



Fabricio Barbosa dos Santos

**Singularidades genéricas de superfícies
pseudoesféricas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio .

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Setembro de 2024



Fabricio Barbosa dos Santos

**Singularidades genéricas de superfícies
pseudoesféricas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio . Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Marcos Craizer

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Graham Andrew Craig Smith

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 13 de Setembro de 2024

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Fabricio Barbosa dos Santos

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe.

Ficha Catalográfica

Santos, Fabricio Barbosa dos

Singularidades genéricas de superfícies pseudoesféricas / Fabricio Barbosa dos Santos; orientador: Marcos Craizer. – 2024.

66 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2024.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Parametrizações assintóticas. 3. Redes de Tchebyshev. 4. Equação de sine-Gordon. 5. Aresta cuspidal. 6. Rabo de andorinha. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

À minha mãe e ao meu pai (*in memoriam*).

Agradecimentos

Aqui, venho demonstrar os meus sinceros agradecimentos.

A Deus, por ter me dado força e coragem para enfrentar os últimos dois anos de altos e baixos do mestrado. E “Porque dele, e por ele, e para ele são todas as coisas [...]”(Romanos, 11:36).

À minha família. Em especial, à minha mãe, por sempre me apoiar, incentivar e ter feito de tudo para que eu tivesse acesso à educação e realizasse este sonho.

Ao meu orientador e professor Marcos Craizer, por todos ensinamentos, sugestões e dúvidas sanadas, além da disponibilidade para me orientar. Serei eternamente grato por toda partilha e conhecimentos adquiridos ao longo dessa parte da minha jornada estudantil.

Aos meus amigos e colegas que conheci no decorrer dessa empreitada. Agradeço demais por todos os momentos de aprendizagens, diversão e diálogos, e por tornarem a minha jornada acadêmica um pouco menos árdua e arrancarem vários risos durante nossas conversas pelo DMat.

À banca, pela disponibilidade e contribuição, e a todos professores que contribuíram para a minha formação profissional, mostrando e dando exemplos do melhor caminho a trilhar.

Aos funcionários do Departamento de Matemática, por toda orientação, empenho e zelo para que tenhamos uma experiência ímpar. Em especial, à Creuza, por toda paciência e cautela.

Ainda, agradeço a todos que cruzaram a minha caminhada acadêmica e que, de alguma forma, puderam contribuir para a minha formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Este trabalho também foi desenvolvido com apoio da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), através do programa Bolsa Mestrado e Doutorado Nota 10.

Resumo

Santos, Fabricio Barbosa dos; Craizer, Marcos. **Singularidades genéricas de superfícies pseudoesféricas**. Rio de Janeiro, 2024. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A presente dissertação foi desenvolvida com o objetivo principal de estudar e classificar as singularidades genéricas existentes nas superfícies com curvatura Gaussiana $K = -1$ em \mathbb{R}^3 . Mais especificamente, começamos o nosso estudo definindo as parametrizações assintóticas e a rede de Tchebyshev, obtendo a chamada equação de sine-Gordon. Em seguida, apresentamos características a respeito da função geradora e fizemos uma correlação entre elas e singularidades da superfície associada. Por fim, enunciemos e demonstramos um teorema que permite a localização e classificação das singularidades sobre as superfícies pseudoesféricas genéricas.

Palavras-chave

Parametrizações assintóticas; Redes de Tchebyshev; Equação de sine-Gordon; Aresta cuspidal; Rabo de andorinha.

Abstract

Santos, Fabricio Barbosa dos; Craizer, Marcos (Advisor). **Generic singularities of pseudospherical surfaces**. Rio de Janeiro, 2024. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present dissertation was developed with the main objective of studying and classifying the generic singularities existing on surfaces with Gaussian curvature $K = -1$ in \mathbb{R}^3 . More specifically, we begin our study by defining the asymptotic parameterizations and the Tchebyshev network, obtaining the so-called sine-Gordon equation. Next, we present characteristics about the generating function and make a correlation between it and the singularities of the associated surface. Finally, we state and demonstrate a theorem that allows the location and classification of singularities of a generic pseudospherical surface.

Keywords

Asymptotic parameterizations; Tchebyshev nets; sine-Gordon Equation; Cuspidal edges; Swallowtails.

Sumário

1	Introdução	11
2	Parametrizações Assintóticas e Redes de Tchebyshev	14
2.1	Parametrização Assintótica	14
2.2	Rede de Tchebyshev	16
3	Propriedades da função geradora ω	23
3.1	Existência e Unicidade	23
3.2	Reconstrução da superfície a partir de ω	24
3.3	Zeros da função geradora ω	25
4	Superfície de Amsler	28
4.1	Resolvendo a Equação de sine-Gordon	28
4.2	Encontrando as curvas de níveis $\sin(\omega) = 0$	29
4.3	A superfície de Amsler	29
5	Singularidades Genéricas	33
5.1	Preliminares	33
5.2	Aresta Cuspidal e Rabo de Andorinha	36
5.3	Classificação dos pontos	46
6	Conclusões e trabalhos futuros	54
7	Referências bibliográficas	55
A	Resultados gerais que podem ser encontrados nas referências	57
B	O problema de Goursat e a equação de sine-Gordon	62

Lista de figuras

Figura 2.1	O helicóide com algumas de suas linhas assintóticas representadas em verde, com $-2\pi \leq u \leq 2\pi$ e $-2\pi \leq v \leq 2\pi$. Fonte: Autor, 2024.	16
Figura 2.2	Ângulos de uma rede de Tchebyshev. Fonte: Autor, 2024.	21
Figura 4.1	Exemplo da região A em roxo. Fonte: Autor, 2024.	31
Figura 4.2	Superfície de Amsler com $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. Fonte: Lyle Ramshaw, 2016.	32
Figura 5.1	Pontos de aresta cuspidal para a função em 5.2.1 representados em azul, com $-15 \leq u \leq 15$ e $-10 \leq v \leq 10$. Fonte: Autor, 2024.	39
Figura 5.2	Ponto de rabo de andorinha para a função em 5.2.2 representado em verde, e pontos de aresta cuspidal representados em azul, com $-15 \leq u \leq 15$ e $-10 \leq v \leq 10$. Fonte: Autor, 2024.	40
Figura 5.3	Pontos de arestas cuspidais para a pseudoesfera representados em verde, com $-10 \leq u \leq 10$ e $-5 \leq v \leq 5$. Fonte: Autor, 2024.	42
Figura 5.4	A superfície de Kuen e suas singularidades, com $-4.5 \leq u \leq 4.5$ e $0 < v < \pi$. Fonte: Autor, 2024.	44
Figura A.1	A superfície S e o triedro do referencial de Darboux. Fonte: Autor, 2024.	57

*A Geometria existe, como já disse o filósofo,
por toda a parte. É preciso, porém, olhos para
vê-la, inteligência para compreendê-la e alma
para admirá-la.*

Beremiz Samir, *O Homem que Calculava.*

1

Introdução

No ano de 1828, através da publicação do livro *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, Gauss fez grandes contribuições para a teoria da Geometria Diferencial, sendo tal teoria o ramo da Matemática Pura que estuda propriedades geométricas usando técnicas do cálculo diferencial e integral. Em particular, ele apresentou o conceito de métrica intrínseca de uma superfície em \mathbb{R}^3 . Além disso, Gauss comprovou um fato significativo acerca de uma das propriedades geométricas abordadas na Geometria Diferencial, a curvatura Gaussiana (K): o fato de que ela é concebida de forma intrínseca (isto é, só depende da métrica), sendo esse fato trabalhado no célebre Teorema Egregium de Gauss.

Ainda no século 19, as superfícies com curvatura Gaussiana constante (em particular, aquelas cuja curvatura Gaussiana é negativa e igual a -1) ganharam destaque no que tange à investigação no campo da Geometria Diferencial. Nesse período de evidência, muitas propriedades foram descobertas e muitos exemplos de superfícies foram criados.

Tempos depois, em 1901, D. Hilbert comprovou um fato interessante a respeito de superfícies com curvatura Gaussiana constante, só que envolvendo aquelas que são negativas:

“Não existe, em \mathbb{R}^3 , superfícies completas com curvatura Gaussiana constante negativa sem singularidades.”

No entanto, embora tenhamos a garantia de que há singularidades nessa classe de superfícies, o teorema não deixa claro como são tais singularidades, qual a sua natureza e a sua regularidade. Isso porque, ao longo da demonstração, o matemático em questão parte de um objeto que não existe, mas que ele diz existir, e culmina na comprovação de que o objeto não existe de fato, como bem pontuou (Amsler 1955/56).

Nesse sentido, o objetivo central deste trabalho é explorar tais singularidades sobre as chamadas superfícies pseudoesféricas em \mathbb{R}^3 , que são superfícies com curvatura Gaussiana constante igual a -1 . Dito de outra forma, a presente dissertação tem a finalidade principal de classificar e localizar as singularidades das superfícies pseudoesféricas. Para tal, dividimos o trabalho em cinco capítulos e um apêndice.

O segundo capítulo se encarrega de oferecer subsídio teórico para o entendimento dos dois capítulos subsequentes deste trabalho. Mais precisamente, ele

é composto pelo conceito de parametrização assintótica e rede de Tchebyshev, além da obtenção da equação de sine-Gordon (cuja solução, nesse caso, representa o ângulo entre as duas direções assintóticas na região em que a equação em questão faz sentido) e suas propriedades pertinentes para o nosso contexto.

No terceiro capítulo, concentramos a nossa atenção nas características associadas à solução da equação de sine-Gordon, a qual chamamos de função geradora e denotamos por ω . Em outras palavras, a existência e unicidade da função geradora, a relação biunívoca entre a solução da equação e a superfície pseudoesférica à qual está associada, bem como a localização dos zeros de tal solução, figuram no campo destinado a esta parte da dissertação.

O quarto capítulo teve a incumbência de usar os conceitos e resultados exibidos nos capítulos dois e três para obter um exemplo de uma superfície pseudoesférica, localizar as suas singularidades e mostrar que é possível situar as singularidades de algumas dessas superfícies através do que foi dito nos capítulos precedentes. De forma mais clara, através de condições iniciais específicas para equação de sine-Gordon, conseguimos aplicar os resultados mencionados nos capítulos 2 e 3, obtendo a chamada superfície de Amsler, a qual recebe esse nome em homenagem ao autor do artigo (Amsler 1955/56).

Em sequência, no capítulo 5, seguimos as ideias dos autores do artigo (Ishikawa e Machida 2006) e focamos na descrição das singularidades sob a ótica de solução geométrica para um sistema de Monge-Ampère relativo à equação $K = -1$. Mais explicitamente, mostramos como é composto o sistema de Monge-Ampère para $K = -1$, enunciamos o “critério de KRSUY” (que nos permite localizar e classificar as singularidades) e terminamos o capítulo com o enunciado e demonstração do seguinte teorema:

Teorema 1.0.1 *Genericamente, qualquer solução geométrica para $K = -1$ possui apenas arestas cuspidais e rabos de andorinha como singularidades. Dito de outra forma, dada uma solução geométrica $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ para a equação $K = -1$, temos que, para qualquer $x_0 \in U$, uma das seguintes afirmações vale, com respeito à aplicação $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:*

- i) $\pi \circ f : (V, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão em x_0 ;*
- ii) $\pi \circ f : (V, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem uma aresta cuspidal em x_0 ;*
- iii) $\pi \circ f : (V, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem um rabo de andorinha em x_0 .*

Com ele, podemos ter noção acerca dos possíveis tipos de singularidades presentes nas superfícies pseudoesféricas genéricas.

No sexto capítulo, expressamos as conclusões que tiramos das partes antecedentes da dissertação e tecemos alguns possíveis trabalhos subsequentes.

Por fim, finalizamos nosso trabalho com dois apêndices, sendo o primeiro apêndice voltado para apresentar definições e resultados citados ao longo do texto, mas que não foram exibidos. Já o segundo traz consigo a construção que leva à unicidade e à existência de soluções da equação de sine-Gordon. As demonstrações de alguns resultados foram omitidas por estarem um pouco fora do objetivo desta dissertação.

2

Parametrizações Assintóticas e Redes de Tchebyshev

No presente capítulo, teceremos definições e resultados necessários para a compreensão da proposta desta dissertação. Para tal, foram tomadas como base as referências (Amsler 1955/56, Tenenblat 2008, Hartman e Wintner 1951). Sendo assim, o leitor pode encontrar, aqui, definições de parametrização assintótica, rede de Tchebyshev e equação de sine-Gordon, bem como algumas características interessantes sobre elas.

Ainda, é válido ressaltar que, no que segue, S sempre denotará uma superfície suave com curvatura Gaussiana negativa (K) constante igual a -1 e $X : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização suave de uma vizinhança V de $p \in S$, a menos que se diga o contrário.

2.1

Parametrização Assintótica

Quando estamos lidando com os objetos de estudo da Geometria Diferencial e queremos realizar operações sobre eles, sempre precisamos considerar as chamadas parametrizações a fim de que possamos concretizar o que desejamos. Dessa maneira, graças ao tipo de superfície S estamos interessados, o caráter de seus pontos (pontos hiperbólicos) nos permite construir um tipo de parametrização que, no nosso caso, facilita a nossa análise e obtenção daquilo que queremos mostrar. Portanto, à luz de (Amsler 1955/56, Tenenblat 2008, Toda 2003), realizamos o que vem na sequência deste início de seção.

Definição 2.1.1 (Direção Assintótica) *Dados uma superfície suave S , uma parametrização $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ e um ponto $q \in V$, dizemos que uma direção tangente à X é uma direção assintótica se a direção em questão anula a segunda forma fundamental da superfície em q .*

Agora que estamos cientes do que é uma direção assintótica, vejamos o que seria uma curva que possui tais direções ao longo dela.

Definição 2.1.2 (Linha Assintótica) *Seja S uma superfície suave. Dada $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização suave, afirmamos que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $I \subset \mathbb{R}$, é uma linha assintótica da superfície se, para qualquer $t \in I$, temos que $\alpha'(t)$ é direção assintótica de S em $(u(t), v(t))$.*

E, como fruto da combinação das definições 2.1.1 e 2.1.2, surge a chamada parametrização assintótica, como mostra a seguir.

Definição 2.1.3 (Parametrização Assintótica) *Seja S uma superfície suave com curvatura Gaussiana negativa. Dizemos que $X : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização assintótica para uma vizinhança de S se $u = cte$ e $v = cte$ são linhas assintóticas para a superfície.*

Neste caso, observe que as linhas assintóticas em questão são soluções da equação diferencial

$$e(u, v)(du)^2 + f(u, v)dudv + g(u, v)(dv)^2 = 0,$$

onde $e(u, v)$, $f(u, v)$ e $g(u, v)$ são os chamados coeficientes da segunda forma fundamental. Porém, baseado nas equações de Gauss-Codazzi e no fato de $K = -1$, podemos reparametrizar X de modo que as linhas assintóticas sejam unitárias, isto é, meçam o comprimento de arco ao longo das curvas coordenadas. Diante desse fato, advém a definição das chamadas redes de Tchebyshev.

No entanto, uma vez que estabelecemos um conceito, é interessante sabermos se sempre podemos utilizá-lo no contexto que estamos trabalhando. Dessa maneira, felizmente, é sempre possível usar parametrizações assintóticas no nosso contexto, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.1.1 (Existência e unicidade de linhas assintóticas)

Digamos que $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização de uma superfície S . Então, dado $q \in V$, existem duas linhas assintóticas $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ com $(u(0), v(0)) = q$.

Prova. Sendo $q \in V$, queremos encontrar duas curvas $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ de modo que as funções $u(t)$ e $v(t)$ satisfaçam a equação

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \tag{2-1}$$

onde $(u(t), v(t)) \in V$ e $(u(0), v(0)) = q$.

Diante disso, haja vista que os pontos $(u(t), v(t)) \in V$ são hiperbólicos, é imediato que $eg - f^2 < 0$ em tais pontos. Logo, podemos fatorar a equação (2-1) em duas equações diferenciais da forma

$$Au' + Bv' = 0, \tag{2-2}$$

e o teorema de existência e unicidade de equações diferenciais lineares (ver (Klingenberg 2013), pág. 52) nos assegura que as soluções das equações do tipo (2-2) existem, são únicas e atendem a condição inicial $(u(0), v(0)) = q$. ■

Tendo em mente a proposição anterior e baseado na seção 2 do artigo (Hartman e Wintner 1951), podemos reparametrizar nossa superfície S de tal forma que $u = cte$ e $v = cte$ sejam as curvas assintóticas.

Agora, vejamos um exemplo de parametrização assintótica.

