



Josiane Lima Born

Método da Entropia Cruzada para Solução do Problema de Planejamento da Expansão da Transmissão

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador: André Milhorce de Castro

Coorientadores: Armando Martins Leite da Silva
Fernando Aparecido de Assis

Rio de Janeiro
Setembro de 2024



Josiane Lima Born

Método da Entropia Cruzada para Solução do Problema de Planejamento da Expansão da Transmissão

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio.
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

André Milhorange de Castro

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Armando Martins Leite da Silva

Coorientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Fernando Aparecido de Assis

Coorientador

Universidade Federal de São João del-Rei – UFSJ

José Filho da Costa Castro

Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Silvan Antônio Flávio

Universidade Federal de São João del-Rei – UFSJ

Rio de Janeiro, 26 de setembro de 2024

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Josiane Lima Born

Graduou-se em Engenharia Elétrica com ênfase em Sistemas Elétricos de Potência pelo Instituto Federal Sul-rio-grandense Campus Pelotas, IFSUL/RS, em 2019. Atualmente trabalha como Técnica de Projetos, Construção e Montagem na empresa Petróleo Brasileiro SA – PETROBRAS.

Ficha Catalográfica

Born, Josiane Lima

Método da entropia cruzada para solução do problema de planejamento da expansão da transmissão / Josiane Lima Born; orientador: André Milhorange de Castro; coorientadores: Armando Martins Leite da Silva, Fernando Aparecido de Assis. – 2024.

121 f.: il. color.; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2024.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. Método da entropia cruzada. 3. Otimização combinatória. 4. Planejamento da expansão da transmissão. 5. Simulação Monte Carlo. 6. Critérios de segurança. I. Castro, André Milhorange de. II. Silva, Armando Martins Leite da. III. Assis, Fernando Aparecido de. IV. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. V. Título.

CDD: 621.3

Agradecimentos

Chegando ao fim deste ciclo, sinto uma profunda gratidão por todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho.

Agradeço aos meus orientadores André M. de Castro, Armando M. Leite da Silva e Fernando A. de Assis que, com suas valiosas contribuições, tornaram possível a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus pais Cinara Lima Born e João Luís Born que, mesmo distantes, me encorajaram no decorrer de todo o curso.

Agradeço ao meu companheiro de vida pessoal e acadêmica, Daniel de Lessa Borba, pelo suporte ao longo de mais uma jornada.

Agradeço a minha empresa Petrobras, nas figuras gerenciais de Andrea Zaneti Caligares e Flávio Rogério Otto, pelo incentivo na realização deste mestrado.

Agradeço aos professores Adilson M. Tavares e Cláudio Machado, do IFSUL – Campus Pelotas, pela confiança depositada em mim.

Por fim, agradeço à PUC-Rio pela oportunidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Born, Josiane Lima; de Castro, André Milhorange; Leite da Silva, Armando Martins; de Assis, Fernando Aparecido. **Método da Entropia Cruzada para Solução do Problema de Planejamento da Expansão da Transmissão.** Rio de Janeiro, 2024. 121p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O planejamento da expansão da transmissão (PET) tem como objetivo definir a localização, o momento e a quantidade de reforços que devem ser implementados na rede elétrica. Por meio da definição estratégica de reforços, o PET garante que a infraestrutura de transmissão esteja preparada para atender ao aumento da demanda, à integração de novas fontes de geração e às novas tecnologias que surgem no setor elétrico. Todavia, a modelagem do problema se tornou mais desafiadora devido ao aumento da magnitude dos sistemas elétricos. Como consequência, a quantidade de incertezas atreladas exige ferramentas de otimização que possibilitem a gestão eficiente dos recursos econômicos. Portanto, essa dissertação propõe a utilização de um algoritmo denominado SMC-CE-PET, que é baseado no método da entropia cruzada com auxílio de simulação Monte Carlo, para solucionar a otimização do problema PET. Por meio de uma distribuição de probabilidade, o algoritmo é executado e diversos planos de expansão podem ser identificados. Para análise da metodologia proposta, é solucionado o problema PET estático de longo prazo, através de modelo DC linearizado de rede com a inclusão de perdas ôhmicas e consideração do critério de segurança “N-1” para a rede de transmissão. Dois sistemas teste, comumente utilizados neste tópico de pesquisa, são empregados no processo de validação da metodologia proposta.

Palavras-chave

Método da entropia cruzada; otimização combinatória; planejamento da expansão da transmissão; simulação Monte Carlo; critérios de segurança.

Abstract

Born, Josiane Lima; de Castro, André Milhorance (Advisor); Leite da Silva, Armando Martins (Co-Advisor); de Assis, Fernando Aparecido (Co-Advisor). **Cross Entropy Method for Solving the Transmission Expansion Planning Problem**. Rio de Janeiro, 2024. 121p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Transmission expansion planning (TEP) aims to define the location, timing, and quantity of reinforcements that must be implemented in the power grid. By defining reinforcement strategies, TEP ensures that the transmission infrastructure is prepared to meet increased demand, the integration of new generation sources, and new technologies that emerge in the electricity sector. However, modeling the problem has become more challenging due to the increase in size and complexity of electrical systems. As a consequence, the amount of uncertainties involved requires optimization tools that enable the efficient management of economic resources. Therefore, this dissertation proposes the use of an algorithm named SMC-CE-TEP, which is based on the cross-entropy method with the aid of Monte Carlo simulation, to solve the optimization of the TEP problem. Through a probability distribution, the algorithm is run, and several expansion plans can be identified. To analyze the proposed method, the long-term static TEP problem is solved through a linearized DC network model with the inclusion of ohmic losses and consideration of “N-1” security criterion for the transmission network. Two test systems, often used in this research topic, are employed in the validation process of the proposed method.

Keywords

Cross-Entropy method; combinatorial optimization; transmission expansion planning; Monte Carlo simulation; security criteria.

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Considerações Iniciais	16
1.2	Desenvolvimento Histórico	17
1.2.1	Planejamento da Expansão da Transmissão	17
1.2.2	Simulação Monte Carlo com Entropia Cruzada	20
1.3	Estrutura da Dissertação	21
2	Planejamento da Expansão da Transmissão	23
2.1	Introdução	23
2.2	Modelagem do Planejamento da Expansão da Transmissão	23
2.3	Técnica de Solução	30
2.3.1	Otimização Clássica	30
2.3.2	Otimização Heurística	33
2.3.3	Otimização Metaheurística	35
2.4	Critérios de Planejamento	42
2.4.1	Planejamento via Abordagem Determinística	42
2.4.2	Planejamento via Abordagem Probabilística	43
2.5	Considerações Finais	44
3	Método da Entropia Cruzada	45
3.1	Introdução	45
3.2	Método da Entropia Cruzada	45
3.2.1	Amostragem por Importância	46
3.2.2	Entropia Cruzada de Kullback-Leibler	48
3.2.3	Entropia Cruzada para Eventos Raros	50
3.2.4	Entropia Cruzada para Otimização	50
3.3	Entropia Cruzada no Planejamento da Expansão da Transmissão	57
3.3.1	Aplicação do Algoritmo SMC-CE-PET	59
3.4	Considerações Finais	63
4	Simulações e Resultados	64
4.1	Introdução	64

4.2	Índices de Desempenho	64
4.3	Sistema de IEEE RTS 24 Barras	65
4.3.1	Sistema de IEEE RTS 24 Barras – Índices de Desempenho	69
4.4	Sistema Sul Brasileiro (SSB)	73
4.4.1	Sistema de SSB – Índices de Desempenho	80
4.5	Considerações Finais	81
5	Conclusões	83
5.1	Trabalhos Futuros	84
	Referências Bibliográficas	86
	Apêndice A Dados do Sistema IEEE-RTS	97
	Apêndice B Dados do Sistema SSB	105
	Apêndice C Exemplo Matemático para o Método da Entropia Cruzada	118

Lista de figuras

Figura 2.1 – Incertezas versus detalhamento do sistema no horizonte de planejamento [2].	24
Figura 3.1 – Fluxograma do Algoritmo 3.2.	56
Figura 4.1 – Sistema IEEE-RTS com reforços adicionados.	66
Figura 4.2 – IEEE-RTS: Evolução do melhor plano de expansão.	67
Figura 4.3 – IEEE-RTS: Evolução da <i>Elite</i> .	68
Figura 4.4 – SSB com reforços adicionados.	74
Figura 4.5 – SSB: Evolução do melhor plano de expansão.	75
Figura 4.6 – SSB: Evolução da <i>Elite</i> .	76
Figura A.1 – IEEE-RTS: Evolução dos ramos candidatos ao longo das iterações.	104
Figura B.1 – SSB: Evolução dos ramos candidatos ao longo das iterações.	117
Figura C.1 – Gráfico de x^2 .	118
Figura C.2 – Função distribuição normal aleatória para $\mathbf{X}$ em $t = 1$.	119
Figura C.3 – Função de desempenho $S(\mathbf{X})$ em $t = 1$.	119
Figura C.4 – Função distribuição normal aleatória para $\mathbf{X}$ e função de desempenho $S(\mathbf{X})$ em $t = 2 \dots 8$.	121

Lista de tabelas

Tabela 2.1 – Métodos de otimização clássica versus modelos matemáticos de fluxo de potência.	33
Tabela 2.2 – Métodos de otimização metaheurística versus modelos matemáticos de fluxo de potência.	41
Tabela 2.3 – Métodos de otimização versus modelos matemáticos de fluxo de potência com abordagem determinística.	43
Tabela 2.4 – Métodos de otimização versus modelos matemáticos de fluxo de potência com abordagem probabilística.	44
Tabela 3.1 – Métodos de otimização versus modelos matemáticos de fluxo de potência que utilizam técnicas de amostragem aleatória.	54
Tabela 3.2 – Matriz <i>Elite</i> [80].	55
Tabela 3.3 – Matriz u .	61
Tabela 4.1 – IEEE-RTS: Resultados nos dez melhores planos de expansão.	68
Tabela 4.2 – IEEE-RTS: Número de reforços por ramo candidato nos dez melhores planos de expansão.	69
Tabela 4.3 – IEEE-RTS: Investimento nos dez melhores planos de expansão por execução.	70
Tabela 4.4 – IEEE-RTS: Índices de desempenho.	70
Tabela 4.5 – IEEE-RTS: Investimento nos dez melhores planos de expansão por execução.	71
Tabela 4.6 – IEEE-RTS: Índices de desempenho.	72
Tabela 4.7 – IEEE-RTS: Comparação de índices de desempenho.	73
Tabela 4.8 – SSB: Resultados nos dez melhores planos de expansão.	76
Tabela 4.9 – SSB: Número de reforços por ramo candidato nos dez melhores planos de expansão.	77
Tabela 4.10 – SSB: Resultados nos 10 melhores planos de expansão segundo [2].	78
Tabela 4.11 – SSB: Resultados nos cem melhores planos de expansão.	79
Tabela 4.12 – SSB: Investimento nos dez melhores planos de expansão por execução.	80

