



Lhaylla dos Santos Crissaff

**Uma construção algébrica de códigos
geométricos**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador : Prof. Nicolau Corção Saldanha
Co-Orientador: Prof. Miriam Del Milagro Abdón

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2005



Lhaylla dos Santos Crissaff

**Uma construção algébrica de códigos
geométricos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Miriam Del Milagro Abdón

Co-Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 23 de Fevereiro de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Lhaylla dos Santos Crissaff

Graduou-se em Matemática na Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro, Brasil).

Ficha Catalográfica

Crissaff, Lhaylla

Uma construção algébrica de códigos geométricos / Lhaylla dos Santos Crissaff; orientador: Nicolau Corção Saldanha; co-orientador: Miriam Del Milagro Abdón. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2005.

v., 75 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Álgebra. 3. Códigos Lineares. 4. Códigos de Goppa.
I. Saldanha, Nicolau. II. Abdón, Miriam. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

À minha mãe Leticia, à minha irmã Lhayzza,
à minha madrinha Solange e ao meu namorado Fabio.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por todas as bênçãos que me concedeu, que muitas pessoas chamam de sorte ou coincidência.

À professora Miriam Abdón pela orientação, paciência, por responder as perguntas mais simples como se fossem as mais complicadas e por ter sempre um sorriso carinhoso.

À minha mãe Leticia, cujo ensinamento de disciplina e persistência, tornou possível a realização deste Curso, e por ter vivido cada dia do meu Curso como se fosse o dela.

À minha irmã Lhayzza, a quem não podia decepcionar.

À minha madrinha Solange, que mesmo tão longe se fez tão presente.

Ao meu namorado Fabio, pelas palavras de incentivo e de confiança, e por seu companheirismo durante todo o Curso.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio) e a Capes pelas bolsas concedidas.

Aos professores do Departamento de Matemática da PUC-Rio pelo valioso apoio, em especial ao professor Nicolau Corção Saldanha.

Ao professor Dinamérico Pombo (UFF) que me mostrou o que é ser um matemático e por me indicar o "caminho" a seguir.

Ao meu amigo Romulo Rios Rosa, por nunca ter acreditado na minha desistência.

Às minhas amigas Danielle, Jéssica, Juliana, Luzia e Paula pela ajuda, incentivo e companheirismo nesta jornada, e também por ter atendido tantas vezes aos telefonemas do Fabio em nossa sala.

Às Secretárias, em especial à Creuza, e aos Auxiliares Administrativos do Departamento de Matemática da PUC-Rio pela prestatividade de sempre.

Resumo

Crissaff, Lhaylla; Saldanha, Nicolau; Abdón, Miriam. **Uma construção algébrica de códigos geométricos**. Rio de Janeiro, 2005. 75p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Começamos estudando uma classe particular de códigos lineares, os chamados códigos de Goppa que são obtidos calculando o valor de certas funções em pontos de K^n , onde K é um corpo finito. Apresentamos uma generalização desta construção e definimos códigos de avaliação sobre K -álgebras satisfazendo certas propriedades. Para estes códigos, descrevemos um algoritmo de decodificação e mostramos que se considerarmos os códigos de Goppa em um ponto como exemplo desta nova construção, o algoritmo corrige mais erros do que o algoritmo clássico para os códigos de Goppa.

Palavras-chave

Álgebra. Códigos Lineares. Códigos de Goppa.

Abstract

Crissaff, Lhaylla; Saldanha, Nicolau; Abdón, Miriam. **An algebraic construction of geometric codes**. Rio de Janeiro, 2005. 75p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We begin studying a certain type of linear code the so-called Goppa codes. These codes are constructed by taking the evaluation of certain functions at points in K^n , where K is a finite field. As a generalization of this construction, we introduce the so-called evaluation codes defined over K -algebras satisfying some properties. For these codes, we describe a decoding algorithm and we show that if we consider classical one-point Goppa codes as an example of the new construction, this algorithm correct more errors than the classical algorithm for Goppa codes.

Keywords

Algebra. Linear Codes. Goppa's Codes.

Sumário

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Introdução | 10 |
| 2 | Códigos Lineares | 12 |
| 2.1 | Códigos | 12 |
| 2.2 | Exemplos de Códigos | 15 |
| 3 | Corpos de Funções Algébricas e Códigos de Goppa | 17 |
| 3.1 | Corpos de Funções Algébricas | 17 |
| 3.2 | Curvas Algébricas versus Corpos de Funções | 29 |
| 3.3 | Códigos Geométricos de Goppa | 29 |
| 4 | Códigos de avaliação definidos sobre \mathbb{F}_q -álgebras | 43 |
| 4.1 | Funções Ordem, Grau e Peso | 44 |
| 4.2 | Existência de Funções Peso | 53 |
| 4.3 | Códigos de Avaliação e seu duais | 57 |
| 4.4 | Limitação da distância mínima de códigos duais | 59 |
| 4.5 | Funções peso e semigrupos | 63 |
| 5 | Conclusão | 68 |
| | Referências Bibliográficas | 75 |

*”With every mistake we must show we’ve been
learning”*

George Harison, *While my guitar gently weeps.*