Exemplo 2.1.1 A parametrização $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v),$$

do helicóide é uma parametrização de linha assintótica. Vamos mostrar que as suas curvas coordenadas são linhas assintóticas. Com efeito, é fácil ver que seus coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$e(u, v) = 0, \quad f(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad g(u, v) = 0.$$

Então, baseando-se na definição de linha assintótica, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma linha assintótica se, e somente se, ela satisfaz a equação (2-1). Ou seja, no nosso contexto, se

$$-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}u'v' = 0 \Leftrightarrow u'v' = 0.$$

Logo, obtemos que $u = cte$ ou $v = cte$. Assim, inferimos que a assertiva em questão é verdadeira.

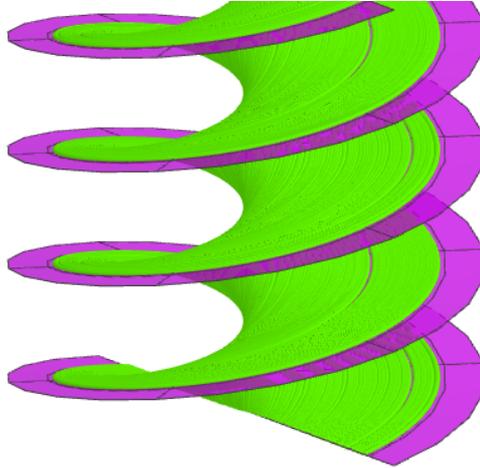


Figura 2.1: O helicóide com algumas de suas linhas assintóticas representadas em verde, com $-2\pi \leq u \leq 2\pi$ e $-2\pi \leq v \leq 2\pi$. Fonte: Autor, 2024.

2.2

Rede de Tchebyshev

Nesta seção, aproveitaremos as afirmações feitas na seção precedente e introduziremos uma nova classe de parametrização, a saber: a rede de Tchebyshev. E o termo “rede” advém do fato de que, se considerarmos um quadrilátero $ABCD$ cujos lados $u = u_0$, $u = u_1$, $v = v_0$ e $v = v_1$, temos

uma espécie de rede sobre a superfície. Isso decorre da configuração da métrica da superfície sob essa nova parametrização e a condição $K = -1$. Para a escrita do texto a seguir, usamos as referências (Amsler 1955/56, Hartman e Wintner 1951) como base.

Definição 2.2.1 (Rede de Tchebyshev) Dizemos que uma parametrização assintótica $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma rede de Tchebyshev se a métrica da superfície, nessa parametrização, tem a seguinte configuração:

$$I = (du)^2 + 2 \cos \omega(u, v) du dv + (dv)^2,$$

onde $\omega(u, v)$ é o ângulo entre as direções assintóticas unitárias X_u e X_v .

A função $\omega(u, v)$ que surgiu na definição acima é chamada de **função geradora da rede** e há várias propriedades interessantes a seu respeito - dentre essas, o fato de que podemos resgatar a superfície a partir dela. Mas iremos abordar isso no capítulo 3.

Observação 2.2.1 Uma vez que $\langle X_u, X_v \rangle = \cos(\omega(u, v))$, X é suave e $0 \leq \omega(u, v) \leq \pi$, temos um informação útil acerca da regularidade da função geradora: ela herda a suavidade da superfície X .

Agora, vejamos como que fica a segunda forma fundamental em uma rede de Tchebyshev.

Proposição 2.2.1 Em uma rede de Tchebyshev $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$, a segunda forma fundamental da superfície é reduzida a

$$II = \pm 2 \sin \omega(u, v) du dv.$$

Prova. De fato, sabemos que

$$\begin{aligned} e(u, v) &= \langle dN(X_u), X_u \rangle = II(X_u), \\ g(u, v) &= \langle dN(X_v), X_v \rangle = II(X_v). \end{aligned}$$

Daí, dado que X é uma parametrização assintótica, temos que $e(u, v) = 0$ e $g(u, v) = 0$.

Ademais, já que $K = -1$ e $e(u, v) = g(u, v) = 0$,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{f^2}{\sin^2 \omega} = -1,$$

donde $f(u, v) = \pm \sin \omega(u, v)$. Observe que, aqui, usamos o fato de $EG - F^2 = \|X_u \times X_v\|^2$.

Logo, de fato, segue que a assertiva em questão é válida. ■

No que tange às curvaturas principais k_1 e k_2 , temos o fato subsequente.

Proposição 2.2.2 *Sob uma rede de Tchebyshev $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$, as curvaturas principais k_1 e k_2 são os autovalores da matriz*

$$II \cdot I^{-1} = \begin{pmatrix} -\cot \omega & \csc \omega \\ \csc \omega & -\cot \omega \end{pmatrix},$$

onde

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad e \quad II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Isto é, elas são as raízes da equação característica

$$\lambda^2 + 2 \cot \omega \cdot \lambda - 1 = 0,$$

ou seja,

$$k_1 = \pm \tan \left(\frac{\omega}{2} \right) \quad k_2 = \mp \cot \left(\frac{\omega}{2} \right).$$

Prova. Com base no capítulo 8 do livro (Pressley 2010), em relação à base $\{X_u, X_v\}$, a matriz da diferencial da aplicação normal de Gauss dN é expressa por $II \cdot I^{-1}$. Sendo assim, estamos interessados nos λ 's tais que

$$(II \cdot I^{-1} - \lambda Id)v = 0, \tag{2-3}$$

para $v \neq 0$. Logo, observe que podemos reescrever (2-3) como

$$(II - \lambda I) \cdot I^{-1}v = 0. \tag{2-4}$$

Agora, levando em conta os fatos sobre sistemas lineares, sabe-se que o sistema (2-4) possui solução diferente da trivial se, e somente se, $\det((II - \lambda I) \cdot I^{-1}) = 0$, isto é,

$$\det(II - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \sin \omega - \lambda \cos \omega \\ \sin \omega - \lambda \cos \omega & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja, $\lambda^2 + 2\lambda \cot \omega - 1 = 0$.

Portanto, segue o resultado. ■

Por outro lado, a proposição subsequente exhibe os chamados símbolos de Christoffel para o nosso contexto. Além disso, mostra que, nesse contexto, as equações de Codazzi-Mainardi (A-5) são identicamente satisfeitas e que a equação de Gauss (A-4) vira uma equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem: a Equação de sine-Gordon.

Proposição 2.2.3 *Seja S uma superfície suave com curvatura Gaussiana $K = -1$. Sendo $\omega(u, v)$ a função geradora associada a tal superfície, veremos que, para $0 < \omega(u, v) < \pi$, os símbolos de Christoffel são:*

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\cos(\omega)\omega_u}{\sin(\omega)}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{-\omega_v}{\sin(\omega)}, \quad (2-5)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-\omega_u}{\sin(\omega)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\cos(\omega)\omega_v}{\sin(\omega)}.$$

Além do mais, as equações de Codazzi-Mainardi (A-5) são naturalmente satisfeitas, e a equação de Gauss (A-4) é equivalente a

$$\omega_{uv} = \sin \omega, \quad (2-6)$$

que é uma equação diferencial parcial do tipo hiperbólico, a qual nomeamos por equação de sine-Gordon.

Prova. A priori, dado que nossa superfície S suave tem curvatura $K = -1$, sabemos que podemos reparametrizá-la de forma que seus coeficientes da primeira e segunda forma são, respectivamente,

$$\begin{aligned} E &= 1, & F &= \cos(\omega), & G &= 1, \\ e &= 0, & f &= \sin(\omega), & g &= 0. \end{aligned} \quad (2-7)$$

Agora, com isso em mente e se baseando no que diz a proposição A.0.1, o que está escrito em (2-5) surge imediatamente.

Por outro lado, visto que já sabemos a veracidade das igualdades em (2-5), vem que, olhando as equações de Codazzi-Mainardi,

i) Do lado esquerdo delas, temos

$$\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = -\cos(\omega)\omega_u \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} = \cos(\omega)\omega_v.$$

ii) Do lado direito, também temos

$$\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 = -\cos(\omega)\omega_u \quad \text{e}$$

$$\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 = \cos(\omega)\omega_v.$$

Dessa maneira, tem-se que as equações de Codazzi-Mainardi são satisfeitas naturalmente.

Ademais, o lado direito da equação de Gauss se reduz a

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2,$$

donde

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 &= \frac{\omega_{uv} \sin(\omega) - \omega_u \omega_v \cos(\omega)}{\sin^2(\omega)} + \frac{\omega_u \omega_v \cos(\omega)}{\sin^2(\omega)} \\ &= \frac{\omega_{uv}}{\sin(\omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, já que $K = -1$, o que obtemos é a equação de sine-Gordon. \blacksquare

Por fim, uma das consequências mais importantes da rede de Tchebychev está enunciada na proposição abaixo.

Proposição 2.2.4 *Seja A um quadrilátero assintótico localizado em uma superfície com $K = -1$ constante e delimitado pelas linhas assintóticas $u = u_1$, $u = u_2$, $v = v_1$ e $v = v_2$. Então, considerando que o contorno de A é orientado positivamente, podemos afirmar que, nessas condições, a igualdade abaixo é verdadeira:*

$$[\omega]_A = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \sin \omega \, dudv, \quad (2-8)$$

em que $[\omega]_A = \omega(u_1, v_1) - \omega(u_2, v_1) + \omega(u_2, v_2) - \omega(u_1, v_2)$.

Prova. Primeiramente, vale ressaltar que o resultado que queremos mostrar advém da fórmula de Gauss-Bonnet, ou seja, consequência de

$$\iint_{\text{int}(A)} K \, dS + \oint k_g \, ds + \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 2\pi, \quad (2-9)$$

onde dS é o elemento de área da superfície, ds é o elemento de comprimento do contorno de A , k_g é a curvatura geodésica e α_i são os ângulos orientados interiores no vértice da imagem do contorno de A na superfície.

Diante disso, já que $dS = \sqrt{EG - F^2} \, dudv$, $EG - F^2 = \sin^2 \omega$ e $K = -1$, vem que

$$\iint_{\text{int}(A)} K \, dS = - \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \sin \omega \, dudv.$$

Por outro lado, a orientação da borda de A e a definição do ângulo ϕ_i (ver fig. 2.2) mostram que

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i = \phi_1 + (\pi - \phi_2) + \phi_3 + (\pi - \phi_4) = 2\pi + [\omega]_A,$$

onde $\phi_1 = \omega(u_1, v_1)$, $\phi_2 = \omega(u_2, v_1)$, $\phi_3 = \omega(u_2, v_2)$ e $\phi_4 = \omega(u_1, v_2)$.

Por fim, com base em (Hartman e Wintner 1951), a integral da curvatura geodésica sobre o contorno de A pode ser substituída pela soma dos ângulos obtidos em cada curva do contorno através do fato de X_u e X_v serem transportados paralelamente sobre tais curvas. Assim, depreende-se a expressão

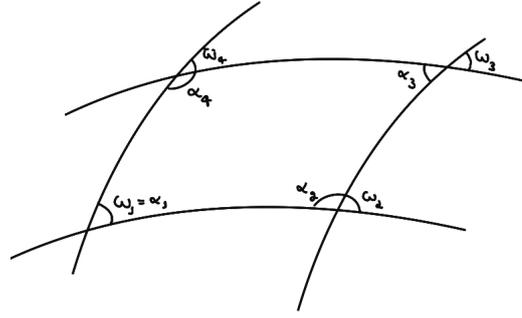


Figura 2.2: Ângulos de uma rede de Tchebyshev. Fonte: Autor, 2024.

subsequente:

$$\begin{cases} k_g = -\omega_u(u, v_0) \text{ (em uma linha } v = v_0), \\ k_g = \omega_v(u_0, v) \text{ (em uma linha } u = u_0). \end{cases} \quad (2-10)$$

Sendo assim, veremos

$$\begin{aligned} \oint k_g ds &= \int_{u_1}^{u_2} -\omega_u(u, v_1) du + \int_{u_2}^{u_1} -\omega_u(u, v_2) du + \int_{v_1}^{v_2} \omega_v(u_2, v) dv \\ &\quad + \int_{v_2}^{v_1} \omega_v(u_1, v) dv \\ &= -\omega(u_2, v_1) + \omega(u_1, v_1) - \omega(u_1, v_2) + \omega(u_2, v_2) + \omega(u_2, v_2) \\ &\quad - \omega(u_2, v_1) + \omega(u_1, v_1) - \omega(u_1, v_2) \\ &= 2[\omega]_A. \end{aligned}$$

Portanto, levando em conta as informações presentes nos 4 últimos parágrafos antecedentes, a equação (2-9) vira

$$-\int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \sin \omega dudv + 2[\omega]_A + 2\pi - [\omega]_A = 2\pi,$$

culminando em

$$[\omega]_A = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \sin \omega dudv.$$

■

Observação 2.2.2 De posse do resultado anterior (a proposição 2.2.4), podemos obter a chamada Equação de sine-Gordon (B-5) e perceber que $\omega_{uv} = \omega_{vu}$ mesmo que ω só seja de classe C^1 . De fato, fixando u_1 e v_1 e deixando $u = u_2$

$v = v_2$ variar, a equação (2-8) nos dá:

$$\omega_u(u, v) - \omega_u(u, v_1) = \int_{v_1}^v \sin \omega dv,$$

$$\omega_v(u, v) - \omega_v(u_1, v) = \int_{u_1}^u \sin \omega du.$$

Finalmente, derivando a primeira equação em relação à v e a segunda em relação à u , chegamos na Equação de sine-Gordon:

$$\omega_{uv} = \sin \omega. \tag{2-11}$$

3

Propriedades da função geradora ω

Neste capítulo, nos debruçaremos sobre as características da solução da equação de sine-Gordon (2-11), isto é, iremos estudar o comportamento da função geradora $\omega(u, v)$ e suas consequências. Com isso, além da correspondência local um para um entre a função geradora ω e a superfície S , uma consequência crucial para nós é: quando $\omega = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, temos que as linhas coordenadas são paralelas entre si. Logo, a região do plano coordenado \mathbb{R}^2 que corresponde a $\omega(u, v) = n\pi$ gera uma curva ao longo da superfície, sendo tal curva detentora de uma única linha assintótica (ao invés de duas, como diz a curvatura Gaussiana negativa). Assim, nessas regiões, temos “patologias” na superfície, ou melhor: temos singularidades.

Portanto, para atingirmos nosso objetivo, levamos em consideração as assertivas e conclusões presentes em (Amsler 1955/56, Stoker 1989, McLachlan 1994).

3.1

Existência e Unicidade

Neste campo, estaremos interessados em estabelecer condições sob as quais conseguimos obter soluções ω para a equação de sine-Gordon. Para isso, começamos definindo o que seria “domínio característico”.

Definição 3.1.1 (Domínio Característico) *Seja o plano \mathbb{R}^2 com coordenadas cartesianas retangulares u, v . Chamamos de domínio característico qualquer parte do plano delimitada por dois segmentos horizontais e dois verticais na qual a equação (2-11) faz sentido.*

Sob essa óptica, as circunstâncias em que uma função $\omega(u, v)$ existe são descritas pelo teorema abaixo.

Teorema 3.1.1 (Existência e unicidade da função ω) *Sejam $\phi_1(u)$ e $\phi_2(v)$ duas funções suaves definidas em $\alpha \leq u \leq \beta$ e $\gamma \leq v \leq \delta$, respectivamente, com $\alpha, \gamma < 0$ e $\beta, \delta > 0$. Além disso, suponhamos que $\phi_1(0) = \phi_2(0)$. Então, podemos afirmar que existe, no domínio característico fechado \bar{D} $\alpha \leq u \leq \beta$, $\gamma \leq v \leq \delta$, uma única função suave $\omega(u, v)$ que satisfaz*

$$[\omega]_A = \iint_A \sin \omega dudv \quad (3-1)$$

para qualquer retângulo característico A localizado em \bar{D} . Ademais, temos que $\omega(u, 0) = \phi_1(u)$ e $\omega(0, v) = \phi_2(v)$.

Prova. A demonstração deste teorema se encontra no apêndice B. ■

3.2

Reconstrução da superfície a partir de ω

Na presente seção, abordaremos o caráter biunívoco local entre a função geradora ω e a respectiva superfície S com curvatura $K = -1$. Dito de outra forma, mostraremos que conseguimos recuperar localmente e unicamente, a menos de troca de parâmetros u e v , da escolha de origem $u = v = 0$, assim como movimentos rígidos no espaço, a nossa superfície S a partir da função ω correspondente.

De posse da proposição 2.2.3, vamos enunciar e demonstrar o teorema que sustenta o que fora dito no início desta seção.

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade de superfície a partir de ω)

Digamos que $\omega(u, v)$ é uma solução suave da equação de sine-Gordon com domínio característico \bar{D} . Então, dado $(u_0, v_0) \in \bar{D}$ tal que $0 < \omega(u_0, v_0) < \pi$, então existe, localmente, uma única superfície S com curvatura Gaussiana $K = -1$ e

$$I = (du)^2 + 2 \cos(\omega) dudv + (dv)^2 \quad e \quad II = 2 \sin(\omega) dudv.$$

Prova. Primeiramente, dado que $\omega(u, v)$ é suave em \bar{D} , conseguimos uma vizinhança $D \subset \bar{D}$ de (u_0, v_0) tal que $\sin(\omega) > 0$ em D . Então, restringimos nossa atenção para tal subconjunto D .