Tabela 4.13 – SSB: Índices de desempenho.	81
Tabela A.1 – Dados de barra – IEEE-RTS.	97
Tabela A.2 – Dados de ramos - Sistema IEEE-RTS.	98
Tabela B.1 – Dados de barra – SSB.	105
Tabela B.2 – Dados de ramos candidatos – SSB.	106

Lista de abreviaturas

PET	Planejamento da expansão da transmissão
CE	Método da entropia cruzada (<i>cross-entropy</i>)
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
AC	Modelagem em corrente alternada
DC	Modelagem em corrente contínua
LOLE	Expectativa de Perda de Carga (<i>Loss of Load Expectation</i>)
EENS	Energia Esperada não Suprida (<i>Expected Energy not-Supplied</i>)
LOLC	Custo de Corte de Carga (<i>Loss of Load Cost</i>)
ACO	Otimização por Colônia de Formigas (<i>Ant Colony Optimization</i>)
PSO	Otimização por Enxame de Partículas (<i>Particle Swarm Optimization</i>)
GA	Algoritmo Genético (<i>Genetic Algorithm</i>)
AIS	Sistemas Imunológicos Artificiais (<i>Artificial Immune System</i>)
COA	Algoritmo de Otimização do Caos (<i>Chaos Optimization Algorithm</i>)
IDE	Evolução Diferencial Melhorada (<i>Improved Differential Evolution</i>)
TS	Busca Tabu (<i>Tabu Search</i>)
SFLA	Algoritmo de Salto de Sapo Aleatório (<i>Shuffled Frog Leaping Algorithm</i>)
NSGA II	Algoritmo Genético de Classificação Não Dominado (<i>Non-dominated Sorting Genetic Algorithm</i>)
GRASP	Procedimento de Pesquisa Adaptativa Aleatória Gulosa (<i>Greedy Randomized Adaptive Search Procedure</i>)
SA	Recozimento Simulado (<i>Simulated Annealing</i>)
SMC	Simulação Monte Carlo
CVaR	<i>Conditional value at risk</i>
IS	Amostragem por Importância (<i>Importance Sampling</i>)
LR	Verossimilhança (<i>Likelihood Ratio</i>)
SLR	Verossimilhança Padrão (<i>Standard Likelihood Ratio</i>)
SMC-CE-PET	Algoritmo de entropia cruzada com simulação Monte Carlo para planejamento da expansão da transmissão
LT	Linha de transmissão
SSB	Sistema Sul Brasileiro

Lista de símbolos

$=$	Igual
$\leq$	Menor ou igual
$\geq$	Maior ou igual
$\sim$	É distribuída de acordo com
$\approx$	Aproximadamente
∇	Gradiente
$\forall$	Para todo
$\min$	Minimizar
$\max$	Maximizar
Σ	Somatório
$\ln$	Logaritmo natural
x_j	Vetor de variáveis de otimização do problema genérico, com dimensão j
c_j	Função objetivo do problema genérico, com dimensão j
a_{ij}	Funções de restrição (desigualdade) do problema genérico, com dimensão ij
b_m	Limites das restrições do problema genérico, com dimensão m
x^*	Vetor de variáveis ótimo do problema genérico
$\overset{0}{\square}$	Sobrescrito para indicar variáveis de ramos existentes
c_{kl}	Custo de investimento do ramo candidato kl (\$)
x_{kl}	Número discreto de novos ramos kl que serão adicionados à rede
x_{kl}^0	Número de circuitos existentes no ramo kl
α_{custo}	Custo do corte de carga (\$/MW)
r_k	Corte de carga na barra k
f_{kl}	Fluxo de potência ativa no ramo kl
$\bar{f}_{kl}$	Limite de fluxo de potência ativa no ramo kl
g_k	Injeção de potência ativa da geração na barra k
$\underline{g}_k$	Limite inferior de geração da barra k
$\bar{g}_k$	Limite superior de geração da barra k

d_k	Demanda de carga na barra k
Ω_k	Conjunto de todas as barras k
Ω_L	Conjunto de todos os ramos kl
Ω_L^0	Subconjunto de ramos existentes kl
Ω_L	Subconjunto de ramos candidatos kl
b_{kl}	Susceptância do ramo kl
θ_{kl}	Diferença angular de fase entre as barras k e l
M_{kl}	Parâmetro do modelo Disjuntivo para kl
$\bar{x}_{kl}$	Número máximo de reforços que podem ser adicionados ao ramo candidato kl
α_{op}	Penalização, de valor elevado em relação ao custo de produção (e.g., 10 vezes superior ao maior custo de produção), aplicada ao corte de carga
c_{gk}	Custo de produção dos geradores da barra k
d_{fic}	Vetor de cargas (demandas) fictícias para representação das perdas na transmissão
bsw	Índice que representa a barra de referência angular para o sistema (barra swing).
p_{kl}^{Perdas}	Perdas calculadas para cada ramo ativo kl
$\mathbb{E}$	Valor esperado
$\mathbb{V}$	Variância
$\mathbb{P}$	Probabilidade
α	Parâmetro de suavização
ρ	Parâmetro de raridade
γ	Parâmetro de nível
$\square^*$	Sobrescrito para indicar variáveis ótimas
$\hat{\square}$	Ênfase para indicar estimador ou variável estimada
$\tilde{\square}$	Ênfase para indicar variável obtida através de solução de equação
l	Desempenho esperado de um sistema estocástico
S	Função de desempenho amostral
$\varphi(\cdot; \gamma)$	Função real do desempenho amostral, que depende do parâmetro γ
f	Distribuição de probabilidade genérica
I_A	Função indicadora do evento A
g	Distribuição de amostragem por importância

W	Razão de verossimilhança
$\mathcal{D}$	Distância de Kullback-Leibler (entropia cruzada)
$\mathbf{u}$	Parâmetro nominal (original) (vetor)
$\mathbf{v}$	Parâmetro de referência (vetor)
$\mathbf{w}$	Parâmetro de referência arbitrário (vetor)
$\text{Ber}(p)$	Distribuição de Bernoulli, de probabilidade p
$N(\mu, \sigma)$	Distribuição normal, de média μ e desvio padrão σ
N_{CE}	Tamanho do intervalo de amostragem
N	Número de linhas da matriz <i>Elite</i>
n	Número de variáveis de decisão da <i>Elite</i>
m	Número de objetivos da <i>Elite</i>
cd	Ramo candidato

1

Introdução

1.1

Considerações Iniciais

A garantia do fornecimento de energia elétrica de forma eficaz e confiável está intrinsicamente conectada ao desenvolvimento socioeconômico de uma nação. Para manter a integridade e a confiabilidade da rede, as capacidades de geração, transmissão e distribuição devem estar alinhadas, visto que qualquer desequilíbrio compromete a operação do sistema elétrico.

Assim, o planejamento do sistema de transmissão de energia desempenha um papel crucial na conexão entre a geração e o consumo. Logo, as adaptações e os aprimoramentos constantes na infraestrutura de transmissão de energia são fundamentais para garantir sua aderência às exigências econômicas e técnicas de um sistema elétrico em continuada evolução.

Diversos fatores podem influenciar a necessidade de criação de novas malhas de transmissão ou de reforços nas redes existentes. Como exemplo, podem-se citar as mudanças nas características de consumo, como o aumento da demanda devido ao crescimento populacional, e o surgimento de novas tecnologias de geração de energia elétrica.

Portanto, os estudos para o planejamento da expansão da transmissão (PET) surgem visando avaliar impactos multidisciplinares, tomar decisões embasadas em dados e identificar gargalos ou oportunidades para melhorias da infraestrutura elétrica. Faz-se, assim, necessário analisar diversos cenários, incluindo a análise de contingências na rede, e considerar desde aspectos técnicos e sociais, até questões ambientais e financeiras. Para tanto, é necessário lançar mão de uma modelagem matemática robusta, que permita a representação e análise de condições de interesse.

Do ponto de vista matemático, o planejamento da expansão da transmissão pode ser definido como um problema combinatório, estocástico e de grande

complexidade, classificado como problema de programação não linear inteira mista [1–3].

A partir da modelagem matemática do problema PET, é vantajoso o uso de ferramentas que busquem uma expansão otimizada. Portanto, conforme mencionado em [4], os principais métodos de solução para o problema PET podem ser divididos em três classificações principais: métodos clássicos, otimização heurística e otimização metaheurística.

Entre essas estratégias, o algoritmo de solução proposto nesta dissertação se enquadra no terceiro grupo. O método da entropia cruzada (*cross-entropy* – CE) é uma técnica eficiente, utilizada para resolver problemas de otimização combinatória e estimação de eventos raros, onde probabilidades muito pequenas precisam ser avaliadas com precisão, por exemplo, em análise de confiabilidade [5].

Esta dissertação de mestrado tem o objetivo de adaptar o método CE para a otimização do PET. O foco da análise reside em evitar cortes de carga e minimizar os custos de investimentos, o número total de novos circuitos e as perdas elétricas. O algoritmo proposto é avaliado com o sistema [6] IEEE-RTS de 24 barras e com uma representação equivalente do sistema Sul Brasileiro [2, 7–9].

1.2

Desenvolvimento Histórico

Esta seção visa apresentar uma visão geral do problema de planejamento da expansão da transmissão através dos estudos já realizados. Além disso, a seção abrange o desenvolvimento histórico do método da entropia cruzada e suas aplicações no setor elétrico.

1.2.1

Planejamento da Expansão da Transmissão

O principal objetivo do planejamento da expansão da transmissão é definir onde, quando e quais reforços devem ser colocados na rede elétrica para garantir um nível adequado de fornecimento de energia aos clientes, levando em consideração o crescimento da carga e as novas capacidades dos geradores [10].

Para determinar os ramos que devem ser reforçados em uma rede base, a modelagem matemática necessita que diversas premissas sejam adotadas. O tamanho da rede, o horizonte de implementação, se o planejamento será estático ou

dinâmico, as condições de investimentos, os critérios de confiabilidade, o crescimento da carga e da geração distribuída são algumas das variáveis que devem ser consideradas.

Então, como primeiro passo para estruturar a modelagem do problema PET, deve-se definir qual será a representação do fluxo de potência a ser empregado. As alternativas mais usuais são os modelos AC [11–18] e DC [10, 13, 18–53], e cada um desses traz consigo características intrínsecas de sua formulação própria.

