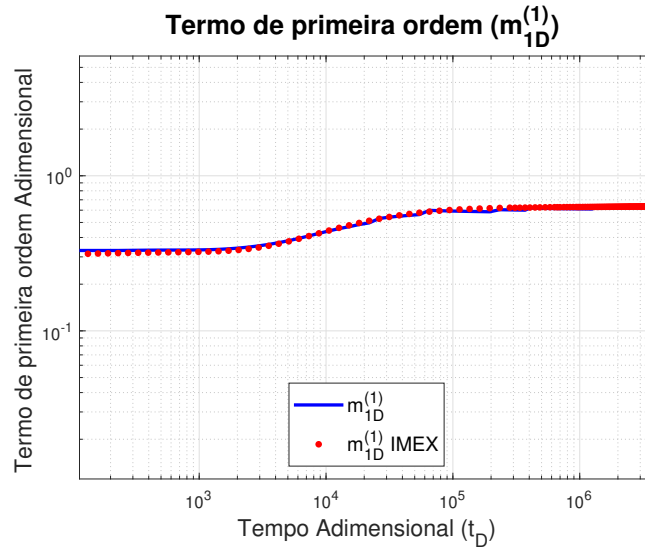


Figura 4.32: Caso E4: Termo de primeira ordem.

De forma geral, os resultados obtidos demonstraram uma concordância satisfatória entre as solução analítica proposta e os resultados numéricos obtidos pelo simulador de fluxo. A análise dos diferentes cenários revelou que a formulação analítica captura de maneira adequada a influência da permeabilidade dependente da pressão no comportamento do escoamento monofásico de óleo. As discrepâncias observadas entre os modelos permaneceram dentro de limites aceitáveis, sendo atribuídas principalmente às aproximações inerentes ao método analítico e às diferenças na discretização espacial e temporal do simulador numérico. Dessa forma, os resultados reforçam a aplicabilidade do modelo analítico para a representação de sistemas nos quais a variabilidade da permeabilidade desempenha um papel significativo na dinâmica do fluxo.

4.4.4

Análise de Sensibilidade da Interface

A análise de sensibilidade constitui uma etapa fundamental na validação de modelos numéricos, permitindo quantificar o impacto das variações dos parâmetros de entrada sobre os resultados obtidos. Em relação ao modelo proposto para um reservatório composto por duas regiões, compreender a sensibilidade das soluções em relação a parâmetros como condições de contorno, discretização espacial e temporal, além da própria relação entre permeabilidade e pressão, é essencial para assegurar a robustez e a confiabilidade das previsões do modelo.

Nesta análise, investiga-se a influência da posição da interface entre as regiões para diferentes valores de raio, bem como o efeito de diferentes

distribuições de permeabilidade entre as regiões interna e externa. A Tabela 4.9 resume os dados utilizados nos dois casos analisados, denominados F1 e F2.

Caso	$k_1(p_i)$ (mD)	$k_2(p_i)$ (mD)	r_1 (m)	Vazão (m ³ /dia)	Curva de Permeabilidade
F1	500	1000	5, 10, 15, 20	500	Linear
F2	1000	500	5, 10, 15, 20	500	Linear

Tabela 4.9: Propriedades Casos F

Os casos F1 e F2 têm por objetivo avaliar a resposta da pseudopressão no poço, sua derivada e o termo de primeira ordem, considerando diferentes posições da interface entre as regiões. Em ambos os casos, as curvas de permeabilidade dependente da pressão são lineares análogas às Figuras 4.23 e 4.28.

No Caso F1, a permeabilidade inicial da região interna é menor do que a da região externa ($k_1(p_i) < k_2(p_i)$), enquanto no Caso F2 ocorre o oposto ($k_1(p_i) > k_2(p_i)$). Os gráficos apresentados nas Figuras 4.33 e 4.34 ilustram o comportamento da pseudopressão para os diferentes valores de r_1 considerados. No que concerne à apresentação dos resultados, a notação para os diferentes valores da fronteira entre as regiões (r_1) são dadas por $r_1 = 5\text{ m}$, $r_2 = 10\text{ m}$, $r_3 = 15\text{ m}$ e $r_4 = 20\text{ m}$.

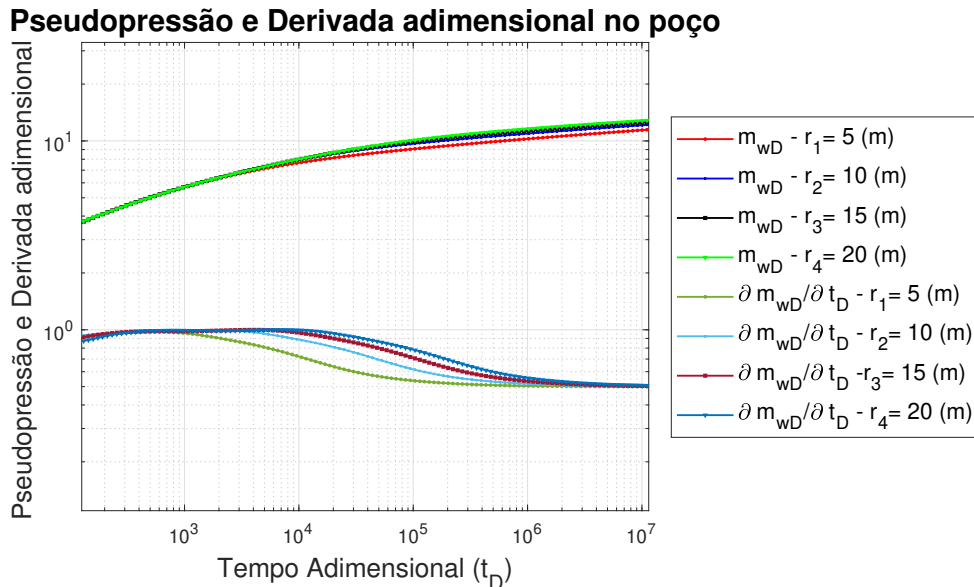


Figura 4.33: Caso F1: Pseudopressão e derivada adimensional

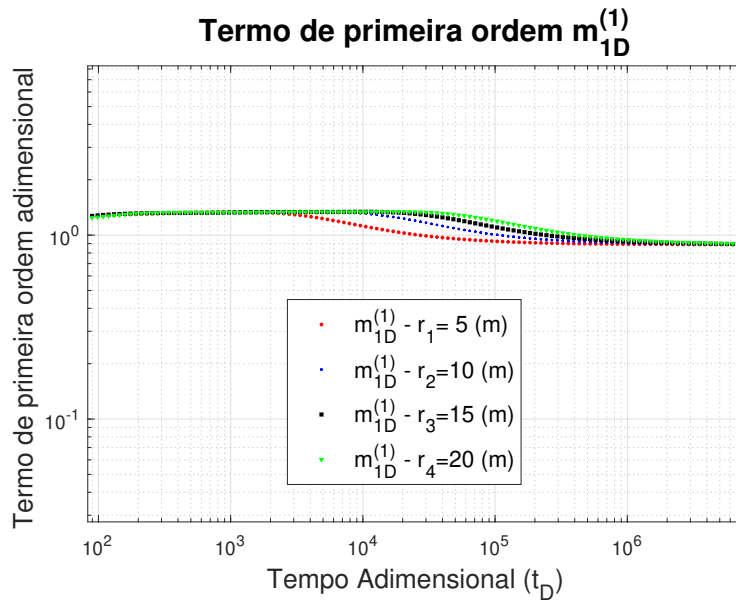


Figura 4.34: Caso F1: Termo de primeira ordem

Para o caso F2, temos $k_1(p_i) > k_2(p_i)$ a permeabilidade inicial na região interna é 1000 mD enquanto para permeabilidade inicial região externa tem-se 500 mD .