Agora, sendo $E = G = 1$, $F = \cos(\omega)$, e sendo $e = g = 0$, $f = \sin(\omega)$, é verdade que todos são suaves. Ademais, usando a proposição 2.2.3, vemos que eles satisfazem as equações de compatibilidade. Portanto, pelo teorema A.0.2, existe uma única superfície S correspondente ao domínio D tal que

$$I = (du)^2 + 2 \cos(\omega) dudv + (dv)^2 \quad e \quad II = 2 \sin(\omega) dudv$$

são a primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. E é imediata a verificação de que a superfície em questão possui curvatura Gaussiana $K = -1$.

■

Finalmente, temos o que fora dito no começo da seção descrito no corolário a seguir.

Corolário 3.2.1 *Consideremos S como sendo uma superfície suave com curvatura Gaussiana $K = -1$ ao longo dela. Sendo assim, a partir da função geradora $\omega(u, v)$ concebida por tal superfície, podemos resgatá-la localmente e unicamente, isto é, do ponto de vista local, $\omega(u, v)$ não concebe, a menos de*

movimentos rígidos e reparametrizações, outra superfície diferente da superfície S que lhe deu origem.

Prova. A ideia central da prova desse corolário mora no fato de que $\omega(u, v)$ herda a suavidade da superfície S , satisfaz a equação de sine-Gordon em um domínio \bar{D} e conseguimos uma região sobre a qual $0 < \omega(u, v) < \pi$ (que vem da configuração da curvatura Gaussiana de S). Percebido isso, o teorema 3.2.1 é aplicável, e o resultado segue. ■

3.3

Zeros da função geradora ω

Agora, observe que, já que o fato de $\omega(u, v)$ satisfazer (3-1) implica na equação de sine-Gordon e estamos interessados na relação entre tal função e uma superfície com curvatura Gaussiana $K = -1$ e as consequências disso, a proposição subsequente nos fornece um fato útil para o nosso objetivo: a localização de singularidades para a superfície S a partir da função geradora ω .

Proposição 3.3.1 *Sejam o domínio $a \leq u \leq b$, $\gamma \leq v \leq \delta$ e $\omega(u, v)$ uma solução suave da equação de sine-Gordon (como no Teorema 3.1.1). Ainda, sejam $(\alpha, 0)$ e $(\beta, 0)$ dois pontos sobre o eixo u tais que $a < \alpha < \beta < b$. Se, no intervalo $a \leq u \leq b$, temos $\omega_u > 0$ e $\sin \omega > 0$, então sempre é possível encontrar um zero da função $\sin \omega$ no domínio \bar{D} $\alpha \leq u \leq \beta$, $\gamma \leq v \leq \delta$ se considerarmos δ suficientemente grande.*

Prova. Primeiramente, escolhamos dois pontos $(\alpha', 0)$ e $(\beta', 0)$ sobre o eixo u , com $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, de modo que tenhamos

$$\begin{aligned} \omega(\alpha', 0) - \omega(\alpha, 0) &= \epsilon \\ \omega(\beta, 0) - \omega(\beta', 0) &= \epsilon, \end{aligned} \tag{3-2}$$

com $\epsilon > 0$. Agora, definamos os domínios sobre os quais iremos trabalhar: A o domínio $\alpha \leq u \leq \beta$, $0 \leq v \leq v_1 < \delta$, e A' o domínio $\alpha' \leq u \leq \beta'$, $0 \leq v \leq v_1$.

Diante disso, levando em conta o fato de $\sin \omega > 0$ em $\alpha \leq u \leq \beta$ sobre o eixo u , podemos determinar, por continuidade, v_1 de forma que tenhamos $\sin \omega > 0$ em A – por exemplo, $0 < \omega < \pi$. Com isso, vamos analisar o comportamento da função ω nos pontos de A' : dado $(u, v) \in A'$, de acordo com o Teorema 3.1.1, temos que, sendo $A'_1 = [\alpha, u] \times [0, v]$,

$$\omega(\alpha, 0) - \omega(u, 0) + \omega(u, v) - \omega(\alpha, v) = \iint_{A'_1} \sin \omega \, du \, dv > 0,$$

donde, com base na primeira igualdade em (3-2) e no fato de $\omega_u > 0$ sobre a porção que estamos tomando no eixo u , obtemos

$$\omega(u, v) > \omega(u, 0) - \omega(\alpha, 0) > \epsilon,$$

dado que $\omega(\alpha, v) > 0$.

De forma análoga, considerando o retângulo característico $A'_2 = [u, \beta] \times [0, v]$, temos

$$\omega(u, 0) - \omega(\beta, 0) + \omega(\beta, v) - \omega(u, v) > 0,$$

isto é,

$$\omega(u, v) < \pi - [\omega(\beta, 0) - \omega(u, 0)] < \pi - \epsilon,$$

haja vista que $0 < \omega(\beta, v) < \pi$.

Sabendo disso, note que, em A' ,

$$\epsilon < \omega(u, v) < \pi - \epsilon.$$

E isso nos permite dizer que

$$\sin \omega(u, v) > \sin \epsilon \tag{3-3}$$

para $(u, v) \in A'$.

Agora que já temos informações acerca de $\sin \omega$ em A' , fazendo o uso de (3-1), veremos que

$$\omega(\alpha', 0) - \omega(\beta', 0) + \omega(\beta', v_1) - \omega(\alpha', v_1) = \iint_{A'} \sin \omega \, du \, dv > (\beta' - \alpha') v_1 \sin \epsilon,$$

levando em conta o que está posto em (3-3).

Portanto, podemos inferir que, desde que $\omega(\beta', 0) - \omega(\alpha', 0) > 0$ e $\omega(\alpha', v) > 0$,

$$v_1(\beta' - \alpha') \sin \omega < \omega(\beta', v_1) - [\omega(\beta', 0) - \omega(\alpha', 0)] < \pi, \tag{3-4}$$

resultado em

$$v_1 < v_1^* = \frac{\pi}{(\beta' - \alpha') \sin \epsilon}.$$

Logo, em \bar{D} , temos, portanto, um zero de $\sin \omega$ se escolhermos $\delta > v_1^*$. ■

Observação 3.3.1 *Percebe-se que o valor de v_1^* depende apenas dos valores que ω assume no eixo u .*

Além disso, como resultado da proposição acima, podemos enunciar o corolário seguinte – que é uma releitura do Teorema de Hilbert.

Corolário 3.3.1 *Não existe, em \mathbb{R}^3 , superfície fechada com $K = -1$ sem singularidades.*

4

Superfície de Amsler

O presente capítulo tem o objetivo central de obter uma superfície S com curvatura Gaussiana $K = -1$ a partir de uma solução da equação de sine-Gordon $\omega(u, v)$, bem como localizar as suas singularidades. Em outras palavras, começaremos determinando as condições iniciais para a equação (2-11) de forma que o teorema 3.1.1 seja aplicável. Em seguida, usaremos a unicidade da função ω para exibir a configuração de suas linhas de níveis. Feito isso, usaremos a proposição 3.3.1 para descobrir as curvas de níveis que anulam $\omega(u, v)$. Na sequência, veremos que há uma região em que o teorema 3.2.1 se aplica, obtendo a chamada superfície de Amsler. Por fim, apresentaremos fatos acerca de sua configuração.

A base para este capítulo foi (Amsler 1955/56).

4.1

Resolvendo a Equação de sine-Gordon

A priori, dadas as condições iniciais $\omega(u, 0) = \omega(0, v) = \omega_0$, sendo ω_0 constante e $u, v \in \mathbb{R}^2$, temos que existe, no plano u, v , uma única solução $\omega(u, v)$ da equação $\omega_{uv} = \sin \omega$. Observe que isso decorre do Teorema 3.1.1, haja vista que as condições iniciais são suaves e coincidem quando $u = v = 0$. Além disso, perceba que ω é analítica em todo \mathbb{R}^2 , em virtude de que $\omega(u, 0)$ e $\omega(0, v)$ são analíticas ao longo dos seus respectivos eixos de definição.

Por outro lado, dado λ constante real não nula, observe que a aplicação $\bar{\omega}(u, v) = \omega(\lambda u, \lambda^{-1}v)$ satisfaz a equação $\bar{\omega}_{uv} = \sin \bar{\omega}$ e tem as mesmas condições iniciais para $u = 0$ e $v = 0$. Com efeito, levando em conta que as condições iniciais de ω , tem-se que

$$\bar{\omega}(u, 0) = \omega(\lambda u, 0) = \omega_0,$$

$$\bar{\omega}(0, v) = \omega(0, \lambda^{-1}v) = \omega_0.$$

Ademais, $\omega_{uv} = \sin \omega$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Em particular, temos $\omega_{uv}(\lambda u, \lambda^{-1}v) = \sin \omega(\lambda u, \lambda^{-1}v)$, isto é, $\bar{\omega}_{uv} = \sin \bar{\omega}$. Logo, por unicidade da solução, afirmamos que $\bar{\omega} = \omega$. Desse fato e da analiticidade da função ω advém a afirmação de que $\omega(u, v)$ depende do produto uv , resultando na caracterização das linhas de nível da função $\omega(u, v)$: as hipérbolas equiláteras $uv = cte$. Foquemos nelas.

4.2

Encontrando as curvas de níveis $\sin(\omega) = 0$

Assim como posto em (Amsler 1955/56), estaremos considerando $0 < \omega_0 < \pi$. Então, por continuidade da função $\sin \omega$ e dado que $\sin \omega > 0$ sobre o eixo u , obtemos que, em um ponto do primeiro quadrante $u > 0, v > 0$, localizado suficientemente próximo do eixo u :

$$\omega_u(u, v_0) = \omega_u(u, 0) + \int_0^{v_0} \sin \omega dv = \int_0^{v_0} \sin \omega dv > 0.$$

Diante disso, note que a Proposição 3.3.1 é aplicável tomando como base uma vizinhança de (u, v_0) no segmento $v = v_0$, uma vez que conseguimos $\omega_u > 0$ e $\sin \omega > 0$ em tal vizinhança. Daí, é válido dizer que existe, no primeiro quadrante, um ramo de hipérbole $uv = cte$ tal que $\sin \omega = 0$, já que encontraremos um zero da função ω e temos que as linhas de nível dela são hipérbolas.

Agora, seja $uv = \lambda_1$ (λ_1 constante) a primeira linha de nível $\sin \omega = 0$ alcançada dessa forma. Como $\omega_u > 0$ em qualquer segmento entre o eixo v e essa hipérbole, a equação $\sin \omega = 0$ em $uv = \lambda_1$ só admite a solução $\omega = \pi$. Assim sendo, como a função ω depende apenas do produto uv , então a segunda parte dessa hipérbole, localizada no terceiro quadrante do plano, também é uma linha de nível $\omega = \pi$, já que $uv > 0$ nesse quadrante.

Por outro lado, nos demais quadrantes (2° e 4°) há uma linha de nível $uv = \lambda_2$ (λ_2 constante) onde $\omega = 0$. De fato, para vermos isso, basta percebermos que a transformação

$$\begin{cases} \bar{u} = -u \\ \bar{v} = v \\ \bar{\omega} = \pi - \omega \end{cases}$$

descreve os 2° e 4° quadrantes nos 1° e 3° quadrantes, respectivamente. Dessa maneira, com um raciocínio similar, chegamos no fato de $\omega = 0$ sobre a linha de nível $uv = \lambda_2$.

4.3

A superfície de Amsler

Portanto, tendo em mente as seções 4.1 e 4.2, podemos afirmar que ω gera, no espaço \mathbb{R}^3 , uma superfície $K = -1$ e analítica. Isso porque, no domínio do plano u, v delimitado pelos 4 ramos das hipérbolas $uv = \lambda_1$ e $uv = \lambda_2$, a função $\omega(u, v)$ atende as condições de suavidade e de $\sin \omega(u, v) > 0$, além

de satisfazer as equações de compatibilidade. Tal superfície é conhecida como superfície de Amsler.

As curvas de bordas de tal superfície são quatro, sendo duas $\omega = 0$ e duas $\omega = \pi$. Ainda, as linhas assintóticas $u = 0$ e $v = 0$ são retas, em virtude de que $\omega(u, 0) = \omega(0, v) = \omega_0$ e sabemos que as curvaturas geodésicas são dadas por $c_1 = -\omega_u$ e $c_2 = \omega_v$ ao longo de linhas $v = cte$ e $u = cte$, respectivamente. Logo, pelas equações de Frenet (A-2), inferimos que o vetor tangente é constante ao longo de tais linhas assintóticas.

Ainda no fito de descrever a superfície de Amsler, observe que ω_0 representa o ângulo formado pelas retas assintóticas $u = 0$ e $v = 0$, além de a superfície possuir uma área infinitamente grande. Com efeito, seja A a região hiperbólica do primeiro quadrante, delimitada pelo eixo u , as assíntotas $u = u_0, v = 0$ (onde $u_0 v_0 > \lambda_1$) e a curva $uv = \lambda_1$. A sua área é expressa através da fórmula de Stokes:

$$\iint_A \sin \omega \, dudv = \iint_A \omega_{uv} \, dudv = - \oint \omega_u \, dv, \quad (4-1)$$

onde, na última igualdade, fizemos o processo contrário do teorema de Green. Então, calculemos a última integral:

- 1) Sobre $u = 0, u = u_0, v = 0$, é fato que

$$\int \omega_u \, dv = 0;$$

- 2) Sobre $uv = \lambda_1$, observe que

$$\omega_u = \frac{\partial \omega}{\partial (uv)} \cdot \frac{\partial (uv)}{\partial u} = cte \cdot v = cte \cdot \frac{1}{u},$$

donde

$$cte \int_{u_0}^u \frac{1}{u} \, du = -cte [\log(u_0) - \log(u)] = -cte \log \left(\frac{u_0 v_0}{\lambda_1} \right).$$

- 3) Sobre $v = v_0$,

$$\int_u^0 \omega_u \, du = \omega(0, v_0) - \omega(u, v_0) = -[\pi - \omega_0].$$

Assim, baseado nos três fatos anteriores e em 4-1, concluímos que

$$\iint_A \sin \omega \, dudv = \pi - \omega_0 + cte \log \left(\frac{u_0 v_0}{\lambda_1} \right),$$

que tende ao infinito ao mesmo tempo que u_0 ou v_0 vai.

4.3.1

Caso $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$

A superfície obtida do caso particular $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ chama a atenção porque:

- 1) No plano u, v , as linhas de níveis $uv = \lambda_1$ e $uv = \lambda_2$, para as quais temos $\sin \omega = 0$, são simétricas. Ou seja, nesse caso, temos que $\lambda_1 = -\lambda_2$;
- 2) Há várias simetrias presentes, uma vez que o ângulo entre as linhas assintóticas $u = 0$ e $v = 0$ é reto;
- 3) Devido ao fato 1), existe, na superfície em questão, um quadrilátero assintótico A cujos quatro vértices estão nas linhas de singularidade $\omega = 0$ e $\omega = \pi$. Nesse caso, temos que

$$\iint_A \sin \omega \, du \, dv = \pi - 0 + \pi - 0 = 2\pi,$$

ou seja, tem a soma alternada igual a 2π .

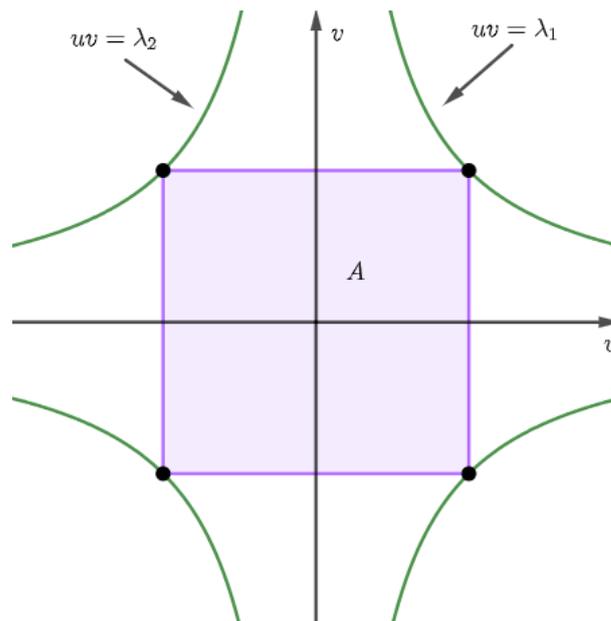


Figura 4.1: Exemplo da região A em roxo. Fonte: Autor, 2024.

