

Esta lista de exercícios deve ser entregue, **impreterivelmente**, na sexta-feira, dia 9 de setembro, no **começo** da monitoria.

1 Utilidade von-Neumann Morgenstern

Suponha que há dois estados da natureza, $s = 1, 2$.

Há um único bem de consumo nos dois estados, e os agentes têm preferências sobre os dois bens (consumo em cada estado da natureza) representadas por $u(c_1, c_2)$. Quais das seguintes funções utilidade representam preferências de von-Neumann-Morgenstern? Quais estão na forma de utilidade esperada? Explique seu resposta em cada caso.

Para aquelas que representam preferências vNM, em quais o indivíduo é avesso ao risco? Explique seu resposta em cada caso.

i) $u(c_1, c_2) = (c_1 - \frac{1}{300}(c_1)^2) + (c_2 - \frac{1}{300}(c_2)^2)$

ii) $u(c_1, c_2) = c_1^7 \cdot c_2^2$

v) $u(c_1, c_2) = c_1^2 + c_2^2$

vi) $u(c_1, c_2) = c_1 + \log(c_2)$

iii) $u(c_1, c_2) = \sqrt{c_1} \cdot c_2$

iv) $u(c_1, c_2) = e^{(c_1 \cdot \sqrt{c_2})}$

2 O Prêmio de Risco

Suponha que um indivíduo tenha uma renda **garantida** de I . Ele enfrenta uma loteria no qual ele ganha α com probabilidade $\frac{1}{2}$ e perde α com probabilidade $\frac{1}{2}$. Suponha que sua função utilidade von-Neumann/Morgenstern seja dada por:

$$v(x) = -\exp(-Ax)$$

1. Derive a solução analítica para o **prêmio de risco**, isto é, a quantia máxima que o indivíduo está disposto a pagar para evitar a loteria, como uma função de A , I e α .
2. Como que o prêmio de risco muda com mudanças em A ? Em α ? Em I ?
3. Repita o exercício 2, para os parâmetros α e I supondo que a função utilidade é agora

$$v(x) = \log(x)$$

Baseado nos resultados, que representação de preferências (função utilidade) parece mais "razoável"?

3 Seguro

Suponha que um indivíduo com riqueza total w possua uma casa que vale D no mercado. Suponha que há três possíveis estados da natureza amanhã:

- $s = 1$: O indivíduo morre (neste caso é irrelevante o que ocorre com a casa)
- $s = 2$: A casa pega fogo, e a perda é total
- $s = 3$: A casa não pega fogo

Suponha que o indivíduo pensa que as probabilidades dos estados da natureza sejam $\pi_1 = 0.1$, $\pi_2 = 0.1$, and $\pi_3 = 0.8$. Suponha que há um seguro contra incêndio que seja justo atuarialmente, isto é, o preço de uma unidade de seguro (q) é igual à probabilidade de incêndio ($q = 0.1$). O indivíduo tem utilidade von-Neumann/Morgensten sobre consumo futuro:

$$u(c_1, c_2, c_3) = \pi_1 \sqrt{c_1} + \pi_2 \sqrt{c_2} + \pi_3 \sqrt{c_3}$$

- Verifique que o indivíduo não gosta de risco
- Se o indivíduo comprar hoje C unidades de seguro, ele pagará qC . Sua riqueza é w em cada um dos estados $s = 2, 3$. Deste modo, seu consumo, se comprar C unidade de seguro, seu consumo, se ele estiver vivo amanhã, é:

$$\begin{aligned} c_2 &= w - qC - D + C \\ c_3 &= w - qC \end{aligned}$$

Se ele morre, no entanto, seu consumo é $c_1 = 0$.

- Quais são as condições de primeira ordem para a escolha ótima de seguro?
- O agente comprará seguro total? Isto é, o que você pode dizer sobre a escolha ótima de seguro C^* ? Será $C^* = D$?

4 Equilíbrio em Estratégias Puras

Suponha que Pedro e Maria jogam um jogo no qual cada um tem 3 estratégias puras. Pedro pode jogar *Up*, *Middle* e *Down* (U , M , ou D), e Maria pode jogar *left*, *middle* e *right* (l , m , ou r). Os *payoffs* deste jogo podem ser representados pela seguinte matriz:

	l	m	r
U	8,2	0,4	2,8
M	1,0	5,5	1,0
D	2,8	0,4	8,2

- Há um equilíbrio em estratégias dominantes para este jogo?
- Encontre um equilíbrio de Nash em estratégias puras?
- Mostre que este equilíbrio é o único equilíbrio em estratégias puras.

