Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Márcio dos Guimarães Peixoto

Transformações de Bäcklund entre superfícies hiperbólicas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Setembro de 2024

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Márcio dos Guimarães Peixoto

Transformações de Bäcklund entre superfícies hiperbólicas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Marcos Craizer
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Graham Andrew Craig Smith
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 de Setembro de 2024

Márcio dos Guimarães Peixoto

Graduou-se em Matemática (bacharelado) pela PUC-Rio.

Ficha Catalográfica

Peixoto, Márcio dos Guimarães

Transformações de Bäcklund entre superfícies hiperbólicas / Márcio dos Guimarães Peixoto; orientador: Marcos Craizer. – 2024.

66 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2024.

Inclui bibliografia

1. Matemática - Teses. 2. Superfícies pseudoesféricas. 3. Superfícies de Bianchi. 4. Equação de Moutard. 5. Permutabilidade de Bianchi. 6. Equação sine-Gordon. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Começo agradecendo às duas pessoas mais importantes para a conclusão deste trabalho: minha esposa Bianca, que pacientemente me apoiou sempre que precisei; e meu orientador Marcos Craizer, que guiou meus estudos com sabedoria e dedicação.

Agradeço à CAPES e à PUC-Rio, instituições que financiaram meus estudos durante este projeto. Esta última também me acolhendo através de seu ambiente e pessoas, com especial destaque ao professor Sinesio Pesco e à Creuza Nascimento.

Finalmente, agradeço a todos os professores e colegas que me ajudaram a evoluir na minha carreira; e também à minha família, que me deu suporte desde o princípio.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Peixoto, Márcio dos Guimarães; Craizer, Marcos. **Transformações de Bäcklund entre superfícies hiperbólicas**. Rio de Janeiro, 2024. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A partir de uma superfície pseudoesférica dada podemos obter outras, usando as transformações de Bäcklund. Para isto, é necessário identificar essa classe de superfícies ao conjunto solução da famosa equação sine-Gordon. Mostraremos uma generalização dessas transformações de Bäcklund para a classe mais abrangente das superfícies hiperbólicas, que são identificadas às soluções de uma outra EDP, a equação de Moutard. Finalmente, veremos como essa generalização se aplica à classe intermediária das superfícies de Bianchi.

Palavras-chave

Superfícies pseudoesféricas; Superfícies de Bianchi; Equação de Moutard; Permutabilidade de Bianchi; Equação sine-Gordon.

Abstract

Peixoto, Márcio dos Guimarães; Craizer, Marcos (Advisor). **Bäcklund transforms between hyperbolic surfaces**. Rio de Janeiro, 2024. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

From a given pseudospherical surface we can obtain others using the Bäcklund transforms. For this, it is necessary to identify this class of surfaces with the solution set of the sine-Gordon equation. We show a generalization of the Bäcklund transform to the more general class of hyperbolic surfaces, that are identified to the solutions of another PDE, the Moutard equation. Finally, we show how this generalization can be applied to the intermediary class of Bianchi surfaces.

Keywords

Pseudospherical surfaces; Bianchi surfaces; Moutard equation; Bianchi permutability; Sine-Gordon equation.

Sumário

Lista de figuras

1
Introdução

Este trabalho apresenta as transformações de Bäcklund, um assunto clássico que mora na interseção entre geometria diferencial e EDPs e possui aplicações já bastante exploradas na física, principalmente na teoria de sólitons. Seu conteúdo foi baseado nas referências [C R02], [C R82] e [Tod02], usando também os livros [Car05] e [Ten08], clássicos de geometria diferencial, como fundamentação teórica.

O estudo explícito das *superfícies pseudoesféricas*, isto é, das superfícies com curvatura gaussiana constante negativa, encontra seu início nos trabalhos de Minding, em 1838. No capítulo 2, apresentaremos alguns exemplos simples de tais superfícies: a *pseudoesfera de Beltrami* e as *superfícies de Dini*; e definiremos uma transformação entre superfícies, chamada *congruência pseudoesférica*. Finalmente, demonstraremos, usando o método do triedro móvel, o *teorema de Bäcklund*, segundo o qual tais transformações só podem existir entre superfícies pseudoesféricas.

Em 1862, Bour mostrou que numa superfície pseudoesférica, a equação de Gauss assume a forma de uma famosa EDP, chamada *equação sine-Gordon*. Na seção 3.1 mostraremos uma versão detalhada dessa dedução. Na verdade, esse resultado nos permite identificar as superfícies pseudoesféricas com as soluções dessa EDP.

As *transformações de Bäcklund* são sistemas de EDPs que nos fornecem, a partir de uma solução ω de uma EDP $\mathbb{E}_1$, soluções ω' de uma EDP $\mathbb{E}_2$. Na seção 3.2 mostraremos uma transformação de Bäcklund em que $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$ são ambas a equação sine-Gordon. Este exemplo, discutido inicialmente por Bianchi e Bäcklund no final do século XIX, foi o ponto de partida para o estudo das transformações de Bäcklund. Através da identificação comentada no parágrafo anterior, essa transformação nos permite obter novas superfícies pseudoesféricas a partir de outra dada.

Na seção 3.3, é enunciado o teorema da permutabilidade de Bianchi. Além de garantir uma espécie de "comutatividade"da transformação de Bäcklund da equação sine-Gordon, ele fornece um método algébrico para encontrar novas soluções a partir de uma dada. Finalmente, na seção 3.4, estabeleceremos de maneira mais explícita (isto é, dando uma parametrização) a transformação de Bäcklund entre superfícies pseudoesféricas, e exemplificaremos obtendo a *superfície de Kuen* a partir da pseudoesfera de Beltrami.

No capítulo 4, mostraremos uma generalização da transformação de Bäcklund entre superfícies pseudoesféricas, para a classe mais abrangente das superfícies hiperbólicas. A chave para tal extensão é identificar estas superfícies com seus *vetores co-normais*, e mostrar que esses vetores satisfazem uma importante EDP, chamada *equação de Moutard*. Em seguida, definimos uma transformação de Bäcklund entre tais EDPs, chamada *transformação de Moutard*. Por fim, na seção 4.4, veremos que ao particularizar essa transformação para a classe das *superfícies de Bianchi*, uma classe intermediária que contém as pseudoesféricas, o sistema de EDPs assume um formato mais simples que pode, inclusive, ser linearizado.

2
O teorema de Bäcklund

Neste capítulo apresentaremos as superfícies pseudoesféricas, uma classe de superfícies que possuem curvatura gaussiana constante negativa. Em seguida, definiremos uma transformação entre superfícies chamada congruência pseudoesférica. Por fim, mostraremos que tais transformações só podem ser construídas entre superfícies pseudoesféricas, o que justifica seu nome.

2.1
Triedros móveis

Começaremos estabelecendo o conceito de superfície que será usada durante todo o texto. Esta definição e todos os resultados advindos dela que usaremos ao longo deste trabalho estão alinhados com [Car05] e [Ten08].

Uma **superfície** é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ tal que, para todo ponto $p \in S$, existem:

1. uma vizinhança $V \subseteq \mathbb{R}^3$ de p;
2. um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$;
3. um homeomorfismo $X : U \longrightarrow V \cap S$ de classe C^∞.

Lembramos que um *homeomorfismo* é uma bijeão contínua com inversa contínua. A aplicação X é chamada *parametrização* de S (ou ainda, X é uma *superfície parametrizada*). Dizemos que $X(s,t)$ é regular quando suas derivadas parciais X_s e X_t são linearmente independentes, isto é, $X_s \times X_t$ nunca se anula. A superfície S é *regular* quando todas suas parametrizações são regulares. O vetor normal unitário (ou simplesmente *vetor normal*) a X em $q \in U$ (ou a S em $X(q)$) é

$$N(q) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{|X_u(q) \times X_v(q)|} \; .$$

Vamos agora recordar a noção de triedro móvel e alguns dos principais resultados relacionados. Para mais detalhes, veja [Ten08] (capítulo 4).

Seja $X : U \longrightarrow V \cap S$ superfície parametrizada regular. Um **triedro móvel** associado a X é uma tripla ordenada $\mathcal{T} = (e_1, e_2, e_3)$ de funções $e_1, e_2, e_3 : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, todas de classe C^∞, tais que, para todo $q \in U$,

1. $e_1(q), e_2(q)$ são vetores tangentes a X em q;

2. $e_3(q)$ é o vetor normal a X em q.

3. $(e_1(q), e_2(q), e_3(q))$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ com orientação positiva, isto é, com $e_3 = e_1 \times e_2$.

Escrevendo

$$dX = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \ , \tag{2-1}$$

as 1-formas ω_1, ω_2 são o **correferencial** de $\mathcal{T}$. Por outro lado, escrevendo

$$de_i = \omega_{i1} e_1 + \omega_{i2} e_2 + \omega_{i3} e_3 \ , \tag{2-2}$$

para $i = 1, 2, 3$, as 1-formas ω_{ij}, com $i, j = 1, 2, 3$, são as **formas de conexão** de $\mathcal{T}$. O correferencial e as formas de conexão satisfazem as equações abaixo, denominadas **equações de estrutura**:

$$\begin{aligned}
\omega_{ij} &= -\omega_{ji} \ , \text{ para } i, j = 1, 2, 3 \ ; \\
d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_{21} \ ; \\
d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12} \ ; \\
\omega_1 \wedge \omega_{13} &= -\omega_2 \wedge \omega_{23} \ ; \\
d\omega_{12} &= \omega_{23} \wedge \omega_{13} \ ; \\
d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23} \ ; \\
d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13} \ .
\end{aligned} \tag{2-3}$$

Da primeira equação,

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \ . \tag{2-4}$$

As duas últimas equações (2-3) são equivalentes às equações de Codazzi-Mainardi clássicas, da geometria diferencial. Além disso, se K é a curvatura gaussiana de X, isto é, K é o produto das curvaturas principais de X, então

$$d\omega_{12} = -K(\omega_1 \wedge \omega_2) \ . \tag{2-5}$$

Esta igualdade é equivalente à equação de Gauss clássica.

Exemplo. Considere uma superfície de revolução parametrizada por

$$X(s, t) = (f(s) \cos t, f(s) \operatorname{sen} t, g(s)) \ ,$$

com f, g de classe C^∞ e $f > 0$, e o triedro móvel associado

$$e_1 = \frac{X_s}{|X_s|} \ ; \ e_2 = \frac{X_t}{|X_t|} \ ; \ e_3 = e_1 \times e_2 \ . \tag{2-6}$$

O correferencial desse triedro é

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, ds \ ; \\
\omega_2 &= f dt \ .
\end{aligned}
\tag{2-7}
$$

As formas de conexão são

$$
\begin{aligned}
\omega_{12} &= \frac{f'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} dt \ ; \\
\omega_{13} &= \frac{g'' f' - g' f''}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} ds \ ; \\
\omega_{23} &= \frac{g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} dt \ .
\end{aligned}
\tag{2-8}
$$

2.2 Superfícies pseudoesféricas

Uma superfície (parametrizada) regular é dita **pseudoesférica** quando sua curvatura gaussiana é constante e negativa.

Exemplo. A superfície parametrizada regular

$$X(s,t) = (\operatorname{sech} s \cos t, \operatorname{sech} s \operatorname{sen} t, s - \tanh s) \ ,$$

conhecida como **pseudoesfera de Beltrami** (veja Figura (2.1)), é uma superfície de revolução obtida ao rotacionar uma tractriz contida no plano xz em torno do eixo z. Na figura, $s > 0$ e $0 < t < 2\pi$.
Considere o triedro móvel (2-6) associado a ela. Das fórmulas (2-7), obtemos

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \tanh s \ ds \ ; \\
\omega_2 &= \operatorname{sech} s \ dt \ .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \tanh s \operatorname{sech} s \ ds \wedge dt \ .$$

De (2-8), temos

$$\omega_{12} = -\operatorname{sech} s \ dt \ .$$

Derivando:

$$d\omega_{12} = \tanh s \operatorname{sech} s \ ds \wedge dt \ .$$

Da equação de Gauss (2-5), concluímos então que a pseudoesfera de Beltrami é uma superfície pseudoesférica com curvatura gaussiana constante igual a -1.

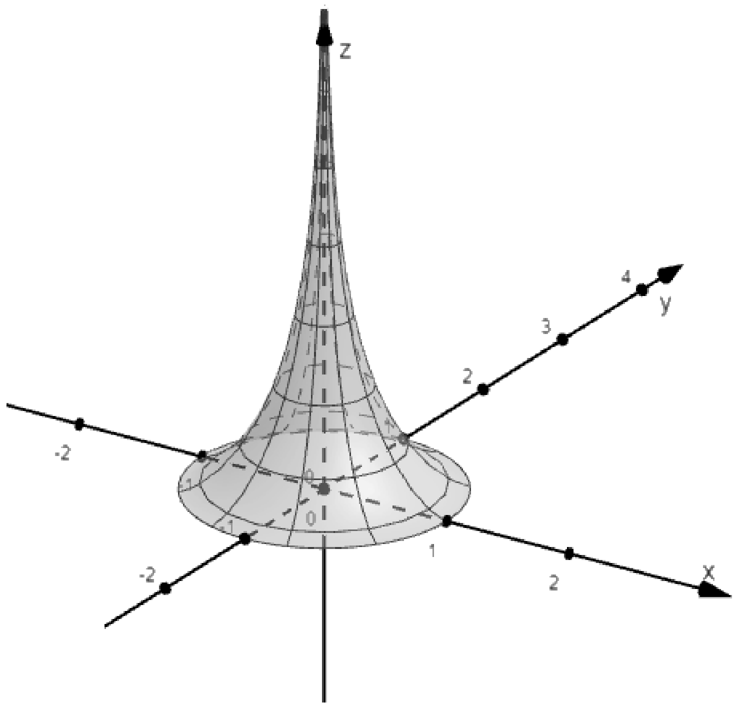


Figura 2.1: Pseudoesfera de Beltrami

Exemplo. As superfícies parametrizadas

$$X(s,t) = \begin{pmatrix} \rho \operatorname{sen}\zeta \operatorname{sech}\chi \cos\left(\frac{t}{\rho}\right) \\ \rho \operatorname{sen}\zeta \operatorname{sech}\chi \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\rho}\right) \\ s - \rho \operatorname{sen}\zeta \tanh\chi \end{pmatrix},$$

onde $\rho > 0$ e $\zeta \in (0, \pi)$ são constantes e

$$\chi = \frac{s - t\cos\zeta}{\rho \operatorname{sen}\zeta},$$

são conhecidas como **superfícies de Dini**, e formam uma família de superfícies pseudoesféricas com curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$. Elas são obtidas ao rotacionar a tractriz contida no eixo xz ao redor do eixo z e, simultaneamente, transladá-la na direção do eixo z, de maneira que a razão entre as velocidades da translação e da rotação seja constante. Por isso, essas superfícies também são conhecidas como helicoides pseudoesféricos. Particularmente, fazendo $\rho = 1$ e $\zeta = \frac{\pi}{2}$, obtemos a pseudoesfera de Beltrami, vista no exemplo anterior. Na figura (2.2), encontra-se uma superfície de Dini com $\rho = 2,4$ e $\zeta = \frac{15\pi}{32}$.