O modelo AC considera a potência reativa, e as perdas de energia podem ser incluídas, porém, o equacionamento leva a um complexo problema de programação não linear, que necessita de uma técnica de otimização eficiente para resolução. Em contrapartida, o modelo DC não considera a potência reativa e as perdas de energia não podem ser totalmente incluídas, entretanto sua resolução pode ser realizada de maneira mais simplificada [4, 54].

Outros modelos que podem ser encontrados na literatura são os modelos de transportes [7, 19, 41, 55], híbrido [19, 56, 57] e disjuntivo [58–64]. A determinação do modelo mais adequado ao contexto em análise depende do horizonte de planejamento, da magnitude da rede a ser estudada, da capacidade computacional disponível, dentre outros fatores.

Em seguida, o processo concentra-se na determinação do critério de segurança. Os requisitos de confiabilidade podem utilizar abordagens determinísticas [15, 21, 25, 27, 32, 34, 39, 46, 52, 53, 58, 63, 64], como os critérios “N-1”, “N-2” e “N-k”. Nesse método, a rede intacta, e posteriormente a rede reforçada, deve ser capaz de suprir energia aos consumidores, caso “k” componentes sejam desconectados simultaneamente. Outra opção, é a utilização da abordagem probabilística [10, 12, 15, 18, 26, 44, 49, 50, 65, 66], na qual índices como Expectativa de Perda de Carga (*Loss of Load Expectation* – LOLE), Energia Esperada não Suprida (*Expected Energy not-Supplied* – EENS) e Custo de Corte de Carga (*Loss of Load Cost* – LOLC) são utilizados como balizadores da confiabilidade do sistema.

Após a formulação matemática, deve-se escolher qual método utilizar para resolver a otimização do problema PET. As técnicas de solução podem ser classificadas como [4]:

- Otimização Clássica: Programação Linear [11, 17, 20, 23, 57, 59], Programação Não Linear [14, 20, 24], Programação Linear Inteira [20–

22], Decomposição de Benders [25, 26, 58, 60, 64], *Branch and Bound* [7, 27, 62], Decomposição Hierárquica [7, 19], Teoria dos Jogos [15, 67] e Programação Dinâmica Discreta [29].

- Otimização Heurística: Algoritmo Heurístico Construtivo Baseado em Índice de Sensibilidade [17, 28, 47, 48, 55, 56] e Algoritmo Heurístico de Pesquisa em Árvore (*Tree Searching Heuristic Algorithm* – TSHA) [18, 46].
- Otimização Metaheurística: Otimização por Colônia de Formigas (*Ant Colony Optimization* – ACO) [10], Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization* – PSO) [12, 42, 68], Algoritmo Genético (*Genetic Algorithm* - GA) [13, 16, 23, 35–38, 53, 65, 66, 69], Algoritmo Genético de Classificação Não Dominado (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* – NSGA II) [39, 40], Sistemas Imunológicos Artificiais (*Artificial Immune System* – AIS) [70], Algoritmo de Otimização do Caos (*Chaos Optimization Algorithm* – COA) [32], Evolução Diferencial Melhorada (*Improved Differential Evolution* – IDE) [33, 49], Busca Tabu (*Tabu Search* – TS) [31, 44], Algoritmo de Salto de Sapo Aleatório (*Shuffled Frog Leaping Algorithm* – SFLA) [34], Procedimento de Pesquisa Adaptativa Aleatória Gulosa (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* – GRASP) [41, 61], Recozimento Simulado (*Simulated Annealing* – SA) [43, 45].

A otimização clássica se destaca por encontrar soluções ótimas precisas com convergência confiável, a depender das características do problema e da técnica empregada. Em contraste, as otimizações heurística/metaheurística oferecem implementação mais direta e permitem a identificação (simultânea) de um conjunto de soluções para o problema, porém com risco de convergência para mínimos locais, em vez do global [4, 54].

Esta dissertação propõe a utilização da entropia cruzada como ferramenta de otimização. A ideia básica para usar CE em tarefas complexas de otimização é interpretá-las como problemas de estimativa de eventos raros; o chamado problema estocástico associado (ASP) [71–73]. Assim, um algoritmo adaptativo baseado no método CE é usado para lidar eficientemente com o ASP. O principal resultado dessa abordagem é a construção de uma sequência aleatória de soluções, que

converge probabilisticamente para o ótimo (ou quase ótimo) [73]. Embora o método baseado em CE seja uma técnica de busca aleatória, ele tem semelhanças com metaheurísticas, pois também pode ser visto como um método baseado em população. No entanto, esta metodologia usa uma regra baseada em estatística de amostragem para mover de população para população, em vez de regras heurísticas [74].

1.2.2

Simulação Monte Carlo com Entropia Cruzada

Como suporte das ferramentas de otimização, muitos estudos utilizam a simulação Monte Carlo (SMC) [10, 12, 15, 26, 49, 58, 69]. A SMC emprega técnicas de amostragem aleatória e modelagem estatística para a estimação de funções matemáticas. Através da construção de uma "pseudopopulação", que mimetiza a questão estudada em seus aspectos relevantes, o método viabiliza testes em modelos matemáticos de interesse, permitindo a investigação de seu comportamento [75, 76].

Uma técnica, baseada em SMC e relativamente nova para estimativa de evento e otimização, é o método da entropia cruzada (*cross-entropy* – CE) [77]. O método CE, desenvolvido por Rubinstein e Kroese [78], tem sua origem em um algoritmo adaptativo para simulação de eventos raros, baseado na minimização da variância do estimador de um evento [71].

Segundo [77], o método CE formula um problema de otimização como um problema de estimativa. Assim, o algoritmo fornece uma maneira adaptativa de encontrar a distribuição amostral ótima. Como ferramenta de otimização o CE pode ser implementado conforme apresentado nos artigos [72, 73, 79]. Além disso, a técnica pode ser empregada para resolução de problemas multiobjetivo, quando duas ou mais funções objetivo são conflitantes, como em [80–82].

Estudos científicos [83–87] exploraram a aplicação da SMC integrada com CE na avaliação de índices de confiabilidade. Trabalhos comparativos demonstraram a superioridade dessa metodologia [83] em relação a métodos analíticos e à SMC em sua forma convencional [84]. Além disso, pesquisas com versões simplificadas [85] e sequenciais [86] da simulação Monte Carlo integrada com CE destacaram sua flexibilidade e adaptabilidade a diferentes cenários. Já as

publicações científicas [88–92] abordam a estimativa do índice de confiabilidade composta realizada por meio do CE.

Considerando a área de sistemas de potência, diversos trabalhos científicos foram publicados ao longo dos anos [93]. As mais diversas aplicações contam com: cálculo do CVaR (*conditional value at risk*) [94], fluxo de potência probabilístico [95, 96] e fluxo de potência ótimo e com restrição de segurança [74, 97], planejamento [98, 99], identificação de saída de linha [100], avaliação de reserva girante [101–103], despacho de geração [104] e despacho ótimo com economia de emissões [105], avaliação de reserva operativa em sistemas eólicos híbridos com armazenamento de energia na presença de veículos elétricos [106], reserva de contenção de frequência utilizando geradores com interface de conversor [107] e gerenciamento de sistema de energia residencial [108].

Embora existam trabalhos publicados que utilizam a SMC em conjunto com o método CE na solução de problemas de otimização em sistemas de potência (e.g., [74, 97]), não se identifica nenhum trabalho específico de otimização para a solução do problema PET. Portanto, a presente dissertação de mestrado se propõe a preencher tal lacuna.

1.3 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos, que são resumidamente descritos a seguir. O presente capítulo apresenta a visão geral do problema de expansão da transmissão e do método da entropia cruzada, amparando-se em pesquisas de destaque sobre esses temas na literatura científica.

O Capítulo 2 apresenta o conceito de planejamento da expansão da transmissão, cujo objetivo é determinar onde, quando e quais reforços devem ser feitos na rede elétrica para garantir a adequada integração entre geração e consumo. São detalhadas as opções de modelagem de fluxo de potência (AC, DC, transportes, híbrido e disjuntivo), além da definição do critério de segurança: determinístico ou probabilístico. Por fim, são apresentados detalhes sobre os métodos de otimização: clássica, heurística e metaheurística.

O Capítulo 3 explana o método da entropia cruzada, que pode ser utilizado para estimativa de eventos raros e otimização de problemas diversos. Além disso, o método CE é adaptado para resolução do problema PET.

No Capítulo 4 são apresentados: o desenvolvimento da modelagem matemática do problema PET, considerando as rotinas de operação e de investimento, e os resultados obtidos com o sistema acadêmico IEEE-RTS de 24 barras [6] e com o Sistema Sul Brasileiro [2].

No Capítulo 5, são descritas as conclusões, as considerações finais e as propostas para trabalhos futuros.

2

Planejamento da Expansão da Transmissão

2.1

Introdução

Segundo o Operador Nacional do Sistema (ONS) [109], o planejamento da expansão dos sistemas de geração e transmissão considera o atendimento da demanda e seu crescimento no período de análise, visando definir o conjunto de obras que serão necessárias para garantir a segurança e a qualidade do sistema ao menor custo global, contemplando, inclusive, as perdas elétricas.

Este capítulo visa apresentar uma síntese do problema do planejamento da expansão da transmissão (PET), sua modelagem, e os principais métodos de solução que podem ser encontrados na literatura.

2.2

Modelagem do Planejamento da Expansão da Transmissão

O planejamento da expansão da transmissão é uma tarefa essencial para garantir a confiabilidade, segurança e eficiência do sistema elétrico. No passado, quando os sistemas elétricos e a capacidade computacional eram menores, a seleção dos reforços para a rede era um processo de menor complexidade [2].

Ferramentas tradicionais, como cálculos de fluxo de potência, estudos de estabilidade e análise de curto-circuito, eram suficientes para determinar os melhores investimentos [2]. Em 1970, os primeiros estudos sobre a modelagem matemática do problema PET começaram a ser publicados, visando obter técnicas de otimização para o modelo [6, 17, 29, 110, 111].

No entanto, com o crescimento exponencial dos sistemas elétricos de potência, o problema da expansão da transmissão se tornou mais desafiador. A multiplicidade de alternativas de reforços, a incerteza da demanda futura e a necessidade de considerar critérios como confiabilidade, custos e impacto ambiental começaram a exigir ferramentas e metodologias mais elaboradas.

Portanto, para definir o fluxo de potência a ser empregado, devem ser definidas as premissas que serão adotadas no desenvolvimento da modelagem. O horizonte temporal, por exemplo, é um fator decisivo na definição da estratégia para solucionar o problema PET.

A forma como o problema é abordado varia de acordo com o período em questão, seja a longo, médio ou curto prazo. Conforme exposto na Figura 2.1, o nível de detalhamento do sistema e de incertezas estão intrinsicamente conectados ao horizonte temporal de planejamento [2].