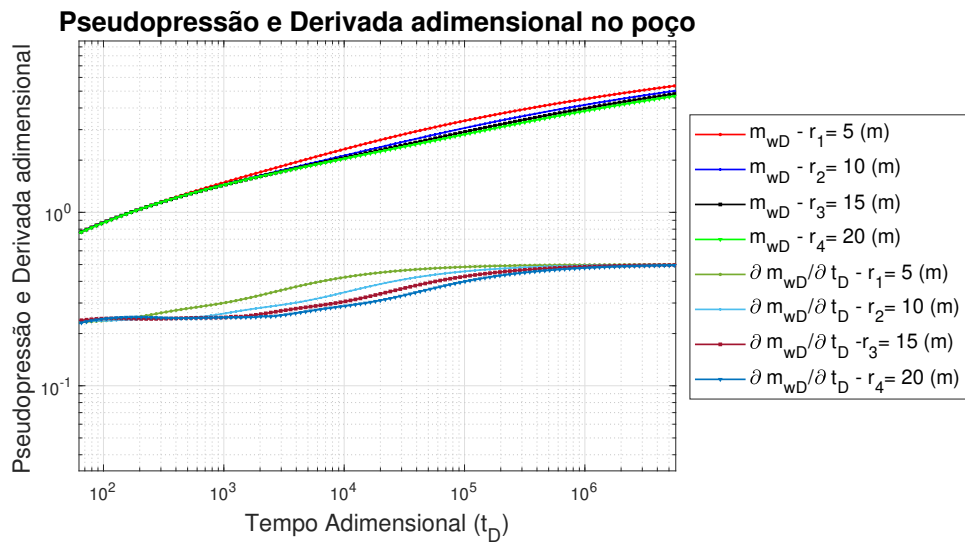


Figura 4.35: Caso F2: Pseudopressão e derivada adimensional

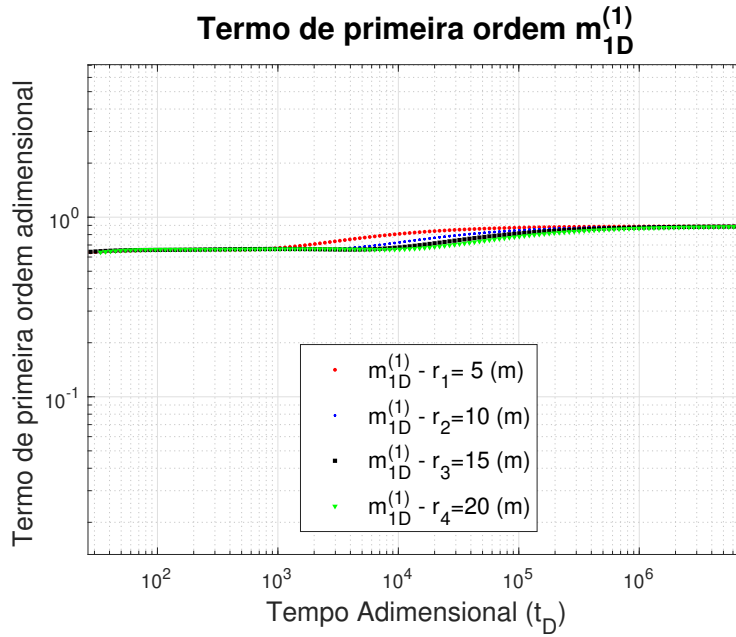


Figura 4.36: Caso F2: Termo de primeira ordem

É interessante observar que o raio de interface (r_i) influencia diretamente a resposta da pseudopressão ao longo do tempo. Quanto maior o valor de r_i , maior é o tempo para que a resposta da pseudopressão atinja a interface entre as regiões, prolongando a resposta da primeira região e retardando a transição na curva. Esse atraso faz com que a variação no final da curva seja mais acentuada, pois a influência da segunda região se manifesta de forma mais brusca. Além disso, a magnitude dessa variação depende da razão entre as permeabilidades das regiões: considerando $k_1(p_i) < k_2(p_i)$ (Caso F1), a pressão cai mais rapidamente após a transição; considerando $k_1(p_i) > k_2(p_i)$ (Caso F2), a queda é mais lenta. Assim, quanto maior o raio de interface, mais tarde ocorre a mudança na derivada de pressão, resultando em uma variação mais evidente no final da curva.

Além disso, nos dois casos é possível observar que o termo de primeira ordem tende a um patamar constante durante os períodos iniciais e finais, fazendo alusão ao comportamento da derivada logarítmica. Assim, nos períodos em que a derivada permanece constante tem-se uma referência ao regime de fluxo radial infinito, onde as soluções de ordem zero e de primeira ordem diferem apenas por uma constante. Ademais, cabe ressaltar o fato de que o patamar final do termo de primeira ordem para todos os valores de r_1 testados coincidem como observado nas Figuras 4.34 e 4.36. Dessa forma, conclui-se que a presença ou o comprimento da região interna não oferece influência na resposta para longos períodos de tempo.

5

Conclusão e trabalhos futuros

Na produção de petróleo e gás, os modelos analíticos são de suma importância para analisar a capacidade de produção dos poços, a otimização das estratégias de produção e o aumento da precisão das simulações de reservatórios. O estudo relativo ao impacto entre a relação permeabilidade-pressão torna-se portanto fundamental para aprimorar a gestão dos reservatórios e otimizar os processos de extração. Ao empregar essas formulações, é possível desenvolver modelos de simulação de reservatórios mais precisos. A geometria de um reservatório influencia diretamente a aplicação da Função de Green em problemas de fluxo de fluidos, especialmente na modelagem matemática da pressão e permeabilidade em reservatórios de petróleo e gás. Este trabalho propõe duas soluções para modelos de pseudopressão dependente da permeabilidade, projetadas para escoamento monofásico em reservatórios multicamadas homogêneas e uma camada heterogênea composta por duas regiões homogêneas. Apesar de encontrar-se na literatura diferentes trabalhos que utilizam geometrias semelhantes, para o conhecimento dos autores não foram identificadas metodologias referentes à aplicação desse método para reservatórios com múltiplas camadas e duas regiões referentes ao escoamento monofásico de óleo. Portanto, esse trabalho é uma contribuição significativa que pode ser precursor de novos modelos mais complexos que utilizem uma metodologia similar, uma vez que reservatórios homogêneos infinitos possuem soluções mais simples, enquanto reservatórios limitados ou fraturados exigem ajustes mais complexos.

O desempenho computacional dos resultados apresentados mostrou uma boa correspondência com o simulador de fluxo, sendo um método de validação da solução devido à ausência de dados reais para comparação. A flexibilidade das propriedades de entrada utilizadas no modelo permite experimentações sob diversas condições, como reservatórios com um maior número de camadas, diferentes propriedades de fluidos e rochas, e distintas relações de permeabilidade-pressão. Diante dessas limitações, o modelo apresentado poder ser utilizado como uma solução alternativa para esse tipo de medição com baixo custo. Além disso, também podem ser utilizados para desenvolver estratégias de produção para reservatórios, especialmente em reservatórios não convencionais com efeitos significativos de permeabilidade dependente da pressão. Ao aprimorar as previsões de desempenho do reservatório, os operadores podem otimizar as taxas de recuperação e, ao mesmo tempo,

minimizar riscos e custos operacionais. Ademais, o modelo pode servir como uma plataforma para monitoramento em tempo real de reservatórios, permitindo ajustes nos níveis de produção ou a implementação de métodos avançados de recuperação de petróleo conforme as variações de permeabilidade associadas à pressão forem identificadas.

As limitações do modelo, a priori, são referentes às simplificações teóricas onde outras propriedades de rocha foram consideradas constantes; as curvas de permeabilidade mais sofisticadas podem aumentar a precisão das soluções. Implementar tais melhorias acarreta em uma contribuição significativa para a modelagem de reservatórios complexos, oferecendo uma gama mais ampla de aplicações na indústria de petróleo e gás, como por exemplo a utilização da solução em problema inverso para estimar parâmetros do reservatório.

Em suma, ao adotar que o comportamento de permeabilidade dependente da pressão nos modelos de engenharia de reservatórios pode levar a previsões mais confiáveis das taxas de produção. Esse avanço possibilita uma gestão mais eficiente dos reservatórios, melhor alocação de recursos e maior sustentabilidade na extração de óleo, contribuindo para o desenvolvimento de abordagens inovadoras na engenharia de reservatórios.