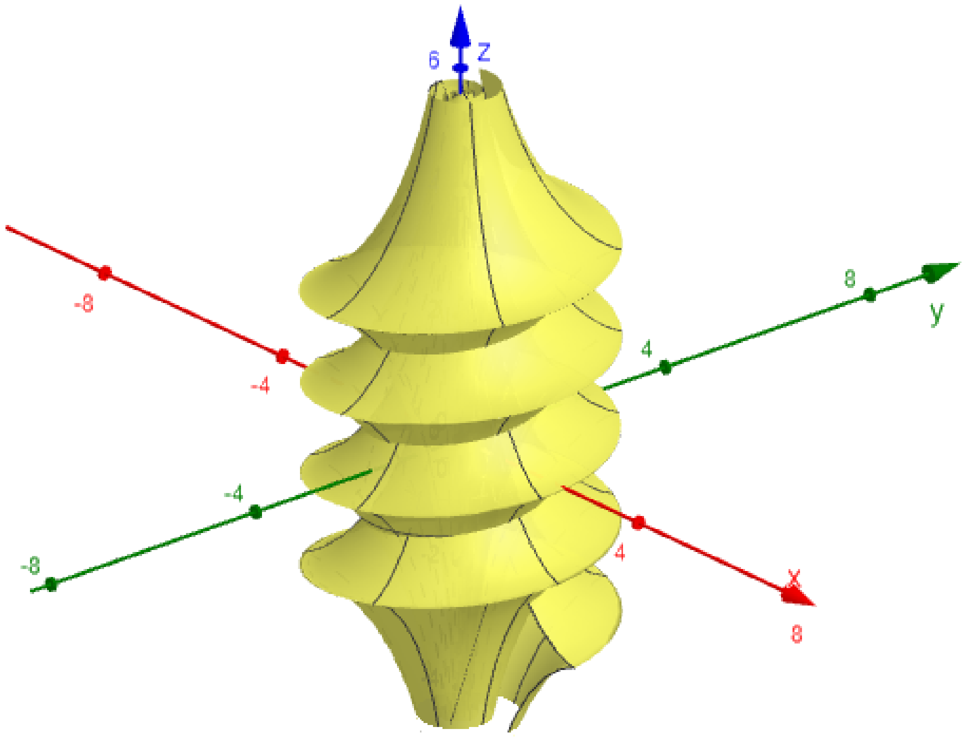


Figura 2.2: Exemplo de superfície de Dini

2.3 Congruências pseudoesféricas

A seguir, definiremos uma transformação entre superfícies, denominada *congruência pseudoesférica.*

Definição 2.1 *Sejam $S, \overline{S}$ superfícies regulares. Uma* ***congruência pseudoesférica*** *entre S e $\overline{S}$ é um difeomorfismo $\ell : S \longrightarrow \overline{S}$ de classe C^∞ tal que, para todo $p \in S$, com $\overline{p} = \ell(p)$,*

1. *a reta $p\overline{p}$ é tangente a S em p e a $\overline{S}$ em $\overline{p}$;*

2. *a distância entre p e $\overline{p}$ é uma constante $L > 0$ que independe da escolha de p; e*

3. *o ângulo entre os vetores normais a S em p e a $\overline{S}$ em $\overline{p}$ é uma constante $\zeta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ que independe da escolha de p.*

Observação. O termo "difeomorfismo"é usado no sentido de "ser diferenciável e possuir inversa diferenciável", como em [Car05]. A definição de diferenciabilidade de uma função entre superfícies também coincide com a desta referência.

Observação. Veja que se ℓ é uma congruência pseudoesférica, sua inversa ℓ^{-1} também é, e ambas compartilham as mesmas constantes L e ζ.

Vamos provar que congruências pseudoesféricas só podem existir entre superfícies pseudoesféricas com mesma curvatura gaussiana. Este fato, conhecido como *teorema de Bäcklund*, justifica o nome dado na definição acima.

Teorema 2.2 (Bäcklund) *Se ℓ é uma congruência pseudoesférica entre S e $\overline{S}$, então estas são superfícies pseudoesféricas com curvatura gaussiana*

$$K = -\frac{\operatorname{sen}^2 \zeta}{L^2} \ ,$$

onde ζ e L são as constantes da definição anterior.

Prova. Seja $X : U \longrightarrow V \cap S$ parametrização de S. Considere o triedro móvel (e_1, e_2, e_3) associado a X tal que e_1 é a direção da reta que liga cada ponto em $V \cap S$ à sua imagem por ℓ, isto é,

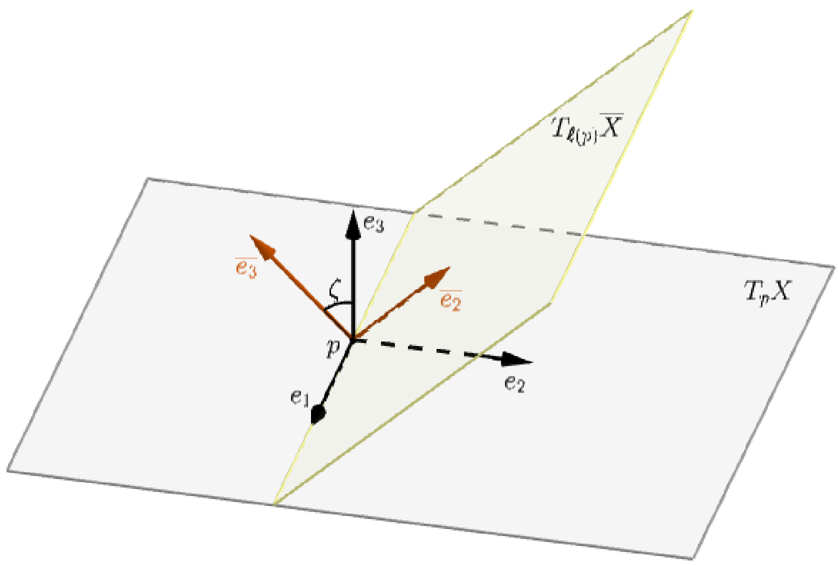
$$e_1 = \frac{\ell \circ X - X}{L} \ .$$

Observe que e_1 é C^∞, pois ℓ e X também são. Além disso,

$$\overline{X} = \ell \circ X = X + Le_1 \tag{2-9}$$

é uma parametrização de $\overline{S}$. Vamos definir o triedro móvel $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ associado a $\overline{X}$ por

$$\begin{aligned} \overline{e_1} &= e_1 \ ; \\ \overline{e_2} &= \cos\zeta \, e_2 + \operatorname{sen}\zeta \, e_3 \ ; \\ \overline{e_3} &= -\operatorname{sen}\zeta \, e_2 + \cos\zeta \, e_3 \ . \end{aligned} \tag{2-10}$$



Pela condição (1) na definição de congruência pseudoesférica, $\overline{e_1}$ é tangente a $\overline{X}$ em $\overline{p}$. Não é difícil ver que $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ são de classe C^∞ e formam, em cada ponto, uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ com orientação positiva. A figura acima nos ajuda a ver que $\overline{e_2}$ e $\overline{e_3}$ são, respectivamente, tangente e normal a $\overline{X}$. Observe que estamos assumindo, sem perda de generalidade, que $(e_1, e_3, \overline{N})$ tem orientação positiva, onde $\overline{N}$ é o vetor normal a $\overline{X}$ em q. Derivando a equação (2-9):

$$d\overline{X} = dX + L\, de_1 \ .$$

Pelas definições (2-1) e (2-2), junto com (2-4), a igualdade acima fica

$$d\overline{X} = \omega_1 e_1 + (\omega_2 + L\omega_{12})e_2 + L\omega_{13} e_3 \ . \tag{2-11}$$

Por outro lado,

$$d\overline{X} = \overline{\omega_1}\,\overline{e_1} + \overline{\omega_2}\,\overline{e_2} \ ,$$

onde $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}$ é o correferencial do triedro móvel (2-10). Substituindo (2-10) na equação acima:

$$\begin{aligned} d\overline{X} &= \overline{\omega_1} e_1 + \overline{\omega_2}(\cos\zeta\, e_2 + \operatorname{sen}\zeta\, e_3) \\ &= \overline{\omega_1} e_1 + \cos\zeta\, \overline{\omega_2} e_2 + \operatorname{sen}\zeta\, \overline{\omega_2} e_3 \ . \end{aligned}$$

Comparando a igualdade acima com (2-11), obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\omega_1} &= \omega_1 \ , \\ \cos\zeta\, \overline{\omega_2} &= \omega_2 + L\omega_{12} \ , \\ \operatorname{sen}\zeta\, \overline{\omega_2} &= L\omega_{13} \ . \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda igualdade acima por $\operatorname{sen}\zeta$ e a terceira por $\cos\zeta$ e, em seguida, as igualando, ficamos com

$$\operatorname{sen}\zeta\, \omega_2 + L \operatorname{sen}\zeta\, \omega_{12} = L\cos\zeta\, \omega_{13} \ .$$

Dividindo por $L\operatorname{sen}\zeta$, fica

$$\frac{1}{L}\omega_2 + \omega_{12} = \cot\zeta\, \omega_{13} \ ,$$

de onde

$$\omega_{12} = -\frac{1}{L}\omega_2 + \cot\zeta\, \omega_{13} \ . \tag{2-12}$$

Derivando e usando as equações de estrutura (2-3):

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= -\frac{1}{L} d\omega_2 + \cot\zeta \, d\omega_{13} \\ &= -\frac{1}{L}(\omega_1 \wedge \omega_{12}) + \cot\zeta \, (\omega_{12} \wedge \omega_{23}) \\ &= \frac{1}{L}(\omega_{12} \wedge \omega_1) + \cot\zeta \, (\omega_{12} \wedge \omega_{23}) \\ &= \omega_{12} \wedge \left(\frac{1}{L}\omega_1 + \cot\zeta \, \omega_{23}\right) \ . \end{aligned}$$

Substituindo (2-12) na igualdade acima e usando novamente as equações de estrutura:

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= \left(-\frac{1}{L}\omega_2 + \cot\zeta \, \omega_{13}\right) \wedge \left(\frac{1}{L}\omega_1 + \cot\zeta \, \omega_{23}\right) \\ &= -\frac{1}{L^2}(\omega_2 \wedge \omega_1) - \frac{\cot\zeta}{L}(\omega_2 \wedge \omega_{23}) + \frac{\cot\zeta}{L}(\omega_{13} \wedge \omega_1) + \cot^2\zeta \, (\omega_{13} \wedge \omega_{23}) \\ &= \frac{1}{L^2}(\omega_1 \wedge \omega_2) + \cot^2\zeta \, (\omega_{13} \wedge \omega_{23}) \\ &= \frac{1}{L^2}(\omega_1 \wedge \omega_2) - \cot^2\zeta \, d\omega_{12} \ . \end{aligned}$$

Daí,

$$d\omega_{12} = \frac{\operatorname{sen}^2\zeta}{L^2}(\omega_1 \wedge \omega_2) \ .$$

Comparando com a equação de Gauss (2-5), obtemos

$$K = -\frac{\operatorname{sen}^2\zeta}{L^2} \ ,$$

onde K é a curvatura gaussiana de X. Como o argumento mostrado não depende da parametrização X, concluímos que a curvatura gaussiana em todo ponto de S é dada pela expressão acima. Além disso, repetindo o argumento para a congruência pseudoesférica ℓ^{-1}, conclui-se que a curvatura gaussiana de $\overline{S}$ também é constante e igual a $-\frac{\operatorname{sen}^2\zeta}{L^2}$. ■

A transformação de Bäcklund entre superfícies pseudoesféricas, que será apresentada no próximo capítulo, nos permite obter, a partir de uma superfície pseudoesférica dada, uma família de superfícies pseudoesféricas relacionadas a ela por congruências pseudoesféricas.

3
Transformação de Bäcklund entre superfícies pseudoesféricas

3.1
A equação sine-Gordon

Começaremos definindo um tipo de parametrização especial que se mostrará conveniente neste capítulo.

Definição 3.1 *Uma **rede de Chebyshev** é uma superfície regular parametrizada cujas curvas coordenadas são linhas assintóticas parametrizadas pelo comprimento de arco.*

Numa superfície pseudoesférica, todos os pontos são hiperbólicos e, consequentemente, suas direções assintóticas são linearmente independentes. Assim, é possível parametrizá-la por linhas assintóticas numa vizinhança de cada ponto (veja corolário 3 da pág. 218 de [Car05]). Porém, não é imediato ver que é possível parametrizá-la como uma rede de Chebyshev. Provaremos este fato a seguir.

Proposição 3.2 *Toda superfície pseudoesférica pode ser reparametrizada como uma rede de Chebyshev.*

Prova. Seja $X(u,v)$ superfície pseudoesférica parametrizada por linhas assintóticas. As equações de Mainardi-Codazzi clássicas (veja [Car05], pág. 281) são:

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma^1_{12} + f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - g\Gamma^2_{11} \ ; \\ f_v - g_u &= e\Gamma^1_{22} + f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - g\Gamma^2_{12} \ ; \end{aligned} \tag{3-1}$$

onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental e Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel de X. A curvatura gaussiana K da superfície é:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \ . \tag{3-2}$$

Por ser uma parametrização por linhas assintóticas, temos $e = g = 0$. As equações acima se resumem então a:

$$\begin{aligned} f_u &= f(\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}) \ ; \\ f_v &= f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) \ ; \\ K(EG - F^2) &= -f^2 \ . \end{aligned} \tag{3-3}$$

Derivando a última com respeito a u e a v, e lembrando que K é constante, obtemos:

$$K(GE_u + EG_u - 2FF_u) = -2ff_u \ ;$$
$$K(GE_v + EG_v - 2FF_v) = -2ff_v \ .$$

Substituindo as expressões obtidas de f_u e f_v nas igualdades acima:

$$K(GE_u + EG_u - 2FF_u) = -2f^2(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)$$
$$K(GE_v + EG_v - 2FF_v) = -2f^2(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) \ .$$

Usando a terceira equação de (3-3):

$$GE_u + EG_u - 2FF_u = 2(EG - F^2)(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)$$
$$GE_v + EG_v - 2FF_v = 2(EG - F^2)(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) \ .$$

Porém, sabemos que

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \ ,$$
$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \ ,$$
$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \ ,$$
$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \ .$$

Substituindo estas fórmulas nas igualdades obtidas anteriormente, chegamos em:

$$FE_v = EG_u \ ,$$
$$GE_v = FG_u \ .$$

Multiplicando as equações acima, respectivamente, por F e E, e então as comparando, obtemos $F^2E_v = EGE_v$. Analogamente, multiplicando as equações acima, respectivamente, por G e F, obtemos $EGG_u = F^2G_u$. Daí,

$$(EG - F^2)E_v = (EG - F^2)G_u = 0 \ .$$

Como $EG - F^2 \neq 0$, concluímos que $E_v = G_u = 0$. Assim, $E = E(u)$ e $G = G(v)$ e a mudança de parâmetros

$$du' = \sqrt{E(u)}du \ ,$$
$$dv' = \sqrt{G(v)}dv \ ,$$

fornece uma rede de Chebyshev. ■

Seja $X(u, v)$ uma superfície pseudoesférica parametrizada como rede de Chebyshev. Como as curvas coordenadas são parametrizadas pelo comprimento de arco, sua primeira forma fundamental I se escreve como

$$I = du^2 + 2Fdudv + dv^2 \ .$$

Além disso, sendo ω o ângulo entre as direções assintóticas, temos

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = |X_u| \cdot |X_v| \cdot \cos\omega = \cos\omega \ .$$

Podemos assumir que $\omega \in (0, \pi)$, já que as direções assintóticas são linearmente independentes. A primeira forma fundamental fica então

$$I = du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2 \ . \tag{3-4}$$

Por outro lado, a segunda forma fundamental II de X é

$$II = 2fdudv \ .$$

Porém,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{1 - \cos^2\omega} = -\frac{f^2}{\operatorname{sen}^2\omega} \ .$$

Daí,

$$f = \pm\sqrt{-K}\operatorname{sen}\omega \ .$$

Podemos assumir que o sinal acima é positivo, isto é, que $f > 0$. Caso contrário, basta trocar os papeis das variáveis u e v. Denotando a curvatura gaussiana por $K = -\frac{1}{\rho^2}$, com $\rho > 0$, obtemos então

$$II = \frac{2}{\rho}\operatorname{sen}\omega \ dudv \ . \tag{3-5}$$

Vamos agora calcular os coeficientes de Christoffel de X. Para isto, veja que

$$\begin{aligned}
E_u &= E_v = 0 \ , \\
G_u &= G_v = 0 \ , \\
F_u &= -\omega_u \operatorname{sen} \omega \ , \\
F_v &= -\omega_v \operatorname{sen} \omega \ , \\
EG - F^2 &= \operatorname{sen}^2 \omega \ .
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \omega_u \cot \omega \ , \\
\Gamma_{11}^2 &= -\omega_u \csc \omega \ , \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{12}^2 = 0 \ , \\
\Gamma_{22}^1 &= -\omega_v \csc \omega \ , \\
\Gamma_{22}^2 &= \omega_v \cot \omega \ .
\end{aligned} \tag{3-6}$$

A equação de Gauss

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2$$

(veja [Car05], pág. 280) se resume então a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^2} &= -(-\omega_u \csc \omega)_v - (-\omega_u \csc \omega) \cdot \omega_v \cot \omega \\
&= \omega_{uv} \csc \omega - \omega_u \omega_v \csc \omega \cot \omega + \omega_u \omega_v \csc \omega \cot \omega \\
&= \omega_{uv} \csc \omega \ ,
\end{aligned}$$

que equivale a

$$\boxed{\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sen} \omega} \ . \tag{3-7}$$

Esta é a famosa **equação sine-Gordon**.