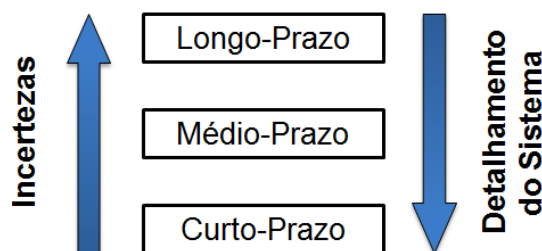


Figura 2.1 – Incertezas versus detalhamento do sistema no horizonte de planejamento [2].

À medida que o horizonte de análise se distancia, a incerteza que transpassa o problema se intensifica. Fatores como a disponibilidade de equipamentos na rede, projeções de carga e geração, e restrições ambientais e de mercado se tornam mais difíceis de prever. Por outro lado, a menor distância temporal permite a análise de parâmetros mais delineados, já que o nível de incertezas é também menor.

Considerando o marco temporal, o planejamento da expansão da rede elétrica pode ser dividido em duas categorias principais: estático e dinâmico [19]. Cada abordagem possui características distintas. O planejamento estático foca em um único ponto no tempo, geralmente um ano específico.

Em contrapartida, o planejamento dinâmico considera um horizonte de tempo mais amplo, geralmente abrangendo vários anos. Essa abordagem leva em conta a flexibilidade de investir em diferentes momentos e adaptar a rede às mudanças nas condições ao longo do tempo.

A definição dessas premissas impacta diretamente nas escolhas das modelagens, e consequentemente, nas ferramentas de cálculo que devem ser utilizadas. Então, é necessário oferecer uma visão abrangente da modelagem do problema PET.

Genericamente, um problema de otimização matemática [112, 113] tem a forma explicitada na Equação (2.1). O vetor $x_j = (x_1, \dots, x_n)$ contém as variáveis de decisão do problema, $c_j: R_n \rightarrow R$ é a função objetivo, a qual se deseja minimizar ou maximizar, as funções $a_{ij}: R_n \rightarrow R, i = 1, \dots, m$ são as funções de restrição (desigualdade) e as constantes $b_1, \dots, b_m$ são os limites das restrições. Um vetor x^* é chamado ótimo, ou solução do problema, se tiver o menor valor objetivo, no caso de uma função objetivo minimizada, entre todos os vetores que satisfazem as restrições: para qualquer solução viável z , considerando $a_{11}(z) \leq b_1, \dots, a_{mn}(z) \leq b_m$, tem-se $c(z) \geq c(x^*)$.

$$\begin{aligned} & \min_x \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \\ & \text{sujeito a } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.1}$$

Assim, são apresentados os cinco principais modelos de fluxo de potência, aplicáveis ao problema PET, que podem ser encontrados na literatura: de transportes, DC, híbrido, disjuntivo e AC.

- **Modelo de Transporte**

O modelo de transportes se destaca por sua praticidade em comparação com outros modelos de otimização de fluxo em redes, pois não considera a lei de Kirchhoff das tensões em sua formulação. Essa característica permite a utilização de técnicas de programação linear como base para a otimização, tornando o modelo computacionalmente mais eficiente, no entanto, possui desvantagens [2].

Os planos de expansão da rede identificados pelo modelo de transportes frequentemente se tornam inviáveis quando avaliados sob a ótica da segunda lei de Kirchhoff. Isso significa que reforços adicionais na rede são necessários para garantir a viabilidade das soluções. Sendo assim, as soluções obtidas pelo modelo de transportes geralmente apresentam qualidade inferior quando comparadas com soluções provenientes de modelos mais completos [2].

Genericamente, a modelagem pode realizada conforme [19, 41]:

$$\min_x \sum_{(k,l) \in \Omega_L} c_{kl} x_{kl} + \alpha_{custo} \sum_{k \in \Omega_k} r_k \quad (2.2.a)$$

sujeito a

$$\sum_{(k,l) \in \Omega_L^0} f_{kl}^0 + \sum_{(k,l) \in \Omega_L} f_{kl} + g_k + r_k = d_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.2.b)$$

$$|f_{kl}^0| \leq x_{kl}^0 \bar{f}_{kl}^0 \quad \forall (k,l) \in \Omega_L^0 \quad (2.2.c)$$

$$|f_{kl}| \leq x_{kl} \bar{f}_{kl} \quad \forall (k,l) \in \Omega_L \quad (2.2.d)$$

$$\underline{g}_k \leq g_k \leq \bar{g}_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.2.e)$$

$$0 \leq r_k \leq d_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.2.f)$$

$$x_{kl} \in \{0, \bar{x}_{kl}\} \quad \forall (k,l) \in \Omega_L \quad (2.2.g)$$

onde: o índice sobrescrito 0 é referência para variáveis de ramos existentes, c_{kl} é o custo de investimento do ramo candidato kl (\$), x_{kl} é o número discreto de novos ramos kl que serão adicionados à rede, α_{custo} é o custo do corte de carga (\$/MW), r_k é o corte de carga na barra k , x_{kl}^0 é o número de circuitos existentes no ramo kl ; f_{kl} é o fluxo de potência ativa no ramo kl , $\bar{f}_{kl}$ é o limite de fluxo de potência ativa no ramo kl , g_k é a injeção de potência ativa da geração na barra k , $\underline{g}_k$ e $\bar{g}_k$ são os limites de geração da barra k , d_k é a demanda de carga na barra k , $\bar{x}_{kl}$ é o número inteiro máximo de reforços que podem ser adicionados ao ramo candidato kl , Ω_k é o conjunto de todas as barras k , Ω_L é o conjunto de todos os ramos kl , Ω_L^0 é o subconjunto de ramos existentes kl e Ω_L é o subconjunto de ramos candidatos kl .

Na formulação, (2.2.a) representa o custo de novas adições, somado ao custo de eventuais cortes de carga observados. A restrição (2.2.b) representa a Lei de Correntes de Kirchhoff para o modelo de fluxo de potência DC. As restrições (2.2.c) e (2.2.d) definem que os fluxos de potência ativa f_{kl} são limitados pela capacidade de transmissão do ramal dada pela capacidade dos circuitos existentes e a capacidade das novas adições, respectivamente. As restrições e (2.2.e) e (2.2.f) fornecem os limites da geração de energia ativa g_k e das variáveis de corte de carga r_k , e a restrição (2.2.g) refere-se à natureza discreta da variável de decisão x_{kl} .

- **Modelo DC**

O modelo de linearização mais difundido, principalmente considerando projetos de longa duração, é o modelo DC [2]. Esse modelo considera o atendimento das duas Leis de Kirchhoff (Lei de Correntes e Lei de Tensões) em seu equacionamento, mas não avalia a potência reativa.

Além disso, nas análises mais simplificadas, as perdas de energia não podem ser totalmente incluídas. Entretanto, com o intuito de melhorar a qualidade das soluções identificadas, alguns trabalhos [44, 45, 50, 101] avaliam estimativas das perdas ôhmicas nos circuitos do sistema.

Genericamente, a modelagem pode realizada conforme [19]. Além dos parâmetros já explicitados no modelo dado em (2.2), b_{kl} é a susceptância do ramo kl . Já o conjunto de equações e inequações do modelo em (2.3) utiliza as restrições previstas no modelo de transportes (2.2), adicionando a Lei das Tensões de Kirchhoff no modelo de fluxo de potência DC, representada por (2.3.c) e (2.3.d).

$$\min_x \sum_{(k,l) \in \Omega_L} c_{kl} x_{kl} + \alpha_{custo} \sum_{k \in \Omega_k} r_k \quad (2.3.a)$$

sujeito a

$$\sum_{(k,l) \in \Omega_L^0} f_{kl}^0 + \sum_{(k,l) \in \Omega_L} f_{kl} + g_k + r_k = d_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.3.b)$$

$$f_{kl}^0 + b_{kl}^0 (\theta_k - \theta_l) = 0 \quad \forall (k,l) \in \Omega_L^0 \quad (2.3.c)$$

$$f_{kl} + x_{kl} b_{kl} (\theta_k - \theta_l) = 0 \quad \forall (k,l) \in \Omega_L \quad (2.3.d)$$

$$|f_{kl}^0| \leq x_{kl}^0 \bar{f}_{kl}^0 \quad \forall (k,l) \in \Omega_L^0 \quad (2.3.e)$$

$$|f_{kl}| \leq x_{kl} \bar{f}_{kl} \quad \forall (k,l) \in \Omega_L \quad (2.3.f)$$

$$\underline{g}_k \leq g_k \leq \bar{g}_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.3.g)$$

$$0 \leq r_k \leq d_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.3.h)$$

$$x_{kl} \in \{0, \bar{x}_{kl}\} \quad \forall (k,l) \in \Omega_L \quad (2.3.i)$$

- **Modelo Híbrido**

O modelo híbrido, utilizado em [56, 57], surge como uma alternativa para otimização do fluxo de potência em redes elétricas. Esse modelo linearizado

combina a objetividade do modelo de transportes com a concisão do modelo DC. Essa fusão permite alcançar soluções mais próximas do ótimo global, enquanto flexibiliza a questão da não linearidade presente nos sistemas elétricos reais.

No modelo híbrido exposto em [19], a rede original é tratada pelo conjunto de equações presentes no modelo DC (2.3.a) – (2.3.h). Ou seja, a segunda lei de Kirchhoff é considerada para a rede intacta. Já o conjunto de novas ramificações é tratado pelas equações do modelo de transportes (2.2.a) – (2.2.i).

- **Modelo Disjuntivo**

O último modelo linearizado a ser abordado é o modelo disjuntivo. Derivado da formulação do modelo DC, sua linearização é realizada através da utilização de variáveis binárias e da introdução de um parâmetro M de valor suficientemente elevado [2].

No entanto, a implementação apresenta um desafio: a determinação do valor ideal para o parâmetro M . A escolha de um valor inadequado para M pode levar a soluções subótimas ou inviáveis. Porém, nas referências [58–64] são apresentadas diversas estratégias para determinar valores mínimos para M .