A

Verificação da Solução

A verificação da solução da pseudopressão para o problema de escoamento monofásico com duas regiões será dada por substituição direta nas condições iniciais, de contorno, de acoplamento entre regiões e na equação diferencial parcial que modela o problema em cada região. As soluções para pseudopressão foram encontradas no Capítulo 3 são:

$$\begin{aligned}
 m_{1D}(r_D, t_D) &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (\text{A-1}) \\
 &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{2D}(r_D, t_D) &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (\text{A-2}) \\
 &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{2D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'}
 \end{aligned}$$

É necessário considerar o problema associado de Green para fonte na região interna e para fonte na região externa que foram apresentados anteriormenye:

Problema de Green Associado com fonte na região interna:

Região Interna

EDP:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} \\
 &= -\frac{M_R}{2\pi r_D} \delta(r_D - r_{0D})(t_D - t_{0D})
 \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

para $1 < r_D, r_{0D} < r_{1D}$ e $t_D, t_{0D} > 0$.

PC:

$$G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (\text{A-4})$$

para $t_D < t_{0D}$.

CCI:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (\text{A-5})$$

Região Externa

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial t_D} = 0 \quad (\text{A-6})$$

para $1 < r_D, r_{0D} < r_{1D}$ e $t_D, t_{0D} > 0$.

PC:

$$G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (\text{A-7})$$

para $t_D < t_{0D}$

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (\text{A-8})$$

Acoplamento entre Regiões ocorre em $r_D = r_{1D}$, logo:

$$G_{1D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) - G_{2D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (\text{A-9})$$

e

$$\left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} - M_R \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (\text{A-10})$$

A.1**Substituição Direta CI**

A condição inicial do problema é referente ao fato de o reservatório estar em equilíbrio inicialmente, ou seja:

$$m_{1D}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (\text{A-11})$$

As Equações (A-1) e (A-2) representam as soluções em cada região, portanto verificaremos por propriedade de integração a veracidade da Equação (A-11) ao substituir $t_D = 0$:

$$\begin{aligned} & m_{1D}(r_D, t_D = 0) \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D=0} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, 0, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ &\quad - 2\pi \int_0^{t_D=0} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, 0, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

e

$$\begin{aligned} & m_{2D}(r_D, t_D = 0) \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D=0} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, 0, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{2D}^2(r_D, r_{D'}, 0, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

A.2

Substituição Direta CCE

A condição de contorno externo (CCE) é referente ao fato de o reservatório ser infinito:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{2D}(r_D, t_D) = 0 \quad (\text{A-14})$$

Substituindo a solução para pseudopressão correspondente a região mais externa do reservatório temos que:

$$\begin{aligned} & \lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{2D}(r_D, t_D) \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \lim_{r_D \rightarrow \infty} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ & \quad - 2\pi \lim_{r_D \rightarrow \infty} \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{2D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ & \quad - 2\pi \lim_{r_D \rightarrow \infty} \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(w_{2D}(m_{2D}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{2D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Considerando as condições de contorno externo do Problema de Green Associado (Equações (A-8)) verificamos a CCE do problema proposto pois de fato:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} m_{2D}(r_D, t_D) = 0 \quad (\text{A-16})$$

A.3

Substituição Direta EDP

Para verificar as equações diferenciais que governam o fluxo em cada região é necessário utilizar as derivadas parciais das soluções encontradas para $m_{1D}(r_D, t_D)$ e $m_{2D}(r_D, t_D)$. A derivada parcial de m_{1D} em relação a t_D é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (\text{A-17}) \\ & \quad - 2\pi \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \end{aligned}$$

Utilizando propriedades de integração obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} \\ & \quad - \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ & \quad - 2\pi \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ & \quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (\text{A-18}) \end{aligned}$$

Pela condição inicial temos que

$$G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_D) = 0 \quad (\text{A-19})$$

e

$$G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_D) = 0 \quad (\text{A-20})$$

portanto,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\
 &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & \quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & \hspace{15em} (A-21)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, as derivadas parciais de m_{1D} em relação a r_D de primeira e segunda ordem são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \\
 &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & \quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & \hspace{15em} (A-22)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} \\
 &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial r_D^2} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & \quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial r_D^2} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & \hspace{15em} (A-23)
 \end{aligned}$$

Substituindo as Equações (A-21), (A-22) e (A-23) na equação diferencial relativa à região interna obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r_D} \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\
 &= \frac{\partial^2 m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\
 &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial r_D^2} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial r_D^2} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\quad + \frac{1}{r_D} - \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\quad + \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\quad + 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \frac{\partial}{\partial t_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\hspace{15em} (A-24)
 \end{aligned}$$

Agrupando as integrais de mesmo domínio de integração vem que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\
 &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r_D^2} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) - \frac{\partial}{\partial t_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 &- 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r_D^2} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) - \frac{\partial}{\partial t_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\hspace{15em} (A-25)
 \end{aligned}$$

É possível observar que a equação diferencial do problema associado aparece dentro da integral dupla que caracteriza a solução obtida para a pseudopressão. Sendo assim, utilizando igualdade da equação diferencial do problema associado para fonte na região interna (Equações (A-3) e (A-6)):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\
 &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \\
 &\quad \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(-\frac{M_R}{2\pi r_D} \delta(r_D - r_{D'})(t_D - t_{D'}) \right) dr_{D'} dt_{D'} \\
 &- 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) .0 dr_{D'} dt_{D'} \\
 &\hspace{15em} (A-26)
 \end{aligned}$$

Por fim, por propriedade da função Delta de Dirac obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \\
 &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{M_R}{2\pi r_D} \delta(r_D - r_{D'})(t_D - t_{D'}) dr_{D'} dt_{D'} \hspace{1em} (A-27)
 \end{aligned}$$

A.4**Substituição Direta nas Condições de Acoplamento**

As condições de acoplamento entre regiões ocorrem na interface entre as regiões. Sendo assim, há duas equações a serem verificadas.

Condição de Acoplamento entre Regiões - pseudopressões

$$m_{1D}(r_D = r_{1D}, t_D) - m_{2D}(r_D = r_{1D}, t_D) = 0 \quad (\text{A-28})$$

Condição de Acoplamento entre Regiões - vazões

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D = r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D = r_{1D}} = 0 \quad (\text{A-29})$$

Substituindo as soluções para pseudopressão obtemos:

$$\begin{aligned} & m_{1D}(r_D = r_{1D}, t_D) - m_{2D}(r_D = r_{1D}, t_D) \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^1(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ &\quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{1D}^2(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (\text{A-30}) \\ &\quad + \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{2D}^1(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ &\quad + 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) G_{2D}^2(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right] dr_{D'} dt_{D'} \end{aligned}$$

Agrupando as integrais de mesmo domínio de integração obtemos:

$$\begin{aligned} & m_{1D}(r_D = r_{1D}, t_D) - m_{2D}(r_D = r_{1D}, t_D) \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(G_{1D}^1(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - G_{2D}^1(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(G_{1D}^2(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - G_{2D}^2(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (\text{A-31}) \end{aligned}$$

Pelas condições de acoplamento do problema associado (Equações (A-9) e (A-10)) temos

$$G_{1D}^1(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) - G_{2D}^1(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) = 0 \quad (\text{A-32})$$

e

$$G_{1D}^2(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) - G_{2D}^2(r_{1D}, r_{D'}, t_D, t_{D'}) = 0 \quad (\text{A-33})$$

sendo assim, verificamos que:

$$m_{1D}(r_D = r_{1D}, t_D) - m_{2D}(r_D = r_{1D}, t_D) = 0 \quad (\text{A-34})$$

Para verificar a segunda condição de acoplamento iremos substituir a derivada parcial em relação a r_D da solução obtida na Equação (A-29):

$$\begin{aligned} & \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \quad (\text{A-35}) \\ &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(r_D \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ & \quad - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(r_D \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ & \quad + \frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(M_R r_D \frac{\partial}{\partial r_D} G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \\ & \quad + 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(M_R r_D \frac{\partial}{\partial r_D} G_{2D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \right] dr_{D'} dt_{D'} \end{aligned}$$

Agrupando os termos de mesmo domínio de integração vem que:

$$\begin{aligned}
 & \left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \\
 &= -\frac{2\pi}{M_R} \int_0^{t_D} \int_1^{r_{1D}} \left[\left(f_{1D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_{1D}(m_{1D}) \left(\frac{\partial m_{1D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(\left(r_D \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - M_R \left(r_D \frac{\partial}{\partial r_D} G_{2D}^1(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \\
 & - 2\pi \int_0^{t_D} \int_{r_{1D}}^\infty \left[\left(f_{2D}(r_{D'}, t_{D'}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + w_{2D}(m_{2D}) \left(\frac{\partial m_{2D}(r_{D'}, t_{D'})}{\partial t_{D'}} \right) \right) \left(\left(r_D \frac{\partial}{\partial r_D} G_{1D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(M_R r_D \frac{\partial}{\partial r_D} G_{2D}^2(r_D, r_{D'}, t_D, t_{D'}) \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} \right) \right] dr_{D'} dt_{D'} \quad (\text{A-36})
 \end{aligned}$$