Com isso, vimos que o ângulo entre as direções assintóticas de uma superfície pseudoesférica parametrizada como rede de Chebyshev satisfaz a EDP sine-Gordon. No teorema seguinte, veremos que, reciprocamente, toda solução de (3-7) coincide com o ângulo entre as direções assintóticas de uma superfície pseudoesférica parametrizada como rede de Chebyshev. Portanto, há uma identificação entre as superfícies pseudoesféricas e as soluções da equação sine-Gordon.

Teorema 3.3 *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto conexo e $\rho > 0$. As superfícies pseudoesféricas parametrizadas como rede de Chebyshev com domínio U e com curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$ estão, a menos de movimentos rígidos, bijetivamente associadas às soluções $\omega : U \longrightarrow (0, \pi)$ de classe C^∞ da equação sine-Gordon (3-7).*

Prova. Denotemos por $\mathcal{P}$ a classe das superfícies pseudoesféricas parametrizadas como rede de Chebyshev com domínio U e com curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$. Defina a relação de equivalência $\sim$ em $\mathcal{P}$ tal que $X \sim Y$ quando $X = \Psi \circ Y$ para algum movimento rígido Ψ de $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação $\mathcal{X}$ que associa cada classe de ${}^{\mathcal{P}}\!/\!\sim$ ao ângulo $\omega : U \longrightarrow (0, \pi)$ entre as direções assintóticas dessas superfícies. Veja que $\mathcal{X}$ está bem definida, pois ω é invariante sob movimenos rígidos. Além disso, como vimos anteriormente, ω é uma solução C^∞ da equação sine-Gordon. Vamos provar que $\mathcal{X}$ é bijeção.

Para a injetividade, note que se $X, Y \in \mathcal{P}$ possuem o mesmo ângulo entre as direções assintóticas, então suas formas fundamentais (3-4) e (3-5) coincidem. Consequentemente, pelo teorema fundamental das superfícies (veja [Ten08], pág. 209), $X \sim Y$.

Agora, provemos a sobrejetividade. Seja $\omega : U \longrightarrow (0, \pi)$ solução de classe C^∞ da equação (3-7). Novamente pelo teorema fundamental das superfícies, existe uma superfície parametrizada regular $X : U \longrightarrow V \cap S$ cujas formas fundamentais são

$$\begin{aligned} I &= du^2 + 2\cos\omega \; dudv + dv^2 \ , \\ II &= \frac{2}{\rho} \operatorname{sen}\omega \; dudv \ . \end{aligned}$$

Claramente esta superfície é uma rede de Chebyshev, já que $E = G = 1$ e $e = g = 0$. Além disso, sua curvatura gaussiana é:

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0 - \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\rho^2}}{1 - \cos^2\omega} = -\frac{1}{\rho^2} \ .$$

Portanto, $X \in \mathcal{P}$ e $\mathcal{X}(X) = \omega$. ∎

Uma aplicação da identificação obtida acima entre as superfícies pseudoesféricas e as soluções da equação sine-Gordon consiste em encontrar geometricamente soluções dessa última. Vejamos dois exemplos.

Exemplo. Vamos encontrar a solução ω correspondente à pseudoesfera de Beltrami. Fazendo a mudança de parâmetros

$$s = u + v \ , \ t = u - v$$

na parametrização dessa superfície apresentada no capítulo anterior, obtemos

$$Y(u,v) = (\operatorname{sech}(u+v)\cos(u-v), \operatorname{sech}(u+v)\operatorname{sen}(u-v), u+v-\tanh(u+v)) \ .$$

Vamos considerar $u + v < 0$ para evitar singularidades. Calculando os coeficientes das formas fundamentais, chegamos em:

$$\begin{aligned} &E = G = 1 \ , \\ &F = 2\tanh^2(u+v) - 1 \ , \\ &e = g = 0 \ . \end{aligned}$$

Assim, Y é uma rede de Chebyshev e o ângulo ω entre suas direções assintóticas é dado por

$$\cos\omega = 2\tanh^2(u+v) - 1 \ .$$

Daí,

$$2\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 = 2\tanh^2(u+v) - 1 \ .$$

Como $\omega \in (0,\pi)$ e $u+v<0$,

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\tanh(u+v) \ .$$

Ou seja,

$$\frac{1-\tan^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\omega}{4}\right)} = \frac{1-e^{2(u+v)}}{1+e^{2(u+v)}} \ .$$

Portanto,

$$\tan\left(\frac{\omega}{4}\right) = e^{u+v} \ ,$$

o que nos leva à solução

$$\omega = 4\arctan\left(e^{u+v}\right) \tag{3-8}$$

da equação sine-Gordon (3-7).

Exemplo. Vamos agora encontrar a família de soluções ω correspondentes às superfícies de Dini. Através da mudança de parâmetros

$$s = u+v \ , \ t = u-v \ ,$$

a parametrização mostrada no capítulo anterior fica

$$Y(u,v) = \begin{pmatrix} \rho\operatorname{sen}\zeta\operatorname{sech}\chi\cos\left(\frac{u-v}{\rho}\right) \\ \rho\operatorname{sen}\zeta\operatorname{sech}\chi\operatorname{sen}\left(\frac{u-v}{\rho}\right) \\ u+v-\rho\operatorname{sen}\zeta\tanh\chi \end{pmatrix} \ ,$$

onde $\rho > 0$ e $\zeta \in (0, \pi)$ são constantes reais, e

$$\chi = \frac{u + v - (u - v)\cos\zeta}{\rho \operatorname{sen}\zeta} \ .$$

Vamos considerar $\chi < 0$ para evitar singularidades. Após algumas contas, obtemos os coeficientes das formas fundamentais:

$$\begin{aligned} E &= G = 1 \ , \\ F &= 2\tanh^2\chi - 1 \ , \\ e &= g = 0 \ . \end{aligned}$$

Logo, Y é uma rede de Chebyshev e o ângulo ω entre suas direções assintóticas é dado por

$$\cos\omega = 2\tanh^2\chi - 1 \ .$$

De maneira análoga ao exemplo anterior, obtemos

$$\omega = 4\arctan(e^{\chi}) \ . \tag{3-9}$$

Esta é, portanto, uma família a 1-parâmetro de soluções da equação sine-Gordon (3-7). Particularmente, fazendo $\rho = 1$ e $\zeta = \frac{\pi}{2}$, recupera-se a solução encontrada no exemplo anterior.

3.2 Autotransformação de Bäcklund da equação sine-Gordon

Grosso modo, uma *transformação de Bäcklund* entre duas equações diferenciais $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$ é um sistema $\mathbb{B}$ de equações diferenciais tal que se (ω, ω') é solução do sistema, então ω satisfaz $\mathbb{E}_1$ e ω' satisfaz $\mathbb{E}_2$. No caso em que $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$ são a mesma equação, dizemos que $\mathbb{B}$ é uma *autotransformação de Bäcklund*. Para uma definição mais detalhada, veja [Her76].

Vejamos uma autotransformação de Bäcklund da equação sine-Gordon (3-7). Este exemplo deu início à teoria das transformações de Bäcklund e desempenhará um papel importante ao longo deste capítulo. Se trata do sistema $\mathbb{B}_\beta$ de EDPs

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_u &= \frac{\beta}{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \\ \left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_v &= \frac{1}{\beta\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \end{aligned} \tag{3-10}$$

onde β é um parâmetro real não nulo e ω, ω' são as funções desconhecidas. De fato, se (ω, ω') é solução de $\mathbb{B}_\beta$, então derivando a primeira equação do sistema com respeito a v e a segunda com respeito a u, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_{uv} &= \frac{\beta}{\rho} \left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_v \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \ , \\ \left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_{uv} &= \frac{1}{\beta\rho} \left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_u \cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \ . \end{aligned}$$

Usando o próprio sistema $\mathbb{B}_\beta$, podemos substituir as derivadas primeiras acima:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \ , \\ \left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \ . \end{aligned}$$

Somando e subtraindo essas igualdades:

$$\begin{aligned} \omega_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)\right] \ , \\ \omega'_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)\right] \ . \end{aligned}$$

Finalmente, usando as fórmulas de adição e subtração de arcos da trigonometria, chegamos em

$$\begin{aligned} \omega_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sen}\omega \ , \\ \omega'_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sen}\omega' \ . \end{aligned}$$

Ou seja, ω e ω' satisfazem a equação sine-Gordon.

Do ponto de vista das Equações Diferenciais, uma transformação de Bäcklund $\mathbb{B}$ nos fornece soluções ω' da equação $\mathbb{E}_1$ a partir de uma solução ω da EDP $\mathbb{E}_2$. Chamamos ω de *solução semente* e ω' de *transformada de Bäcklund* de ω. Denotaremos o conjunto das transformadas de Bäcklund de ω por $\mathbb{B}(\omega)$. Se S é um conjunto de soluções de $\mathbb{E}_1$, então $\mathbb{B}(S)$ será o conjunto das transformadas de Bäcklund com solução semente $\omega \in S$, isto é,

$$\mathbb{B}(S) = \{\omega' : \omega' \in \mathbb{B}(\omega) \text{ para algum } \omega \in S\} \ .$$

Observação. No caso da transformação de Bäcklund (3-10), é fácil ver que se ω' é uma transformada de Bäcklund de ω via $\mathbb{B}_\beta$, então ω é transformada de Bäcklund de ω' via $\mathbb{B}_{-\beta}$. Ou seja, se $\omega' \in \mathbb{B}_\beta(\omega)$, então $\omega \in \mathbb{B}_{-\beta}(\omega')$.

Exemplo. Vamos adotar a solução trivial $\omega = 0$ da equação sine-Gordon (3-7) como solução semente. Assim, o sistema (3-10) se resume a:

$$\omega'_u = \frac{2\beta}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega'}{2}\right) \ ,$$
$$\omega'_v = \frac{2}{\beta\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega'}{2}\right) \ .$$

Supondo $\omega' \in (0, 2\pi)$ e integrando ambas as equações:

$$\int \frac{d\omega'}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{2\beta}{\rho} \int du \ ,$$
$$\int \frac{d\omega'}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega'}{2}\right)} = \frac{2}{\beta\rho} \int dv \ .$$

Lembre que

$$\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C \ .$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2\ln\left(\csc\left(\frac{\omega'}{2}\right) - \cot\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right) &= \frac{2\beta u}{\rho} + C_1(v) \ , \\ 2\ln\left(\csc\left(\frac{\omega'}{2}\right) - \cot\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right) &= \frac{2v}{\beta\rho} + C_2(u) \ . \end{aligned} \tag{3-11}$$

Igualando:

$$\frac{2\beta u}{\rho} + C_1(v) = \frac{2v}{\beta\rho} + C_2(u) \ ,$$

de onde

$$C_1(v) = C + \frac{2v}{\beta\rho} \ ,$$
$$C_2(u) = C + \frac{2\beta u}{\rho} \ ,$$

onde C é uma constante arbitrária. Somando as equações (3-11) e substituindo C_1, C_2 pelas expressões acima:

$$4\ln\left(\csc\left(\frac{\omega'}{2}\right) - \cot\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right) = \frac{4\beta u}{\rho} + \frac{4v}{\beta\rho} + 2C \ .$$

Daí,

$$\csc\left(\frac{\omega'}{2}\right) - \cot\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \exp\left(\frac{\beta u}{\rho} + \frac{v}{\beta\rho} + \frac{C}{2}\right) \ .$$

Usando identidades trigonométricas:

$$\tan\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \exp\left(\frac{\beta u}{\rho} + \frac{v}{\beta\rho} + \frac{C}{2}\right) \ .$$

Ou seja,

$$\omega' = 4\arctan\left(\exp\left(\frac{\beta u}{\rho} + \frac{v}{\beta\rho} + \frac{C}{2}\right)\right) \ . \tag{3-12}$$

Veja que a imagem da função acima está contida em $(0, 2\pi)$. Esta é, portanto, uma família a 2-parâmetros ($\beta \neq 0$ e $C \in \mathbb{R}$) de soluções da equação sine-Gordon (3-7). Particularmente, fazendo $C = 0$ e $\beta = \tan\left(\frac{\zeta}{2}\right)$, obtemos a família a 1-parâmetro ($\zeta \in (0, \pi)$) de soluções

$$\omega' = 4\arctan\left(\exp\left(\frac{u + v - (u - v)\cos\zeta}{\rho\,\mathrm{sen}\,\zeta}\right)\right) \ .$$

Comparando com (3-9), percebe-se que estas são as soluções correspondentes às superfícies de Dini. Além disso, fazendo $\beta = \rho = 1$ e $C = 0$, obtém-se a solução

$$\omega' = 4\arctan(e^{u+v}) \ , \tag{3-13}$$

que corresponde à pseudoesfera de Beltrami.

Se adotarmos agora a solução semente sendo da forma (3-12), obteremos novas soluções ω''. E assim por diante. Esse processo pode ser repetido indefinidamente, fornecendo cada vez mais soluções da equação sine-Gordon. Naturalmente, podemos nos perguntar se as soluções obtidas são invariantes sob permutações dos parâmetros β escolhidos em cada iteração. Isto é,

$$\mathbb{B}_{\beta_2}(\mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)) = \mathbb{B}_{\beta_1}(\mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)) \ ?$$

A resposta desta pergunta se encontra na próxima seção.

3.3 Permutabilidade de Bianchi

Teorema 3.4 (da permutabilidade de Bianchi, parte 1) *Sejam ω solução da equação sine-Gordon (3-7) e ω_1, ω_2 transformadas de Bäcklund de ω via $\mathbb{B}_{\beta_1}$ e $\mathbb{B}_{\beta_2}$, respectivamente, com $\beta_1 \neq \beta_2$. Isto é, $\omega_1 \in \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)$ e $\omega_2 \in \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$. Então,*

$$\Omega = \omega + 4\arctan\left[\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}\tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4}\right)\right] \tag{3-14}$$

é uma transformada de Bäcklund de ω_1 via $\mathbb{B}_{\beta_2}$ e de ω_2 via $\mathbb{B}_{\beta_1}$.

Ou seja:

$$
\begin{tikzcd}
& \boxed{\omega_1} \arrow[dr, "\beta_2"] & \\
\boxed{\omega} \arrow[ur, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & & \boxed{\Omega} \\
& \boxed{\omega_2} \arrow[ur, "\beta_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

Prova. Como $\omega_1 \in \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)$ e $\omega_2 \in \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\omega_1 - \omega}{2}\right)_u &= \frac{\beta_1}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2}\right) \\
\left(\frac{\omega_2 - \omega}{2}\right)_u &= \frac{\beta_2}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{3-15}
$$

Subtraindo:

$$\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)_u = \frac{1}{\rho} \cdot \left[\beta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2}\right) - \beta_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}\right)\right] .$$

Para simplificar as contas, vamos denotar

$$s_1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2}\right) , \; s_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}\right) .$$

Assim,

$$\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)_u = \frac{\beta_1 s_1 - \beta_2 s_2}{\rho} .$$

Também denotaremos

$$k = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} , \; t = \tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{4}\right) .$$

A igualdade (3-14) pode então ser escrita como

$$\Omega = \omega + 4 \arctan(kt) .$$

Derivando com respeito a u:

$$\Omega_u = \omega_u + 4 \cdot \frac{1}{1 + k^2 t^2} \cdot k t_u .$$

Veja que

$$\begin{aligned} t_u &= \sec^2\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{4}\right)\cdot\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{4}\right)_u \\ &= (1+t^2)\cdot\frac{\beta_1 s_1-\beta_2 s_2}{2\rho}\ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\frac{\Omega-\omega}{2}\right)_u = \frac{k(1+t^2)(\beta_1 s_1-\beta_2 s_2)}{\rho(1+k^2t^2)}\ .$$

Subtraindo a primeira equação (3-15) da igualdade acima:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega-\omega_1}{2}\right)_u &= \frac{k(1+t^2)(\beta_1 s_1-\beta_2 s_2)}{\rho(1+k^2t^2)} - \frac{\beta_1 s_1}{\rho} \\ &= \frac{k(1+t^2)(\beta_1 s_1-\beta_2 s_2)-(1+k^2t^2)\beta_1 s_1}{\rho(1+k^2t^2)} \\ &= \frac{(k+kt^2-1-k^2t^2)\beta_1 s_1-k(1+t^2)\beta_2 s_2}{\rho(1+k^2t^2)} \\ &= \frac{(1-kt^2)(k-1)\beta_1 s_1-k(1+t^2)\beta_2 s_2}{\rho(1+k^2t^2)}\ . \end{aligned}$$