Conforme [60], a modelagem pode ser feita com o conjunto de equações observado abaixo.

$$\min_x \sum_{(k,l) \in \Omega_L} c_{kl} x_{kl} + \alpha_{custo} \sum_{k \in \Omega_k} r_k \quad (2.4.a)$$

sujeito a

$$\sum_{(k,l) \in \Omega_L^0} f_{kl}^0 + \sum_{(k,l) \in \Omega_L} f_{kl} + g_k + r_k = d_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.4.b)$$

$$f_{kl}^0 + b_{kl}^0(\theta_k - \theta_l) = 0 \quad \forall (k,l) \in \Omega_L^0 \quad (2.4.c)$$

$$|f_{kl} + b_{kl}(\theta_k - \theta_l)| \leq M_{kl}(1 - x_{kl}) \quad \forall (k,l) \in \Omega_L \quad (2.4.d)$$

$$|f_{kl}^0| \leq x_{kl}^0 \bar{f}_{kl}^0 \quad \forall (k,l) \in \Omega_L^0 \quad (2.4.e)$$

$$|f_{kl}| \leq x_{kl} \bar{f}_{kl} \quad \forall (k,l) \in \Omega_L \quad (2.4.f)$$

$$\underline{g}_k \leq g_k \leq \bar{g}_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.4.g)$$

$$0 \leq r_k \leq d_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (2.4.h)$$

$$x_{kl} \in \{0, \bar{x}_{kl}\} \quad \forall (k,l) \in \Omega_L \quad (2.4.i)$$

Comparando com o modelo DC (2.3), a principal diferença está nas equações (2.4.c) e (2.4.d). Se o circuito candidato for construído ($x = 1$), sua equação de fluxo de potência (2.4.d) é igual à equação de fluxo de potência de um circuito existente (2.4.c). No caso oposto, ou seja, se o circuito candidato não for construído ($x = 0$), o parâmetro M deve ser grande o suficiente para não impor um limite implícito sobre as diferenças de ângulo de tensão entre as barras. Valores pequenos de M criam limites implícitos sobre diferenças de ângulos de tensão e requerem investimentos adicionais [60].

- **Modelo AC**

O modelo AC é considerado o mais completo entre todos os citados, visto que considera a potência reativa e as perdas de energia podem ser totalmente incluídas. De forma geral, todos os parâmetros e equacionamentos inerentes ao fluxo de potência são considerados, o que torna a formulação matemática, que pode ser verificada em [13], extremamente complexa e detalhada.

Segundo [11], a utilização deste modelo apresenta as seguintes vantagens:

- Realiza com eficiência a etapa de reforço, quando os planos de expansão obtidos para o modelo DC são utilizados na fase de planejamento reativo;
- Um único modelo abrangente resolve simultaneamente os problemas de expansão da rede e alocação de potência reativa (simultaneamente, em um único estágio);
- As perdas reais do sistema de transmissão são calculadas de forma precisa e trivial como um subproduto da otimização, sem a necessidade de etapas adicionais;
- Controladores FACTS e outros dispositivos com operação não linear podem ser facilmente incorporados ao problema de planejamento, expandindo as possibilidades de análise;
- Após a resolução do problema principal, o modelo abre portas para diversos estudos complementares, como análise de estabilidade de tensão, nodal e transitória, entre outros.

Por outro lado, os desafios que aparecem ao trabalhar com planejamento utilizando o modelo AC são:

- Lidar com sistemas desconectados nas fases iniciais do planejamento, o que pode comprometer a convergência do processo de solução do fluxo de potência por meio de métodos numéricos;
- Desenvolver uma técnica de otimização eficiente;
- Solucionar os problemas de grande escala com múltiplas variáveis e restrições não lineares.

2.3

Técnica de Solução

Após a seleção de qual modelagem será utilizada no fluxo de potência do problema PET, deve ser definida qual ferramenta de otimização será dispendida. Com o objetivo de encontrar a configuração de expansão ótima, surge a necessidade de encontrar um equilíbrio entre o detalhamento do modelo e a técnica de otimização eleita. Essa escolha depende dos parâmetros específicos do problema em questão, dos recursos computacionais disponíveis e do tempo que se tem para a análise.

As técnicas de solução utilizadas podem ser distribuídas como otimização clássica, heurística e metaheurística.

2.3.1

Otimização Clássica

A otimização clássica pode ser implementada na resolução do problema PET através de diversas metodologias. É possível destacar:

- **Programação Linear**

Os métodos de programação linear são utilizados em diversas áreas da engenharia. O método simplex, extremamente difundido, é utilizado em [20, 23] de forma combinada com algoritmos genéticos.

O método de pontos interiores é implementado em [11], bem como em [17] onde é apresentado o uso de programação linear para análise de rede, a fim de

determinar onde existem faltas de capacidade e onde adicionar novos circuitos para aliviar as faltas.

Em [57], o objetivo do modelo matemático é minimizar o capital descontado e os custos operacionais ao longo do horizonte de planejamento. As restrições associadas a este modelo são físicas e econômicas. Por outro lado, em [59] a programação linear foi utilizada para solucionar o problema PET no horizonte de longo prazo.

- **Programação Não Linear**

Em contrapartida, considerando que o problema PET possui estrutura não linear intrínseca a sua formulação, alguns estudos partem dessa premissa para implementar a otimização em programação não linear. Por exemplo, o algoritmo Lagrangeano é utilizado em [20] como ferramenta de otimização matemática. Porém, em [24], é proposta a utilização do método da “descida mais íngreme”, no qual o vetor gradiente é calculado diretamente a partir das equações da rede.

- **Programação Linear Inteira**

Como as variáveis de decisão são discretas, o problema de otimização matemática pode ser tratado com programação linear inteira [20–22], visto que os números de circuitos candidatos das ramificações são representados na forma binária e variáveis inteiras de 0 a 1.

- **Decomposição de Benders**

Outro algoritmo que pode ser citado é decomposição ou cortes de Benders. Nessa abordagem, o problema original é dividido em dois. O subproblema “mestre” modela as variáveis de investimento e propõe planos de expansão da rede. Já o subproblema “escravo” implementa os planos de expansão, sugeridos pelo subproblema mestre, e verifica a viabilidade da rede [60]. Podem ser citados os trabalhos [25, 26, 58, 60, 64].

- **Branch and Bound**

O algoritmo *branch-and-bound* também pode ser utilizado na resolução do problema PET [27, 62]. Este método visa dividir o problema em uma árvore de decisões, onde cada nó representa uma escolha entre diferentes opções para as variáveis de decisão mistas (discretas e contínuas). O início do algoritmo se dá através do nó raiz, e a cada iteração, são criados nós filhos. Se em dado momento um nó filho não apresentar uma solução viável ou se o valor da função objetivo degradada, o algoritmo poda esse ramo da árvore, e assim sucessivamente, até encontrar a solução ótima.

- **Decomposição Hierárquica**

O artigo [19] apresenta a adoção do método de decomposição hierárquica para solucionar o problema PET. Segundo [19], nos estágios iniciais do planejamento, o algoritmo hierárquico resolve o problema PET equacionado como modelo de transportes, ou seja, eliminando as restrições que representam a Lei de Tensão de Kirchhoff e considerando essa formulação relaxada, uma solução é obtida.

Então, a solução obtida é reutilizada para iniciar o processo do segundo nível hierárquico, onde o problema é estruturado como modelo DC, incluindo a Lei das Tensões. Por fim, o procedimento é executado repetidamente até que uma condição específica, previamente definida, seja atendida.

- **Teoria dos Jogos**

Em teoria dos jogos, o algoritmo constrói uma estratégia que define a ação que cada jogador escolherá em cada momento de decisão. O objetivo é encontrar o equilíbrio através de um conjunto de estratégias onde não há mais jogadas disponíveis. Esse conjunto é o plano de expansão ótimo. O uso desse método pode ser visto em [15] e [67]. Porém, enquanto a referência [15] modela o fluxo em AC, o estudo [67] utiliza Cournot como modelagem para o problema PET.

- **Programação Dinâmica Discreta**

A ideia básica da otimização dinâmica discreta, adotada no estudo [29], é combinar o procedimento de busca determinística da programação dinâmica com a busca probabilística da otimização discreta. Resumidamente, o procedimento se baseia em escolher uma estratégia, aleatoriamente, do conjunto de opções possíveis. Com a escolha definida, é gerada uma vizinhança de estratégias, e então, a função objetivo é calculada. Finalmente, o procedimento é repetido sucessivamente até que atinja um critério de parada pré-definido [29].

A fim de trazer uma síntese com a classificação dos trabalhos publicados, a Tabela 2.1 apresenta a correlação entre a implementação dos métodos de otimização clássica conforme a modelagem do problema PET.

Tabela 2.1 – Métodos de otimização clássica versus modelos matemáticos de fluxo de potência.

	Transporte	DC	Híbrido	Disjuntivo	AC
Programação Linear		[20, 23]	[57]	[59]	[11, 17]
Programação Não Linear		[20, 24]			[14]
Programação Linear Inteira		[20–22]			
Decomposição de Benders	[7]	[25, 26]		[58, 60, 64]	
Branch and Bound	[7]	[27]		[62]	
Decomposição Hierárquica	[19]	[19]	[19]		
Teoria dos Jogos					[15]
Programação Dinâmica Discreta		[29]			

2.3.2 Otimização Heurística

Devido à complexa modelagem do PET e, conseqüentemente, à grande quantidade de alternativas de expansão, métodos aproximados de otimização, como as técnicas heurísticas, são cada vez mais utilizados.

Embora a implementação de ferramentas heurísticas possa não garantir a identificação do plano ótimo global, estas técnicas podem encontrar soluções viáveis e economicamente vantajosas em um tempo computacional menor, mesmo para problemas de grande escala [2, 114].

De maneira geral, um algoritmo heurístico construtivo (AHC) aprimora suas soluções, iterativamente, adicionando ou removendo elementos, até encontrar uma solução satisfatória para sua convergência.

Traçando um paralelo com o PET, em cada iteração do AHC, ramos candidatos são selecionados para serem inseridos ou retirados da rede de transmissão. A escolha destes ramos pode ser determinada por um índice de sensibilidade baseado no relaxamento da formulação do problema PET ou no desempenho do sistema elétrico [28].

- **Algoritmo Heurístico Construtivo Baseado em Índice de Sensibilidade**

Garver foi pioneiro no uso de AHC para resolver o problema PET. Em [17], ele propôs um índice de sensibilidade baseado no carregamento estimado da rede, empregando o equacionamento relaxado do modelo de transportes. O trabalho de Garver teve um impacto significativo na literatura da área, inspirando diversas publicações subsequentes.

Um exemplo notável é o trabalho [48], que apresenta uma proposta de AHC fundamentada nos princípios estabelecidos por Garver em [17]. Já em [55], os autores desdobram o artigo [17] através de uma abordagem de multiestágios.

Em contrapartida, o modelo DC foi empregado em [47], com a sensibilidade dada pela distribuição dos fluxos de potência na rede, e em [28], onde o algoritmo não emprega o cálculo de nenhum índice, visto que são utilizadas as informações das folgas nas capacidades de transmissão da iteração anterior.

Por fim, em [56], a ferramenta de otimização AHC foi combinada com *fuzzy* para orientar a busca, e a tomada de decisão, em critérios não determinísticos. Além disso, a modelagem do fluxo foi realizada através do modelo híbrido e o índice de sensibilidade foi definido pela capacidade de fluxo nos ramos.