Por outro lado, para construir a figura 4.2 – retirada de (Ramshaw 2016) –, o método consiste em realizar a integração da equação diferencial $\omega_{uv} = \sin \omega$ com $\omega(u, 0) = \omega(0, v) = \frac{\pi}{2}$. E o leitor interessado em saber no que consiste o método numérico para o esboço da superfície de Amsler pode encontrá-lo nas últimas páginas de (Amsler 1955/56).

Além disso, observe que, na figura da superfície de Amsler, podemos visualizar que a região correspondente ao quadrilátero assintótico A de área

máxima 2π está delimitada pela linha verde. Além disso, as partes correspondentes às linhas de níveis $uv = \lambda_1$ e $uv = \lambda_2$ são justamente as bordas da superfície.

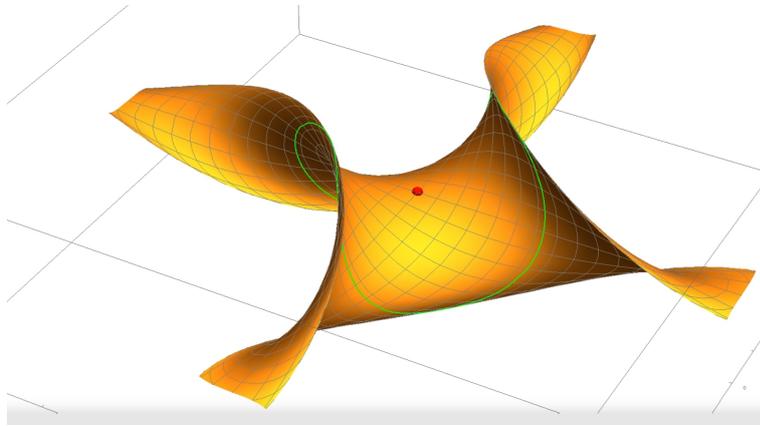


Figura 4.2: Superfície de Amsler com $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. Fonte: Lyle Ramshaw, 2016.

5 Singularidades Genéricas

Neste capítulo, buscamos descrever as singularidades da nossa superfície suave S com curvatura Gaussiana constante igual -1 via solução geométrica para um sistema de Monge-Ampère para $K = -1$. Para chegarmos nisso, definimos as estruturas do sistema de Monge-Ampère para o caso $K = -1$, estabelecemos o chamado “critério de KRSUY” e demonstramos o teorema que classifica os pontos de uma superfície pseudoesférica genérica S . A referência principal deste capítulo foi o artigo (Ishikawa e Machida 2006).

5.1 Preliminares

Aqui, nesta primeira seção do capítulo 5, iremos preparar nosso terreno para que consigamos atingir o objetivo firmado no parágrafo acima. Ciente disso, inciemos apresentando o sistema de Monge-Ampère para $K = -1$.

5.1.1 Sistema de Monge-Ampère para $K = -1$

Seja $z = f(u, v)$ uma superfície suave nas coordenadas $(u, v, z) \in \mathbb{R}^3$. Sendo assim, considerando $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, observe que o vetor normal ao longo dela é dado por $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}(-f_u, -f_v, 1)$, os coeficientes da primeira forma são

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2,$$

e os coeficientes da segunda forma são

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}},$$

donde, já que uma das formas de obtermos a curvatura Gaussiana é via a fórmula $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$, obtemos que

$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}. \quad (5-1)$$

Diante desse fato, de acordo com os autores de (Ishikawa e Machida 2006), podemos reescrever a equação (5-1) como um sistema diferencial, o chamado sistema de Monge-Ampère. Para expressarmos tal sistema, sendo $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ o sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, podemos nos res-

tringir a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ e definir a 2-forma

$$\begin{aligned}\omega &= -(y_1 dx_2 \wedge dx_3 + y_2 dx_3 \wedge dx_1 + y_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &\quad -(y_1 dy_2 \wedge dy_3 + y_2 dy_3 \wedge dy_1 + y_3 dy_1 \wedge dy_2)\end{aligned}$$

e a forma de contato $\theta = y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3$ no fibrado tangente $T(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2)$, e note que ω implica em na equação (5-1) quando igualada a zero. De fato, sendo $a = 1 + f_u^2 + f_v^2$ e considerando a forma do vetor \mathbf{N} , temos que

$$y_1 = -\frac{f_u}{a^{\frac{1}{2}}}, \quad y_2 = -\frac{f_v}{a^{\frac{1}{2}}}, \quad y_3 = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Com isso, perceba que, por um lado,

$$\begin{aligned}y_1 dy_2 \wedge dy_3 &= \frac{f_u}{a^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{f_v}{a^{\frac{1}{2}}} \right)_u du + \left(\frac{f_v}{a^{\frac{1}{2}}} \right)_v dv \right] \wedge \left[\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right)_u du + \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right)_v dv \right] \\ &= \frac{f_u}{a^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{f_v}{a^{\frac{1}{2}}} \right)_u \cdot \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right)_v - \left(\frac{f_v}{a^{\frac{1}{2}}} \right)_v \cdot \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \right)_u \right] du \wedge dv \\ &= \frac{f_u}{a^{\frac{1}{2}}} \left[-\frac{f_{uv}}{a^2} (f_u f_{uv} + f_v f_{vv}) + \frac{1}{a^3} (f_u f_{uv} + f_v f_{vv}) (f_u f_{uu} + f_v f_{vv}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{vv}}{a^2} (f_u f_{uu} + f_v f_{vv}) - \frac{1}{a^3} (f_u f_{uu} + f_v f_{vv}) (f_u f_{uv} + f_v f_{vv}) \right] du \wedge dv \\ &= \frac{f_u}{a^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{f_u}{a^2} f_{uu} f_{vv} - \frac{f_u}{a^2} (f_{uv})^2 \right] du \wedge dv \\ &= \frac{(f_u)^2}{a^{\frac{5}{2}}} [f_{uu} f_{vv} - (f_{uv})^2] du \wedge dv,\end{aligned}$$

e, de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned}y_2 dy_3 \wedge dy_1 &= \frac{(f_v)^2}{a^{\frac{5}{2}}} [f_{uu} f_{vv} - (f_{uv})^2] du \wedge dv, \\ y_3 dy_1 \wedge dy_2 &= \frac{1}{a^{\frac{5}{2}}} [f_{uu} f_{vv} - (f_{uv})^2] du \wedge dv.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 y_1 dx_2 \wedge dx_3 &= -\frac{f_u}{a^{\frac{1}{2}}} dv \wedge df \\
 &= -\frac{f_u}{a^{\frac{1}{2}}} dv \wedge (f_u du + f_v dv) \\
 &= \frac{(f_u)^2}{a^{\frac{1}{2}}} du \wedge dv,
 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$y_2 dx_3 \wedge dx_1 = \frac{(f_v)^2}{a^{\frac{1}{2}}} du \wedge dv,$$

$$y_3 dx_1 \wedge dx_2 = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} du \wedge dv,$$

Logo, diante dos cálculos feitos acima,

$$\begin{aligned}
 \omega &= \left[-\left(\frac{(f_u)^2 + (f_v)^2 + 1}{a^{\frac{1}{2}}} \right) - \left(\frac{(f_u)^2 + (f_v)^2 + 1}{a^{\frac{5}{2}}} (f_{uu}f_{vv} - (f_{uv})^2) \right) \right] du \wedge dv \\
 &= \left[-((f_u)^2 + (f_v)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{a^{\frac{5}{2}}} (f_{uu}f_{vv} - (f_{uv})^2) \right) \right] du \wedge dv,
 \end{aligned}$$

e a equação de K surge quando fazemos $\omega = 0$.

Observe que, neste contexto, θ é a forma de contato associada à distribuição $D = \{w \in T(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2); \theta(w) = 0\}$ com estrutura simplética $d\theta$ em D . De fato, uma vez que $\theta = y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3$ e $d\theta = dy_1 \wedge dx_1 + dy_2 \wedge dx_2 + dy_3 \wedge dx_3$, inferimos que

$$\begin{aligned}
 \theta \wedge (d\theta)^2 &= 2y_1 dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2 \wedge dy_3 \wedge dx_3 + 2y_2 dx_2 \wedge dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_3 \wedge dx_3 \\
 &\quad + 2y_3 dx_3 \wedge dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2,
 \end{aligned}$$

que é não degenerada. Com isso, baseado na Proposição 10.3 da autora (Silva e Salva 2001), temos a certeza de que θ é uma forma de contato em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. Logo, estamos diante do sistema Monge-Ampère almejado, o qual é composto pelas formas diferenciais ω e θ , sendo essa última responsável por nos fornecer informações de cunho geométrico relacionadas à nossa superfície de estudo.

Além disso, na tentativa de desfazer o processo que levou ao $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, surge uma aplicação, a chamada fibração Lagrangeana: $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $\pi(x, y) = x$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Portanto, de posse dos fatos anteriores, podemos estabelecer uma relação entre uma superfície em \mathbb{R}^3 com $K = -1$ e uma solução geométrica de

$K = -1$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. Para vermos isso, consideremos o mapa de Gauss, que leva cada ponto da superfície a um vetor normal a ela na esfera unitária \mathbb{S}^2 , e fixemos uma orientação do nosso objeto de estudo. Assim sendo, podemos levantar a superfície, de forma única, a uma solução geométrica de $K = -1$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. Dito de outra forma, podemos transformar a superfície em uma imersão Legendriana $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, tal que $f^*\theta = 0$ e $f^*\omega = 0$.

5.1.2

Algumas definições usadas ao longo deste capítulo

Nesta subseção, atentaremos-nos em listar alguns definições que serão utilizadas ao longo da escrita subsequente. Sendo assim, comecemos definindo o que seria uma imersão Legendriana.

Definição 5.1.1 (Imersão Legendriana) *Uma aplicação $f : N^2 \rightarrow M^5$, onde N e M são variedades diferenciáveis de dimensão 2 e 5, respectivamente, é chamada de imersão Legendriana se é uma imersão e $f_*(TN) \subset D$, onde $f_* : TN \rightarrow TM$ representa a diferencial de f .*

Na sequência, veremos a definição de solução geométrica, que é um tipo de imersão Legendriana com uma condição especial.

Definição 5.1.2 (Solução geométrica) *Uma imersão Legendriana $f : N^2 \rightarrow M^5$ é chamada de solução geométrica de um sistema Monge-Ampère formado pela forma de contato θ e a 2-forma ω se $f^*\theta = 0$ e $f^*\omega = 0$.*

5.2

Aresta Cuspidal e Rabo de Andorinha

Na presente seção, estamos interessados em descrever o conceito de uma aresta cuspidal e um rabo de andorinha, bem como localizar tais elementos em uma superfície. Para tal, começamos estabelecendo aplicações que permitem a transferência de características entre superfície, apresentamos o crucial critério de KRSUY e finalizamos a seção com aplicações de tal critério, via exemplos.

Definição 5.2.1 *Seja $\pi : (\mathbb{R}^5, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ uma fibração Legendriana. Duas imersões Legendrianas $f, g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ são chamadas de Legendre equivalentes se existem um contatormorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^5, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$, um difeomorfismo $\sigma : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e um difeomorfismo $\phi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^5, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^3, 0) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \Phi & & \downarrow \phi \\ (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^5, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^3, 0) \end{array}$$

Tendo ciência do conceito anterior, podemos definir, formalmente, o que vem a ser um ponto de aresta cuspidal e um ponto de rabo de andorinha, como mostra a seguir.

Definição 5.2.2 *Seja $\pi : (\mathbb{R}^5, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ um germe de fibração Legendriana com respeito à forma de contato $\theta = dz - pdx - qdy$. Então, dizemos que:*

- a) *uma imersão Legendriana $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ é uma aresta cuspidal com respeito a π se f é Legendre equivalente a*

$$(x, y, z, p, q) = (u, v^2, \frac{2}{3}v^3, 0, v).$$

Nesse caso, dizemos que $\pi \circ f$ tem uma aresta cuspidal em 0.

- b) *uma imersão Legendriana $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ é um rabo de andorinha com respeito a π se f é Legendre equivalente a*

$$(x, y, z, p, q) = (u, v^3 + uv, \frac{3}{4}v^4 + \frac{1}{2}uv^2, -\frac{1}{2}v^2, v).$$

Nesse caso, dizemos que $\pi \circ f$ tem um rabo de andorinha em 0.

No entanto, podemos perceber não é muito simples de ser utilizado da forma em que é apresentado. Então, a fim de facilitar a identificação dos pontos de arestas cuspidais e de rabo de andorinha, apresentamos o conceito de ponto singular não degenerado, que pode ser visto logo em seguida.

Definição 5.2.3 *Seja $f : (\mathbb{R}^2, (u_0, v_0)) \rightarrow \mathbb{R}^5$ um germe de uma imersão Legendriana,*

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v), p(u, v), q(u, v)),$$

para a forma de contato padrão $\theta = dz - pdx - qdy$ em \mathbb{R}^5 com a fibração Legendriana $\pi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\pi(x, y, z, p, q) = (x, y, z)$. Seja, ainda, $g = \pi \circ f$ e suponhamos que g não é uma imersão em (u_0, v_0) , isto é, que (u_0, v_0) seja um ponto singular. Então, chamamos o ponto (u_0, v_0) de não degenerado se $\Delta : (\mathbb{R}^2, (u_0, v_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é uma submersão, onde

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}.$$

Note que $g_u \times g_v = \Delta \cdot (-p, -q, 1)$. De fato, sendo $g_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $g_v = (x_v, y_v, z_v)$, sabemos que:

$$g_u \times g_v = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u). \quad (5-2)$$

Por outro lado, sabemos que z depende de x e y , donde obtemos, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} z_u &= z_x x_u + z_y y_u, \\ z_v &= z_x x_v + z_y y_v. \end{aligned}$$

Logo, colocando $\Delta = x_u y_v - x_v y_u$ em evidência no vetor (5-2) e lembrando que $p = z_x$ e $q = z_y$, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{y_u z_v - y_v z_u}{x_u y_v - x_v y_u} &= \frac{y_u(z_x x_v + z_y y_v) - y_v(z_x x_u + z_y y_u)}{x_u y_v - x_v y_u} \\ &= -p, \\ \frac{x_v z_u - x_u z_v}{x_u y_v - x_v y_u} &= \frac{x_u(z_x x_u + z_y y_u) - x_v(z_x x_v + z_y y_v)}{x_u y_v - x_v y_u}, \\ &= -q \end{aligned}$$

e o fato está provado, ou seja, $g_u \times g_v = \Delta \cdot (-p, -q, 1)$. Assim sendo, o lugar singular de g é dado por $\Delta = 0$ em $(\mathbb{R}^2, (u_0, v_0))$.

Observação 5.2.1 Sendo (u_0, v_0) um ponto singular de g não degenerado, o teorema da função implícita pode ser aplicado à função Δ , e isso nos permite observar que o lugar singular pode ser parametrizado por uma imersão $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (u_0, v_0))$. Além disso, haja vista que o posto g é 1 ao longo de $\gamma(t)$ próximo a $t = 0$, existe um campo vetorial não nulo $\eta : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow T\mathbb{R}^2$ ao longo de γ tal que

$$(g_{\gamma(t)})_*(\eta(t)) = 0.$$

Finalmente, podemos enunciar o resultado que tornar menos complicado o processo de identificação das singularidades do nosso objeto de estudo.

Proposição 5.2.1 (Critério de KRSUY) Seja (u_0, v_0) um ponto não degenerado de $g = \pi \circ f : (\mathbb{R}^2, (u_0, v_0)) \rightarrow \mathbb{R}^3$ para uma imersão Legendriana $f : (\mathbb{R}^2, (u_0, v_0)) \rightarrow \mathbb{R}^5$. Ainda, seja γ como na observação 5.2.1. Sendo assim, afirmamos que:

- a) f é uma aresta cuspidal em (u_0, v_0) se, e somente se, $\det(\gamma'(0), \eta(0)) \neq 0$;
- b) f é um rabo de andorinha em (u_0, v_0) se, e somente se, $\det(\gamma'(0), \eta(0)) = 0$ e $\frac{d}{dt} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \Big|_{t=0} \neq 0$.

Prova. O leitor interessado na demonstração desse fato pode consultar o artigo (Kokubu et al. 2004). ■

Agora, vamos ver algumas aplicações do critério de KRSUY, começando por mostrar que ele se aplica para as imersões Legendrianas presentes na definição 5.2.2.