Não é difícil ver que

$$(k-1)\beta_1 = (k+1)\beta_2\ .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega-\omega_1}{2}\right)_u &= \frac{(1-kt^2)(k+1)\beta_2 s_1-k(1+t^2)\beta_2 s_2}{\rho(1+k^2t^2)} \\ &= \frac{\beta_2[(1-kt^2)(k+1)s_1-k(1+t^2)s_2]}{\rho(1+k^2t^2)}\ . \end{aligned}$$

Por outro lado, denotando

$$c_1 = \cos\left(\frac{\omega_1+\omega}{2}\right)\ ,$$

teremos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega+\omega_1}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega}{2}+2\arctan(kt)\right) \\ &= s_1\cos(2\arctan(kt)) + c_1\operatorname{sen}(2\arctan(kt)) \\ &= s_1\cdot\frac{1-k^2t^2}{1+k^2t^2} + c_1\cdot\frac{2kt}{1+k^2t^2} \\ &= \frac{s_1-k^2t^2s_1+2ktc_1}{1+k^2t^2}\ . \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
s_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2+\omega}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1+\omega}{2} - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right) \\
&= s_1 \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right) - c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right) \\
&= s_1 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - c_1 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \ .
\end{aligned}$$

Daí,

$$2tc_1 = (1-t^2)s_1 - (1+t^2)s_2 \ .$$

Substituindo na expressão de $\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega+\omega_1}{2}\right)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega+\omega_1}{2}\right) &= \frac{s_1 - k^2t^2s_1 + k((1-t^2)s_1 - (1+t^2)s_2)}{1+k^2t^2} \\
&= \frac{(1-kt^2)(k+1)s_1 - k(1+t^2)s_2}{1+k^2t^2} \ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{\Omega-\omega_1}{2}\right)_u = \frac{\beta_2}{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega+\omega_1}{2}\right) \ .$$

De forma análoga, prova-se que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Omega+\omega_1}{2}\right)_v &= \frac{1}{\beta_2\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\omega_1}{2}\right) \ , \\
\left(\frac{\Omega-\omega_2}{2}\right)_u &= \frac{\beta_1}{\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega+\omega_2}{2}\right) \ , \\
\left(\frac{\Omega+\omega_2}{2}\right)_v &= \frac{1}{\beta_1\rho}\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega-\omega_2}{2}\right) \ .
\end{aligned}$$

■

O teorema acima mostra que $\mathbb{B}_{\beta_2}(\mathbb{B}_{\beta_1}(\omega))$ e $\mathbb{B}_{\beta_1}(\mathbb{B}_{\beta_2}(\omega))$ possuem Ω como elemento comum. A seguir, mostraremos que $\mathbb{B}_{\beta_2}(\mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)) = \mathbb{B}_{\beta_1}(\mathbb{B}_{\beta_2}(\omega))$.

Teorema 3.5 (da permutabilidade de Bianchi, parte 2) *Se ω é solução da equação sine-Gordon (3-7), então*

$$\mathbb{B}_{\beta_2}(\mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)) = \mathbb{B}_{\beta_1}(\mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)) \ ,$$

para todo $\beta_1 \neq \pm\beta_2$.

Prova. Vamos provar que $\mathbb{B}_{\beta_2}(\mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)) \subseteq \mathbb{B}_{\beta_1}(\mathbb{B}_{\beta_2}(\omega))$. A inclusão recíproca é provada de forma análoga.

Seja $\omega_{12} \in \mathbb{B}_{\beta_2}(\mathbb{B}_{\beta_1}(\omega))$. Isto é, ω_{12} é uma transformada de Bäcklund de ω_1 via $\mathbb{B}_{\beta_2}$, para algum $\omega_1 \in \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)$.

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\omega_1} \arrow[dr, "\beta_2"] & \\
\boxed{\omega} \arrow[ur, "\beta_1"] & & \boxed{\omega_{12}}
\end{tikzcd}$$

Queremos provar que $\omega_{12} \in \mathbb{B}_{\beta_1}(\mathbb{B}_{\beta_2}(\omega))$, ou seja, que existe $\omega_2 \in \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$ tal que ω_{12} é transformada de Bäcklund de ω_2 via $\mathbb{B}_{\beta_1}$.

Veja que ω é transformada de Bäcklund de ω_1 via $\mathbb{B}_{-\beta_1}$. Ou seja,

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\omega_{12}} \\
\boxed{\omega_1} \arrow[ur, "\beta_2"] \arrow[dr, "-\beta_1"'] & \\
& \boxed{\omega}
\end{tikzcd}$$

Como $\beta_2 \neq -\beta_1$, o teorema (3.4) garante a existência de uma solução ω_2 tal que $\omega_2 \in \mathbb{B}_{-\beta_1}(\omega_{12})$ e $\omega_2 \in \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$.

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{\omega_{12}} \arrow[dr, "-\beta_1"] & \\
\boxed{\omega_1} \arrow[ur, "\beta_2"] \arrow[dr, "-\beta_1"'] & & \boxed{\omega_2} \\
& \boxed{\omega} \arrow[ur, "\beta_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Note que ω_{12} é transformada de Bäcklund de ω_2 via $\mathbb{B}_{\beta_1}$, ou seja, $\omega_{12} \in \mathbb{B}_{\beta_1}(\mathbb{B}_{\beta_2}(\omega))$. ■

Mais do que permitir a troca de ordem dos parâmetros, o teorema da permutabilidade de Bianchi fornece um método algébrico para obter novas soluções da equação sine-Gordon. Exemplificaremos esta aplicação do teorema a seguir.

Exemplo. Vamos tomar, no teorema (3.4), $\omega = 0$ e ω_1, ω_2 soluções da forma (3-9). Ou seja,

$$\omega_1 = 4 \arctan(e^{\chi_1}) \ , \ \omega_2 = 4 \arctan(e^{\chi_2}) \ ,$$

com
$$\chi_1 = \frac{u+v-(u-v)\cos\zeta_1}{\rho \operatorname{sen}\zeta_1}\ ,\ \chi_2 = \frac{u+v-(u-v)\cos\zeta_2}{\rho \operatorname{sen}\zeta_2}$$
e $\zeta_1, \zeta_2 \in (0,\pi)$ tais que $\zeta_1 \neq \zeta_2$. Essas soluções correspondem a superfícies de Dini. Como vimos na seção anterior, $\omega_1 \in \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)$ e $\omega_2 \in \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$ para

$$\beta_1 = \tan\left(\frac{\zeta_1}{2}\right) \text{ e } \beta_2 = \tan\left(\frac{\zeta_2}{2}\right) .$$

Assim, pelo teorema da permutabilidade,

$$\Omega = 4\arctan\left[\frac{\tan\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)+\tan\left(\frac{\zeta_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)-\tan\left(\frac{\zeta_2}{2}\right)}\cdot\tan\left(\arctan(e^{\chi_1})-\arctan(e^{\chi_2})\right)\right]$$

é uma família a 2-parâmetros ($\zeta_1, \zeta_2 \in (0,\pi)$) de soluções da equação sine-Gordon. Vamos simplificar a expressão acima. Usando identidades trigonométricas, verifica-se que

$$\frac{\tan\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)+\tan\left(\frac{\zeta_2}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\zeta_1}{2}\right)-\tan\left(\frac{\zeta_2}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_1-\zeta_2}{2}\right)} .$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan(e^{\chi_1})-\arctan(e^{\chi_2})\right) &= \tan\left(\arctan\left(\frac{e^{\chi_1}-e^{\chi_2}}{1+e^{\chi_1+\chi_2}}\right)\right)\\
&= \frac{e^{\chi_1}-e^{\chi_2}}{1+e^{\chi_1+\chi_2}}\\
&= \frac{e^{\frac{\chi_1-\chi_2}{2}}-e^{\frac{-\chi_1+\chi_2}{2}}}{e^{\frac{-\chi_1-\chi_2}{2}}+e^{\frac{\chi_1+\chi_2}{2}}}\\
&= \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)} .
\end{aligned}$$

Portanto,
$$\Omega = 4\arctan\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{\chi_1-\chi_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_1-\zeta_2}{2}\right)\cosh\left(\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\right)}\right] .$$

No teorema (3.4), assumimos que $\beta_1 \neq \beta_2$. De fato, a função (3-14) não está bem definida quando $\beta_1 = \beta_2$. Porém, podemos questionar se quando $\beta_2 \longrightarrow \beta_1$, a função Ω tende a um elemento de $\mathbb{B}_{\beta_1}(\omega_1)$. Vamos investigar esta questão no caso particular em que $\omega = 0$ e $\beta_1 = \rho = 1$. Isto é, ω_1 é a solução (3-13) associada à pseudoesfera de Beltrami.

Exemplo. Usando a notação do exemplo anterior e tomando $\beta_1 = \rho = 1$, temos

$$\zeta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ e } \chi_1 = u + v \ .$$

Vamos calcular

$$\Omega_L = \lim_{\zeta_2 \to \frac{\pi}{2}} \Omega \ .$$

Olhando para χ_2 como função de ζ_2 e derivando, obtemos:

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} = \frac{u - v - (u+v)\cos\zeta_2}{\operatorname{sen}^2 \zeta_2} \ .$$

Avaliando em $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = u - v \ .$$

Usando a definição de derivada:

$$\lim_{\zeta_2 \to \frac{\pi}{2}} \frac{\chi_2(\zeta_2) - \chi_2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\zeta_2 - \frac{\pi}{2}} = u - v \ .$$

Porém, $\chi_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = u + v = \chi_1$. Assim,

$$\lim_{\zeta_2 \to \frac{\pi}{2}} \frac{\chi_2 - \chi_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = u - v \ .$$

Consequentemente,

$$\lim_{\zeta_2 \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}\right)} = u - v \ .$$

Por outro lado,

$$\lim_{\zeta_2 \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)} = \frac{1}{\cosh(u+v)} \ .$$

Portanto,

$$\Omega_L = 4\arctan[(u-v)\operatorname{sech}(u+v)] \ .$$

Agora, vamos verificar que Ω_L é transformada de Bäcklund de ω_1 com parâmetro $\beta = 1$. Para isso, precisamos provar que

$$\left(\frac{\Omega_L - \omega_1}{2}\right)_u = \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega_L + \omega_1}{2}\right) \ .$$

A outra igualdade do sistema é provada de forma análoga. Derivando Ω_L com respeito a u, obtemos:

$$(\Omega_L)_u = \frac{4\,\mathrm{sech}(u+v)[1-(u-v)\tanh(u+v)]}{1+(u-v)^2\,\mathrm{sech}^2(u+v)} \ .$$

Derivando ω_1 com respeito a u:

$$(\omega_1)_u = 2\,\mathrm{sech}(u+v) \ .$$

Assim, o lado esquerdo da igualdade desejada é:

$$\left(\frac{\Omega_L-\omega_1}{2}\right)_u = \frac{\mathrm{sech}\, s(1-2t\tanh s - t^2\,\mathrm{sech}^2 s)}{1+t^2\,\mathrm{sech}^2 s} \ ,$$

onde $s = u+v$ e $t = u-v$. Por outro lado,

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega_L+\omega_1}{2}\right) = \mathrm{sen}[2\arctan(t\,\mathrm{sech}\, s) + 2\arctan(e^s)] \ .$$

Usando a fórmula de adição de arcos da trigonometria e, em seguida, usando a substituição pela tangente do arco metade:

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega_L+\omega_1}{2}\right) = \frac{2t\,\mathrm{sech}\, s}{1+t^2\,\mathrm{sech}^2 s}\cdot\frac{1-e^{2s}}{1+e^{2s}} + \frac{2e^s}{1+e^{2s}}\cdot\frac{1-t^2\,\mathrm{sech}^2 s}{1+t^2\,\mathrm{sech}^2 s} \ .$$

Finalmente, usando que

$$\frac{e^{2s}-1}{1+e^{2s}} = \tanh s \ , \ \frac{2e^s}{1+e^{2s}} = \mathrm{sech}\, t$$

e simplificando a expressão, chegamos em:

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega_L+\omega_1}{2}\right) = \frac{\mathrm{sech}\, s(1-2t\tanh s - t^2\,\mathrm{sech}^2 s)}{1+t^2\,\mathrm{sech}^2 s} \ .$$

Portanto, $\Omega_L \in \mathbb{B}_1(\omega_1)$.

A solução Ω_L, definida num domínio adequado para que sua imagem esteja contida em $(0,\pi)$, corresponde à **superfície de Kuen**. Uma parametrização desta superfície será apresentada na próxima seção.

3.4 Parametrização das transformadas de Bäcklund de uma superfície pseudoesférica

Sejam $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ classes de superfícies parametrizadas regulares em $\mathbb{R}^3$. Se $\mathbb{B}$ é transformação de Bäcklund entre duas EDPs $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$, e as soluções dessas EDPs podem ser identificadas com as superfícies de $\mathbb{A}_1$ e $\mathbb{A}_2$, respectivamente, então dizemos que $\mathbb{B}$ é uma *transformação de Bäcklund entre* $\mathbb{A}_1$ *e* $\mathbb{A}_2$. Para uma definição mais detalhada, veja [C R82].

Exemplo. As superfícies pseudoesféricas com curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$ e parametrizadas como rede de Chebyshev estão, a menos de movimentos rígidos, identificadas com as soluções suaves da equação sine-Gordon (3-7) com imagem em $(0,\pi)$ (teorema (3.3)). Logo, o sistema $\mathbb{B}_\beta$ definido por (3-10) é uma transformação de Bäcklund entre superfícies pseudoesféricas.
Note que se ω é solução de sine-Gordon com imagem em $(0,\pi)$, suas transformadas de Bäcklund ω' não necessariamente terão imagem em $(0,\pi)$. Por exemplo, a solução (3-8) associada à pseudoesfera de Beltrami tem imagem contida em $(0,\pi)$ para $u+v<0$. Porém, a solução trivial $\omega'=0$, que é sua transformada de Bäcklund assumindo $\beta=-1$, possui imagem fora de $(0,\pi)$.

Assim como a autotransformação de Bäcklund da equação sine-Gordon nos permite obter novas soluções desta EDP a partir de uma solução dada, a transformação de Bäcklund entre superfícies pseudoesféricas nos fornece novas superfícies deste tipo, a partir de uma dada. Como será mostrado no teorema abaixo, para cada parâmetro $\beta \neq 0$, uma dessas novas superfícies está associada à superfície inicial através de uma congruência pseudoesférica (veja definição (2.1)).

Teorema 3.6 *Seja $X(u,v)$ rede de Chebyshev de uma superfície pseudoesférica com curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$, onde $\rho>0$, correspondente a uma solução ω da equação sine-Gordon (3-7). Se $\omega' \in \mathbb{B}_\beta(\omega)$, com $\beta>0$, e a imagem de ω' está contida no intervalo $(0,\pi)$, então*

$$Y = X + \frac{L}{\operatorname{sen}\omega}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\omega'}{2}\right)X_u + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)X_v\right] ,$$

onde

$$L = \frac{2\beta\rho}{1+\beta^2} ,$$

é rede de Chebyshev de uma superfície pseudoesférica correspondente a ω'. Além disso, a transformação ℓ que leva $p=X(u,v)$ em $\ell(p)=Y(u,v)$, isto é, $\ell = Y\circ X^{-1}$, é uma congruência pseudoesférica com constantes L e ζ, onde $\beta = \tan\left(\frac{\zeta}{2}\right)$.