- **Algoritmo Heurístico de Pesquisa em Árvore (*Tree Searching Heuristic Algorithm* – TSHA)**

O algoritmo heurístico de pesquisa em árvore edifica uma árvore, que fornece um conjunto de planos de expansão como produto. Com base na avaliação de

índices, o algoritmo decide qual ramo explorar em seguida, priorizando os nós que possuem maior probabilidade de levar à solução desejada. Essa estratégia permite que o algoritmo escolha planos de expansão mais promissores com mais eficiência, reduzindo o tempo e o esforço da busca. Como exemplo, é possível citar o artigo [46], que apresenta a implementação do TSHA no problema PET multiestágio através da modelagem DC.

Todavia, em [18], o modelo AC é utilizado. Além disso, alguns parâmetros considerados pelos índices de sensibilidade são informações relacionadas às barras terminais dos ramos: como o comprimento do ramo e a diferença modular das tensões e dos ângulos de fase. Adicionalmente, para evitar o crescimento desenfreado da árvore, o algoritmo pode podar ramos.

2.3.3 Otimização Metaheurística

Algoritmos de otimização metaheurísticos são implementados com foco na identificação do ótimo global em problemas complexos, cuja abordagem padrão seja insatisfatória ou inviável. Além disso, geralmente, esses algoritmos são inspirados em processos naturais como genética, evolução ou comportamento de animais [115]. A seguir, são vistos, resumidamente, alguns exemplos de algoritmos metaheurísticos e suas aplicações no problema do planejamento da expansão da transmissão.

- **Otimização por Colônia de Formigas (*Ant Colony Optimization* – ACO)**

O ACO se inspira na natureza, imitando o comportamento das formigas, que através da deposição de feromônio, marcam trilhas na busca por alimento. Ao longo do processo, as trilhas de feromônio se evaporam, favorecendo os caminhos mais curtos e eficientes. Assim, cada formiga representa uma tentativa de encontrar uma solução viável, e as trilhas de feromônio indicam a probabilidade de um caminho ser escolhido. Essa dinâmica garante que a busca se concentre nas soluções mais promissoras [10].

Segundo [10], no contexto do PET, o ACO busca os caminhos ideais para reforçar a rede de transmissão de energia. Cada caminho representa um ramo

elegível para receber novos circuitos, e o objetivo é encontrar a combinação que minimize custos e maximize a eficiência.

- **Otimização por Enxame de Partículas (*Particle Swarm Optimization* – PSO)**

O algoritmo PSO se inspira na forma como animais em grupo se movimentam, como bandos de pássaros ou cardumes de peixes [12]. No início, este método cria um conjunto de soluções aleatórias, chamadas de partículas. Cada partícula é influenciada por três fatores: sua velocidade atual, a melhor posição que ela já alcançou e a melhor posição geral já encontrada por todas as partículas. Com base nesses fatores, a partícula ajusta sua velocidade [68].

Como exemplos de estudos relacionados ao problema PET, é possível citar [42], no qual, para cada partícula, é avaliado o fluxo de potência e, conseqüentemente, são calculados os custos de investimento. Também pode-se mencionar [12, 68], que calculam as perdas elétricas e as sobrecargas nos circuitos.

- **Algoritmo Genético (*Genetic Algorithm* - GA)**

De acordo com [16], o algoritmo genético é baseado na evolução biológica, onde os indivíduos mais aptos sobrevivem e se reproduzem, passando suas características mais vantajosas para as próximas gerações. O GA começa com soluções selecionadas aleatoriamente, representando uma população. Os membros da população são chamados de cromossomos, que por sua vez, são compostos por genes.

Cada cromossomo na população é então usado para calcular a função objetivo a ser otimizada e sua função de aptidão correspondente, que indica o quão adequado é esse cromossomo. Através das diferentes operações genéticas, os cromossomos mais aptos da população atuam então como pais e geram uma nova população com aptidão potencialmente mais elevada [16]. Já sistema de codificação pode ser binário [13, 65, 66], decimal [16, 35–38] ou ponto flutuante.

A evolução do algoritmo pode acontecer através de dois processos: cruzamento e mutação. O cruzamento acontece quando informações entre indivíduos pais são trocadas, criando combinações de genes. Em contrapartida, a

mutação se dá quando alguns genes sofrem alterações aleatórias, gerando mudanças na população. O refinamento das soluções se perpetua até que seja alcançado um critério, por exemplo: a população não se altere depois de uma quantidade de iterações definidas.

Diversos trabalhos utilizando o GA como ferramenta de otimização do problema PET foram publicados [13, 35, 36, 65, 69]. No artigo [16], o modelo é capaz de lidar tanto com o modo estático quanto com o modo dinâmico de planejamento. Em [23], o autor combina o algoritmo genético com o método de programação linear para solucionar um problema PET, que transpassa um marco temporal. Além disso, em [66], o GA é combinado com *fuzzy*.

- **Algoritmo Genético de Classificação Não Dominado (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm – NSGA II*).**

Desdobrando o GA, o NSGA II é um algoritmo de otimização multiobjetivo, ou seja, resolve diversas funções objetivo de forma simultânea. Para ilustrar, em [40] foram apresentados três funções objetivo: minimizar o custo de construção de reforços, minimizar o custo total de sobrecarga, considerando o preço marginal local, e minimizar os cortes de carga.

Para isso, é realizada uma classificação da população de soluções em "frentes" (ou fronteira de Pareto) de acordo com seu grau de dominância. Segundo [39, 40], a primeira frente (nível 1) é um conjunto de soluções não dominadas em toda a população, ou seja, os melhores em pelo menos uma função objetivo sem serem piores em nenhuma outra.

A segunda frente (nível 2) é um conjunto de soluções não dominadas na população ignorando o primeiro nível, e assim sucessivamente. Após essa classificação, o algoritmo se comporta como o GA, selecionado, realizando cruzamento e mutações.

Com a aplicação do problema PET, os artigos [39, 40] exploram a implementação do NSGA II utilizando *fuzzy* para tomada de decisão a fim de se obter a solução ótima final.

- **Evolução Diferencial Melhorada (*Improved Differential Evolution – IDE*)**

Embora o IDE se assemelhe ao algoritmo genético, a principal diferença está na mutação. No GA, a mutação ocorre por pequenas alterações nos genes, enquanto no IDE, a mutação é realizada por meio de combinações aritméticas de indivíduos (soluções) selecionados [33].

Como aplicação na área de sistemas de potência, nos trabalhos [33, 49], é proposta uma formulação geral do problema PET em ambiente de mercado descentralizado, através da otimização em IDE.

- **Sistemas Imunológicos Artificiais (*Artificial Immune System – AIS*)**

De acordo com [70], esta metaheurística é baseada no princípio biológico do sistema imunológico do corpo. Para problemas de otimização, quatro mecanismos são utilizados: proliferação (geração de novos descendentes), mutação (busca por pontos próximos do ótimo, com hipermutação para busca local e edição do receptor para busca global), seleção (eliminação de células de baixa afinidade) e ativação de células de memória (reação imunológica mais intensa a células já encontradas).

O AIS pode ser utilizado em problemas complexos relacionados a sistemas elétricos de potência. No artigo [70, 116], o problema PET inclui a procura da solução de menor custo, tendo em conta os investimentos e as perdas ôhmicas de transmissão.

- **Algoritmo de Otimização do Caos (*Chaos Optimization Algorithm – COA*)**

Segundo [32], o COA é um tipo de algoritmo de busca de otimização direta que utiliza a propriedade estocástica intrínseca do caos e o comportamento imprevisível em longo prazo, sem precisar de parâmetros externos adicionais. Assim, é possível escapar de um ótimo local e encontrar um ótimo global dentro de uma região viável.

No artigo [32] as variáveis caóticas são ajustadas no COA de acordo com a direção de busca de otimização, de forma iterativa, considerando a capacidade excedente de transmissão e o fator de carregamento da rede.

- **Busca Tabu (*Tabu Search* – TS)**

Segundo [44], um algoritmo TS é baseado nos seguintes conceitos:

- **Vizinhança e Movimento:** Define o conjunto de soluções, inicial ou atual, e busca o melhor vizinho;
- **Lista Tabu e Critério de Aspiração:** Armazena, com regramento, os movimentos recentes para evitar repetição de ciclos, e permite revisitar soluções atrativas que foram rejeitadas anteriormente;
- **Intensificação e Diversificação:** Foca a busca em regiões promissoras, e reinicia a busca a partir de novos conjuntos para evitar que as soluções fiquem limitadas em mínimos locais.

Em [44], os autores implementaram o TS e realizaram a busca pela solução de menor custo no problema PET, levando em consideração investimentos, perdas de transmissão e custos de corte de carga. Além disso, o algoritmo GRASP para obter a solução inicial a fim de melhorar o desempenho do algoritmo.

Já em [31], o TS foi combinado com o GA a fim de minimizar os custos de investimento em transmissão, considerando o aumento de carga e os requisitos adicionais de geração em termos de adições de linhas e perdas de energia.

- **Algoritmo Salto de Sapo Aleatório (*Shuffled Frog Leaping Algorithm* – SFLA)**

O algoritmo SFLA foi baseado pelo comportamento de sapos saltando randomicamente em busca de alimentos. O algoritmo inicia com a geração de uma população de sapos aleatória. O valor de desempenho de cada sapo é calculado e a população é classificada. Logo, essa população é dividida em subgrupos chamados memplexos e dentro de cada um, a busca local tenta melhorar apenas a posição dos piores candidatos. Então, os sapos são embaralhados aleatoriamente entre os

memplexos a fim de aumentar a área de busca e não ficar aprisionado em ótimo local. O ciclo se repete até a parada do algoritmo e as melhores soluções são elencadas.

No artigo [34], cada sapo representa a localização, tipo e número de novos ramos que devem ser adicionados para atender a demanda prevista de carga.

- **Procedimento de Pesquisa Adaptativa Aleatória Gulosa (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* – GRASP)**

O GRASP é composto por duas etapas: construção e busca local. Na fase de construção, uma solução viável é produzida de forma incremental, adicionando elementos promissores um a um, criando assim a lista de candidatos (LC). A fase de busca local explora a vizinhança da LC para melhorar as soluções. Tanto a fase de construção quanto a de busca são construídas de acordo com uma função gulosa, adaptada à natureza do problema.

A aplicação do GRASP no problema PET pode ser vista nos trabalhos [41, 61]. Adicionalmente, [61] demonstra que, cada vez que um candidato é selecionado e inserido na rede, uma nova LC é obtida. Quando uma solução viável é concluída, é realizada uma verificação que consiste em remover cada candidato adicionado em ordem decrescente de custo, de modo a eliminar eventuais adições redundantes feitas ao longo da fase de construção.