Exemplo 5.2.1 *Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^5$ a imersão Legendriana da definição da singularidade do tipo aresta cuspidal, isto é, $f(u, v) = (u, v^2, \frac{2}{3}v^3, 0, v)$. Vamos mostrar que ela satisfaz o critério posto em 5.2.1 a) em $(0, 0)$. De fato, observe que, neste caso, g não é imersão em $(0, 0)$. Ademais, $\Delta = 2v$ e $\Delta_v = 2 \neq 0$, o que nos diz que o lugar singular de g é $v = 0$ e que Δ é uma submersão em $(0, 0)$. Logo, temos que a imersão γ é da forma $\gamma(t) = (u(t), 0)$, com $u'(0) \neq 0$, já que estamos diante de uma imersão.*

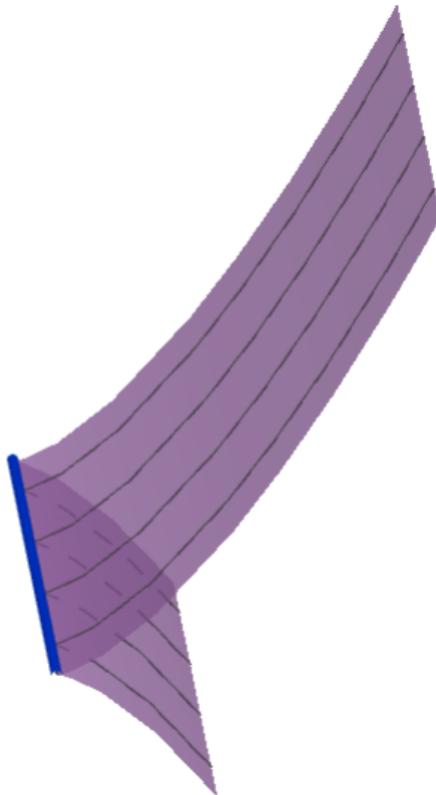


Figura 5.1: Pontos de aresta cuspidal para a função em 5.2.1 representados em azul, com $-15 \leq u \leq 15$ e $-10 \leq v \leq 10$. Fonte: Autor, 2024.

Por outro lado, levando em conta que x, y e z são as coordenadas de \mathbb{R}^3 , já que

$$g_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\gamma(t)} \right) = 2v(t) \frac{\partial}{\partial y} + 2v(t)^2 \frac{\partial}{\partial z},$$

e $v(t) = 0$ ao longo de γ , depreende-se que $\eta(t) = (0, 1)$. Então, diante dos fatos apresentados,

$$\det(\alpha'(0), \eta(0)) = \begin{vmatrix} u'(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = u'(0) \neq 0.$$

Com isso, de fato, temos que f tem uma aresta cúspide em $(0, 0)$. Na verdade, f tem uma aresta cuspidal em todo ponto $(u, 0)$, $u \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.2.2 Consideremos $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^5$ como sendo a imersão Legendriana presente no conceito da singularidade do tipo rabo de andorinha, ou seja, f é da forma $f(u, v) = (u, v^3 + uv, \frac{3}{4}v^4 + \frac{1}{2}uv^2, -\frac{1}{2}v^2, v)$ (ver fig. 5.2).

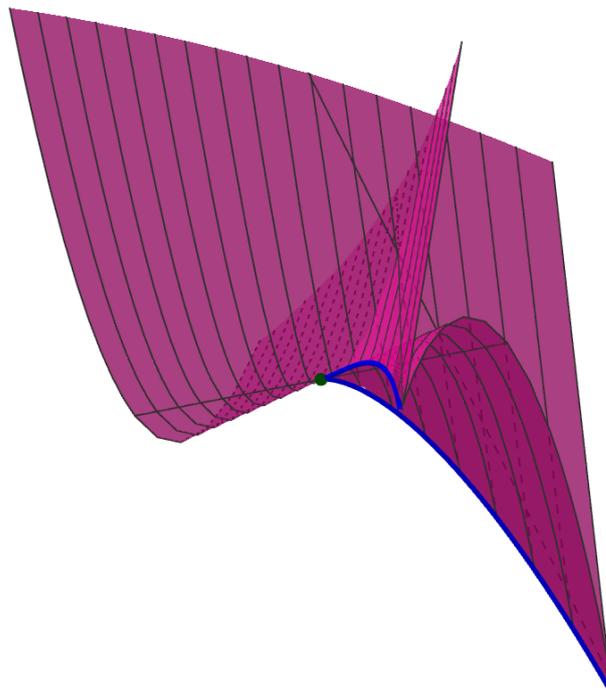


Figura 5.2: Ponto de rabo de andorinha para a função em 5.2.2 representado em verde, e pontos de aresta cuspidal representados em azul, com $-15 \leq u \leq 15$ e $-10 \leq v \leq 10$. Fonte: Autor, 2024.

Sendo assim, é verdade que g não é imersão em $(0, 0)$ e que $\Delta = 3v^2 + u$. Logo, $\Delta_u = 1$ $\Delta_v = 6v$, e temos a garantia de que Δ é uma submersão em $(0, 0)$.

Tomando $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ como sendo parametrização do lugar singular de g $\{\Delta = 0\}$, observe que:

$$3v^2(t) + u(t) = 0 \Rightarrow u'(t) = -6v(t)v'(t) \Rightarrow u'(0) = 0,$$

pois $v(0) = 0$. Além disso, observe que, sendo x, y e z as coordenadas de \mathbb{R}^3 ,

$$g_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{\gamma(t)} \right) = (3v(t)^2 + u(t)) \frac{\partial}{\partial y} + v(3v(t)^2 + u(t)) \frac{\partial}{\partial z}$$

anula ao longo de γ , pois γ é a parametrização de $\Delta = 0$. Com isso, temos que $\eta(t) = (0, 1)$. Assim, em virtude de

$$6(v'(t))^2 + 6v(t)v''(t) + u''(t) = 0,$$

$v(0) = 0$ e $v'(0) \neq 0$ (pois γ é imersão e $u'(0) = 0$), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \det(\alpha'(t), \eta'(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u'(t) & v'(t) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Big|_{t=0} = u''(0) = -6(v'(0))^2 \neq 0.$$

Portanto, infere-se que há um rabo de andorinha em $(0, 0)$.

Por outro lado, nos pontos $(-3a^2, a)$, com $a \in \mathbb{R}^*$, continua válido que g deixa de ser uma imersão, em virtude de que $g_v = (0, 3v^2 + u, 3v^3 + uv)$ zera quando avaliada em tais pontos. Ainda, continua válido que Δ é uma submersão, pois $\Delta_u = 1$. Portanto, sendo $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ uma parametrização do lugar singular de g , obtemos que $u'(0) \neq 0$, já que $u'(t) = -6v(t)v'(t)$ e $v(0) = a \neq 0$. Logo, podemos afirmar que há uma aresta cuspidal sobre os pontos $(-3a^2, a)$, com a não nulo. Isso porque, dado que $\eta(t) = (0, 1)$, temos que

$$\det(\alpha'(0), \eta'(0)) = \begin{vmatrix} u'(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = u'(0) \neq 0.$$

Exemplo 5.2.3 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v), p(u, v), q(u, v))$, uma imersão Legendriana definida por

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \operatorname{sech}(u) \cos(v), \\ y(u, v) &= \operatorname{sech}(u) \sin(v), \\ z(u, v) &= u - \tanh(u), \\ p(u, v) &= -\operatorname{senh}(u) \cos(v), \\ q(u, v) &= -\operatorname{senh}(u) \sin(v), \end{aligned}$$

e associada à forma de contato $\theta = dz - p dx - q dy$. Além disso, perceba que $f_u = (0, 0, 0, -\cos(v), -\sin(v))$ e $f_v = (-\sin(v), \cos(v), 0, 0, 0)$, mostrando que f é uma imersão nos pontos $(0, v)$.

Nesse caso, temos que a função g é dada por

$$g(u, v) = (\operatorname{sech}(u) \cos(v), \operatorname{sech}(u) \sin(v), u - \tanh(u)),$$

que é a parametrização da pseudoesfera (ver fig. 5.3).

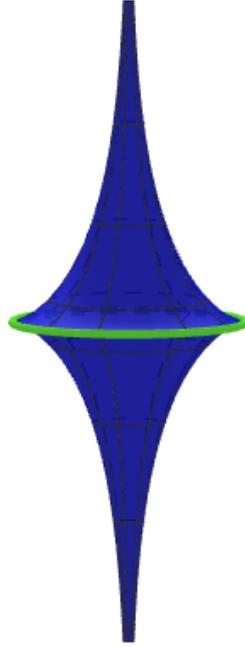


Figura 5.3: Pontos de arestas cuspidais para a pseudoesfera representados em verde, com $-10 \leq u \leq 10$ e $-5 \leq v \leq 5$. Fonte: Autor, 2024.

Sendo assim, note que ela deixa de ser imersão nos pontos $(0, v)$. De fato, sabendo que

$$\begin{aligned} g_u(u, v) &= (-\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \cos(v), -\operatorname{sech}(u) \tanh(u) \sin(v), 1 - \operatorname{sech}^2(u)), \\ g_v(u, v) &= (-\operatorname{sech}(u) \sin(v), \operatorname{sech}(u) \cos(v), 0), \end{aligned}$$

pode-se concluir que tais vetores são linearmente dependentes em $(0, v)$. Ademais,

$$\begin{aligned} \Delta &= -\operatorname{sech}^2(u) \tanh(u) \cos^2(v) - \operatorname{sech}^2(u) \tanh(u) \sin^2(v) \\ &= -\operatorname{sech}^2(u) \tanh(u). \end{aligned}$$

Logo, $\Delta = 0 \Leftrightarrow \sinh(u) = 0$. Ou seja, o lugar singular de g é descrito por $\sinh(u) = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta_u &= -2 \operatorname{sech}(u) \operatorname{sech}(u) \tanh(u) \tanh(u) - \operatorname{sech}^2(u) \operatorname{sech}^2(u) \\ &= -2 \operatorname{sech}^2(u) \tanh^2(u) - \operatorname{sech}^4(u), \end{aligned}$$

indicando que Δ é uma submersão sobre os pontos $(0, v)$.

Agora, seja $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ a parametrização do lugar singular de g . Dessa forma, derivando $\sinh(u(t))$ em relação à variável t , conseguimos $\cosh(u(t))u'(t) = 0$, donde temos que $u'(0) = 0$, dado que $u(0) = 0$. Logo, temos que $v'(0) \neq 0$.

Por outro lado, perceba ainda que, sendo x , y e z coordenadas de \mathbb{R}^3 ,

$$g_* \left(\frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\gamma(t)} \right) = [-\operatorname{sech}(u(t)) \tanh(u(t)) \cos(v(t))] \frac{\partial}{\partial x} \\ + [-\operatorname{sech}(u(t)) \tanh(u(t)) \sin(v(t))] \frac{\partial}{\partial y} + [1 - \operatorname{sech}^2(u(t))] \frac{\partial}{\partial z},$$

que se anula ao longo de $\gamma(t)$, uma vez que $\sinh(u(t)) = 0$. Com isso, obtemos que $\eta(t) = (1, 0)$.

Dado que já sabemos quem são γ e η , veremos que

$$\det(\gamma'(0), \eta(0)) = \begin{vmatrix} u'(0) & v'(0) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = v'(0) \neq 0.$$

Portanto, podemos afirmar que há arestas cuspidal ao longo dos pontos $(0, v)$.

Exemplo 5.2.4 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v), r(u, v), s(u, v))$, uma imersão Legendriana definida por*

$$x(u, v) = \frac{(\cos(u) + u \sin(u)) \sin(v)}{1 + u^2 \sin^2(v)},$$

$$y(u, v) = \frac{(\sin(u) - u \cos(u)) \sin(v)}{1 + u^2 \sin^2(v)},$$

$$z(u, v) = \frac{1}{2} \ln \left(\tan \left(\frac{v}{2} \right) \right) + \frac{\cos(v)}{1 + u^2 \sin^2(v)},$$

$$r(u, v) = \frac{\sin(u) - u^2 \sin(u) - 2u \cos(u) + u^2 \cos^2(v) \sin(v) + 2u \cos(u) \cos^2(v)}{\cos(u) - u^2 \cos(u) + 2u \sin(v) + u^2 \cos(u) \cos^2(v) - 2u \cos^2(v) \sin(u)},$$

$$s(u, v) = \frac{-2u \cos(v) \sin(v)}{\cos(u) - u^2 \cos(u) + 2u \sin(v) + u^2 \cos(u) \cos^2(v) - 2u \cos^2(v) \sin(u)},$$

e associada à forma de contato $\theta = dy - rdx - sdz$. Observe que, em $(0, v)$, temos

$$f_u(0, v) = (0, 0, 0, \cos(2v), -2 \cos(v) \sin(v)),$$

$$f_v(0, v) = \left(\cos(v), 0, \frac{1 - 2 \sin^2(v)}{2 \sin(v)}, 0, 0 \right),$$

que são linearmente independentes e mostram que f é imersão em $(0, v)$. Além disso, nos pontos $(\frac{1}{\sin(v)}, v)$, também temos que f é imersão:

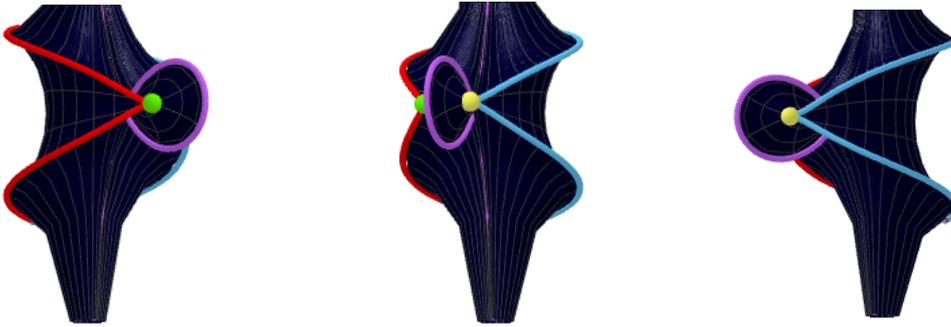
$$f_u \left(\frac{1}{\sin(v)}, v \right) = \left(\frac{\cos \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) \cos^2(v) - \sin \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) \sin(v)}{2}, \right. \\ \left. \frac{\sin \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) \cos^2(v) + \cos \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) \sin(v)}{2}, -\frac{\sin(2v)}{4}, 0, 0 \right),$$

$$f_v \left(\frac{1}{\sin(v)}, v \right) = \left(0, 0, 0, -\frac{\cos(v)}{\sin^2 \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) \sin^2(v)}, \right. \\ \left. \frac{-\sin \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) \cos^2(v) + \sin \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) - \cos \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) \cos^2(v) \sin(v)}{\sin^2 \left(\frac{1}{\sin(v)} \right) \sin^4(v)} \right).$$

Diante disso, g é representada por

$$g(u, v) = \left(\frac{(\cos(u) + u \sin(u)) \sin(v)}{1 + u^2 \sin^2(v)}, \frac{(\sin(u) - u \cos(u)) \sin(v)}{1 + u^2 \sin^2(v)}, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \ln \left(\tan \left(\frac{v}{2} \right) \right) + \frac{\cos(v)}{1 + u^2 \sin^2(v)} \right).$$

Nesse caso, temos a parametrização da chamada superfície de Kuen (ver fig. 5.4).



(a) Os pontos correspondentes à $\left(-\frac{1}{\sin(v)}, v \right)$ estão representados em vermelho, e o ponto correspondente à $\left(-1, \frac{\pi}{2} \right)$, em verde.

(b) Os pontos correspondentes à $(0, v)$ estão representados em roxo.

(c) Os pontos correspondentes à $\left(\frac{1}{\sin(v)}, v \right)$ estão representados em azul, e o ponto correspondente à $\left(1, \frac{\pi}{2} \right)$, em amarelo.

Figura 5.4: A superfície de Kuen e suas singularidades, com $-4.5 \leq u \leq 4.5$ e $0 < v < \pi$. Fonte: Autor, 2024.

Diante disso, nos pontos $(0, v)$, g deixa de ser uma imersão. Com efeito,

sabendo que

$$g_u(u, v) = \left(\frac{u \cos(u) \sin(v)(1 + u^2 \sin^2(v)) - 2u \sin^3(v)(\cos(u) + u \sin(u))}{(1 + u^2 \sin^2(v))^2}, \right. \\ \frac{u \sin(u) \sin(v)(1 + u^2 \sin^2(v)) - 2u \sin^3(v)(\sin(u) - u \cos(u))}{(1 + u^2 \sin^2(v))^2}, \\ \left. \frac{-2u \cos(v) \sin^2(v)}{(1 + u^2 \sin^2(v))^2} \right),$$

$$g_v(u, v) = \left(\frac{(\cos(u) + u \sin(u)) \cos(v)(1 - u^2 \sin^2(v))}{(1 + u^2 \sin^2(v))^2}, \right. \\ \frac{(\sin(u) - u \cos(u)) \cos(v)(1 - u^2 \sin^2(v))}{(1 + u^2 \sin^2(v))^2}, \\ \left. \frac{1}{2} \csc(v) - \frac{\sin(v)(1 + u^2 + u^2 \cos^2(v))}{(1 + u^2 \sin^2(v))^2} \right),$$

perceba que $g_u(u, v)$ zera nos pontos $(0, v)$, com $0 < v < \pi$. Logo, segue a afirmação de que g não é uma imersão em tais pontos.