Substituindo as condições de acoplamento entre regiões do problema associado verifica-se a igualdade:

$$\left(r_D \frac{\partial m_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial m_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \quad (\text{A-37})$$

B

Solução para Escoamento Monofásico de Óleo em Reservatório Composto

B.1

Hipóteses do Modelo

Consideremos um reservatório de camada única heterogêneo composto por duas regiões homogêneas conforme a Figura B.1:

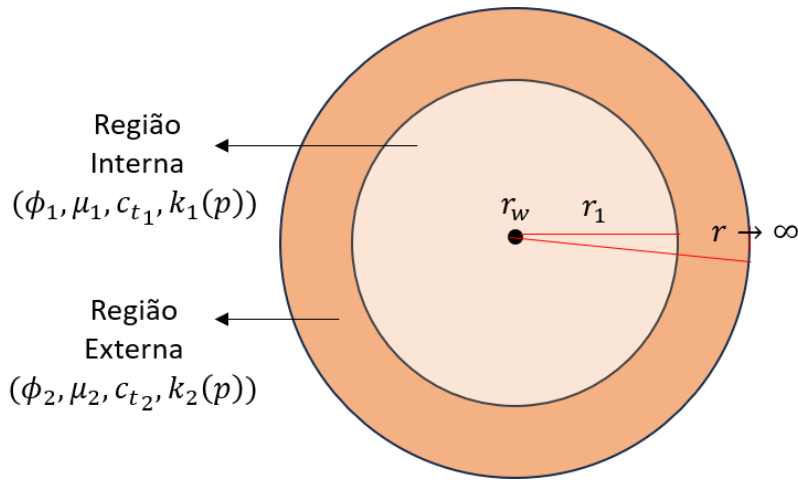


Figura B.1: Modelo de Reservatório com 2 Regiões

Além disso, serão consideradas as seguintes hipóteses:

- Fluxo radial, isotérmico e monofásico;
- Fluido pouco compressível;
- Meio poroso cilíndrico, heterogêneo (composto por duas regiões homogêneas);
- Efeitos de estocagem e dano de formação no poço produto são desconsiderados;
- Efeitos gravitacionais desprezíveis

O coeficiente da difusividade hidráulica na região i será adotado por:

$$\eta_i = \frac{k_i}{\phi_i c_{t_i} \mu} \quad (\text{B-1})$$

Essa definição permite escrever as seguintes equações que governam o problema em cada região:

Região Interna ($r_w \leq r \leq r_1$)

EDP:
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial p_1(r, t)}{\partial t} \quad (\text{B-2})$$

CI:
$$p_1(r, t = 0) = p_i \quad (\text{B-3})$$

CCI:
$$q = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} \left(r \frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_w} \quad (\text{B-4})$$

Região Externa ($r_1 \leq r \leq \infty$) EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_2(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial p_2(r, t)}{\partial t} \quad (\text{B-5})$$

CI:
$$p_2(r, t = 0) = p_i \quad (\text{B-6})$$

CCE:
$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_2(r, t) = p_i \quad (\text{B-7})$$

Considerando que o acoplamento entre regiões ocorre na interface entre as regiões, podemos descrever as Condições de Acoplamento entre Regiões da seguinte forma:

CAR - Pressões

$$p_1(r_1, t) = p_2(r_1, t) \quad (\text{B-8})$$

e

CAR - Vazões

$$q_1(r_1, t) = q_2(r_1, t) \quad (\text{B-9})$$

B.2

Variáveis Adimensionais

As variáveis adimensionais serão utilizadas para simplificar as equações do problema. Além disso, serão definidas em função das propriedades da região externa.

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (\text{B-10})$$

$$t_D = \frac{k_2}{\phi_2 c_{t_2} \mu r_w^2} t \quad (\text{B-11})$$

e

$$p_{jD} = \frac{2\pi k_2 h}{\mu q} (p_i - p_j(r, t)) \quad (\text{B-12})$$

Substituindo as derivadas parciais das variáveis adimensionais nas equações do modelo, as seguintes equações são obtidas por região:

Região Interna ($1 \leq r_D \leq r_{1D}$)

$$\text{EDP:} \quad \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{\partial p_{1D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (\text{B-13})$$

$$\text{CI:} \quad p_{1D}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (\text{B-14})$$

$$\text{CCI:} \quad \left(r_D \frac{\partial p_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -\frac{k_2}{k_1} = -M_R \quad (\text{B-15})$$

Região Externa ($r_{1D} \leq r_D \leq \infty$)

$$\text{EDP:} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r} \right) = \frac{\partial p_{2D}(r_D, t_D)}{\partial t} \quad (\text{B-16})$$

$$\text{CI:} \quad p_{2D}(r_D, t_D = 0) = 0 \quad (\text{B-17})$$

$$\text{CCE:} \quad \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{2D}(r_D, t_D) = 0 \quad (\text{B-18})$$

Utilizando a Lei de Darcy, as Condições de Acoplamento entre Regiões passam a ser da seguinte forma:

$$\text{CAR - Pressões} \quad p_{1D}(r_{1D}, t_D) - p_{2D}(r_{1D}, t_D) = 0 \quad (\text{B-19})$$

e

CAR - Vazões

$$\left(r_D \frac{\partial p_{1D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial p_{2D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \quad (\text{B-20})$$

B.3

Solução no Campo de Laplace

Definindo $\eta_R = \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}$ e aplicando a transformada de Laplace em relação a t_D , as seguintes EDPs por região são obtidas:

Região Interna ($1 \leq r_D \leq r_{1D}$)

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{1D}(r_D, u)}{\partial r_D} \right) - \eta_R^2 [u \bar{p}_{1D}(r_D, u) - \bar{p}_{1D}(r_D, 0)] = 0 \quad (\text{B-21})$$

Região Externa ($r_{1D} \leq r_D \leq \infty$)

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{2D}(r_D, u)}{\partial r_D} \right) - [u \bar{p}_{2D}(r_D, u) - \bar{p}_{2D}(r_D, 0)] = 0 \quad (\text{B-22})$$

Sendo assim, utilizando as Condições Iniciais de cada região, temos o seguinte problema por região:

Região Interna ($1 \leq r_D \leq r_{1D}$)

$$\text{EDP:} \quad \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{1D}(r_D, u)}{\partial r_D} \right) - \eta_R^2 u \bar{p}_{1D}(r_D, u) = 0 \quad (\text{B-23})$$

$$\text{CI:} \quad \bar{p}_{1D}(r_D, u = 0) = 0 \quad (\text{B-24})$$

$$\text{CCI:} \quad \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{1D}(r_D, u)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = -\frac{M_R}{u} \quad (\text{B-25})$$

Região Externa ($r_{1D} \leq r_D \leq \infty$) EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{2D}(r_D, u)}{\partial r_D} \right) - u \bar{p}_{2D}(r_D, u) = 0 \quad (\text{B-26})$$

$$\text{CI:} \quad \bar{p}_{2D}(r_D, u = 0) = 0 \quad (\text{B-27})$$

$$\text{CCE:} \quad \lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{2D}(r_D, u) = 0 \quad (\text{B-28})$$

Com as seguintes Condições de Acoplamento entre Regiões:

CAR - Pressões

$$\bar{p}_{1D}(r_{1D}, u) - \bar{p}_{2D}(r_{1D}, u) = 0 \quad (\text{B-29})$$

e

CAR - Vazões

$$\left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{1D}(r_D, u)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{2D}(r_D, u)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \quad (\text{B-30})$$

As soluções gerais são conhecidas de acordo com as funções de Bessel:

$$\bar{p}_{1D}(r_D, u) = A_1 I_0(\eta_R r_D \sqrt{u}) + A_2 K_0(\eta_R r_D \sqrt{u}) \quad (\text{B-31})$$

e

$$\bar{p}_{2D}(r_D, u) = B_1 I_0(r_D \sqrt{u}) + B_2 K_0(r_D \sqrt{u}) \quad (\text{B-32})$$

onde A_1 , A_2 , B_1 e B_2 são coeficientes a serem determinados.