Prova. Vamos adotar o triedro móvel (A, B, C) associado a X definido por

$$A = X_u \ , \ B = N \times X_u \ , \ C = N \ ,$$

onde

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \ .$$

Veja que

$$X_v = \cos\omega A + \operatorname{sen}\omega B \ .$$

Para reescrevermos a parametrização Y usando esse triedro, vamos usar as equações de Gauss-Weingarten (veja [Ten08], pág. 197):

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma^1_{11} X_u + \Gamma^2_{11} X_v + eN \ ; \\ X_{uv} &= \Gamma^1_{12} X_u + \Gamma^2_{12} X_v + fN \ ; \\ X_{vv} &= \Gamma^1_{22} X_u + \Gamma^2_{22} X_v + gN \ ; \\ N_u &= b_{11} X_u + b_{12} X_v \ ; \\ N_v &= b_{21} X_u + b_{22} X_v \ , \end{aligned} \tag{3-16}$$

onde

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \quad ; \quad b_{12} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \ ; \\ b_{21} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \quad ; \quad b_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2} \ . \end{aligned} \tag{3-17}$$

Usando os resultados do início do capítulo ((3-5) e (3-6)) e assumindo, sem perda, que $f > 0$, os coeficientes acima ficam:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\cot\omega}{\rho} \quad ; \quad b_{12} = -\frac{\csc\omega}{\rho} \ ; \\ b_{21} &= -\frac{\csc\omega}{\rho} \quad ; \quad b_{22} = \frac{\cot\omega}{\rho} \ ; \end{aligned}$$

e as equações de Gauss-Weingarten se escrevem como:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \omega_u \cot\omega \ X_u - \omega_u \csc\omega \ X_v \ ; \\ X_{uv} &= \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho} N \ ; \\ X_{vv} &= -\omega_v \csc\omega \ X_u + \omega_v \cot\omega \ X_v \ ; \\ N_u &= \frac{\cot\omega}{\rho} X_u - \frac{\csc\omega}{\rho} X_v \ ; \\ N_v &= -\frac{\csc\omega}{\rho} X_u + \frac{\cot\omega}{\rho} X_v \ . \end{aligned}$$

Reescrevendo na base (A, B, C):

$$
\begin{aligned}
X_{uu} &= -\omega_u B \ ; \\
X_{uv} &= \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho} C \ ; \\
X_{vv} &= -\omega_v \operatorname{sen}\omega A + \omega_v \cos\omega B \ ; \\
N_u &= -\frac{1}{\rho} B \ ; \\
N_v &= -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho} A + \frac{\cos\omega}{\rho} B \ .
\end{aligned}
$$

É imediato que:

$$
\begin{aligned}
A_u &= -\omega_u B \quad ; \quad A_v = \frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho} C \ ; \\
C_u &= -\frac{1}{\rho} B \quad ; \quad C_v = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho} A + \frac{\cos\omega}{\rho} B \ .
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
B_u &= (N_u \times X_u) + (N \times X_{uu}) \\
&= -\frac{1}{\rho}(B \times A) - \omega_u (C \times B) \\
&= \frac{1}{\rho} C + \omega_u A
\end{aligned}
$$

e, também,

$$
\begin{aligned}
B_v &= (N_v \times X_u) + (N \times X_{uv}) \\
&= \left(-\frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho} A + \frac{\cos\omega}{\rho} B\right) \times A + C \times \left(\frac{\operatorname{sen}\omega}{\rho} C\right) \\
&= \frac{\cos\omega}{\rho}(B \times A) = -\frac{\cos\omega}{\rho} C \ .
\end{aligned}
$$

Para simplificar a notação, vamos adotar

$$
\phi = \frac{\omega + \omega'}{2} \ .
$$

Assim,

$$
\operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) = \operatorname{sen}(\omega - \phi) = \operatorname{sen}\omega \cos\phi - \operatorname{sen}\phi \cos\omega \ .
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
Y &= X + \frac{L}{\operatorname{sen}\omega}\left[(\operatorname{sen}\omega\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\omega)X_u + \operatorname{sen}\phi X_v\right] \\
&= X + \frac{L}{\operatorname{sen}\omega}\left[(\operatorname{sen}\omega\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\omega)A + \operatorname{sen}\phi(\cos\omega A + \operatorname{sen}\omega B)\right] \\
&= X + L\cos\phi A + L\operatorname{sen}\phi B \ .
\end{aligned}$$

É fácil ver, da expressão acima, que $|Y - X| = \mathrm{L}$. Ou seja, a condição 2 da definição (2.1) é satisfeita. Vamos agora calcular as formas fundamentais de Y, para provarmos que é uma rede de Chebyshev. Derivando:

$$\begin{aligned}
Y_u &= A + L(-\phi_u\operatorname{sen}\phi A + \cos\phi A_u) + L(\phi_u\cos\phi B + \operatorname{sen}\phi B_u) \ ; \\
Y_v &= \cos\omega A + \operatorname{sen}\omega B + L(-\phi_v\operatorname{sen}\phi A + \cos\phi A_v) + L(\phi_v\cos\phi B + \operatorname{sen}\phi B_v) \ .
\end{aligned}$$

Substituindo A_u, A_v, B_u, B_v e simplificando:

$$\begin{aligned}
Y_u &= (1 - L\phi_u\operatorname{sen}\phi + L\omega_u\operatorname{sen}\phi)A + (L\phi_u\cos\phi - L\omega_u\cos\phi)B + \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi\, C \ ; \\
Y_v &= (\cos\omega - L\phi_v\operatorname{sen}\phi)A + (\operatorname{sen}\omega + L\phi_v\cos\phi)B + \frac{L}{\rho}\operatorname{sen}(\omega - \phi)C \ .
\end{aligned}$$

Como $\omega' \in \mathbb{B}_\beta(\omega)$, as equações (3-10) nos dão:

$$\begin{aligned}
\phi_u &= \omega_u + \frac{\beta}{\rho}\operatorname{sen}\phi \ ; \\
\phi_v &= \frac{1}{\beta\rho}\operatorname{sen}(\phi - \omega) \ .
\end{aligned}$$

Substituindo nas expressões de Y_u e Y_v, obtém-se, após algumas contas:

$$\begin{aligned}
\langle Y_u, Y_u\rangle &= \langle Y_v, Y_v\rangle = 1 \ ; \\
\langle Y_u, Y_v\rangle &= \cos(2\phi - \omega) = \cos\omega' \ .
\end{aligned}$$

Ou seja, a primeira forma fundamental de Y é:

$$I' = du^2 + 2\cos\omega' dudv + dv^2 \ .$$

Logo, ω' é o ângulo entre Y_u e Y_v. Como, por hipótese, $\omega' \in (0, \pi)$, a superfície Y é regular. Também das expressões de Y_u e Y_v tem-se:

$$\overline{N} = \frac{Y_u \times Y_v}{|Y_u \times Y_v|} = -\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi\, A + \frac{L}{\rho}\cos\phi\, B + \left(1 - \frac{L\beta}{\rho}\right)C \ .$$

Veja que

$$\langle Y - X, \overline{N} \rangle = L\cos\phi \cdot \left(-\frac{L}{\rho} \operatorname{sen}\phi \right) + L \operatorname{sen}\phi \cdot \frac{L}{\rho}\cos\phi = 0 \ .$$

Ou seja, o vetor $Y - X$ é tangente à superfície Y. Também é imediato, da expressão inicial de Y, que o vetor $Y - X$ é tangente à superfície X. Portanto, ℓ satisfaz a condição 1 da definição (2.1). Derivando $\overline{N}$ com respeito a u e a v, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\overline{N}_u &= -\frac{L\beta}{\rho^2}\operatorname{sen}\phi\cos\phi \, A + \left(\frac{L\beta}{\rho^2}\cos^2\phi - \frac{1}{\rho} \right) B + \frac{L}{\rho^2}\cos\phi \, C \ ; \\
\overline{N}_v &= \left[-\frac{L}{2\rho^2\beta}\operatorname{sen}\omega' + \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{L}{2\rho\beta} \right)\operatorname{sen}\omega \right] A \\
&\quad + \left[\frac{L}{2\rho^2\beta}\cos\omega' - \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{L}{2\rho\beta} \right)\cos\omega \right] B - \frac{L}{\rho^2}\cos(\omega - \phi) C \ .
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\langle Y_u, \overline{N}_u \rangle &= \langle Y_v, \overline{N}_v \rangle = 0 \ ; \\
\langle Y_u, \overline{N}_v \rangle &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}\omega' \ .
\end{aligned}$$

Portanto, a segunda forma fundamental de Y é:

$$II' = \frac{2}{\rho}\operatorname{sen}\omega' du dv \ .$$

Com isso, provamos que Y é uma rede de Chebyshev com ângulo ω' entre suas direções assintóticas. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle \overline{N}, N \rangle &= \langle -\frac{L}{\rho}\operatorname{sen}\phi \, A + \frac{L}{\rho}\cos\phi \, B + \left(1 - \frac{L\beta}{\rho} \right) C, C \rangle \\
&= 1 - \frac{L\beta}{\rho} = 1 - \frac{2\beta^2}{1+\beta^2} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \cos\zeta \ .
\end{aligned}$$

Assim, o ângulo entre N e $\overline{N}$ é ζ, provando que ℓ satisfaz a condição 3 da definição (2.1). Veja que ℓ está bem definida, pois X é homeomorfismo. Além disso, como Y é injetiva, ℓ é invertível. Portanto, as funções $Y^{-1} \circ \ell \circ X$ e $X^{-1} \circ \ell^{-1} \circ Y$ são funções identidade e ℓ é um difeomorfismo. ■

Como exemplo de aplicação do teorema acima, vamos encontrar uma parametrização da superfície de Kuen, correspondente à solução Ω_L encontrada na seção anterior.

Exemplo. Considere a rede de Chebyshev

$$X(u,v) = (\operatorname{sech}(u+v)\cos(u-v), \operatorname{sech}(u+v)\operatorname{sen}(u-v), u+v-\tanh(u+v)) \ ,$$

com $u+v < 0$ e $0 < u-v < 2\pi$, da pseudoesfera de Beltrami. Neste domínio, X é injetiva e não possui singularidades. A solução de sine-Gordon correspondente é

$$\omega = 4\arctan(e^{u+v}) \ .$$

Como vimos na seção anterior,

$$\Omega_L = 4\arctan[(u-v)\operatorname{sech}(u+v)]$$

é uma transformada de Bäcklund de ω com parâmetro $\beta = 1$. Para que Ω_L tenha imagem contida em $(0,\pi)$, restringiremos ainda mais o domínio de ω e Ω_L, fazendo $u - v < 1$. Isto evita singularidades na parametrização Y que estamos buscando. Assim, $L = 1$ e

$$Y = X + \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\Omega_L}{2}\right)X_u + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega+\Omega_L}{2}\right)X_v\right]$$

é uma rede de Chebyshev da superfície de Kuen. A transformação $\ell = Y \circ X^{-1}$ é, pelo teorema (3.6), uma congruência pseudoesférica entre a pseudoesfera de Beltrami e a superfície de Kuen, com distância entre pontos correspondentes $L = 1$ e ângulo entre os planos tangentes correspondentes $\zeta = \frac{\pi}{2}$. Com objetivo de simplificar a parametrização obtida, faremos a mudança de parâmetros

$$s = u + v \ , \ t = u - v \ .$$

Dessa forma,

$$X_u = X_s + X_t \quad \text{e} \quad X_v = X_s - X_t \ .$$

A parametrização fica:

$$\begin{aligned} Y = X &+ \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\Omega_L}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega+\Omega_L}{2}\right)\right]X_s \\ &+ \frac{1}{\operatorname{sen}\omega}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\Omega_L}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\omega+\Omega_L}{2}\right)\right]X_t \ . \end{aligned}$$

Usando as fórmulas de transformação de soma em produto da trigonometria:

$$Y = X + \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos\left(\frac{\Omega_L}{2}\right)}{\operatorname{sen}\omega}X_s - \frac{2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega_L}{2}\right)}{\operatorname{sen}\omega}X_t \ .$$

Agora, usando a fórmula de arco dobro do seno:

$$Y = X + \frac{\cos\left(\frac{\Omega_L}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} X_s - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Omega_L}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} X_t \ .$$

Como vimos na seção anterior,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \operatorname{sech} s \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\tanh s \ .$$

Logo,

$$Y = X - \cos\left(\frac{\Omega_L}{2}\right) \coth s \, X_s - \operatorname{sen}\left(\frac{\Omega_L}{2}\right) \cosh s \, X_t \ .$$

Ou ainda,

$$Y = X + \cos\theta \coth s \, X_s + \operatorname{sen}\theta \cosh s \, X_t \ ,$$

onde

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = -t \operatorname{sech} s \ .$$

Na figura (3.1) encontra-se a superfície de Kuen parametrizada como acima, com $-5 < s < 5$ e $0 < t < 6$.

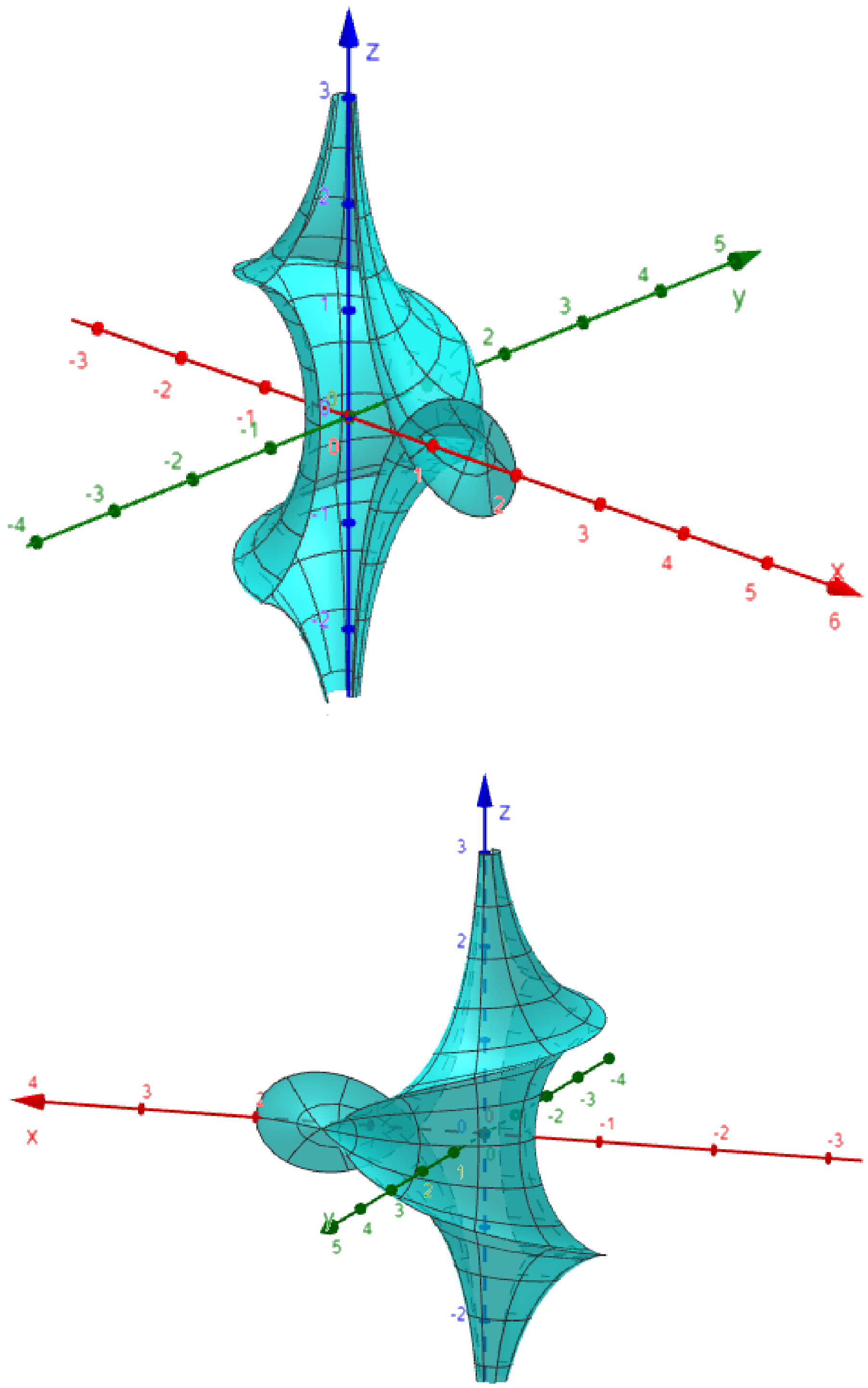


Figura 3.1: Superfície de Kuen

4
Transformação de Bäcklund entre superfícies hiperbólicas

4.1
Superfícies hiperbólicas

Uma superfície regular é **hiperbólica** quando sua curvatura gaussiana é negativa em todo ponto (mas não necessariamente constante). Veja que a classe das superfícies hiperbólicas é mais abrangente que a classe das superfícies pseudoesféricas.

Numa superfície hiperbólica, todos os pontos são hiperbólicos e, portanto, as direções assintóticas são linearmente independentes em todo ponto. Por isso, é sempre possível parametrizar esse tipo de superfície por linhas assintóticas. Começaremos deduzindo as formas fundamentais de uma superfície hiperbólica qualquer parametrizada dessa maneira.