Por outro lado, perceba ainda que

$$\Delta = \frac{u(u^2 \cos^2(v) - u^2 + 1)(\cos(u) - u^2 \cos(u) + 2u \sin(u) + u^2 \cos(u) \cos^2(v) - 2u \cos^2(v) \sin(u))}{2(u^2 - u^2 \cos^2(v) + 1)^3},$$

além de, em $(0, v)$, $\Delta = 0$ e $\Delta_u = \frac{1}{2}$. Logo, Δ é uma submersão em tais pontos. Portanto, seja $\gamma(t) = (0, v(t))$ a parametrização regular do lugar singular de g , donde $v'(0) \neq 0$.

Agora, dada a forma de $g_u(u, v)$, é inegável que ela zera ao longo de $\gamma(t)$.

Com isso, temos que $\eta(t) = (1, 0)$.

Dado que já sabemos quem são γ e η , vem

$$\det(\gamma'(0), \eta(0)) = \begin{vmatrix} u'(0) & v'(0) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = v'(0) \neq 0.$$

Portanto, podemos dizer que há arestas cuspidais ao longo dos pontos $(0, v)$, com $0 < v < \pi$.

Agora, note ainda que, em $(\frac{1}{\sin(v_0)}, v_0)$, $g_v(u, v)$ zera. Logo, tem-se que g deixa de ser imersão nesse ponto. Ainda nele, é verdade que $\Delta = 0$ e

$$\Delta_u = -\frac{\sin\left(\frac{1}{\sin(v_0)}\right) \sin(v_0)}{4},$$

indicando que Δ é uma submersão.

Diante disso, observe que

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sin(t + v_0)}, t + v_0 \right)$$

é uma parametrização regular de $\Delta = 0$ com $\gamma(0) = (\frac{1}{\sin(v_0)}, v_0)$. Ademais, o campo $\eta(t)$ é $(0, 1)$, já que $g_v(u, v)$ zera ao longo de $\gamma(t)$.

Nesse contexto, dado que já sabemos quem são γ e η , vem

$$\det(\gamma'(0), \eta(0)) = -\frac{\cos(v_0)}{\sin^2(v_0)},$$

que é não nulo desde que $v_0 \neq \frac{\pi}{2}$. Logo, há arestas cuspidais nos pontos $(\frac{1}{\sin(v_0)}, v_0)$, com $v_0 \neq \frac{\pi}{2}$.

Por outro lado, no ponto $(1, \frac{\pi}{2})$, temos que

$$\det(\gamma'(0), \eta(0)) = -\frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\sin^2(\frac{\pi}{2})} = 0,$$

mas

$$\frac{d}{dt} \det(\alpha'(t), \eta(t)) \Big|_{t=0} = -\frac{\cos^2(0) - 2}{\cos^3(0)} = 1 \neq 0,$$

donde segue que há um rabo de andorinha no ponto $(1, \frac{\pi}{2})$.

De forma simétrica, vemos a existência de arestas cuspidais em $(-\frac{1}{\sin(v_0)}, v_0)$, com $v_0 \neq 0$, e a existência de um rabo de andorinha no ponto $(-1, \frac{\pi}{2})$.

5.3

Classificação dos pontos

O objetivo principal desta seção é enunciar e demonstrar o teorema principal deste capítulo: o teorema que localiza e descreve as singularidades de uma superfície S a partir da solução geométrica para o sistema Monge-Ampère associado a ela. Mas, antes, façamos um adendo a respeito da ação do grupo Euclidiano G sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$.

Observação 5.3.1 *Seja G o grupo Euclidiano em \mathbb{R}^3 . Sendo assim, perceba que tal grupo age em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ de forma que $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é G -equivariante, isto é,*

$$\pi(g \cdot (x, y)) = g \cdot \pi(x, y),$$

para $g \in G$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$. Além disso, o sistema Monge-Ampère associado à equação $K = -1$, devido à sua forma, é também invariante por G .

Agora, dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, é verdade que o mapa $\pi : G \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, $\pi(g) = g \cdot (x_0, y_0)$, é suave. Com isso, conseguimos $S(x_0, y_0; \cdot, \cdot) : V \rightarrow G$ definida em uma vizinhança V de (x_0, y_0) tal que

$$\pi(S(x_0, y_0; x, y)) = S(x_0, y_0; x, y) \cdot (x_0, y_0),$$

ou seja, $S(x_0, y_0; x, y) \in G$ pega $(x, y) \in V$ e o transforma em (x_0, y_0) .

Sabendo disso, iremos enunciar e demonstrar o teorema central deste capítulo.

Teorema 5.3.1 *Genericamente, qualquer solução geométrica para $K = -1$ possui apenas arestas cuspidais e rabos de andorinha como singularidades. Dito de outra forma, dada uma solução geométrica $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ para a equação $K = -1$, temos que, para qualquer $x_0 \in U$, uma das seguintes afirmações vale, com respeito à aplicação $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:*

- i) $\pi \circ f : (V, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão em x_0 ;
- ii) $\pi \circ f : (V, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem uma aresta cuspidal em x_0 ;
- iii) $\pi \circ f : (V, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem um rabo de andorinha em x_0 .

Prova. Seja $f : (U, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ um germe de uma solução geométrica de $K = -1$ dada por

$$f(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), y_1(u, v), y_2(u, v), y_3(u, v)),$$

isto é, f é tal que $f^*\theta = 0$ e $f^*\omega = 0$, onde $\theta = y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3$ e

$$\begin{aligned} \omega &= -(y_1 dx_2 \wedge dx_3 + y_2 dx_3 \wedge dx_1 + y_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &\quad -(y_1 dy_2 \wedge dy_3 + y_2 dy_3 \wedge dy_1 + y_3 dy_1 \wedge dy_2). \end{aligned}$$

Diante disso, baseado na observação 5.3.1, consideremos $g_0 \in G$ o elemento que transforma $f(x_0)$ em $b = (0, 0, 0; 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, isto é,

$$g_0 \cdot f(x_0) = b.$$

Ainda de acordo com tal observação, sendo (u, v) o sistema de coordenadas centrado em x_0 , podemos definir $S(f(0, 0); f(u_0, v_0))$, com (u_0, v_0) próximo a $(0, 0)$, tal que

$$b = g_0 \cdot f(0, 0) = g_0 \cdot S(f(0, 0); f(u_0, v_0))^{-1} f(u_0, v_0),$$

uma vez que $f(0, 0) = f(x_0)$ e $S(f(0, 0); f(u_0, v_0)) \cdot f(0, 0) = f(u_0, v_0)$. Logo, para cada (u_0, v_0) próximo de $(0, 0)$, seja $\bar{f}_{(u_0, v_0)} : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2, b)$ estabelecida via

$$\bar{f}_{(u_0, v_0)}(u, v) = g_0 \cdot S(f(0, 0); f(u_0, v_0))^{-1} \cdot f(u + u_0, v + v_0),$$

que nos permite obter informações de f numa vizinhança de x_0 . Portanto, é viável assumir que $f(x_0) = (0, 0, 0; 1, 0, 0)$, já que a equação $K = -1$ é homogênea e podemos realizar transformações usando os elementos de G .

Sabendo disso, nosso próximo passo é definir uma aplicação Legendriana a partir de f . Para isso, definamos $p = -\frac{y_2}{y_1}$ e $q = -\frac{y_3}{y_1}$. Dessa forma, note que a 2-forma ω fica:

$$\omega = y_1 \left[-(dx_2 \wedge dx_3 - pdx_3 \wedge dx_1 - qdx_1 \wedge dx_2) - y_1^2 dp \wedge dq \right],$$

além de $y_1^2 = \frac{1}{1+p^2+q^2}$. Com isso, o sistema Monge-Ampère para $K = -1$ ganha a seguinte configuração:

$$\begin{cases} -(dx_2 \wedge dx_3 - pdx_3 \wedge dx_1 - qdx_1 \wedge dx_2) - \frac{1}{1+p^2+q^2} dp \wedge dq = 0 \\ dx_1 - pdx_2 - qdx_3 = 0. \end{cases}$$

Por simplicidade e conveniência, façamos a mudança de varável $x_1 = z$, $x_2 = x$ e $x_3 = y$. Note que, tendo em mente que $f^*\theta = 0$, é verídico que

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + y_3 dx_3 = 0,$$

resultando em

$$\begin{aligned} (x_1)_u &= -\frac{y_2}{y_1}(x_2)_u - \frac{y_3}{y_1}(x_3)_u \\ (x_1)_v &= -\frac{y_2}{y_1}(x_2)_v - \frac{y_3}{y_1}(x_3)_v. \end{aligned} \tag{5-3}$$

Ou seja, a equação 5-3 nos diz que

$$\begin{aligned} z_u &= px_u + qy_u \\ z_v &= px_v + qy_v, \end{aligned}$$

evidenciando a relação $p = z_x$ e $q = z_y$. Logo,

$$\begin{cases} -(1+p^2+q^2)^2 dx \wedge dy - dp \wedge dq = 0 \\ dz - pdx - qdy = 0, \end{cases}$$

haja vista que

$$\begin{aligned}
 -pdx_3 \wedge dx_1 &= -z_x dy \wedge dz \\
 &= -z_x dy \wedge (z_x dx + z_y dy) \\
 &= z_x^2 dx \wedge dy \\
 &= p^2 dx \wedge dy,
 \end{aligned}$$

e, de forma similar, $-qdx_1 \wedge dx_2 = q^2 dx \wedge dy$. Assim, para algumas coordenadas locais em \mathbb{R}^3 , vemos que π é expressa por $\pi(x, y, z, p, q) = (x, y, z)$.

No nosso contexto, podemos assumir que $x = u$ e $q = v$, uma vez que há um difeomorfismo local $(u, v) \mapsto (x(u, v), q(u, v))$. Ademais, seja $L(x, y, z, p, q) = (x, q, z - yq, p, -y)$ a chamada transformação de Legendre parcial, e perceba que $L \circ f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ tem a forma

$$L \circ f(u, v) = (u, v, Z, P, Q)$$

e satisfaz a equação

$$\begin{cases} -(1 + P^2 + v^2)^2 dQ \wedge du - dP \wedge dv = 0 \\ dZ - Pdu - Qdv = 0, \end{cases} \quad (5-4)$$

pois

$$\begin{aligned}
 Z(u, v) &= (z \circ f)(u, v) - (y \circ f)(u, v)v, \\
 P(u, v) &= (p \circ f)(u, v), \\
 Q(u, v) &= -(y \circ f)(u, v).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, expandindo a primeira equação de (5-4), tem-se:

$$\begin{aligned}
 -(1 + P^2 + v^2)^2 (Q_u du + Q_v dv) \wedge du - (P_u du + P_v dv) &= 0 \\
 -(1 + P^2 + v^2)^2 Q_v dv \wedge du + P_u dv \wedge du &= 0 \\
 -(1 + P^2 + v^2)^2 Q_v + P_u &= 0.
 \end{aligned}$$

No entanto, tendo em vista que $Z = z - yv$,

$$\begin{aligned}
 Z_v &= z_x x_v + z_y y_v - y_v v - y \\
 &= q y_v - q y_v + Q \\
 &= Q.
 \end{aligned}$$

De maneira similar, mostramos que $P = Z_u$. Logo, a equação em (5.3) se transforma em

$$Z_{uu} - (1 + Z_u^2 + v^2)^2 Z_{vv} = 0, \quad (5-5)$$

que é uma equação de Monge-Ampère em uma função $Z = Z(u, v)$ com $Z(0, 0) = 0$, $Z_u(0, 0) = 0$ e $Z_v(0, 0) = 0$ – que advém do fato de $f(x_0) = (0, 0, 0; 1, 0, 0)$. Portanto, conseguimos transformar, via uma transformação de

Legendre, o problema relacionado a soluções geométricas em um problema em soluções clássicas para outra equação de Monge-Ampère.

Agora, foquemos na equação (5-5) para obtermos a expansão de Taylor de Z . Em $(0, 0)$,

$$Z_{uu}(0, 0) - Z_{vv}(0, 0) = 0,$$

já que $Z_u(0, 0) = 0$ e $v = 0$. Derivando (5-5) em relação à u e calculando em $(0, 0)$, vê-se

$$Z_{uuu}(0, 0) - Z_{vvu}(0, 0) = 0, \quad (5-6)$$

e em relação à v

$$Z_{uvv}(0, 0) - Z_{vvv}(0, 0) = 0. \quad (5-7)$$

Através da diferenciação em relação à u ou v de (5-5) duas vezes e calculando em $(0, 0)$, obtemos

$$\begin{aligned} Z_{uuuu}(0, 0) - 4(Z_{uu}(0, 0))^2 Z_{vv}(0, 0) - Z_{uuuv}(0, 0) &= 0, \\ Z_{uuuv}(0, 0) - 4Z_{uu}(0, 0)Z_{uv}(0, 0)Z_{vv}(0, 0) - Z_{uvvv}(0, 0) &= 0, \\ Z_{uvvv}(0, 0) - 4((Z_{uv}(0, 0))^2 + 1)Z_{vv}(0, 0) - Z_{vvvv}(0, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (5-8)$$

Com isso, usando a fórmula da expansão de Taylor para uma função de duas variáveis em torno de $(0, 0)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} Z(u, v) = & \frac{1}{2}Au^2 + Buv + \frac{1}{2}Cv^2 + \frac{1}{6}Du^3 + \frac{1}{2}Eu^2v + \frac{1}{2}Fuv^2 + \frac{1}{6}Gv^3 \\ & + \frac{1}{24}Hu^4 + \frac{1}{6}Iu^3v + \frac{1}{4}Ju^2v^2 + \frac{1}{6}Kuv^3 + \frac{1}{24}Lv^4 + \dots \end{aligned}$$

Perceba que

$$\begin{aligned} A = Z_{uu}(0, 0), \quad B = Z_{uv}(0, 0), \quad C = Z_{vv}(0, 0), \\ D = Z_{uuu}(0, 0), \quad E = Z_{uuv}(0, 0), \quad F = Z_{vvu}(0, 0), \\ G = Z_{vvv}(0, 0), \quad H = Z_{uuuu}(0, 0), \quad I = Z_{uuuv}(0, 0), \\ J = Z_{uuvv}(0, 0), \quad K = Z_{uvvv}(0, 0), \quad L = Z_{vvvv}(0, 0). \end{aligned} \quad (5-9)$$

Logo, levando em conta as equações (5-6) à (5-8), vemos que os coeficientes em (5-9) estão relacionados da maneira a seguir:

$$\begin{aligned} A - C = 0, \quad H - 4A^2C - J = 0, \\ D - F = 0, \quad I - 4ABC - K = 0, \\ E - G = 0, \quad J - 4(B^2 + 1)C - L = 0. \end{aligned} \quad (5-10)$$

Quanto à existência e unicidade da função $Z(u, v)$, de acordo com o Teorema da Cauchy-Kovalevskaya (vide A.0.5), temos que $Z(u, v)$ é unicamente determinada quando fornecemos as condições iniciais $Z(0, v)$ e $Z_u(0, v)$. Além

disso, se tais condições iniciais são funções analíticas, então sabemos que $Z(u, v)$ também o é.

Note que, tendo $Z(u, v)$, conseguimos recuperar a nossa função f original. Isso porque

$$x = u, \quad y = Z_v(u, v), \quad z = Z(u, v) - Z_v(u, v)v, \quad p = Z_u(u, v), \quad q = v.$$

Sabendo disso, seja $Z(u, v)$ uma solução C^∞ para (5-5) correspondente a um germe de um solução geométrica f para $K = -1$. Tomando polinômios de Taylor de $Z(0, v)$ e $Z_u(0, v)$ de grau arbitrariamente alto como condições iniciais, obtemos uma aproximação $\tilde{Z}(u, v)$ de $Z(u, v)$ na topologia C^∞ que é uma solução analítica para (5-5).

Agora, considerando a aplicação $\bar{f}_{u_0, v_0} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2, b)$ definida como no início e a expansão da componente Z de $L \circ \bar{f}_{u_0, v_0}$, conseguimos um mapa-germe $C^\infty \Phi : (U, x_0) \mapsto \mathbb{R}^6$

$$(u_0, v_0) \mapsto (B(u_0, v_0), C(u_0, v_0), F(u_0, v_0), G(u_0, v_0), K(u_0, v_0), L(u_0, v_0)).$$

Tendo em vista que podemos controlar os coeficientes B, C, F, G, K, L livremente no processo de aproximação, podemos perturbar f em \tilde{f} tal que $\Phi(\tilde{f})$ seja transversal a uma estratificação de \mathbb{R}^6 dada (isso é possível graças ao teorema A.0.3). Para tal, consideremos uma estratificação de \mathbb{R}^6 com coordenadas (B, C, F, G, K, L) :

$$\begin{aligned} W_1^0 &= \{C \neq 0\} & W_2^3 &= \{C = 0, F = 0, G \neq 0, L = 0\} \\ W_1^1 &= \{C = 0, G \neq 0\} & W_3^3 &= \{C = 0, F \neq 0, G = 0, L = 0\} \\ W_1^2 &= \{C = 0, G = 0, L \neq 0\} & W_1^4 &= \{C = 0, F = 0, G = 0, L = 0\} \\ W_1^3 &= \{C = 0, F = 0, G = 0, L \neq 0\} \end{aligned}$$

onde índices i denota a codimensão da subvariedade W_j^i .