- **Recozimento Simulado (*Simulated Annealing* – SA)**

Inspirado no processo de resfriamento de um sistema termodinâmico, o SA é uma técnica de otimização metaheurística. O algoritmo inicia com um conjunto soluções à determinada temperatura do sistema. A evolução das soluções se dá através de um fator de probabilidade que relaciona a função aptidão com a temperatura no instante da análise. Então, a cada rodada de iterações, a temperatura deve diminuir lentamente, a função deve ser resolvida e a vizinhança deve ser verificada, a fim de melhorar a área de busca. Em determinado ponto, o SA deve convergir devido a um critério de parada.

Em [43, 45] o SA é utilizado como ferramenta para solucionar o custo do investimento em novas linhas no PET.

A Tabela 2.2 resume a correlação entre a implementação de métodos de otimização clássica e a modelagem do problema PET, fornecendo uma visão geral dos trabalhos publicados sobre o tema.

Tabela 2.2 – Métodos de otimização metaheurística versus modelos matemáticos de fluxo de potência.

	Transporte	DC	Disjuntivo	AC	Outros
Otimização por Colônia de Formigas		[10]			
Otimização por Enxame de Partículas		[42]		[12]	[68]
Algoritmo Genético		[13, 23, 35–38, 53]		[13, 16]	[65, 66, 69]
Algoritmo Genético de Classificação Não Dominado		[39, 40]			
Evolução Diferencial Melhorada		[33, 49]			
Sistemas Imunológicos Artificiais					[70]
Algoritmo de Otimização do Caos		[32]			
Busca Tabu		[31, 44]			
Algoritmo de Salto de Sapo Aleatório		[34]			
Procedimento de Pesquisa Adaptativa Aleatória Gulosa	[41]	[41]	[61]		
Recozimento Simulado		[43, 45]			

Alguns trabalhos adicionais são mencionados a seguir para complementar as citações anteriores. Por exemplo, em [70, 117, 118], o problema PET é tratado de forma dinâmica, i.e., através de estágios, onde a sequência de anos dentro do horizonte de planejamento é tratada como possíveis entradas de novos reforços na rede, acrescentando uma nova dimensão e complexidade ao problema PET. Deve-se citar ainda a referência [52] que propõe unificar operadores evolucionários através de uma técnica adaptativa onde os operadores citados anteriormente são utilizados em função de seus respectivos desempenhos no problema PET sendo resolvido. Pode-se ainda citar a preocupação recente em relação ao grande

crescimento de inserção de energia renovável nos sistemas de potência atuais e como a intermitência dessas fontes deve ser tratado no problema PET [119].

Por fim, outro assunto de grande relevância que tem sido tratado em relação ao problema PET é o questionamento do critério determinístico "N-1" e a sua possível substituição por critérios baseados em índices de confiabilidade dado os altos custos envolvidos com tal critério determinístico [120, 121]. Tal discussão será um pouco mais ampliada nas subseções seguintes.

2.4

Crítérios de Planejamento

Na operação de um SEP, a falha de equipamentos é um fator que impacta na segurança do fornecimento de energia. Ao não considerar a possibilidade de falha de equipamentos na solução do problema PET, pode-se encontrar soluções que sejam inviáveis na prática.

De acordo com [50], embora a consideração de critérios de segurança seja essencial em redes reais, a maioria dos trabalhos de pesquisa disponíveis na literatura resolve o problema do PET multiestágio apenas para a rede intacta.

Portanto, para garantir a integridade da transmissão de energia, é possível inserir os critérios de segurança, na modelagem do problema PET, através de duas abordagens principais a determinística e a probabilística [2].

2.4.1

Planejamento via Abordagem Determinística

O critério de segurança da abordagem determinística pode ser generalizado como "N-k", onde a rede, tanto em sua forma intacta quanto reforçada, deve ser capaz de se adaptar à falha de até "k" componentes, garantindo o fornecimento contínuo de energia aos consumidores.

Tradicionalmente, os valores mais difundidos de "k" são "N-1" [15, 21, 25, 27, 32, 34, 39, 46, 53, 58, 63, 64] e "N-2" [27, 64]. Segundo [50], há diversas maneiras de implementar o critério de segurança. A contingência pode ser aplicada durante todo o processo de iterações ou apenas nos melhores planos encontrados pela ferramenta de otimização. Outra estratégia seria aplicar uma lista de contingência formada pelos circuitos mais importantes localizados apenas nas áreas de interesse.

A Tabela 2.3 oferece uma visão abrangente da correlação entre métodos de modelagem do problema PET, compilando pesquisas relevantes sobre a abordagem determinística.

Tabela 2.3 – Métodos de otimização versus modelos matemáticos de fluxo de potência com abordagem determinística.

	DC	Disjuntivo	AC
Programação Linear Inteira	[21]		
Decomposição de Benders	[25]		
<i>Branch and Bound</i>	[27]	[58, 64]	
Teoria dos Jogos			[15]
Algoritmo Heurístico de Pesquisa em Árvore	[46]		
Algoritmo Genético	[53]		
Algoritmo Genético de Classificação Não Dominado	[39]		
Algoritmo de Otimização do Caos	[32]		
Algoritmo de Salto de Sapo Aleatório	[34]		

2.4.2 Planejamento via Abordagem Probabilística

O critério de segurança probabilístico considera o histórico dos equipamentos através da análise de dados de falhas, ou seja, sua confiabilidade. De acordo com [2], essa abordagem parte do conhecimento de taxas de falhas e tempos médios de reparo para cada componente, possibilitando a avaliação de falhas múltiplas, a captura da severidade e da probabilidade de ocorrência de eventos indesejáveis e a construção de um modelo mais realista do sistema.

Ao inserir a abordagem probabilística no problema PET, são estipulados limites para os valores dos índices de confiabilidade, que devem ser minimizados durante o processo de otimização.

Os índices mais notáveis na literatura [10, 12, 15, 18, 26, 44, 49, 50, 65, 66] são: Expectativa de Perda de Carga (*Loss of Load Expectation* – LOLE), Energia Esperada não Suprida (*Expected Energy not-Supplied* – EENS) e Custo de Corte de Carga (*Loss of Load Cost* – LOLC).

A aplicação de métodos de otimização na modelagem do problema PET é demonstrada na Tabela 2.4, evidenciando pesquisas sobre a abordagem probabilística e seus resultados.

Tabela 2.4 – Métodos de otimização versus modelos matemáticos de fluxo de potência com abordagem probabilística.

	DC	AC
Decomposição de Benders	[26]	
Teoria dos Jogos		[15]
Algoritmo Heurístico de Pesquisa em Árvore	[18]	
Otimização por Colônia de Formigas	[10]	
Otimização por Enxame de Partículas		[12]
Evolução Diferencial Melhorada	[49]	
Busca Tabu	[44]	

2.5 Considerações Finais

A revisão apresentada nesse capítulo revela a diversidade de abordagens para solucionar o problema PET. Diversos aspectos podem influenciar a escolha do modelo matemático, da ferramenta de otimização e do critério de segurança. Além disso, é importante salientar que cada opção escolhida traz consigo vantagens e desvantagens, que podem impactar diretamente o resultado do algoritmo como um todo. A referência [54], relativamente recente, complementa a discussão relacionada aos modelos de solução do problema PET abordada no presente capítulo.

Como principais escolhas, que serão implementadas nesta dissertação, é possível destacar: o estudo em regime permanente, a modelagem matemática DC, a otimização metaheurística e abordagem determinística ao longo de todo o processo. Além disso, adotando o critério de segurança "N-1", este trabalho prioriza a mitigação de riscos e a continuidade do serviço de fornecimento de energia. Em outras palavras, o sistema de transmissão deve ser dimensionado para suportar a falha de qualquer componente sem comprometer o atendimento à demanda de carga, garantindo assim a confiabilidade do sistema.

Embora a ferramenta de otimização, proposta nesta dissertação, possa ser classificada como metaheurística, seu uso é inédito para solucionar o problema PET. Portanto, no próximo capítulo, é apresentado o algoritmo de otimização baseado em conceitos CE que busca identificar planos de expansão de alta qualidade.

3

Método da Entropia Cruzada

3.1

Introdução

O método da entropia cruzada, idealizado por Rubinstein e Kroese [78], surgiu como um algoritmo adaptável para simular eventos raros. Seu objetivo principal é minimizar a variância do estimador de um evento [71]. No âmbito da otimização, o CE formula o problema original como um problema de estimativa [77]. Essa abordagem permite a resolução de problemas tanto mono-objetivo como também multiobjetivo, onde uma ou mais funções objetivo competem entre si [80–82].

O CE, como uma ferramenta de otimização, é baseado em simulação Monte Carlo [77]. A SMC estima funções matemáticas com alta eficiência através de técnicas de amostragem aleatória e modelagem estatística. Por meio da criação de uma "pseudopopulação", que representa os aspectos relevantes da questão em estudo, a SMC possibilita simulações nos modelos matemáticos de interesse, permitindo a análise aprofundada de seu comportamento [75, 76].

Assim, o método CE surge como uma ferramenta promissora para a resolução ótima do problema PET. Sua capacidade de lidar com problemas complexos, aliada à sua aplicabilidade também em problemas multiobjetivos, o torna valioso para lidar com as diversas variáveis e objetivos presentes no PET.

Este capítulo apresenta um resumo do método da entropia cruzada e o desenvolvimento da aplicação do CE no problema PET.

3.2

Método da Entropia Cruzada

O método da entropia cruzada é uma técnica de redução de variância por amostragem por importância [78]. Portanto, sua explanação se inicia no conceito de amostragem por importância (*importance sampling* – IS), passando pela entropia

cruzada de Kullback-Leibler, e se subdividindo nas aplicações para eventos raros e otimização. Além disso, a utilização do método da entropia cruzada em otimizações conta com o desdobramento em funções multiobjetivos.

3.2.1

Amostragem por Importância

Conforme [72, 78, 93, 122], seja l o desempenho esperado de um sistema estocástico, dado por:

$$l = \mathbb{E}_f H(\mathbf{X}) = \mathbb{E}_f \varphi(S(\mathbf{X}); \gamma), \quad (3.1)$$

onde S é a função de desempenho amostral; $\varphi(\cdot; \gamma)$ é uma função real do desempenho amostral, que depende do parâmetro γ ; e o subscrito f em $\mathbb{E}_f H(\mathbf{X})$ denota que o valor esperado é dado em relação à distribuição de probabilidade f .

Um exemplo de $\varphi(S(\mathbf{X}); \gamma)$ é a função indicadora:

$$\varphi(S(\mathbf{X}); \gamma) = I_{\{S(\mathbf{X}) \geq \gamma\}}, \quad (3.2)$$

Seja g uma distribuição de probabilidade tal que Hf é dominada por g . Ou seja, $g(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow H(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = 0$. Utilizando g , é possível representar l :

$$l = \mathbb{E}_g H(\mathbf{X}) = \frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})}, \quad (3.3)$$

onde o subscrito g significa que o valor esperado é em relação à g , que é chamada distribuição de amostragem por importância (IS).