Seja $X(u, v)$ superfície hiperbólica parametrizada por linhas assintóticas e com formas fundamentais

$$I = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 \ ,$$
$$II = e\, du^2 + 2f\, dudv + g\, dv^2 \ .$$

Por ser uma parametrização por linhas assintóticas, temos $e = g = 0$. Denotemos a curvatura gaussiana por $-\frac{1}{\rho^2}$ (agora ρ não é mais uma constante positiva, como no capítulo anterior, mas uma função que assume apenas valores positivos). Como $E, G > 0$, podemos escrever

$$E = \rho^2 a^2 \quad \text{e} \quad G = \rho^2 b^2 \ ,$$

onde a, b são funções que assumem apenas valores positivos. Sendo $\omega \in (0, \pi)$ o ângulo entre as direções assintóticas, que nesta parametrização também é o ângulo entre os vetores X_u e X_v, temos

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = |X_u| \cdot |X_v| \cdot \cos\omega = \sqrt{E} \cdot \sqrt{G} \cdot \cos\omega = \rho^2 ab \cos\omega \ .$$

Usando a fórmula (3-2):

$$-\frac{1}{\rho^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{\rho^4 a^2 b^2 \operatorname{sen}^2 \omega} \ .$$

Daí,

$$f = \pm \rho ab \operatorname{sen} \omega \ .$$

Podemos sempre assumir que o sinal acima é negativo, isto é, que $f < 0$. Caso contrário, basta trocar os papeis dos parâmetros u e v. As formas fundamentais de X são, portanto:

$$\begin{aligned} I &= \rho^2(a^2du^2 + 2ab\cos\omega dudv + b^2dv^2) \ ; \\ II &= -2\rho ab \operatorname{sen}\omega dudv \ . \end{aligned} \tag{4-1}$$

Vejamos agora como ficam as equações de Mainardi-Codazzi (equações (3-1)) para X. Como $e = g = 0$, as equações ficam:

$$\begin{aligned} -f_u &= f(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) \ ; \\ f_v &= f(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) \ . \end{aligned}$$

Para simplificar as contas, vamos denotar

$$H^2 = EG - F^2 \ .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{12} + \Gamma^1_{11} &= \frac{EG_u - FE_v}{2H^2} + \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2H^2} \\ &= \frac{EG_u + GE_u - 2FF_u}{2H^2} = \frac{[EG - F^2]_u}{2H^2} \\ &= \frac{[H^2]_u}{2H^2} = \frac{2HH_u}{2H^2} = \frac{H_u}{H} \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{12} &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2H^2} + \frac{GE_v - FG_u}{2H^2} \\ &= \frac{EG_v + GE_v - 2FF_v}{2H^2} = \frac{[EG - F^2]_v}{2H^2} \\ &= \frac{[H^2]_v}{2H^2} = \frac{2HH_v}{2H^2} = \frac{H_v}{H} \ . \end{aligned}$$

As equações de Mainardi-Codazzi ficam então:

$$
\begin{aligned}
-f_u &= f\left(2\Gamma^2_{12} - \frac{H_u}{H}\right)\\
f_v &= f\left(\frac{H_v}{H} - 2\Gamma^1_{12}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Rearranjando os termos:

$$
\begin{aligned}
\frac{f_u H - f H_u}{H^2} + 2\Gamma^2_{12}\frac{f}{H} = 0\\
\frac{f_v H - f H_v}{H^2} + 2\Gamma^1_{12}\frac{f}{H} = 0\ .
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{H}\right)_u + 2\Gamma^2_{12}\frac{f}{H} = 0\\
\left(\frac{f}{H}\right)_v + 2\Gamma^1_{12}\frac{f}{H} = 0\ .
\end{aligned}
\tag{4-2}
$$

A partir das formas fundamentais (4-1), não é difícil obter:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{\rho_u b + \rho b_u - (\rho_v a + \rho a_v)\cos\omega}{\rho b \operatorname{sen}^2\omega}\ ;\\
\Gamma^1_{12} &= \frac{\rho_v a + \rho a_v - (\rho_u b + \rho b_u)\cos\omega}{\rho a \operatorname{sen}^2\omega}\ ;
\end{aligned}
$$

e, também,

$$
\frac{f}{H} = -\frac{1}{\rho}\ . \tag{4-3}
$$

Assim, as equações de Mainardi-Codazzi ficam:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\rho_u}{\rho^2} + 2\cdot\frac{\rho_u b + \rho b_u - (\rho_v a + \rho a_v)\cos\omega}{\rho b \operatorname{sen}^2\omega}\cdot\frac{1}{\rho} = 0\ ;\\
-\frac{\rho_v}{\rho^2} + 2\cdot\frac{\rho_v a + \rho a_v - (\rho_u b + \rho b_u)\cos\omega}{\rho a \operatorname{sen}^2\omega}\cdot\frac{1}{\rho} = 0\ .
\end{aligned}
$$

Multiplicando a primeira por $(\rho^2 b \operatorname{sen}^2\omega)$ e a segunda por $(\rho^2 a \operatorname{sen}^2\omega)$:

$$
\begin{aligned}
-\rho_u b \operatorname{sen}^2\omega + 2(\rho_u b + \rho b_u) - 2(\rho_v a + \rho a_v)\cos\omega = 0\ ;\\
-\rho_v a \operatorname{sen}^2\omega + 2(\rho_v a + \rho a_v) - 2(\rho_u b + \rho b_u)\cos\omega = 0\ .
\end{aligned}
$$

Denotando as equações acima por (i) e (ii) e fazendo $(i)\cos\omega + (ii)$ e $(i) + (ii)\cos\omega$, chegamos no sistema equivalente:

$$
\begin{aligned}
-\rho_u b \operatorname{sen}^2\omega\cos\omega - 2(\rho_v a + \rho a_v)\cos^2\omega - \rho_v a \operatorname{sen}^2\omega + 2(\rho_v a + \rho a_v) = 0\ ;\\
-\rho_u b \operatorname{sen}^2\omega + 2(\rho_u b + \rho b_u) - \rho_v a \operatorname{sen}^2\omega\cos\omega - 2(\rho_u b + \rho b_u)\cos^2\omega = 0\ ,
\end{aligned}
$$

que após algumas simplificações fica:

$$-\rho_u b \operatorname{sen}^2\omega\cos\omega + \rho_v a \operatorname{sen}^2\omega + 2\rho a_v \operatorname{sen}^2\omega = 0 \ ;$$
$$\rho_u b \operatorname{sen}^2\omega + 2\rho b_u \operatorname{sen}^2\omega - \rho_v a \operatorname{sen}^2\omega\cos\omega = 0 \ .$$

Dividindo ambas por $2\rho\operatorname{sen}^2\omega$, chegamos no sistema:

$$\begin{aligned} a_v + \frac{\rho_v}{2\rho}a - \frac{\rho_u}{2\rho}b\cos\omega = 0 \ ; \\ b_u + \frac{\rho_u}{2\rho}b - \frac{\rho_v}{2\rho}a\cos\omega = 0 \ . \end{aligned} \tag{4-4}$$

Estas são as equações de Codazzi-Mainardi para superfícies hiperbólicas parametrizadas por linhas assintóticas. Finalmente, vejamos como ficam as equações de Weingarten neste tipo de parametrização. Através das fórmulas (3-17) e (4-1), obtemos:

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{\cot\omega}{\rho} \quad ; \quad b_{12} = \frac{a\csc\omega}{b\rho} \ ; \\ b_{21} &= \frac{b\csc\omega}{a\rho} \quad ; \quad b_{22} = -\frac{\cot\omega}{\rho} \ . \end{aligned}$$

Portanto, as equações de Weingarten para superfícies hiperbólicas parametrizadas por linhas assintóticas são:

$$\begin{aligned} N_u &= -\frac{\cot\omega}{\rho}X_u + \frac{a\csc\omega}{b\rho}X_v \ ; \\ N_v &= \frac{b\csc\omega}{a\rho}X_u - \frac{\cot\omega}{\rho}X_v \ . \end{aligned} \tag{4-5}$$

4.2 A equação de Moutard

Seja $X(u,v)$ superfície hiperbólica parametrizada por linhas assintóticas. A aplicação de Gauss

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

assume valores sobre a esfera $\mathbb{S}^2$. Como a curvatura de X não se anula, os vetores $N_u(q)$ e $N_v(q)$ são linearmente independentes para todo q. Assim, N é uma parametrização da esfera $\mathbb{S}^2$, chamada **representação esférica** de X. Vamos denotar por

$$\mathcal{I} = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}dudv + \mathcal{G}dv^2$$

a primeira forma fundamental da esfera nesta parametrização. Ou seja,

$$\mathcal{E} = \langle N_u, N_u\rangle \ ; \ \mathcal{F} = \langle N_u, N_v\rangle \ ; \ \mathcal{G} = \langle N_v, N_v\rangle \ .$$

Usando as equações de Weingarten (4-5) para calcular os produtos internos acima, chegamos em:

$$\mathcal{E} = a^2 \ ; \ \mathcal{F} = -ab\cos\omega \ ; \ \mathcal{G} = b^2 \ . \tag{4-6}$$

Daí,

$$E = \rho^2\mathcal{E} \ ; \ F = -\rho^2\mathcal{F} \ ; \ G = \rho^2\mathcal{G} \ ; \ H = \rho^2\mathcal{H} \ , \tag{4-7}$$

onde

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 \ .$$

Multiplicando a segunda equação (4-4) por $2\rho b$:

$$2\rho b b_u + \rho_u b^2 - \rho_v ab\cos\omega = 0 \ .$$

Pelas igualdades (4-6):

$$\rho\mathcal{G}_u + \rho_u\mathcal{G} + \rho_v\mathcal{F} = 0 \ .$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2H^2} &= \frac{\rho^2\mathcal{E}(2\rho\rho_u\mathcal{G} + \rho^2\mathcal{G}_u) + \rho^2\mathcal{F}(2\rho\rho_v\mathcal{E} + \rho^2\mathcal{E}_v)}{2\rho^4\mathcal{H}^2} \\
&= \frac{2\rho_u\mathcal{E}\mathcal{G} + \rho\mathcal{E}\mathcal{G}_u + 2\rho_v\mathcal{E}\mathcal{F} + \rho\mathcal{F}\mathcal{E}_v}{2\rho\mathcal{H}^2} \\
&= \frac{2\mathcal{E}(\rho_u\mathcal{G} + \rho\mathcal{G}_u + \rho_v\mathcal{F}) - \rho\mathcal{E}\mathcal{G}_u + \rho\mathcal{F}\mathcal{E}_v}{2\rho\mathcal{H}^2} \\
&= -\frac{\mathcal{E}\mathcal{G}_u - \mathcal{F}\mathcal{E}_v}{2\mathcal{H}^2} = -\tilde{\Gamma}_{12}^2 \ ,
\end{aligned}$$

onde $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ são os símbolos de Christoffel da representação esférica. Analogamente, $\Gamma_{12}^1 = -\tilde{\Gamma}_{12}^1$. As equações de Codazzi-Mainardi (4-2) da superfície X podem então ser escritas como:

$$\frac{\rho_u}{\rho} = -2\tilde{\Gamma}_{12}^2 \ ; \ \frac{\rho_v}{\rho} = -2\tilde{\Gamma}_{12}^1 \ . \tag{4-8}$$

Não é difícil ver, a partir das equações (4-5), que a aplicação de Gauss de N,

$$\tilde{N} = \frac{N_u \times N_v}{|N_u \times N_v|} \ ,$$

satisfaz $\tilde{N} = -N$. Logo, sendo

$$\mathcal{II} = \tilde{e}\,du^2 + 2\tilde{f}dudv + \tilde{g}\,dv^2$$

a segunda forma fundamental da representação esférica N, temos

$$\tilde{f} = -\langle N_u, \tilde{N}_v\rangle = \langle N_u, N_v\rangle = \mathcal{F} \ .$$

Dessa forma, a segunda equação de Gauss-Weingarten (veja (3-16)) da representação esférica N, isto é,

$$N_{uv} = \tilde{\Gamma}^1_{12} N_u + \tilde{\Gamma}^2_{12} N_v + \tilde{f}\tilde{N} \ ,$$

nos fornece

$$N_{uv} + \frac{\rho_v}{2\rho} N_u + \frac{\rho_u}{2\rho} N_v + \mathcal{F} N = 0 \ . \tag{4-9}$$

Defina

$$\nu = \sqrt{\rho} N \ . \tag{4-10}$$

Chamamos ν de **vetor co-normal** a X. Derivando com respeito a u:

$$\nu_u = \frac{\rho_u}{2\sqrt{\rho}} N + \sqrt{\rho} N_u \ .$$

Derivando, agora, com respeito a v:

$$\nu_{uv} = \frac{2\rho\rho_{uv} - \rho_u \rho_v}{4\rho\sqrt{\rho}} N + \frac{\rho_u}{2\sqrt{\rho}} N_v + \frac{\rho_v}{2\sqrt{\rho}} N_u + \sqrt{\rho} N_{uv} \ .$$

Dividindo ambos os lados por $\sqrt{\rho}$:

$$\frac{\nu_{uv}}{\sqrt{\rho}} = \frac{2\rho\rho_{uv} - \rho_u \rho_v}{4\rho^2} N + \frac{\rho_u}{2\rho} N_v + \frac{\rho_v}{2\rho} N_u + N_{uv} \ .$$

Somando à equação (4-9):

$$\frac{\nu_{uv}}{\sqrt{\rho}} + \mathcal{F} N = \frac{2\rho\rho_{uv} - \rho_u \rho_v}{4\rho^2} N \ ,$$

de onde

$$\nu_{uv} = \frac{2\rho\rho_{uv} - \rho_u \rho_v - 4\rho^2 \mathcal{F}}{4\rho^2} \nu \ .$$

Denotando a fração acima por Λ, concluímos que ν satisfaz à EDP

$$\boxed{\nu_{uv} = \Lambda \nu} \ . \tag{4-11}$$

Esta EDP é chamada **equação de Moutard**. Provamos, portanto, que o vetor co-normal (4-10) de uma superfície hiperbólica parametrizada por linhas assintóticas satisfaz a equação de Moutard. No teorema seguinte, mostraremos a recíproca: dada uma solução ν da EDP acima, existe, a menos de movimentos rígidos, uma única superfície hiperbólica parametrizada por linhas assintóticas com vetor co-normal ν. Estabeleceremos assim uma identificação entre a classe das superfícies hiperbólicas e as soluções da EDP de Moutard. Esta correspondência será usada mais adiante para definir a transformação de Bäcklund entre superfícies hiperbólicas.

Teorema 4.1 *Seja $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto conexo. As superfícies hiperbólicas $X(u,v)$ parametrizadas por linhas assintóticas e com domínio U estão, a menos de translações, bijetivamente associadas às soluções $\nu : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^∞ e que não se anulam, das equações de Moutard (4-11).*

Prova. Denotemos por $\mathcal{S}$ a classe das superfícies hiperbólicas parametrizadas por linhas assintóticas. Defina a relação de equivalência $\sim$ em $\mathcal{S}$ tal que $X \sim Y$ quando $X = \tau \circ Y$ para alguma translação τ de $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação $\mathcal{X}$ que leva cada classe de ${}^{\mathcal{S}}/_{\sim}$ no vetor co-normal ν de suas superfícies. Veja que $\mathcal{X}$ está bem definida, pois superfícies que diferem apenas por uma translação possuem mesmo vetor co-normal. Já vimos que ν é solução de classe C^∞ de uma equação de Moutard. Além disso, ν não se anula, pois X é regular. Resta provar que $\mathcal{X}$ é bijetiva.

Começaremos provando a injetividade. Sejam $X, Y \in \mathcal{S}$ com vetores co-normais $\nu_1 = \sqrt{\rho_1}N_1$ e $\nu_2 = \sqrt{\rho_2}N_2$, respectivamente. Suponha que $\nu_1 = \nu_2$. Assim, $\rho_1 = \rho_2$ e $N_1 = N_2$. Pelas fórmulas (4-3) e (4-7), os coeficientes das formas fundamentais de X e Y são os mesmos. Logo, pelo teorema fundamental das superfícies (veja [Ten08], pág. 209), X e Y são a mesma superfície, a menos de um movimento rígido Ψ. Além disso, Ψ deve ser apenas uma translação. Caso contrário, não teríamos $N_1 = N_2$.