Suponhamos que $\Phi(\tilde{f})$ é transversal à estratificação, ou seja, transversal a todo W_j^i em \mathbb{R}^6 . Sendo assim, a condição de transversalidade (vide apêndice A.0.3 e (Gibson 1979)) nos dá o fato de que a imagem $\Phi(\tilde{f})$ não toca o subconjunto $W_1^3 \cup W_2^3 \cup W_3^3 \cup W_1^4$, donde temos que está integralmente contida em

$$W_1^0 \cup W_1^1 \cup W_1^2.$$

Dessa maneira, podemos afirmar o plano u, v está dividido essencialmente em:

- i) $C \neq 0$;
- ii) $C = 0, G \neq 0$;

iii) $C = 0, G = 0, L \neq 0$.

Então, resta analisarmos o comportamento de $\pi \circ f$ em cada um dos casos elencados. Nesse caso, tem-se que

$$\pi \circ f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u, -Q(u, v), z(u, v)).$$

Assim, note que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Q_u & -Q_v \end{vmatrix} = -Q_v,$$

donde inferimos que o lugar singular de $\pi \circ f$ é dado por

$$Q_v(u, v) = Z_{vv}(u, v) = C + Fu + Gv + \frac{1}{2}Ju^2 + Kuv + \frac{1}{2}Lv^2 + \dots = 0.$$

– **Caso i):** Se $C \neq 0$, então $\pi \circ f$ é uma imersão em $(0, 0)$. De fato, dado que

$$(\pi \circ f)_u = (1, -Q_u, *) \text{ e } (\pi \circ f)_v = (0, -Q_v, z_y Q_v),$$

observe que eles são linearmente independentes se $Q_v \neq 0$, isto é, se $C \neq 0$;

– **Caso ii):** Se $C = 0$, então $\pi \circ f$ é singular em $(0, 0)$. Além do mais, note que, em $(0, 0)$, $Q_{uv} = F$ e $Q_{vv} = G$, e podemos dizer que $\pi \circ f$ é não degenerada em $(0, 0)$ se, e somente se, $(F, G) \neq (0, 0)$. Nesse caso, já que $G \neq 0$, temos a garantia da não degeneração em $(0, 0)$. Então, tomemos $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ como sendo uma parametrização regular do lugar singular de $\pi \circ f$ com $\gamma(0) = (0, 0)$. Dessa forma, temos

$$Fu'(0) + Gv'(0) = 0, \tag{5-11}$$

uma vez que $Q_v = Z_{vv} = 0 \Rightarrow Z_{vuu}(0, 0)u'(0) + Z_{vvv}(0, 0)v'(0) = 0$.

Agora, sendo x, y, z o sistema de coordenadas de \mathbb{R}^3 , observe que

$$(\pi \circ f)_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) = -Q_v \frac{\partial}{\partial y} + z_y Q_v \frac{\partial}{\partial z},$$

em que vemos que tal vetor zera ao longo da curva γ , pois ela é a parametrização regular do lugar singular $Q_v = 0$. Portanto, podemos definir $\eta(t) = \frac{\partial}{\partial v} = (0, 1)$.

Frente aos fatos antecedentes, segue que $\det(\gamma'(t), \eta(t)) = u'(t)$. Com isso, em virtude de que $G \neq 0$, afirmamos que $u'(0) \neq 0$. Do contrário,

baseado em (5-11), teríamos $Gv'(0) = 0 \Rightarrow v'(0) = 0$, resultando em γ não sendo uma imersão em $t = 0$. Absurdo!

Portanto, pela proposição 5.2.1 e pelos fatos anteriores, inferimos que $\pi \circ f$ tem uma aresta cuspidal em $(0, 0)$, isto é, em x_0 ;

- **Caso iii):** Já que $C = 0$, temos novamente que $\pi \circ f$ é singular em $(0, 0)$. Além disso, de $G = 0$, tem-se que $u'(0) = 0$, tendo em vista que $(F, G) \neq (0, 0)$ (já que não há interseção com o conjunto de codimensão maior que 2).

Por outro lado, derivando $Z_{vuu}u'(t) + Z_{vvv}v'(t) = 0$ em relação a t , fica:

$$0 = Z_{vuu}(u'(t))^2 + Z_{vvv}u'(t)v'(t) + Z_{vuu}u''(t) + Z_{vuu}u'(t)v'(t) + Z_{vvv}(v'(t))^2 + Z_{vvv}v''(t).$$

Em $t = 0$, visto que $u'(0) = 0$, temos

$$Z_{vuu}(0, 0)u''(0) + Z_{vvv}(0, 0)(v'(0))^2 + Z_{vvv}(0, 0)v''(0) = 0,$$

ou seja,

$$Fu''(0) + L(v'(0))^2 + Gv''(0) = 0.$$

Daí, concluímos que $u''(0) \neq 0$, devido ao fato de que $G = 0$, $L \neq 0$ e $v'(0) \neq 0$. Assim, tendo em mente que $\det(\gamma'(t), \eta(t)) = u'(t)$, vem que

$$\frac{d}{dt} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \Big|_{t=0} = u''(0) \neq 0,$$

isto é, existe um rabo de andorinha para $\pi \circ f$ em $(0, 0)$ neste caso.

Em suma, vimos que:

- a) Na situação i), $\pi \circ f$ é uma imersão;
- b) Na situação ii), $\pi \circ f$ tem aresta cuspidal;
- c) Na situação iii), $\pi \circ f$ tem um rabo de andorinha.



6

Conclusões e trabalhos futuros

Nesta dissertação, ancoramos-nos no teorema enunciado por D. Hilbert em 1901 e nos atentamos em preencher, sempre que possível, as lacunas presentes no seu enunciado e demonstração. Ou seja, buscamos localizar e classificar as singularidades que D. Hilbert assegurou existir nas superfícies pseudoesféricas. Para isso, como pode ser visto, usamos duas frentes para atingir o nosso objetivo:

- a) A primeira foi fazer o uso da função geradora ω e suas propriedades, permitindo, via proposição 3.3.1, localizar as singularidades utilizando os zeros da função $\sin \omega$ e correlação biunívoca local entre a solução da equação de sine-Gordon e a superfície pseudoesférica em \mathbb{R}^3 ;
- b) A segunda consistiu em aproveitar o fato de que há uma relação entre o chamado sistema de Monge-Ampère e a equação $K = -1$. Nesse sentido, fizemos o uso do critério de KRSUY e mostramos que as soluções dos sistemas de Monge-Ampère para $K = -1$ possuem genericamente ou pontos regulares, ou pontos de aresta cuspidal, ou pontos de rabo de andorinha.

Agora, como vimos no capítulo 4, nem sempre é possível obter a solução de sine-Gordon explicitamente – o que dificulta a abordagem nesse caso. Porém, analisando o apêndice B, vemos a ideia de discretização para resolução da equação de sine-Gordon como uma alternativa para obtenção de indícios de existência e unicidade de soluções. Nesse sentido, o artigo (Bobenko e Pinkall 1996) nos dá um norte de como trazer o conceito de discretização para o contexto de superfícies pseudoesféricas, pontuando semelhanças de propriedades locais entre a superfície pseudoesférica suave e a superfície pseudoesférica discreta associada.

Portanto, esperamos que, num trabalho futuro, consigamos explorar as chamadas superfícies pseudoesféricas discretas e estabelecer correlações com a sua representação no caso suave.

7

Referências bibliográficas

Amsler 1955/56 AMSLER, M.-H. Des surfaces à courbure négative constante dans l'espace à trois dimensions et de leurs singularités. **Mathematische Annalen**, v. 130, p. 234–256, 1955/56.

Bobenko, Matthes e Suris 2006 BOBENKO, A.; MATTHES, D.; SURIS, Y. Non-linear hyperbolic equations in surface theory: integrable discretizations and approximation results. **St. Petersburg Mathematical Journal**, v. 17, n. 1, p. 39–61, 2006.

Bobenko e Pinkall 1996 BOBENKO, A.; PINKALL, U. Discrete surfaces with constant negative gaussian curvature and the hirota equation. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 43, n. 3, p. 527–611, 1996.

Folland 1995 FOLLAND, G. B. **Introduction to partial differential equations**. Princeton: Princeton University Press, 1995.

Gibson 1979 GIBSON, C. G. **Singular points of smooth mappings**. London: Pitman, 1979.

Hartman e Wintner 1951 HARTMAN, P.; WINTNER, A. On the asymptotic curves of a surface. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 73, n. 1, p. 149–172, 1951.

Ishikawa e Machida 2006 ISHIKAWA, G.-o.; MACHIDA, Y. Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant gaussian curvature. **International journal of mathematics**, World Scientific, v. 17, n. 03, p. 269–293, 2006.

Klingenberg 2013 KLINGENBERG, W. **A Course in Differential Geometry**. New York: Springer Science & Business Media, 2013. v. 51.

Kokubu et al. 2004 KOKUBU, M. et al. Singularities of flat fronts in hyperbolic space. **Pacific journal of mathematics**, Mathematical Sciences Publishers, v. 221, n. 2, p. 303–351, 2004.

McLachlan 1994 MCLACHLAN, R. A gallery of constant-negative-curvature surfaces. **Mathematical Intelligencer**, v. 16, n. 4, 1994.

Pressley 2010 PRESSLEY, A. N. **Elementary differential geometry**. New York: Springer Science & Business Media, 2010.

Ramshaw 2016 RAMSHAW, L. **Stack Exchange**. 2016. Acessado em 05 mai. 2024. Disponível em: <<https://math.stackexchange.com/questions/289716/hyperbolic-diameter-of-amslers-surface>>.

Silva e Salva 2001 SILVA, A. C. D.; SALVA, A. C. D. **Lectures on symplectic geometry**. New York: Springer, 2001. v. 3575.

Stoker 1989 STOKER, J. J. **Differential Geometry**. New York: John Wiley & Sons, 1989. v. 20.

Tenenblat 2008 TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. São Paulo: Editora Blucher, 2008.

Toda 2003 TODA, M. Weierstrass-type representation of weakly regular pseudospherical surfaces in euclidean space. **arXiv preprint math/0307272**, 2003.

A

Resultados gerais que podem ser encontrados nas referências

No presente apêndice, exibiremos definições, proposições e teoremas que influenciam diretamente ou indiretamente na compreensão e construção deste trabalho.

A.0.1

Referencial de Darboux

Aqui, iremos abordar o referencial de Darboux, o qual é benéfico no momento em que trabalhamos com informações de escalares como torção e curvatura geodésicas, além de curvatura normal. Além disso, a construção do referencial em questão se âncora no triedro ortonormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{b}, \mathbf{N}\}$, onde \mathbf{t} é um vetor tangente unitário a uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ unitária em S , \mathbf{N} é o vetor normal à S unitário e $\mathbf{b} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ é o vetor unitário ortogonal a \mathbf{t} e a \mathbf{N} .

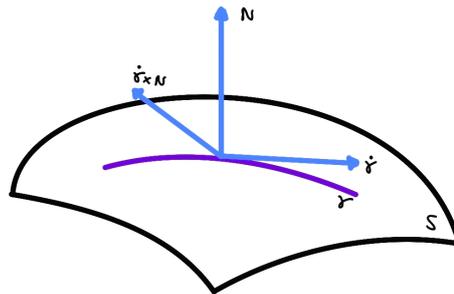


Figura A.1: A superfície S e o triedro do referencial de Darboux. Fonte: Autor, 2024.

Teorema A.0.1 Se $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva suave unitária ao longo de uma superfície suave S , então as fórmulas de Darboux relacionadas a tal curva, nos pontos em que $k \neq 0$, tem a forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = & k_n \mathbf{N} + k_g \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} = -k_g \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} = -k_n \mathbf{t} & - \tau_g \mathbf{b}, \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

onde \mathbf{t} é o vetor tangente à α , \mathbf{N} é o vetor normal à superfície S e $\mathbf{b} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ ao longo de α , e os escalares k_g e τ_g são a curvatura e torção geodésicas - nessa ordem -, e k_n é a curvatura normal.

Diante desse teorema, podemos tecer a observação que segue.

Observação A.0.1 Em particular, observe que, se α é uma linha assintótica unitária, a expressão (A-1) se reduz a

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = & k_g \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} = & -k_g \mathbf{t} + \tau_g \mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} = & -\tau_g \mathbf{b}. \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

E isso é graças ao fato de a curvatura normal se anular ao longo dos vetores tangentes à nossa curva α . Além disso, a depender da forma da curva α , a curvatura geodésica k_g deve ser ω_u ou ω_v , de acordo com a relação (2-10).

Por outro lado, já que estamos diante de um curva assintótica unitária, podemos afirmar que $|\tau_g| = 1$ nos pontos em que a curvatura k de α é não nula. Com efeito, do fato de α ser assintótica, inferimos que

$$\ddot{\alpha} = k_g \mathbf{N} \times \dot{\alpha},$$

haja vista que $k_n = 0$. Daí, percebe-se que, sendo \mathbf{n} o vetor normal unitário ao longo da curva α , temos

$$\mathbf{n} = \frac{k_g}{k} \mathbf{N} \times \dot{\alpha},$$

o que nos leva a afirmar que $|k_g| = |k|$, pois os vetores são unitários. Ainda, segue que \mathbf{n} é ortogonal a \mathbf{N} e a $\mathbf{t} = \dot{\alpha}(t)$. Assim, obtemos que $\mathbf{N} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, donde $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{N}\}$ forma uma base positiva para \mathbb{R}^3 . Além disso, é verdade que

$$-D\mathbf{N}(\dot{\alpha}(t)) = -\frac{d}{dt}(\mathbf{t} \times \mathbf{n})(t) = -\tau(t)\mathbf{n}, \quad (\text{A-3})$$

tendo em vista que $\mathbf{N}(\alpha(t)) = (\mathbf{t} \times \mathbf{n})(t) = \tau(t)\mathbf{n}$ (pelas equações de Frenet), $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ é uma base para $T_{\alpha(t)}S$ e $\langle D\mathbf{N}(\dot{\alpha}(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle = 0$.

Agora, dado que $D\mathbf{N}: T_{\alpha(t)}S \rightarrow T_{\alpha(t)}S$ é um operador autoadjunto, vem

$$\langle D\mathbf{N}(\dot{\alpha}(t)), \mathbf{n} \rangle = \langle \dot{\alpha}(t), D\mathbf{N}(\mathbf{n}) \rangle,$$

e temos que a componente escalar do vetor $D\mathbf{N}(\mathbf{n})$ em relação ao vetor \mathbf{t} é, também, igual a $\tau(t)$. Portanto, a base do operador autoadjunto $D\mathbf{N}$ em relação à base ortonormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ para o plano tangente $T_{\alpha(t)}S$ é representada por

$$\begin{bmatrix} 0 & -\tau(t) \\ -\tau(t) & * \end{bmatrix},$$

e segue que $K(\alpha(t)) = -\tau^2(t)$, isto é, $|\tau| = 1$.

Por fim, dado que $\dot{\mathbf{N}} = -\tau_g \mathbf{N} \times \dot{\alpha}$ e $|k_g| = |k|$, podemos concluir, por A-3, que $|\tau_g| = |\tau| = 1$.

A.0.2

Símbolos de Christoffel

Na presente subseção, apresentaremos um fato a respeito dos símbolos de Christoffel, os quais obtemos quando escrevemos as segundas derivadas parciais da parametrização X em relação ao triedro $\{X_u, X_v, \mathbf{N}\}$. Tais símbolos são muito úteis no entrelaçamento da nossa função geradora ω e a superfície correspondente, como vimos no capítulo 3.

Proposição A.0.1 *Os símbolos de Christoffel podem ser escritos em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{G \frac{\partial E}{\partial u} - 2F \frac{\partial F}{\partial u} + F \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2E \frac{\partial F}{\partial u} - E \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial E}{\partial u}}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2G \frac{\partial F}{\partial v} - G \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{E \frac{\partial G}{\partial v} - 2F \frac{\partial F}{\partial v} + F \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}\end{aligned}$$

Prova. A demonstração deste fato, o leitor interessado pode ver em (Pressley 2010). ■

Proposição A.0.2 (Equações de Compatibilidade) *Seja S uma superfície suave. Então, valem as equações abaixo.*

a) *Equação de Gauss*

$$-EK = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2. \quad (\text{A-4})$$

b) *Equações de Codazzi-Mainardi*

$$\begin{aligned}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.\end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Prova. Ver (Pressley 2010). ■

Teorema A.0.2 *Sejam E, F, G e e, f, g funções suaves definidas num domínio D . Se $EG - F^2 > 0$ em D e tais funções satisfazem as equações de compatibilidade, existe uma única superfície suave S associada a $D' \subset D$ tal que $K = \frac{ef-g^2}{EF-G^2}$ e*

$$I = (du)^2 + 2 \cos(\omega)dudv + (dv)^2 \quad \text{e} \quad II = 2 \sin(\omega)dudv.$$

Prova. O leitor interessado na demonstração desse fato pode encontrá-lo em (Stoker 1989). ■

A.0.3 Transversalidade

Aqui, vamos discorrer a respeito de um conceito que tem sido muito utilizado no ramo da teoria de singularidade: a noção de transversalidade. Para tal, usamos como referência o que está posto em (Gibson 1979).