Utilizando a CCE (Equação B-28) temos:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} [B_1 I_0(r_D \sqrt{u}) + B_2 K_0(r_D \sqrt{u})] = 0 \quad (\text{B-33})$$

Pelas funções de Bessel, sabe-se que $I_0 \rightarrow \infty$ e $K_0 \rightarrow 0$ quando $r_D \rightarrow \infty$. Portanto, podemos concluir que $B_1 = 0$ para satisfazer a CCE. Logo, a solução na região externa é dada por:

$$\bar{p}_{2D}(r_D, u) = B_2 K_0(r_D \sqrt{u}) \quad (\text{B-34})$$

Substituindo a solução de $\bar{p}_{1D}$ (Equação B-31) na CCI (Equação B-25) obtemos:

$$\begin{aligned} \left(r_D \frac{\partial \bar{p}_{1D}(r_D, u)}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} &= \left[r_D \eta_R \sqrt{u} \left(A_1 I_1(\eta_R r_D \sqrt{u}) - A_2 K_1(\eta_R r_D \sqrt{u}) \right) \right] \Big|_{r_D=1} \\ &= -\frac{M_R}{u} \end{aligned} \quad (\text{B-35})$$

Portanto:

$$A_1 I_1(\eta_R \sqrt{u}) - A_2 K_1(\eta_R \sqrt{u}) = -\frac{M_R}{\eta_R u \sqrt{u}} \quad (\text{B-36})$$

Por outro lado, substituindo as soluções de $\bar{p}_{1D}$ (Equação B-31) e $\bar{p}_{2D}$ (Equação B-34) nas Condições de Acoplamento entre Regiões (Equações B-29 e B-30) obtemos:

CAR- pressões

$$A_1 I_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) + A_2 K_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) - B_2 K_0(r_{1D} \sqrt{u}) = 0 \quad (\text{B-37})$$

e

CAR - Vazões

$$\left[r_D \eta_R \sqrt{u} \left(A_1 I_1(\eta_R r_D \sqrt{u}) - A_2 K_1(\eta_R r_D \sqrt{u}) \right) \right] \Big|_{r_D=r_{1D}} + M_R [r_D \sqrt{u} B_2 K_1(r_D \sqrt{u})] \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \quad (\text{B-38})$$

Logo:

$$\eta_R A_1 I_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) - \eta_R A_2 K_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) + M_R B_2 K_1(r_{1D} \sqrt{u}) = 0 \quad (\text{B-39})$$

As equações obtidas com a CCI e as CARs (Equações B-36, B-37 e B-39) definem um sistema linear onde A_1 , A_2 e B_2 podem ser determinados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{M_R}{\eta_R u \sqrt{u}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B-40})$$

onde A é uma matriz cujos elementos são:

$$\begin{bmatrix} I_1(\eta_R \sqrt{u}) & -K_1(\eta_R \sqrt{u}) & 0 \\ I_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) & K_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) & -K_0(r_{1D} \sqrt{u}) \\ \eta_R I_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) & -\eta_R K_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) & M_R K_1(r_{1D} \sqrt{u}) \end{bmatrix} \quad (\text{B-41})$$

Note que a pressão no poço ($r_D = 1$) pode ser calculada utilizando a solução da pressão na Região Interna (Equação B-31). Sendo assim, denominando $\bar{p}_{wD}$ como a solução no poço no Campo de Laplace temos:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = A_1 I_0(\eta_R \sqrt{u}) + A_2 K_0(\eta_R \sqrt{u}) \quad (\text{B-42})$$

A solução no campo real pode ser obtida numericamente utilizando o Algoritmo de Stehfest (1970) para calcular a transformada inversa:

$$p_{wD}(t_D) = \mathcal{L}^{-1}\{A_1 I_0(\eta_R \sqrt{u}) + A_2 K_0(\eta_R \sqrt{u})\} \quad (\text{B-43})$$

C

Funções de Green para modelo com duas regiões

A função delta de Dirac desempenha um papel essencial na definição e construção das funções de Green, pois estas representam, na prática, as respostas fundamentais de operadores diferenciais lineares a uma fonte pontual, que é precisamente o que a delta de Dirac modela. Como a função delta de Dirac só opera em $r_D = r_{0D}$, é necessário dividir o domínio espacial em dois casos distintos: $r_D \leq r_{0D}$ e $r_D > r_{0D}$.

Para cada um desses casos, obtemos uma equação diferencial ordinária homogênea, o que facilita o estudo e a solução do problema. Para determinar as funções de Green a serem utilizadas na solução da pseudopressão é necessário considerar dois cenários para a posição da fonte conforme o esquema da Figura (C.1).

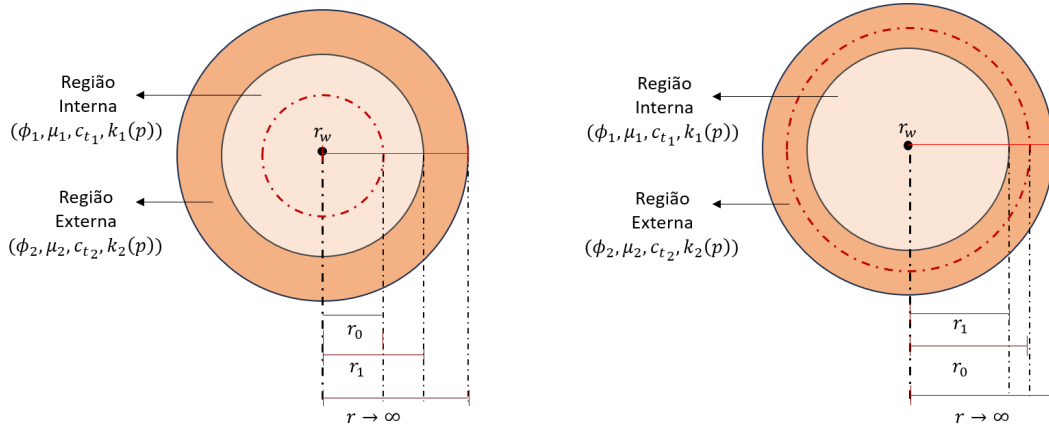


Figura C.1: Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade

A solução do problema associado representa a resposta fundamental do sistema a uma fonte unitária, permitindo a análise da propagação de perturbações no meio. A obtenção da solução requer a formulação adequada das equações diferenciais governantes e a consideração das propriedades físicas e geométricas do reservatório, garantindo a compatibilidade com as condições de contorno e de continuidade entre as regiões que o compõem. Além disso, deve-se considerar o princípio da causalidade para funções de Green. Este princípio caracteriza-se por estabelecer que a resposta de um sistema físico a uma perturbação só pode ocorrer após a aplicação da fonte responsável por essa perturbação. Em outras palavras, a função de Green deve ser zero para tempos anteriores à atuação da fonte, garantindo que o sistema não tenha efeitos antes da causa.

C.1

Função de Green para Fonte na Região Interna ($r_{0D} \leq r_{1D}$)

A função de Green para um reservatório composto, com a fonte localizada na região interna, é determinada pela solução do problema associado, respeitando o princípio da causalidade e impondo condições de contorno homogêneas de acordo com a Figura (C.2).

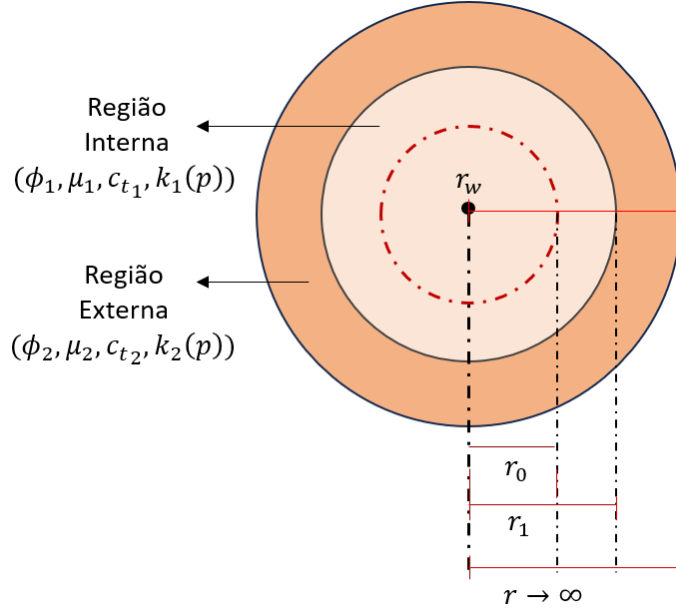


Figura C.2: Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte na região interna

Dessa forma, o problema de Green associado é definido pelas seguintes equações em cada região:

Região Interna

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \eta_R^2 \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} = - \frac{M_R \delta(r_D - r_{0D}) \delta(t_D - t_{0D})}{2\pi r_D} \quad (C-1)$$

para $1 < r_D, r_{0D} < r_{1D}$ e $t_D, t_{0D} > 0$

PC:

$$G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (C-2)$$

para $t_D \leq t_{0D}$.