Vamos agora provar a sobrejetividade. Seja $\nu : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ solução de classe C^∞ de uma equação de Moutard

$$\nu_{uv} = \Lambda \nu \ .$$

Tomando o produto escalar por ν de ambos os lados, chega-se em $\Lambda = \frac{1}{|\nu|^2}\langle \nu_{uv}, \nu \rangle$. Defina $\rho = |\nu|^2$, $N = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu$ e $\mathcal{F} = \langle N_u, N_v \rangle$. Após algumas contas, verifica-se que

$$\frac{2\rho\rho_{uv} - \rho_u\rho_v - 4\rho^2\mathcal{F}}{4\rho^2} = \frac{\langle \nu, \nu_{uv} \rangle}{\rho} = \Lambda \ .$$

Percorrendo as contas anteriores desta seção no sentido contrário, vê-se então que as equações de Codazzi-Mainardi (4-8) são satisfeitas. Como ν é C^∞, a função ρ também é C^∞. Portanto, derivando as equações (4-8), respectivamente, com respeito a v e a u, obtemos $(\tilde{\Gamma}^2_{12})_v = (\tilde{\Gamma}^1_{12})_u$. Esta condição é suficiente para construirmos uma superfície hiperbólica X parametrizada por linhas assintóticas, definida em U, com representação esférica N e curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$ (veja [C R02], pág. 47). ■

Na próxima seção definiremos uma transformação de Bäcklund entre EDPs de Moutard que, junto com o teorema (4.1), fornecem uma transformação de Bäcklund entre superfícies hiperbólicas.

4.3
A transformação de Moutard

Considere as equações de Moutard gêmeas:

$$\nu_{uv} = \Lambda\nu \quad ; \quad \nu'_{uv} = \Lambda'\nu' \; ; \tag{4-12}$$

onde $\Lambda, \Lambda' : U \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções C^∞ dadas, com $U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, e ν, ν' são as funções desconhecidas. Seja $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ uma função C^∞ satisfazendo

$$(\log\psi)_{uv} = \frac{\Lambda - \Lambda'}{2} \quad ; \quad \psi_{uv} = \Lambda\psi \; ; \tag{4-13}$$

onde o logaritmo está na base natural e. Então, o sistema de EDPs

$$\begin{aligned} (\psi\nu')_u &= -\psi\nu_u + \psi_u\nu \; ; \\ (\psi\nu')_v &= \psi\nu_v - \psi_v\nu \; ; \end{aligned} \tag{4-14}$$

que denotaremos por $\mathbb{B}_\psi$, é uma transformação de Bäcklund entre as EDPs (4-12). De fato, fixe (ν, ν') solução C^∞ do sistema. Aplicando a regra do produto nas equações do sistema, obtemos:

$$\begin{aligned} \psi_u\nu' + \psi\nu'_u &= -\psi\nu_u + \psi_u\nu \; ; \\ \psi_v\nu' + \psi\nu'_v &= \psi\nu_v - \psi_v\nu \; . \end{aligned}$$

Dividindo ambas as equações por ψ:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_u}{\psi}\nu' + \nu'_u &= -\nu_u + \frac{\psi_u}{\psi}\nu \; ; \\ \frac{\psi_v}{\psi}\nu' + \nu'_v &= \nu_v - \frac{\psi_v}{\psi}\nu \; . \end{aligned}$$

Porém,

$$\frac{\psi_u}{\psi} = (\log\psi)_u \quad \text{e} \quad \frac{\psi_v}{\psi} = (\log\psi)_v \; . \tag{4-15}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\log\psi)_u\nu' + \nu'_u &= -\nu_u + (\log\psi)_u\nu \; ; \\ (\log\psi)_v\nu' + \nu'_v &= \nu_v - (\log\psi)_v\nu \; . \end{aligned}$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} \nu_u + \nu'_u &= (\log\psi)_u \cdot (\nu - \nu') \; ; \\ \nu_v - \nu'_v &= (\log\psi)_v \cdot (\nu + \nu') \; . \end{aligned} \tag{4-16}$$

Derivando a primeira equação com respeito a v e a segunda com respeito a u:

$$\begin{aligned}\nu_{uv} + \nu'_{uv} &= (\log\psi)_{uv} \cdot (\nu - \nu') + (\log\psi)_u \cdot (\nu_v - \nu'_v) \ ;\\ \nu_{uv} - \nu'_{uv} &= (\log\psi)_{uv} \cdot (\nu + \nu') + (\log\psi)_v \cdot (\nu_u + \nu'_u) \ .\end{aligned}$$

Usando (4-13) e (4-16):

$$\begin{aligned}\nu_{uv} + \nu'_{uv} &= \frac{\Lambda - \Lambda'}{2} \cdot (\nu - \nu') + (\log\psi)_u(\log\psi)_v \cdot (\nu + \nu') \ ;\\ \nu_{uv} - \nu'_{uv} &= \frac{\Lambda - \Lambda'}{2} \cdot (\nu + \nu') + (\log\psi)_v(\log\psi)_u \cdot (\nu - \nu') \ .\end{aligned} \tag{4-17}$$

Veja que, derivando a primeira equação (4-15) com respeito a v, obtemos:

$$\frac{\psi_{uv}\psi - \psi_u\psi_v}{\psi^2} = (\log\psi)_{uv} \ .$$

De (4-13), temos então:

$$\frac{\Lambda\psi^2 - \psi_u\psi_v}{\psi^2} = \frac{\Lambda - \Lambda'}{2} \ ,$$

isto é,

$$\frac{\psi_u}{\psi} \cdot \frac{\psi_v}{\psi} = \frac{\Lambda + \Lambda'}{2} \ ,$$

ou ainda,

$$(\log\psi)_u(\log\psi)_v = \frac{\Lambda + \Lambda'}{2} \ .$$

Com isso, as equações (4-17) ficam:

$$\begin{aligned}\nu_{uv} + \nu'_{uv} &= \Lambda\nu + \Lambda'\nu' \ ;\\ \nu_{uv} - \nu'_{uv} &= \Lambda\nu - \Lambda'\nu' \ .\end{aligned}$$

Finalmente, somando e subtraindo as equações acima, chegamos em (4-12). O sistema $\mathbb{B}_\psi$ é conhecido na literatura como **transformação de Moutard** (veja [C R02], pág, 52). Esta transformação, junto com o teorema (4.1), definem uma transformação de Bäcklund entre superfícies hiperbólicas.

No lema seguinte, mostraremos uma condição necessária e suficiente para que uma superfície parametrizada seja hiperbólica com vetor co-normal ν.

Lema 4.2 *Sejam $X : U \longrightarrow V \cap S$ superfície parametrizada (não necessariamente regular) e $\nu : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ função C^∞ tal que o produto misto $[\nu, \nu_u, \nu_v]$ seja negativo em todo ponto. Então, X é parametrização por linhas assintóticas* *de uma superfície hiperbólica com vetor co-normal ν se, e somente se,*

$$X_u = \nu_u \times \nu \quad e \quad X_v = \nu \times \nu_v \ .$$

Estas fórmulas são conhecidas como ***fórmulas de Lelieuvre****.*

Prova. Suponha que $X(u,v)$ seja parametrização por linhas assintóticas de uma superfície hiperbólica com vetor co-normal ν. Fazendo o produto vetorial das equações (4-5):

$$\begin{aligned} N_u \times N_v &= \frac{\cot^2\omega}{\rho^2}(X_u \times X_v) + \frac{\csc^2\omega}{\rho^2}(X_v \times X_u) \\ &= \frac{\cot^2\omega - \csc^2\omega}{\rho^2}(X_u \times X_v) \\ &= -\frac{1}{\rho^2}(X_u \times X_v) = -\frac{|X_u \times X_v|}{\rho^2}N \\ &= -ab \operatorname{sen}\omega N \ . \end{aligned}$$

Tomando o produto vetorial por N_u de ambos os lados:

$$N_u \times (N_u \times N_v) = -ab \operatorname{sen}\omega (N_u \times N) \ .$$

Usando a fórmula de Lagrange:

$$\langle N_u, N_v \rangle N_u - \langle N_u, N_u \rangle N_v = ab \operatorname{sen}\omega (N \times N_u) \ .$$

Logo, das fórmulas (4-6):

$$-ab\cos\omega N_u - a^2 N_v = ab \operatorname{sen}\omega (N \times N_u) \ ,$$

isto é,

$$N \times N_u = -\cot\omega N_u - \frac{a}{b}\csc\omega N_v \ .$$

Analogamente, tomando o produto vetorial por N_v na equação $N_u \times N_v = -ab \operatorname{sen}\omega N$, chega-se em:

$$N_v \times N = -\frac{b}{a}\csc\omega N_u - \cot\omega N_v \ .$$

Por outro lado, das equações (4-5), é fácil obter:

$$\begin{aligned} X_u &= \rho\left(\cot\omega N_u + \frac{a}{b}\csc\omega N_v\right) \ ; \\ X_v &= \rho\left(\frac{b}{a}\csc\omega N_u + \cot\omega N_v\right) \ . \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} X_u &= \rho(N_u \times N) \ ; \\ X_v &= \rho(N \times N_v) \ . \end{aligned} \tag{4-18}$$

Porém, como $\nu = \sqrt{\rho}N$,

$$\begin{aligned} \nu_u \times \nu &= (\sqrt{\rho}N)_u \times (\sqrt{\rho}N) \\ &= \left(\frac{\rho_u}{2\sqrt{\rho}}N + \sqrt{\rho}N_u\right) \times (\sqrt{\rho}N) \\ &= (\sqrt{\rho}N_u) \times (\sqrt{\rho}N) \\ &= \rho(N_u \times N) \ . \end{aligned}$$

Analogamente, $\nu \times \nu_v = \rho(N \times N_v)$. Portanto, as fórmulas de Lelieuvre são satisfeitas. Suponha agora que X satisfaça

$$X_u = \nu_u \times \nu \quad \text{e} \quad X_v = \nu \times \nu_v \ .$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= (\nu_u \times \nu) \times (\nu \times \nu_v) \\ &= \langle(\nu_u \times \nu), \nu_v\rangle\nu - \langle(\nu_u \times \nu), \nu\rangle\nu_v \\ &= \langle(\nu_u \times \nu), \nu_v\rangle\nu \\ &= -[\nu, \nu_u, \nu_v]\nu \ . \end{aligned}$$

Como, por hipótese, o produto misto acima não se anula, X é uma parametrização regular. Defina $\rho = |\nu|^2$ e $N = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} &= \frac{-[\nu, \nu_u, \nu_v]}{|[\nu, \nu_u, \nu_v]| \cdot |\nu|}\nu \\ &= \frac{-[\nu, \nu_u, \nu_v]}{-[\nu, \nu_u, \nu_v] \cdot \sqrt{\rho}}\nu \\ &= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu = N \ . \end{aligned}$$

Ou seja, N é a aplicação normal de Gauss de X. Além disso,

$$\begin{aligned} N_u \times N_v &= \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu\right)_u \times \left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu\right)_v \\ &= \left(-\frac{\rho_u}{2\rho\sqrt{\rho}}\nu + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu_u\right) \times \left(-\frac{\rho_v}{2\rho\sqrt{\rho}}\nu + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu_v\right) \\ &= -\frac{\rho_u}{2\rho^2}(\nu \times \nu_v) - \frac{\rho_v}{2\rho^2}(\nu_u \times \nu) + \frac{1}{\rho}(\nu_u \times \nu_v) \ . \end{aligned}$$

Tomando o produto escalar com ν, obtemos:

$$\langle (N_u \times N_v), \nu \rangle = \frac{1}{\rho}[\nu, \nu_u, \nu_v] \ .$$

Porém, sabemos que

$$N_u \times N_v = K(X_u \times X_v) \ ,$$

onde K é a curvatura gaussiana de X (veja [Ten08], pág. 185). Ou seja,

$$N_u \times N_v = -K[\nu, \nu_u, \nu_v]\nu \ .$$

Tomando o produto escalar por ν:

$$\langle N_u \times N_v, \nu \rangle = -K[\nu, \nu_u, \nu_v]\langle \nu, \nu \rangle \ ,$$

isto é,

$$\frac{1}{\rho}[\nu, \nu_u, \nu_v] = -K[\nu, \nu_u, \nu_v]|\nu|^2 \ .$$

Daí,

$$K = -\frac{1}{\rho^2} \ .$$

Portanto, X é uma superfície hiperbólica e ν é seu vetor co-normal. Finalmente, para ver que X é parametrização por linhas assintóticas, basta verificar que os coeficientes da segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} e &= -\langle X_u, N_u \rangle \ ; \\ g &= -\langle X_v, N_v \rangle \ ; \end{aligned}$$

se anulam. Isto é imediato das fórmulas de Lelieuvre e sabendo que:

$$\begin{aligned} N_u &= \left(-\frac{\rho_u}{2\rho\sqrt{\rho}}\nu + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu_u \right) \ ; \\ N_v &= \left(-\frac{\rho_v}{2\rho\sqrt{\rho}}\nu + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\nu_v \right) \ . \end{aligned}$$

■

No teorema abaixo, apresentaremos uma parametrização por linhas assintóticas da transformada de Bäcklund de uma superfície hiperbólica.

Teorema 4.3 *Seja $X : U \longrightarrow V \cap S$ superfície hiperbólica parametrizada por linhas assintóticas correspondente a uma solução ν da equação de Moutard*

$$\nu_{uv} = \Lambda\nu \ .$$

Seja ν' uma transformada de Bäcklund de ν via $\mathbb{B}_\psi$, de classe C^∞. Então,

$$Y = X + \nu' \times \nu$$

é superfície hiperbólica parametrizada por linhas assintóticas correspondente a ν'. Além disso, para todo $q \in U$, o vetor $(Y - X)(q)$ é tangente a X em $X(q)$ e a Y em $Y(q)$.

Prova. Derivando a expressão de Y com respeito a u e a v, obtemos:

$$\begin{aligned} Y_u &= X_u + \nu'_u \times \nu + \nu' \times \nu_u \ ; \\ Y_v &= X_v + \nu'_v \times \nu + \nu' \times \nu_v \ . \end{aligned}$$

Usando as fórmulas de Lelieuvre (lema (4.2)):

$$\begin{aligned} Y_u &= \nu_u \times \nu + \nu'_u \times \nu + \nu' \times \nu_u \ ; \\ Y_v &= \nu \times \nu_v + \nu'_v \times \nu + \nu' \times \nu_v \ . \end{aligned}$$

Veja que a hipótese $[\nu, \nu_u, \nu_v] < 0$ é satisfeita pois estamos sempre assumindo $f < 0$. Segue que:

$$\begin{aligned} Y_u &= (\nu_u + \nu'_u) \times \nu + (\nu' \times \nu_u) \ ; \\ Y_v &= \nu \times (\nu_v - \nu'_v) + (\nu' \times \nu_v) \ . \end{aligned}$$

Pelas equações (4-16):

$$\begin{aligned} Y_u &= (\log\psi)_u(\nu - \nu') \times \nu + (\nu' \times \nu_u) \ ; \\ Y_v &= \nu \times (\log\psi)_v(\nu + \nu') + (\nu' \times \nu_v) \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Y_u &= -(\log\psi)_u(\nu' \times \nu) + (\nu' \times \nu_u) \ ; \\ Y_v &= (\log\psi)_v(\nu \times \nu') + (\nu' \times \nu_v) \ . \end{aligned}$$

Porém, nas equações (4-16), tomando o produto vetorial por ν' e rearranjando os termos, chega-se em:

$$\begin{aligned} -(\log\psi)_u(\nu' \times \nu) + (\nu' \times \nu_u) &= \nu'_u \times \nu' \ ; \\ (\log\psi)_v(\nu \times \nu') + (\nu' \times \nu_v) &= \nu' \times \nu'_v \ . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Y_u &= \nu'_u \times \nu' \ ; \\ Y_v &= \nu' \times \nu'_v \ . \end{aligned}$$

Pelo lema (4.2), concluimos que Y é uma superfície hiperbólica parametrizada por linhas assintóticas com vetor co-normal ν'. É imediato que $Y - X = \nu' \times \nu$ é tangente a X e a Y, já que os vetores co-normais ν e ν' são perpendiculares aos planos tangentes. ■

Exemplo. Considere $X(u, v)$ uma *superfície mínima afim*, isto é, uma superfície hiperbólica cujo vetor co-normal satisfaz

$$\nu_{uv} = 0 \ .$$

Equivalentemente,

$$\nu(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) \ ,$$

onde $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ são curvas C^∞ que não anulam a soma acima. Essa função ν satisfaz a equação de Moutard

$$\nu_{uv} = \Lambda\nu$$

para $\Lambda = 0$. Vamos aplicar a transformação de Moutard (4-14) para encontrarmos uma nova função ν'. Escolhamos $\psi = 1$. Veja que ψ satisfaz as condições (4-13) para $\Lambda' = 0$. Isto é, a função ν' que encontraremos satisfaz $\nu'_{uv} = 0$ e, portanto, também corresponde a uma superfície mínima afim. O sistema $\mathbb{B}_\psi$ se resume a:

$$\begin{aligned} \nu'_u &= -\nu_u \ ; \\ \nu'_v &= \nu_v \ . \end{aligned}$$

Ou ainda

$$\begin{aligned} \nu'_u(u, v) &= -\frac{d\alpha}{du}(u) \ ; \\ \nu'_v(u, v) &= \frac{d\beta}{dv}(v) \ . \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema por integração, encontramos

$$\nu'(u,v) = \beta(v) - \alpha(u) + C \ ,$$

onde $C \in \mathbb{R}^3$ é uma constante de integração. Segue, pelo teorema (4.3), que

$$Y = X + \nu' \times \nu = X + 2\beta \times \alpha + C \times (\alpha + \beta)$$

é uma parametrização correspondente a ν' tal que a reta que liga pontos correspondentes $X(u,v)$ e $Y(u,v)$ é tangente a essas duas superfícies. Essa correspondência entre as superfícies mínimas afins X e Y é conhecida como *transformação de Bäcklund afim*. Foi definida por Chern e Terng no artigo [S S80] e sua relação com a física foi mostrada em [Ant87]. Veja também [Buy92].