Definição A.0.1 (Aplicação transversal) *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis com dimensões m e n , respectivamente. Sejam, ainda, $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável e P uma subvariedade de N . Sob tais condições, dizemos que f é transversal à subvariedade P se, para cada ponto $p \in f^{-1}(p)$, temos a igualdade que segue:*

$$T_{f(p)}N = df_p(T_pM) + T_{f(p)}P. \quad (\text{A-6})$$

Observe que a igualdade (A-6) quer dizer que todo vetor tangente à nossa variedade N no ponto $f(p)$ pode ser interpretado com uma soma entre um vetor tangente à subvariedade P em $f(p)$ e um vetor tangente à imagem de M através de df_p .

Agora, de um lado, temos dois casos triviais de transversalidade: um quando $P = N$, e outro quando $f(M) \cap P = \emptyset$. Por outro lado, a transversalidade nos impõe algumas restrições a respeito das dimensões do nosso objeto de estudo, isto é, das variedades diferenciáveis. Uma das referidas restrições é o fato de que f não pode ser transversal à P se tivermos

$$\dim M < \dim N - \dim P,$$

a não ser que tenhamos $f(M) \cap P = \emptyset$.

A seguir, há os enunciados dos teoremas que nos auxiliou na demonstração do teorema 5.3.1. Sendo assim, enunciemos o primeiro deles – o qual nos garante que podemos perturbar a função $f : (U, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ em uma função \tilde{f} que seja transversal à estratificação considerada.

Teorema A.0.3 (Teorema de Transversalidade Elementar) *Sejam S_1, S_2, \dots, S_k subvariedades de \mathbb{R}^n . Então, o conjunto de mapas suaves $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ transversais às subvariedades S_1, S_2, \dots, S_k , isto é, o conjunto*

$$\{g \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n); g \pitchfork S_j, j = 1, \dots, k\},$$

é denso em $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Prova. Ver (Gibson 1979). ■

Por fim, apresentemos o resultado que nos permitiu eliminar alguns casos através da codimensão da subvariedade.

Teorema A.0.4 *Sejam $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável e P^k uma subvariedade de N^n com codimensão $n-k$ e $f^{-1}(P) \neq \emptyset$. Então, se f é transversal à P , podemos dizer que $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade de M^m cuja codimensão é $n-k$.*

Prova. Consultar (Gibson 1979). ■

A.0.4

Problema de Cauchy

Nessa subseção, esclareceremos o que foi dito a respeito do Teorema de Cauchy-Kovalevskaya na demonstração do teorema 5.3.1. Para isso, baseamos-nos em (Folland 1995).

Dito isso, na demonstração do teorema 5.3.1, nosso problema de Cauchy se enquadra na seguinte configuração:

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 & \text{para } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, y) = \phi_0(y) \text{ e } u_x(0, y) = \phi_1(y) & \text{se } y \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{A-7})$$

sendo ϕ_0 e ϕ_1 funções analíticas. De fato, observe que a equação (5-5) pode ser vista como

$$u_{xx} - (1 + u_x^2 + y^2)^2 u_{yy} = 0,$$

e temos o problema de Cauchy quando estabelecemos as condições iniciais analíticas ϕ_0 e ϕ_1 .

Diante desse fato, podemos enunciar o renomado teorema de Cauchy-Kovalevskaya para o nosso contexto, como veremos logo abaixo.

Teorema A.0.5 (Teorema de Cauchy-Kovalevskaya) *Se F , ϕ_0 e ϕ_1 são funções analíticas próximo da origem, o problema de Cauchy (A-7) tem uma única solução analítica definida numa vizinhança da origem.*

Prova. Ver (Folland 1995). ■

B

O problema de Goursat e a equação de sine-Gordon

Primeiramente, o que nos levou a produzir o presente apêndice foi o teorema 3.1.1. Sendo assim, apresentaremos alguns fatos sobre o chamado Problema de Goursat e evidenciaremos a sua relação com o que está posto no teorema que motivou a escrita desta parte do texto. A base para o que segue foi o artigo (Bobenko, Matthes e Suris 2006).

Antes de começarmos, vejamos algumas notações e fatos:

- Neste contexto, ϵ sempre será da forma 2^{-k} , sendo $k \in \mathbb{Z}_+$;
- Para $r \in \mathbb{R}$, temos que $[0, r]^\epsilon = [0, r] \cap (\epsilon\mathbb{Z})$;
- $B^\epsilon(r) = [0, r]^\epsilon \times [0, r]^\epsilon$ é o domínio discreto;
- $B(r) = [0, r] \times [0, r]$ é o domínio contínuo;
- O domínio-limite $B^0(r) = \bigcup_{\epsilon=2^{-k}} B^\epsilon(r)$ é denso em $B(r)$, de modo que todo $x \in B^0(r)$ está em algum $B^\epsilon(r)$. Logo, faz sentido falarmos de convergência pontual de função $\{a^\epsilon : B^\epsilon(r) \rightarrow \mathbb{R}\}_{\epsilon=2^{-k}}$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Então, passemos ao conceito de operadores quocientes diferenciais.

Definição B.0.1 (Operadores quocientes diferenciais δ_x^ϵ e δ_y^ϵ) *Seja $a^\epsilon : B^\epsilon(r) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em $B^\epsilon(r) = [0, r]^\epsilon \times [0, r]^\epsilon$, onde $[0, r]^\epsilon = [0, r] \cap (\epsilon\mathbb{Z})$. Sendo assim, definimos os operadores quocientes a seguir:*

$$\delta_x^\epsilon a^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(a^\epsilon(x + \epsilon, y) - a^\epsilon(x, y)),$$

$$\delta_y^\epsilon a^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(a^\epsilon(x, y + \epsilon) - a^\epsilon(x, y)).$$

De posse da definição precedente, vamos definir o chamado Problema de Goursat.

Definição B.0.2 (Problema de Goursat contínuo) *Consideremos um sistema hiperbólico contínuo para as funções $a, b : B(r) \rightarrow \mathbb{R}$ formado por*

$$\partial_y a = f(a, b), \quad \partial_x b = g(a, b). \quad (\text{B-1})$$

onde $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. Sendo assim, um problema de Goursat contínuo para esse sistema surge quando estabelecemos os valores iniciais

$$a(x, 0) = a_0(x), \quad b(0, y) = b_0(y), \quad (\text{B-2})$$

com $x \in [0, r]$ e $y \in [0, r]$, respectivamente, e $a_0, b_0 : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Definição B.0.3 (Problema de Goursat discreto) Consideremos um sistema hiperbólico discreto para as funções $a^\epsilon, b^\epsilon : B^\epsilon(r) \rightarrow \mathbb{R}$ formado por

$$\delta_y^\epsilon a^\epsilon = f^\epsilon(a^\epsilon, b^\epsilon), \quad \delta_x^\epsilon b^\epsilon = g^\epsilon(a^\epsilon, b^\epsilon). \quad (\text{B-3})$$

onde $f^\epsilon, g^\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves. Sendo assim, um problema de Goursat discreto para esse sistema surge quando estabelecemos os valores iniciais

$$a^\epsilon(x, 0) = a_0^\epsilon(x), \quad b^\epsilon(0, y) = b_0^\epsilon(y), \quad (\text{B-4})$$

com $x \in [0, r]^\epsilon$ e $y \in [0, r]^\epsilon$, respectivamente.

Proposição B.0.1 O problema de Goursat discreto B-3 tem uma única solução (a^ϵ, b^ϵ) em $B^\epsilon(r)$.

Prova. O cálculo da solução discreta é feito, de forma única, a partir das condições iniciais, garantindo a unicidade. ■

Já que sabemos o que é um problema de Goursat e a existência e unicidade de solução para o caso discreto, vejamos que a equação de sine-Gordon é um exemplo de tal problema quando estabelecemos as condições iniciais ao longo dos eixos coordenados.

Exemplo B.0.1 (Equação de sine-Gordon) Seja a equação de sine-Gordon da forma

$$\omega_{xy} = \sin \omega \quad (\text{B-5})$$

e com as condições iniciais

$$\omega(x, 0) = \omega_1(x), \quad \omega(0, y) = \omega_2(y). \quad (\text{B-6})$$

Dessa maneira, para transformarmos (B-5) em (B-3), trocaremos as derivadas parciais pelos quocientes diferenciais respectivos:

$$\delta_x^\epsilon \delta_y^\epsilon \omega = \sin \omega, \quad (\text{B-7})$$

e definamos as variáveis dependentes $a^\epsilon = \delta_x^\epsilon \omega$ e $b^\epsilon = \omega$. Então, elas devem satisfazer o sistema hiperbólico discreto

$$\delta_y^\epsilon a^\epsilon = \sin b^\epsilon, \quad \delta_x^\epsilon b^\epsilon = a^\epsilon. \quad (\text{B-8})$$

Portanto, quando estabelecemos as condições iniciais

$$a^\epsilon(x, 0) = \delta_x^\epsilon \omega_1(x), \quad b^\epsilon(0, y) = \omega_2(y), \quad (\text{B-9})$$

com $x, y \in B^\epsilon(r)$, temos o problema de Goursat discreto associado à equação de sine-Gordon.

Já o problema de Goursat contínuo para a equação de sine-Gordon é obtido quando definimos $a = \partial_x \omega$ e $b = \omega$. De fato, nesse caso, temos que a e b devem satisfazer o sistema hiperbólico contínuo

$$\partial_y a = \sin b, \quad \partial_x b = a,$$

e o problema de Goursat contínuo surge quando estabelecemos as condições iniciais $a(x, 0) = \omega_3(x)$ e $b(0, y) = \omega_4(y)$.

Observação B.0.1 A discretização (B-7) da equação de sine-Gordon não é geométrica. Isso porque não temos uma interpretação geométrica imediata para ela, embora sabemos que a equação de sine-Gordon (B-5) descreve, no nosso contexto, as superfícies pseudoesféricas. No entanto, felizmente, existe uma outra forma alternativa, como bem pontuaram os autores de (Bobenko, Matthes e Suris 2006).

Para vermos isso, partimos da igualdade desenvolvida por Hirota (B-10) – sendo tal igualdade análoga à equação de sine-Gordon, só que no caso discreto:

$$\begin{aligned} & \sin \left(\frac{1}{4} (\omega^\epsilon(x + \epsilon, y + \epsilon) - \omega^\epsilon(x + \epsilon, y) - \omega^\epsilon(x, y + \epsilon) + \omega^\epsilon(x, y)) \right) = \\ & = \frac{\epsilon^2}{4} \sin \left(\frac{1}{4} (\omega^\epsilon(x + \epsilon, y + \epsilon) + \omega^\epsilon(x + \epsilon, y) + \omega^\epsilon(x, y + \epsilon) + \omega^\epsilon(x, y)) \right). \end{aligned} \tag{B-10}$$

A solução dela corresponde a uma superfície pseudoesférica discreta. Além disso, em (Bobenko e Pinkall 1996), há um estudo a respeito do significado geométrico do ângulo ω .

Sendo assim, definamos $a^\epsilon = \delta_x^\epsilon \omega^\epsilon$ e consideremos

$$\begin{aligned} b^\epsilon(x, y) &= \omega^\epsilon(x, y) + \frac{\epsilon}{2} \delta_y^\epsilon \omega^\epsilon(x, y) \\ &= \frac{1}{2} (\omega^\epsilon(x, y + \epsilon) + \omega^\epsilon(x, y)). \end{aligned}$$

Então, a igualdade (B-10) nos leva a

$$\begin{aligned} b^\epsilon(x + \epsilon, y) - b^\epsilon(x, y) &= \frac{\epsilon}{2} (a^\epsilon(x, y + \epsilon) + a^\epsilon(x, y)) \\ e^{i\epsilon a^\epsilon(x, y + \epsilon)/2} - e^{i\epsilon a^\epsilon(x, y)/2} &= \frac{\epsilon^2}{4} (e^{ib^\epsilon(x + \epsilon, y)} - e^{-ib^\epsilon(x, y)}). \end{aligned}$$

Com isso, resolvendo para $a^\epsilon(x, y + \epsilon)$ e $b^\epsilon(x + \epsilon, y)$, vem que

$$\delta_y^\epsilon a^\epsilon = \frac{2}{i\epsilon^2} \log \left(\frac{1 - \frac{\epsilon^2}{4} e^{-ib^\epsilon - i\epsilon a^\epsilon/2}}{1 - \frac{\epsilon^2}{4} e^{ib^\epsilon + i\epsilon a^\epsilon/2}} \right) \tag{B-11}$$

$$\delta_x^\epsilon b^\epsilon = a^\epsilon + \frac{\epsilon}{2} \delta_y^\epsilon a^\epsilon.$$

Diante disso, é válido ressaltar que as formas (B-7) e (B-11) se aproximam do sistema hiperbólico contínuo no sentido da definição B.0.4.

Diante disso, já que sabemos a relação entre a equação de sine-Gordon e o problema de Goursat, passemos para o enunciado do cerne desta subseção, que nos permite concluir o teorema 3.1.1. Mas, antes, vejamos o conceito de aproximação entre um sistema hiperbólico discreto e um sistema hiperbólico contínuo.

Definição B.0.4 *Um sistema hiperbólico discreto aproxima-se $\mathcal{O}(\epsilon)$ do sistema hiperbólico contínuo em C^k se as funções f^ϵ e g^ϵ satisfazem*

$$f^\epsilon(a, b) = f(a, b) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad g^\epsilon(a, b) = g(a, b) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de \mathbb{R}^2 e as respectivas derivadas parciais de ordem até k satisfazem a relação acima também.

Sendo assim, vamos ao teorema principal, o qual nos diz que as soluções do problema de Goursat discreto convergem para a solução do problema de Goursat contínuo quando $\epsilon \rightarrow 0$. Consequentemente, temos que elas convergem para a solução da equação de sine-Gordon em um domínio adequado $B(\bar{r})$, com $0 < \bar{r} < r$.

Teorema B.0.1 *Consideremos um sistema hiperbólico discreto como em (B-3) e digamos que ele se aproxima-se com uma ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ do sistema hiperbólico contínuo (B-1) em C^{k+1} , $k > 1$. Além disso, digamos que as condições iniciais discretas se aproximam com uma ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ das condições contínuas da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} a_0^\epsilon(x) &= a_0(x) + \mathcal{O}(\epsilon), & b_0^\epsilon(y) &= b_0(y) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ (\delta_x^\epsilon)^l a_0^\epsilon(x) &= (\delta_x^\epsilon)^l a_0(x) + \mathcal{O}(\epsilon), & (\delta_y^\epsilon)^l b_0^\epsilon(y) &= (\delta_y^\epsilon)^l b_0(y) + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned} \tag{B-12}$$

uniformemente para $x \in [0, r]^\epsilon$ e $y \in [0, r]^\epsilon$, respectivamente, com $l \leq k$. Então, afirmamos que a sequência de soluções (a^ϵ, b^ϵ) converge pontualmente uniformemente para um par de funções Lipschitz-contínuas (a, b) , definidas em $B(\bar{r})$, com $\bar{r} \in (0, r]$ escolhido adequadamente, tal que o problema de Goursat contínuo é resolvido. Além disso, o par (a, b) é de classe C^k em $B(\bar{r})$.

Por fim, veremos que o teorema 3.1.1 é consequência do teorema que enunciamos e demonstramos logo acima.

Prova. [do teorema 3.1.1] Primeiramente, sabemos que, dada uma equação de sine-Gordon, conseguimos associá-la a um problema de Goursat contínuo e, então, a um problema de Goursat discreto. Sendo assim, assumindo que o processo de discretização segue a hipótese do teorema B.0.1, temos que a solução do problema de Goursat contínuo surge como o limite de soluções discretas (a^ϵ, b^ϵ) quando fazemos $\epsilon \rightarrow 0$. Porém, pela proposição B.0.1, temos que as soluções discretas

são únicas. Logo, o seu limite (a, b) também o é. Portanto, segue a existência e unicidade da função ω . ■

E, mais uma vez, reiteramos que temos os mesmos resultados se levarmos em conta a discretização apresentada em B.0.1.