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (C-3)$$

Região Externa

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} = 0 \quad (\text{C-4})$$

PC:

$$G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (\text{C-5})$$

para $t_D \leq t_{0D}$.

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \quad (\text{C-6})$$

Condições de Acoplamento entre Regiões

$$\begin{cases} G_{1D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) - G_{2D}^1(r_{1D}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \\ \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \end{cases} \quad (\text{C-7})$$

onde G_{1D}^1 e G_{2D}^1 são soluções do problema de Green associado que compõem a função de Green G_D^1 , isto é:

$$G_D^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \begin{cases} G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}), & \text{para } 1 \leq r_D \leq r_{1D} \\ G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}), & \text{para } r_{1D} < r_D < \infty \end{cases} \quad (\text{C-8})$$

Para determinar a solução de G_D^1 , a transformada de Laplace será aplicada em relação a t_D nas equações do problema, convertendo as derivadas temporais em multiplicações algébricas no domínio de Laplace. Esse procedimento simplifica a resolução do sistema, permitindo a obtenção de uma equação diferencial ordinária. Posteriormente, a solução encontrada será revertida ao domínio do tempo, garantindo a interpretação física da resposta do sistema. As equações que compõem o problema no campo de Laplace são:

Região Interna

EDO:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{1D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \eta_R^2 u \bar{G}_{1D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) \\ = - \frac{M_R \delta(r_D - r_{0D}) \exp(-ut_{0D})}{2\pi r_D} \end{aligned} \quad (\text{C-9})$$

Princípio da Causalidade (PC):

$$\bar{G}_{1D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \quad (\text{C-10})$$

para $t_D < t_{0D}$.

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{1D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (\text{C-11})$$

Região Externa

EDO:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{2D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - u \bar{G}_{2D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \quad (\text{C-12})$$

Princípio da Causalidade (PC):

$$\bar{G}_{2D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \quad (\text{C-13})$$

para $t_D < t_{0D}$.

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{G}_{2D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \quad (\text{C-14})$$

Condições de Acoplamento entre Regiões:

$$\begin{cases} \bar{G}_{1D}^1(r_{1D}, r_{0D}, u, t_{0D}) - \bar{G}_{2D}^1(r_{1D}, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \\ \left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{1D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{2D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \end{cases} \quad (\text{C-15})$$

A estrutura das EDO's (C-9) e (C-12) é conhecida como uma Equação de Bessel Modificada de ordem zero. A solução dessa equação pode ser expressa como uma combinação das funções de Bessel modificadas de ordem zero, $K_0(x)$ e $I_0(x)$, que são soluções fundamentais dessa equação. Portanto, é possível escrever:

$$\begin{aligned} & \bar{G}_D^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) \\ &= \begin{cases} \bar{G}_{1D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = A_1 I_0(\eta_R r_D \sqrt{u}) + A_2 K_0(\eta_R r_D \sqrt{u}), & r_D \leq r_{0D} \leq r_{1D} \\ \bar{G}_{1D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = A_3 I_0(\eta_R r_D \sqrt{u}) + A_4 K_0(\eta_R r_D \sqrt{u}), & r_{0D} \leq r_D \leq r_{1D} \\ \bar{G}_{2D}^1(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = A_5 K_0(r_D \sqrt{u}), & r_{1D} < r_D < \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C-16})$$

onde A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 são constantes a serem determinadas. Para determinar os coeficientes A_i , e consequentemente a solução do Problema de Green associado, será necessário resolver o sistema de equações considerando o domínio espacial de acordo com a posição de resposta, $r_D \leq r_{0D} \leq r_{1D}$ e $r_{0D} \leq r_D \leq r_{1D}$.

Assumindo $r_D \leq r_{0D} \leq r_{1D}$ e substituindo a solução geral nas condições de contorno ou iniciais, relativa à Região Interna, é possível montar um sistema

de equações para determinar a solução particular almejada. Considerando as soluções apresentadas na Equação (C-16), a CCI (C-11) pode ser escrita por:

$$A_1 I_1(\eta_R \sqrt{u}) - A_2 K_1(\eta_R \sqrt{u}) = 0 \quad (\text{C-17})$$

Assumindo $r_{0D} \leq r_D \leq r_{1D}$, substituindo nas CAR obtemos duas equações.

$$\begin{cases} A_3 I_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) + A_4 K_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) - A_5 K_0(r_{1D} \sqrt{u}) = 0 \\ A_3 I_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) - A_4 K_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) + \frac{M_R}{\eta_R} A_5 K_1(r_{1D} \sqrt{u}) = 0 \end{cases} \quad (\text{C-18})$$

Como há cinco variáveis A_i será necessário adicionar duas condições ao problema. Sabe-se que a função de Green deve ser contínua na posição da fonte (r_{0D}), pois neste caso representa uma grandeza que não pode apresentar variações abruptas em um meio contínuo. Sendo assim, considerando a continuidade da Função de Green na posição $r_D = r_{0D}$ e as soluções apresentadas Equação (C-16) tem-se:

$$A_1 I_0(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) + A_2 K_0(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) = A_3 I_0(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) + A_4 K_0(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) \quad (\text{C-19})$$

Além disso, a descontinuidade da derivada da função de Green também deve ser considerada visto que é uma propriedade essencial para garantir que a solução satisfaça corretamente as equações diferenciais governantes, assegurando a coerência matemática e física da solução. Esse comportamento decorre diretamente da função delta de Dirac, que modela a fonte como uma perturbação concentrada em um ponto. Portanto, partindo da integração em torno de r_{0D} da EDO dada pela Equação (C-9) multiplicada por r_D obtem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{r_{0D}-\varepsilon}^{r_{0D}+\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial r_{D'}} \left(r_{D'} \frac{\partial \bar{G}_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right) - r_{D'} \eta_R^2 u \bar{G}_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, u, t_{0D}) \right] dr_{D'} \\ &= -\frac{M_R}{2\pi} \int_{r_{0D}-\varepsilon}^{r_{0D}+\varepsilon} \delta(r_{D'} - r_{0D}) \exp(-ut_{0D}) dr_{D'} \end{aligned} \quad (\text{C-20})$$

onde $\varepsilon > 0$.

Aplicando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ após utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo, a continuidade espacial da Função de Green e a propriedade da amostragem da função delta de Dirac tem-se:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[r_{D'} \frac{\partial \bar{G}_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right]_{r_{D'}=r_{0D}+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[r_{D'} \frac{\partial \bar{G}_{1D}^1(r_{D'}, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_{D'}} \right]_{r_{D'}=r_{0D}-\varepsilon} \\ &= -\frac{M_R \exp(-ut_{0D})}{2\pi} \end{aligned} \quad (\text{C-21})$$

Os limites podem ser simplificados utilizando a derivada da solução com respeito às funções de Bessel (Equação (C-16)), ou seja:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{G}_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \\ &= \begin{cases} \eta_R \sqrt{u} [A_1 I_1(\eta_R r_D \sqrt{u}) - A_2 K_1(\eta_R r_D \sqrt{u})], & r_D \leq r_{0D} \leq r_{1D} \\ \eta_R \sqrt{u} [A_3 I_1(\eta_R r_D \sqrt{u}) - A_4 K_1(\eta_R r_D \sqrt{u})], & r_{0D} \leq r_D \leq r_{1D} \end{cases} \end{aligned} \quad (C-22)$$