5 Equilíbrio em Estratégias Mistas

Considere o seguinte jogo. O jogador 1 pode tomar as ações H , M , ou T . O jogador 2 pode tomar ações h ou t . A matriz de *payoffs* é:

	h	t
H	2,-2	0,0
M	0,5	0,1
T	0,0	2,-3

Ache todos os equilíbrios de Nash deste jogo, tanto em estratégias puras como mistas. Note que, para o jogador 1, uma estratégia agora é uma trinca de probabilidades π_H , π_M e π_T . Para o jogador 2, é um par π_h e π_t .

DICA: Antes de começar, verifique se há estratégias dominadas. Qual a probabilidade de jogar tal estratégia?

6 Jogos na forma extensiva

Considere a seguinte história. Há uma firma (A) que tem que decidir se introduz ou não um novo produto. Introduzi-lo custará 8 milhões de reais. Se A introduzir o produto, o concorrente (B) tem a opção de sair do mercado, ou de adotar o novo produto. À firma B custa 10 milhões de reais adotar o produto. Se a firma B adotar o produto, a firma A tem que decidir se processa ou não a firma B. O processo não tem nenhum efeito sobre o mercado, mas custa 6 milhões de reais para cada firma em honorários de advogados.

A receita total de mercado, se o produto for introduzido, é de R\$ 30 milhões. Caso ambas as firmas introduzam o produto, elas dividem o mercado (cada uma fica com R\$ 15 milhões). Os lucros são receitas menos custos (com a introdução e honorários). Se a firma A não introduz o produto as firmas têm lucro 0.

1. Formule esta história na forma de um jogo extensivo e desenha a árvore do jogo
2. Encontre o equilíbrio perfeito em sub-jogos, usando indução retroativa: quais são os *payoffs* e as estratégias de equilíbrio?
3. Há algum equilíbrio de Nash (que não precisa ser perfeito em sub-jogos) no qual a firma A processa a firma B? Se sim, descreva as estratégias e os *payoffs* deste equilíbrio. Por que este equilíbrio não é perfeito em sub-jogos? Explique intuitivamente.

7 Jogos repetidos

Dois jogadores, 1 e 2, jogam dois jogos. Os *payoffs* dos dois jogos estão resumidos nas seguintes matrizes (do jogador 1, nas linhas, é o primeiro número, e o 2, nas colunas, é o segundo número)

A.

	l	r
U	(1,1)	(6,0)
D	(0,0)	(5,5)

B.

	l	m	r
U	(-1,1)	(0,1)	(0,0)
M	(-1,0)	(1,1)	(4,0)
D	(-1,1)	(0,1)	(5,1)

- a) Encontre todos os equilíbrios de Nash em estratégias puras dos dois jogos.
 b) Agora suponha que um jogo (A) é jogado antes do outro (B). Os *payoffs* são a soma de cada jogo. Ache um equilíbrio de Nash neste "super-jogo", no qual (D, r) é jogado no jogo A (o primeiro jogo).

8 Jogos repetidos e dinâmicos

Considere o dilema dos prisioneiros. Há dois jogadores, (Pedro e José), e cada um pode cooperar (c) ou não cooperar (n). A matriz de *payoffs* é

	c	n	
c	(5,5)	(-5,10)	
n	(10,-5)	(-1,-1)	

Suponha que este jogo é jogado duas vezes. O estágio-*payoff* primeiro jogo no primeiro estágio é v_1 , e no segundo é v_2 . O *payoff* total de cada jogador é

$$U = v_1 + \beta v_2$$

onde $0 \leq \beta \leq 1$ mede o grau de impaciência dos jogadores (que é o mesmo)

a) Há algum equilíbrio perfeito em sub-jogos no qual algum jogador tem *payoff* positivo? Explique.

Suponha agora que, depois de jogados que o dilema dos prisioneiros ser jogado duas vezes, Pedro e José jogam o seguinte jogo:

	c	n	
c	(10,10)	(0,0)	
n	(0,0)	(1,1)	

Os *payoffs* para este terceiro jogo são v_3 e os *payoffs* totais são

$$U = v_1 + \beta v_2 + \beta^2 v_3$$

b) Ache um β tal que existe em equilíbrio perfeito em sub-jogos no qual ambos os jogadores recebem *payoffs* maiores que 15. Justifique sua resposta. Encontre também um β tal que em nenhum equilíbrio perfeito em sub-jogos nenhum dos jogadores recebe *payoff* positivo.

Agora suponha que $\beta = 0.99$ e que o jogo-estágio da parte (a) é repetido infinitamente. Os *payoffs* totais são:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v_{t+1}$$

c) Há um equilíbrio de Nash no qual os jogadores recebem *payoff* positivo? Se sim, quais são as estratégias?