Na próxima seção, estudaremos a transformação de Moutard dentro de uma classe particular de superfícies hiperbólicas: as superfícies de Bianchi.

4.4 Superfícies de Bianchi

Uma **superfície de Bianchi** é uma superfície hiperbólica parametrizada por linhas assintóticas com curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$, onde $\rho > 0$, tal que:

$$\rho_{uv} = 0 \ .$$

Exemplo. Uma das superfícies de Bianchi mais simples é o paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \ ,$$

parametrizado como

$$X(u,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v), \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v), uv \right) \ . \tag{4-19}$$

Não é difícil ver que esta é uma parametrização por linhas assintóticas e que a curvatura gaussiana de X é

$$K = -\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2} \ ,$$

isto é,

$$\rho = u^2 + v^2 + 1$$

e, portanto, $\rho_{uv} = 0$.

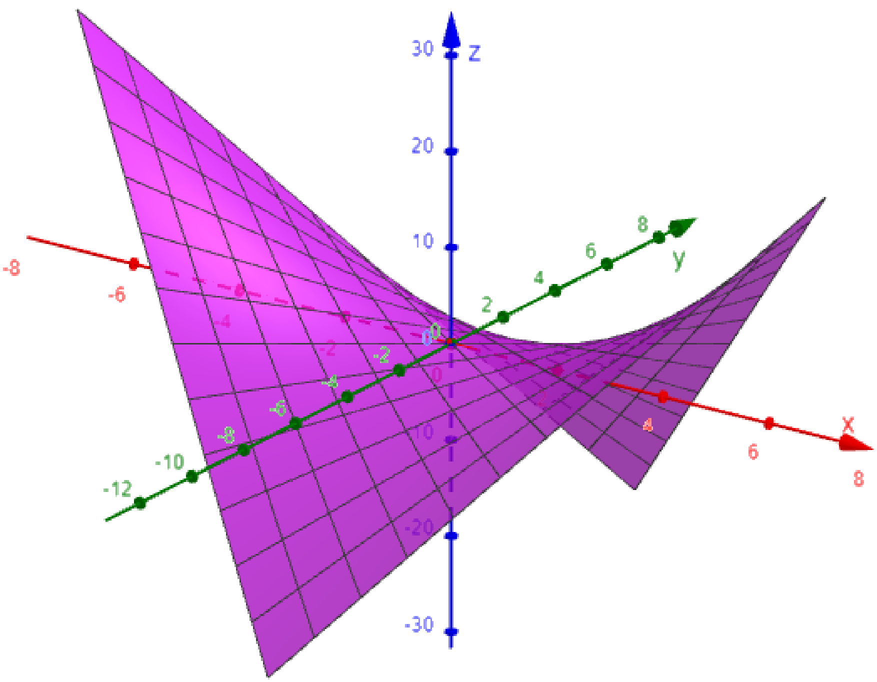


Figura 4.1: Paraboloide hiperbólico

Considere as equações de Moutard

$$\nu_{uv} = \Lambda \nu \quad \text{e} \quad \nu'_{uv} = \Lambda' \nu' \ ,$$

onde Λ, Λ' são funções reais C^∞ definidas num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Dada uma solução $\nu : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ da primeira equação, podemos usar a transformação de Moutard para encontrar soluções ν' da segunda equação. Ou seja, podemos escolher uma função $\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ de classe C^∞ satisfazendo as condições (4-13) e, então, resolver o sistema (4-14) para encontrar uma função ν' satisfazendo a segunda equação de Moutard. Veremos a seguir que restringindo as soluções semente ν àquelas que correspondem a uma superfície de Bianchi e buscando apenas soluções ν' correspondentes a uma superfície com mesma curvatura gaussiana da inicial, o processo se simplifica.

Sejam $\nu : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ solução C^∞ da primeira equação de Moutard acima e $\nu' : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformada de Bäcklund de ν que satisfaz a segunda equação de Moutard, com $(\nu \times \nu')(q) \neq 0$ para todo $q \in U$. Suponha que ν, ν' correspondam a superfícies de Bianchi $X(u,v), X'(u,v)$, respectivamente, ambas com curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$. Isto é,

$$\nu = \sqrt{\rho} N \quad \text{e} \quad \nu' = \sqrt{\rho} N' \ ,$$

onde N, N' são as representações esféricas de X, X'. Vamos adotar o triedro móvel (V, W, N) associado a X, onde

$$V = \frac{1}{2\cos\frac{\omega}{2}}\left(\frac{N_u}{a} - \frac{N_v}{b}\right) \quad \text{e} \quad W = -\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}}\left(\frac{N_u}{a} + \frac{N_v}{b}\right) .$$

Na definição acima estamos usando a mesma notação das seções anteriores, isto é, $\rho^2 a^2 = \langle X_u, X_u\rangle$, $\rho^2 b^2 = \langle X_v, X_v\rangle$ e ω é o ângulo entre as direções assintóticas de X. Não é difícil ver que (V, W, N) é de fato um triedro móvel associado a X. Veja também que V, W são as direções principais de X. As equações de Gauss-Weingarten nos fornecem o sistema Lax associado a esse triedro:

$$\begin{pmatrix} V \\ W \\ N \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_1 & -a\cos\frac{\omega}{2} \\ \Omega_1 & 0 & a\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2} \\ a\cos\frac{\omega}{2} & -a\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \\ N \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} V \\ W \\ N \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_2 & b\cos\frac{\omega}{2} \\ -\Omega_2 & 0 & b\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2} \\ -b\cos\frac{\omega}{2} & -b\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ W \\ N \end{pmatrix} ,$$

onde

$$\Omega_1 = \frac{\omega_u}{2} + \frac{a\rho_v}{2b\rho}\,\mathrm{sen}\,\omega \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \frac{\omega_v}{2} + \frac{b\rho_u}{2a\rho}\,\mathrm{sen}\,\omega .$$

Assim,

$$\nu_u = a\sqrt{\rho}\cos\frac{\omega}{2}V - a\sqrt{\rho}\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}W + \frac{\rho_u}{2\sqrt{\rho}}N ;$$
$$\nu_v = -b\sqrt{\rho}\cos\frac{\omega}{2}V - b\sqrt{\rho}\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega}{2}W + \frac{\rho_v}{2\sqrt{\rho}}N .$$

Vamos escrever N' na base (V, W, N) como

$$N' = \cos\sigma N + \mathrm{sen}\,\sigma\cos\theta\, V + \mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\theta\, W . \tag{4-20}$$

Note que σ é o ângulo entre N e N', e pode ser escolhido de maneira que $\sigma \in (0, \pi)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Das equações (4-16),

$$(\nu_u + \nu'_u) \times (\nu - \nu') = 0 ;$$
$$(\nu_v - \nu'_v) \times (\nu + \nu') = 0 .$$

Calculando ν'_u, ν'_v e substituindo nas igualdades acima, obtém-se

$$\begin{aligned} \theta_u &= \frac{\omega_u}{2} - a\tan\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{2} + \theta\right) + \frac{a\rho_v}{2b\rho}\,\mathrm{sen}\,\omega ; \\ \theta_v &= -\frac{\omega_v}{2} - b\cot\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right) - \frac{b\rho_u}{2a\rho}\,\mathrm{sen}\,\omega ; \end{aligned} \tag{4-21}$$

assim como

$$\begin{aligned} \sigma_u &= -\frac{\rho_u}{\rho}\tan\frac{\sigma}{2} \ ; \\ \sigma_v &= \frac{\rho_v}{\rho}\cot\frac{\sigma}{2} \ . \end{aligned} \tag{4-22}$$

Com isso, vemos que no caso em que a solução semente ν é associada a uma superfície de Bianchi com curvatura $-\frac{1}{\rho^2}$ e buscamos soluções ν' com essa mesma curvatura gaussiana $-\frac{1}{\rho^2}$, em vez de escolhermos ψ satisfazendo (4-13) e então resolvermos o sistema (4-14), podemos escolher σ satisfazendo (4-22) e então resolver o sistema (4-21) com função desconhecida θ. No geral, este segundo método é mais simples, pois o sistema (4-21) pode ser linearizado através da mudança de variável

$$\theta = 2\arctan\frac{\phi_1}{\phi_2} \ .$$

Veja ainda que, pela hipótese $\rho_{uv} = 0$, podemos escrever

$$\rho(u,v) = A(u) + B(v) \ ,$$

com A, B de classe C^∞ e de maneira que a soma acima seja sempre positiva. Então, o sistema (4-22) fica

$$\begin{aligned} \sigma_u &= -\frac{A_u}{A+B}\tan\frac{\sigma}{2} \ ; \\ \sigma_v &= \frac{B_v}{A+B}\cot\frac{\sigma}{2} \ ; \end{aligned}$$

e pode então ser integrado, fornecendo

$$\tan\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{B-k}{A+k}} \ ,$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração. Neste caso, denotando

$$\beta = \tan\frac{\sigma}{2} \ ,$$

para encontrarmos uma solução ν' da forma desejada, basta escolhermos uma constante real k tal que $B - k, A + k \neq 0$ em todo ponto e, então, resolvermos o sistema

$$\begin{aligned} \theta_u &= \frac{\omega_u}{2} - a\beta\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{2}+\theta\right) + \frac{aB_v}{2b(A+B)}\,\mathrm{sen}\,\omega \ ; \\ \theta_v &= -\frac{\omega_v}{2} + \frac{b}{\beta}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{2}-\theta\right) - \frac{bA_u}{2a(A+B)}\,\mathrm{sen}\,\omega \ . \end{aligned} \tag{4-23}$$

Além disso, pelo teorema (4.3),

$$X' = X + \nu' \times \nu = X + \rho(N' \times N) \ .$$

Substituindo (4-20) acima:

$$X' = X + \rho \operatorname{sen} \sigma [\cos\theta (V \times N) + \operatorname{sen}\theta (W \times N)] \ .$$

Das definições de V e W:

$$\begin{aligned}
X' &= X + \rho \operatorname{sen}\sigma \left[\frac{\cos\theta}{2\cos\frac{\omega}{2}} \left(\frac{N_u}{a} - \frac{N_v}{b} \right) \times N - \frac{\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \left(\frac{N_u}{a} + \frac{N_v}{b} \right) \times N \right] \\
&= X + \rho \operatorname{sen}\sigma \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right)}{2a \operatorname{sen}\frac{\omega}{2} \cos\frac{\omega}{2}} (N_u \times N) - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} + \theta\right)}{2b \operatorname{sen}\frac{\omega}{2} \cos\frac{\omega}{2}} (N_v \times N) \right] \\
&= X + \rho \operatorname{sen}\sigma \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right)}{a \operatorname{sen}\omega} (N_u \times N) - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} + \theta\right)}{b \operatorname{sen}\omega} (N_v \times N) \right] \ .
\end{aligned}$$

Usando (4-18):

$$X' = X + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\operatorname{sen}\omega} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \theta \right) \frac{X_u}{a} + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} + \theta \right) \frac{X_v}{b} \right] \ . \tag{4-24}$$

Finalmente, veja que se X for rede de Chebyshev de uma superfície pseudoesférica, então

$$a = b = \frac{1}{\rho} \ .$$

Além disso, como ρ é constante, A, B são constantes e, consequentemente, σ é constante. Assim, o sistema (4-23) se resume a:

$$\begin{aligned}
\theta_u &= \frac{\omega_u}{2} - \frac{\beta}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} + \theta \right) \ ; \\
\theta_v &= -\frac{\omega_v}{2} + \frac{1}{\beta\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2} - \theta \right) \ .
\end{aligned}$$

Denotando

$$\theta = \pi + \frac{\omega'}{2} \ ,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\omega' - \omega}{2} \right)_u &= \frac{\beta}{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega' + \omega}{2} \right) \ ; \\
\left(\frac{\omega' + \omega}{2} \right)_v &= \frac{1}{\beta\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega' - \omega}{2} \right) \ ;
\end{aligned}$$

que é a autotransformação de Bäcklund (3-10) da equação sine-Gordon mostrada no capítulo anterior. Comparando (4-24) com a parametrização Y do teorema (3.6), e levando em conta uma troca de parâmetros u e v, vemos que X' é superfície pseudoesférica correspondente a ω'.

5
Conclusões e trabalhos futuros

Ao parametrizarmos uma superfície pseudoesférica como rede de Chebyshev, suas formas fundamentais podem ser escritas em função do ângulo ω entre as direções assintóticas. Com isso, a equação de Gauss se reduz à equação sine-Gordon (3-7), e vemos que ω é uma solução desta EDP. Reciprocamente, toda solução da equação sine-Gordon é ângulo entre as direções assintóticas de uma superfície pseudoesférica parametrizada como rede de Chebyshev (teorema (3.3)). Esta identificação entre a classe das superfícies pseudoesféricas e o conjunto solução da equação sine-Gordon nos permite construir uma transformação de Bäcklund entre superfícies pseudoesféricas. Dada uma superfície desse tipo, encontramos a solução ω correspondente, resolvemos o sistema (3-10), encontrando novas soluções ω', e então obtemos as superfícies correspondentes a ω', por exemplo através do teorema (3.6).

Como vimos no capítulo 4, essa transformação de Bäcklund pode ser generalizada para superfícies hiperbólicas. A chave para tal feito é notar que o vetor co-normal dessas superfícies sempre satisfazem a EDP de Moutard; e, reciprocamente, toda solução desta equação é vetor co-normal de alguma superfície hiperbólica. Esta identificação, junto com a transformação de Moutard (4-14), estabelecem a transformação de Bäcklund generalizada.

Finalmente, na seção 4.4, particularizamos a transformação de Moutard para superfícies de Bianchi com mesma curvatura gaussiana, obtendo assim um sistema linearizável. Enfim, particularizando ainda mais, recuperamos a transformação de Bäcklund entre superfícies pseudoesféricas, mostrando assim que a transformação de Moutard é de fato uma generalização da primeira.

Há varios caminhos de estudo possíveis a partir deste ponto, que podem ser explorados num futuro curso de doutorado.

1. Podemos estudar as transformações de Bäcklund sob o ponto de vista da geometria afim (tivemos um pequeno exemplo disto no capítulo 4).

2. Existem outras transformações de Bäcklund com aplicações em física, tais como a transformação de Miura da equação KdV.

3. Como os teoremas (3.3) e (4.1) que estabelecem identificações entre as superfícies e as soluções de EDPs ficam ao permitirmos singularidades?

Referências bibliográficas

[Ant87] M. Antonowicz. “On the Bianchi-Bäcklund construction for affine minimal surfaces”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General 20* (1987).

[Buy92] S. G. Buyske. “An algebraic representation of the affine Bäcklund transformation”. Em: *Geometriae Dedicata 44, 7-16* (1992).

[C R02] W.K. Schief C. Rogers. *Bäcklund and Darboux Transformations*. Cambridge, 2002.

[C R82] W.F. Shadwick C. Rogers. *Bäcklund Transformations and their Applications*. Academic Press, 1982.

[Car05] Manfredo P. do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM, 2005.

[Her76] Robert Hermann. *The Geometry of Non-Linear Differential Equations, Bäcklund Transformations and Solitons, Volume XII, Part A*. Math Sci Press, 1976.

[S S80] C. L. Terng S. S. Chern. “An analogue of Bäcklund’s theorem in affine geometry”. Em: *Rocky Mountain Journal of Mathematics, 10(1), 105-124* (1980).

[Ten08] Keti Tenenblat. *Introdução à Geometria Diferencial*. Blucher, 2008.

[Tod02] Magdalena Toda. “Weierstrass-type Representation of Weakly Regular Pseudospherical Surfaces in Euclidean Space”. Em: *Balkan Journal of Geometry and Its Applications* (2002).