Substituindo as derivadas parciais da Equação (C-22) na Equação (C-21) e rearranjando os termos é possível escrever:

$$\begin{aligned} & -A_1 I_1(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) + A_2 K_1(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) + A_3 I_1(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) - A_4 K_1(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) \\ &= -\frac{M_R \exp(-ut_{0D})}{2\pi r_{0D} \eta_R \sqrt{u}} \end{aligned} \quad (C-23)$$

A transformação do sistema de equações formado pelas Equações (C-17), (C-18), (C-19) e (C-23) para uma forma matricial proporciona simplicidade, eficiência computacional e clareza na análise e solução do sistema. Para determinar o valor dos coeficientes A_i , $i = 1, \dots, 5$ o seguinte sistema pode ser resolvido:

$$M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{M_R \exp(-ut_{0D})}{2\pi r_{0D} \eta_R \sqrt{u}} \end{pmatrix} \quad (C-24)$$

onde a matriz M é dada por:

$$\begin{aligned} & M \\ &= \begin{pmatrix} I_1(\eta_R \sqrt{u}) & -K_1(\eta_R \sqrt{u}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) & K_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) & -K_0(r_{1D} \sqrt{u}) \\ 0 & 0 & I_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) & -K_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) & \frac{M_R}{\eta_R} K_1(r_{1D} \sqrt{u}) \\ I_0(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) & K_0(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) & -I_0(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) & -K_0(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) & 0 \\ -I_1(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) & K_1(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) & I_1(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) & -K_1(\eta_R r_{0D} \sqrt{u}) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (C-25)$$

C.2

Função de Green para Fonte na Região Externa ($r_{1D} \leq r_{0D}$)

A função de Green para um reservatório composto, com a fonte localizada na região externa, é determinada pela solução do problema associado, respeitando o princípio da causalidade e impondo condições de contorno homogêneas. O modelo que representa o reservatório composto por duas regiões e a fonte é ilustrado pela Figura (C.3).

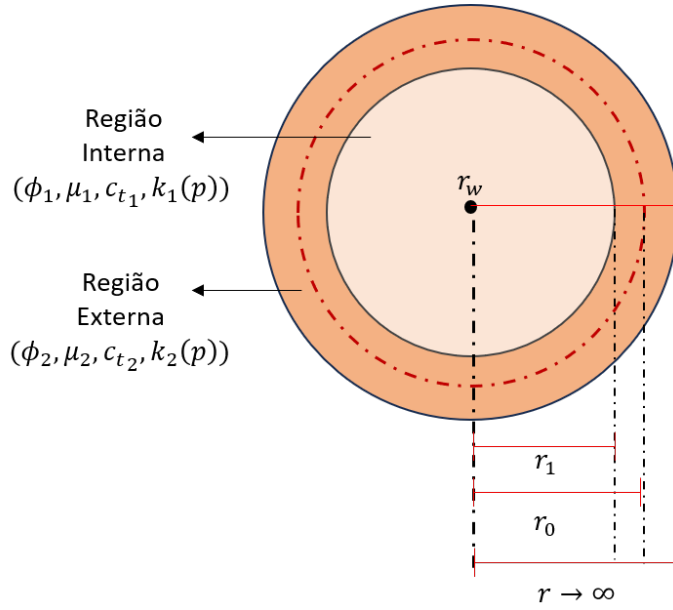


Figura C.3: Modelo de reservatório com duas regiões de permeabilidade e fonte na região externa

Analogamente ao apresentado anteriormente, o problema de Green associado é definido pelas seguintes equações em cada região:

Região Interna

EDP:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \eta_R^2 \frac{\partial G_{1D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} = 0 \quad (C-26)$$

para $1 < r_D, r_{0D} < r_{1D}$ e $t_D, t_{0D} > 0$

CI:

$$G_{1D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (C-27)$$

para $t_D < t_{0D}$.

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial G_{1D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (C-28)$$

Região Externa

EDP:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \frac{\partial G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \\ = - \frac{M_R \delta(r_D - r_{0D}) \delta(t_D - t_{0D})}{2\pi r_D} \end{aligned} \quad (C-29)$$

CI:

$$G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \quad (C-30)$$

para $t_D < t_{0D}$.

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \quad (\text{C-31})$$

Condições de Acoplamento entre Regiões

$$\begin{cases} G_{1D}^2(r_{1D}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) - G_{2D}^2(r_{1D}, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = 0 \\ \left(r_D \frac{\partial G_{1D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \end{cases} \quad (\text{C-32})$$

Levando as equações do problema para o Campo de Laplace:

Região Interna

EDO:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{1D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - \eta_R^2 u G_{1D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \quad (\text{C-33})$$

Princípio da Causalidade (PC):

$$\bar{G}_{1D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \quad (\text{C-34})$$

para $t_D < t_{0D}$.

CCI:

$$\left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{1D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=1} = 0 \quad (\text{C-35})$$

Região Externa

EDO:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{2D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) - u G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) \\ = - \frac{\delta(r_D - r_{0D}) \exp(-ut_{0D})}{2\pi r_D} \end{aligned} \quad (\text{C-36})$$

Princípio da Causalidade (PC):

$$\bar{G}_{2D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \quad (\text{C-37})$$

para $t_D < t_{0D}$.

CCE:

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{G}_{2D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) \quad (\text{C-38})$$

Condições de Acoplamento entre Regiões:

$$\begin{cases} \bar{G}_{1D}^2(r_{1D}, r_{0D}, u, t_{0D}) - \bar{G}_{2D}^2(r_{1D}, r_{0D}, u, t_{0D}) = 0 \\ \left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{1D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} - M_R \left(r_D \frac{\partial \bar{G}_{2D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D})}{\partial r_D} \right) \Big|_{r_D=r_{1D}} = 0 \end{cases} \quad (C-39)$$

A estrutura das EDO's (C-33) e (C-36) é conhecida como uma Equação de Bessel Modificada de ordem zero. A solução dessa equação pode ser expressa como uma combinação das funções de Bessel modificadas de ordem zero, $K_0(x)$ e $I_0(x)$, que são soluções fundamentais dessa equação. Portanto, é possível escrever:

$$\begin{aligned} & \bar{G}_D^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) \\ &= \begin{cases} \bar{G}_{1D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = B_1 I_0(\eta_R r_D \sqrt{u}) + B_2 K_0(\eta_R r_D \sqrt{u}), & r_D \leq r_{1D} \leq r_{0D} \\ \bar{G}_{2D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = B_3 I_0(r_D \sqrt{u}) + B_4 K_0(r_D \sqrt{u}), & r_{1D} \leq r_D \leq r_{0D} \\ \bar{G}_{2D}^2(r_D, r_{0D}, u, t_{0D}) = B_5 K_0(r_D \sqrt{u}), & r_{0D} < r_D < \infty \end{cases} \end{aligned} \quad (C-40)$$

onde B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5 são constantes a serem determinadas. Para determinar os coeficientes B_i , e consequentemente a solução do Problema de Green associado, será necessário resolver o sistema de equações considerando o domínio espacial de acordo com a posição de resposta, ou seja, $r_D \leq r_{1D} \leq r_{0D}$, $r_{1D} \leq r_D \leq r_{0D}$ e $r_{1D} \leq r_{0D} \leq r_D$.

Seguindo a mesma lógica do que foi previamente abordado, as soluções de G_D^2 apresentadas na Equação (C-40) podem ser substituídas na CCI e Condições de Acoplamento obtendo, respectivamente, as seguintes equações:

$$B_1 I_1(\eta_R \sqrt{u}) - B_2 K_1(\eta_R \sqrt{u}) = 0 \quad (C-41)$$

e

$$\begin{cases} B_1 I_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) + B_2 K_0(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) - B_3 I_0(r_{1D} \sqrt{u}) - B_4 K_0(r_{1D} \sqrt{u}) = 0, \\ B_1 I_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) - B_2 K_1(\eta_R r_{1D} \sqrt{u}) - B_3 \frac{M_R}{\eta_R} I_1(r_{1D} \sqrt{u}) + B_4 \frac{M_R}{\eta_R} K_1(r_{1D} \sqrt{u}) = 0. \end{cases} \quad (C-42)$$

Considerando a continuidade da Função de Green e a descontinuidade da derivada espacial mais duas equações serão adicionadas ao problema. Para a continuidade da função de Green, tem-se que:

$$B_3 I_0(r_{0D} \sqrt{u}) + B_4 K_0(r_{0D} \sqrt{u}) - B_5 K_0(r_{0D} \sqrt{u}) = 0 \quad (C-43)$$

Para a descontinuidade da derivada da função de Green, após realizar a integração em torno de r_{0D} da EDO dada pela Equação (C-36) multiplicada por r_D obtém-se:

$$-B_3 I_1(r_{0D} \sqrt{u}) + B_4 K_1(r_{0D} \sqrt{u}) - B_5 K_1(r_{0D} \sqrt{u}) = -\frac{\exp(-ut_{0D})}{2\pi r_{0D} \sqrt{u}} \quad (C-44)$$

Logo, reescrevendo as Equações (C-41), (C-42), (C-19) e (C-44) na forma matricial para determinar o valor dos coeficientes B_i , $i = 1, \dots, 5$ o seguinte sistema pode ser resolvido:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\exp(-ut_{0D})}{2\pi r_{0D}\sqrt{u}} \end{pmatrix} \quad (\text{C-45})$$

onde a matriz M é dada por:

$$M = \begin{pmatrix} I_1(\eta_R\sqrt{u}) & -K_1(\eta_R\sqrt{u}) & 0 & 0 & 0 \\ I_0(\eta_R r_{1D}\sqrt{u}) & K_0(\eta_R r_{1D}\sqrt{u}) & -I_0(r_{1D}\sqrt{u}) & -K_0(r_{1D}\sqrt{u}) & 0 \\ I_1(\eta_R r_{1D}\sqrt{u}) & -K_1(\eta_R r_{1D}\sqrt{u}) & -\frac{M_R}{\eta_R} I_1(r_{1D}\sqrt{u}) & \frac{M_R}{\eta_R} K_1(r_{1D}\sqrt{u}) & 0 \\ 0 & 0 & I_0(r_{0D}\sqrt{u}) & K_0(r_{0D}\sqrt{u}) & -K_0(r_{0D}\sqrt{u}) \\ 0 & 0 & -I_1(r_{0D}\sqrt{u}) & K_1(r_{0D}\sqrt{u}) & -K_1(r_{0D}\sqrt{u}) \end{pmatrix} \quad (\text{C-46})$$

Do ponto de vista computacional, o uso de matrizes para resolver sistemas de equações lineares permite processar grandes quantidades de dados de forma rápida e eficiente. Além disso, algoritmos numéricos garantem precisão e estabilidade nas soluções, mesmo para sistemas complexos.

Após determinar os coeficientes A_i e B_i é possível obter as soluções para o problema de Green associado no campo de Laplace. Para a inversão da Transformada de Laplace o algoritmo de Stehfest foi utilizado para determinar numericamente as soluções:

$$G_D^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \quad (\text{C-47})$$

$$= \begin{cases} G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \mathcal{L}^{-1}\{A_1 I_0(\eta_R r_D \sqrt{u}) + A_2 K_0(\eta_R r_D \sqrt{u})\}, & r_D \leq r_{0D} \leq r_{1D} \\ G_{1D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \mathcal{L}^{-1}\{A_3 I_0(\eta_R r_D \sqrt{u}) + A_4 K_0(\eta_R r_D \sqrt{u})\}, & r_{0D} \leq r_D \leq r_{1D} \\ G_{2D}^1(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \mathcal{L}^{-1}\{A_5 K_0(r_D \sqrt{u})\}, & r_{1D} < r_D < \infty \end{cases}$$

e

$$G_D^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) \quad (\text{C-48})$$

$$= \begin{cases} G_{1D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \mathcal{L}^{-1}\{B_1 I_0(\eta_R r_D \sqrt{u}) + B_2 K_0(\eta_R r_D \sqrt{u})\}, & r_D \leq r_{1D} \leq r_{0D} \\ G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \mathcal{L}^{-1}\{B_3 I_0(r_D \sqrt{u}) + B_4 K_0(r_D \sqrt{u})\}, & r_{1D} \leq r_D \leq r_{0D} \\ G_{2D}^2(r_D, r_{0D}, t_D, t_{0D}) = \mathcal{L}^{-1}\{B_5 K_0(r_D \sqrt{u})\}, & r_{0D} < r_D < \infty \end{cases}$$

Esse método é amplamente utilizado em engenharia e ciências aplicadas. Sua principal vantagem é a precisão para funções suaves, mas pode ser sensível a erros numéricos em certos casos.

Referências bibliográficas

BARRETO, A. B. Nonlinear gas well test problems: A generalized perturbative solution applied to a vertical well near a sealing fault. **Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition**, 2011.

BARRETO, A. B.; PERES, A. M. M.; PIRES, A. P. A variable-rate solution to the nonlinear diffusivity gas equation by use of green's-function method. **SPE J**, n. 18, p. 57–68, 2013.

BARRETO, A. B.; PIRES, A. P.; PERES, A. M. A new rigorous analytical solution for a vertical fractured well in gas reservoirs. **Paper presented at the SPE Latin America and Caribbean Petroleum Engineering Conference**, 2012.

BITTENCOURT NETO, J. L. F. et al. Laplace domain pressure behavior solution for multilayered composite reservoirs. **Paper presented at the SPE Latin America and Caribbean Petroleum Engineering Conference**, 2020.

BOURDET, D. Pressure behavior of layered reservoirs with crossflow. SPE California Regional Meeting, p. SPE–13628–MS, 03 1985.

BOURDET, D.; AYOUB, J. A.; PLARARD, Y. M. Use of pressure derivative in well test interpretation. **SPE Form Eval**, v. 4, p. 293–302, 1989.

CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. **Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2006. ISBN 978-0-89871-613-3.

CIVAN, F. **Reservoir Formation Damage: Fundamentals, Modeling, Assessment, and Mitigation**. 3rd. ed. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 2016. ISBN 978-0-12-801898-9.

DUFF, D. G. Green's functions with applications. **Chapman and Hall/CRC 1st edition**, 2001.

DUONG, A. N. A new set of type curves for well-test interpretation with the pressure/pressure-derivative ratio. **SPE Formation Evaluation**, v. 4, n. 02, p. 264–272, 06 1989. ISSN 0885-923X.

FERNANDES, F. B. Perturbative-integro-differential solution for the nonlinear hydraulic diffusivity equation for infinite-acting-oil flow in a permeability-pressure-sensitive reservoir. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering**, n. 25, p. 530–567, 2022.

FERNANDES, F. B. et al. Perturbative-integro-differential solution for the nonlinear hydraulic diffusivity equation for compaction damage management in poroelastic stress-sensitive oil reservoirs. Day 2 Wed, October 25, 2023, p. D021S027R001, 10 2023.

FERNANDES, F. B. et al. Analytical solution of the nonlinear hydraulic diffusivity equation with depletion-dependent permeability in oil wells near sealing faults. **Transport in Porous Media**, v. 148, p. 215–244, 06 2023. ISSN 0197-7520.

GRINGARTEN, A. C.; RAMEY, H. J. J. The use of source and green's functions in solving unsteady-flow problems in reservoirs. **Society of Petroleum Engineers Journal**, v. 13, n. 05, p. 285–296, 10 1973. ISSN 0197-7520.

NETO, A. C. L. **Modelagem Matemática de Teste de Pressão em Reservatórios de Gás com Região de Permeabilidade Reduzida em Torno dos Poços**. Dissertação (Mestrado) — Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Brasil, 2019.

RAGHAVAN, R. **Well Test Analysis**. [S.l.]: Prentice Hall, 1993. ISBN 978-0132830365.

RAMEY, H. J. J. Application of the line source solution to flow in porous media—a review. SPE-AIChE Joint Symposium, p. SPE-1361-MS, 02 1966.

SOUSA, E. P.; BARRETO, A. B.; PERES, A. Finite-wellbore-radius solution for gas wells by green's functions. **SPE J.**, n. 20, p. 842–855, 2015.

SOUSA, E. P.; BARRETO, A. B.; PERES, A. M. Analytical treatment of pressure-transient solutions for gas wells with wellbore storage and skin effects by the green's functions method. **SPE J.**, n. 21, p. 1858–1869, 2016.

SOUSA, E. P. d. S. Gas well testing with wellbore storage and skin: a line source solution using the green's functions approach. In: **SPE Annual Technical Conference and Exhibition**. Amsterdam, The Netherlands: [s.n.], 2014.

STEHFEST, H. Numerical inversion of laplace transform. **Communications of the ACM**, v. 13, n. 10, p. 47–49, January 1970.