Um estimador não tendencioso de l é:

$$\hat{l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}_i) W(\mathbf{X}_i), \quad (3.4)$$

onde $\hat{l}$ é chamado de estimador de IS ou verossimilhança (*likelihood ratio* – LR).

Além disso,

$$W(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}, \quad (3.5)$$

é a função de LR; e $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$ é uma amostra aleatória de g .

A escolha da distribuição para IS g é crucial para a variância do estimador $\hat{l}$. Assim, o problema de minimizar a variância de $\hat{l}$ em relação a g , é:

$$\min_g \mathbb{V}_g\{H(\mathbf{X})W(\mathbf{X})\}. \quad (3.6)$$

A solução do problema (3.6) é:

$$g^*(x) = \frac{|H(\mathbf{x})|f(\mathbf{x})}{\int |H(\mathbf{x})|f(\mathbf{x})\mu(d\mathbf{x})}. \quad (3.7)$$

Se $H(x) \geq 0$ (verdadeiro para a função indicadora), então:

$$g^*(x) = \frac{H(\mathbf{x})f(\mathbf{x})}{l}, \quad (3.8)$$

e a variância de $\hat{l}$ é zero. A densidade g^* , conforme (3.7) e (3.8), é chamada de densidade amostral de importância ótima.

Porém, as equações (3.7) e (3.8) não são úteis para determinar g^* , pois dependem de l ; o alvo real do procedimento de estimação.

Uma abordagem é considerar que f pertence a alguma família paramétrica $\mathcal{F} = \{f(\cdot; \mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$. Seja $f(\cdot; \mathbf{u})$ a distribuição para o vetor $\mathbf{X}$ na equação (3.1), onde $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ é o parâmetro nominal ou original. Assim, a escolha das densidades IS de g são restringidas àquelas da mesma família paramétrica $\mathcal{F}$. Então g difere da distribuição original $f(\cdot; \mathbf{u})$ por um único parâmetro $\mathbf{v}$, que é chamado de parâmetro de referência. A razão de LR em (3.5), $g = f(\mathbf{x}; \mathbf{v})$, pode ser escrita:

$$W(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{X}; \mathbf{u})}{f(\mathbf{X}; \mathbf{v})}. \quad (3.9)$$

Nesse caso, o estimador de LR $\hat{l}$, em (3.4), se torna:

$$\hat{l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}_i) W(\mathbf{X}_i; \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$ é uma amostra aleatória de $f(\cdot; \mathbf{v})$. A equação (3.10) pode ser chamada de estimador de razão de verossimilhança padrão (*standard likelihood ratio* – SLR). Para encontrar um $\mathbf{v}$ ótimo em $\hat{l}$, a equação (3.6) se reduz a:

$$\min_{\mathbf{v}} \mathbb{V}_{\mathbf{v}} H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (3.11)$$

Como em $f(\cdot; \mathbf{v})$, a expectativa $l = \mathbb{E}_{\mathbf{v}} H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ é constante, e a solução ótima de (3.11) coincide com a de:

$$\min_{\mathbf{v}} V(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v}} \mathbb{E}_{\mathbf{v}} H^2(\mathbf{X}) W^2(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (3.12)$$

Como a densidade em relação à qual a expectativa é calculada depende da variável de decisão $\mathbf{v}$, é possível reescrever:

$$\min_{\mathbf{v}} V(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v}} \mathbb{E}_{\mathbf{w}} H^2(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) W(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{w}$ é um parâmetro de referência arbitrário. Assim, tem-se o equacionamento de minimização de variância VM.

3.2.2 Entropia Cruzada de Kullback-Leibler

A entropia cruzada de Kullback-Leibler [78, 93] é definida como a distância entre duas distribuições de probabilidade g e h ,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(g, h) &= \int g(x) \ln \left(\frac{g(x)}{h(x)} \right) dx \\ &= \int g(x) \ln(g(x)) dx - \int g(x) \ln(h(x)) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A ideia por trás do método CE é escolher a distribuição IS h , tal que a distância de Kullback-Leibler entre a densidade de amostragem de importância ótima g^* em (3.7) e h seja mínima, isto é:

$$\min_h \mathcal{D}(g^*, h). \quad (3.15)$$

Porém, ao utilizar a abordagem SLR, a classe de distribuições pertence a alguma família paramétrica $\mathcal{F} = \{f(\cdot; \mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ que contém a densidade nominal $f(\cdot; \mathbf{u})$. Agora, o problema é de otimização paramétrica,

$$\min_{\mathbf{v}} \mathcal{D}(g^*, f(\cdot; \mathbf{v})). \quad (3.16)$$

A equação (3.16) pode ser resumida em definir o parâmetro de referência $\mathbf{v}$, que minimize o segundo termo do lado direito de (3.14). Assim, o problema se resume à maximização:

$$\max_{\mathbf{v}} \int g^*(x) \ln(f(x; \mathbf{v})) dx. \quad (3.17)$$

Substituindo g^* de (3.8) em (3.17),

$$\max_{\mathbf{v}} \int \frac{H(x)f((x; \mathbf{u}))}{l} \ln(f(x; \mathbf{v})) dx, \quad (3.18)$$

que é equivalente à:

$$\max_{\mathbf{v}} D(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v}} \mathbb{E}_{\mathbf{u}} H(\mathbf{X}) \ln(f(\mathbf{X}; \mathbf{v})). \quad (3.19)$$

Utilizando amostragem por importância novamente, com mudança de medida $f(\cdot; \mathbf{w})$, para qualquer parâmetro de referência $\mathbf{w}$, (3.19) é substituída por:

$$\max_{\mathbf{v}} D(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v}} \mathbb{E}_{\mathbf{w}} H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{u}, \mathbf{w}) \ln(f(\mathbf{X}; \mathbf{v})). \quad (3.20)$$

O problema de (3.20) pode ser resolvido com sua contraparte estocástica:

$$\max_{\mathbf{v}} \widehat{D}(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}_i) W(\mathbf{X}_i; \mathbf{u}, \mathbf{w}) \ln(f(\mathbf{X}_i; \mathbf{v})), \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$ é uma amostra aleatória de $f(\cdot; \mathbf{w})$. Em aplicações típicas, a solução é obtida [78] resolvendo:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(\mathbf{X}_i) W(\mathbf{X}_i; \mathbf{u}, \mathbf{w}) \nabla \ln(f(\mathbf{X}_i; \mathbf{v})) = 0, \quad (3.22)$$

onde o gradiente é tomado em relação ao parâmetro $\mathbf{v}$.

3.2.3

Entropia Cruzada para Eventos Raros

Considerando [72, 78, 93, 122], seja $S(\mathbf{X})$ uma distribuição amostral, onde $\mathbf{X} \sim f(\cdot; \mathbf{u})$ e deseja-se estimar $l = \mathbb{P}_{\mathbf{u}}[S(\mathbf{X}) \geq \gamma] = \mathbb{E}_{\mathbf{u}} I_{\{S(\mathbf{X}) \geq \gamma\}}$ para um nível fixo de γ , ou seja, $H(\mathbf{X}) = I_{\{S(\mathbf{X}) \geq \gamma\}}$. É possível estimar $\hat{l}$:

$$\hat{l} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\{S(\mathbf{X}_i) \geq \gamma\}} W(\mathbf{X}_i; \mathbf{u}; \mathbf{v}). \quad (3.23)$$

Se o evento é raro, a maioria dos indicadores $H(\mathbf{X}_i)$ é zero. Então, um procedimento CE de duas fases é empregado no qual tanto o parâmetro de referência $\mathbf{v}$ quanto o nível γ são atualizados, evitando assim indicadores que são zero e criando uma sequência de $\{(\mathbf{v}_t, \gamma_t)\}$ com o objetivo de encontrar/estimar o parâmetro de referência ideal do CE $\mathbf{v}^*$.

3.2.4

Entropia Cruzada para Otimização

A ideia principal do método CE para otimização pode ser apresentada da seguinte forma, conforme [78, 93]. Para minimizar uma função de desempenho

$S(\mathbf{x})$, sobre todos os estados $\mathbf{x}$ no conjunto $\mathcal{X}$, é possível denotar o mínimo por γ^* , assim:

$$\gamma^* = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} S(\mathbf{x}). \quad (3.24)$$

Primeiro, o problema determinístico é transformado em estocástico ao se definir uma família de fdps $\{f(\cdot; \mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$, que deverão reger as variáveis de decisão $\mathbf{x}$ pertencente a $\mathcal{X}$. A seguir, o problema de estimação, chamado problema estocástico associado, é agregado a (3.24):

$$l(\gamma) = \mathbb{P}_{\mathbf{u}}(S(\mathbf{X}) \geq \gamma) = \mathbb{E}_{\mathbf{u}} I_{\{S(\mathbf{X}) \geq \gamma\}}, \quad (3.25)$$

onde $\mathbf{X}$ é um vetor aleatório com fdps $\{f(\cdot; \mathbf{u}), \mathbf{u} \in \mathcal{V}\}$ e γ é um parâmetro conhecido ou desconhecido. A equação (3.25) pode ser solucionada de duas possíveis maneiras: para um dado γ é possível estimar l , ou, alternativamente, para um dado l é possível definir γ .

Então, seja γ^* o valor mínimo de uma função de valor real S em um conjunto finito $\mathcal{X}$. Supondo que o minimizador correspondente seja único, que $\mathbf{x}^*$ e a classe de probabilidades $\{f(\cdot; \mathbf{v})\}$ serão usados na equação (3.20):

$$\delta_{\mathbf{x}^*}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.26)$$

Logo, as soluções dos programas VM (3.12) e CE (3.20) para estimar $\mathbb{P}(S(\mathbf{X}) \geq \gamma^*)$ coincidem e correspondem a $\delta_{\mathbf{x}^*}$.

Da mesma maneira mostrada na Seção 3.2.3, um procedimento adaptativo de duas fases é empregado, gerando uma sequência de $\{(\hat{\mathbf{v}}_t, \hat{\gamma}_t)\}$, que converge para uma pequena vizinhança ótima $(\mathbf{v}^*, \gamma^*)$. Definindo $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}$ e adotando um parâmetro de raridade ρ não demasiadamente pequeno, as duas fases são:

1. **Atualização de γ_t** : para $\mathbf{v}_{t-1}$ fixo, seja γ_t o $(1 - \rho)$ -quantil de $S(\mathbf{X})$ sob $\mathbf{v}_{t-1}$ o estimador para γ_t é:

$$\hat{\gamma}_t = S_{[(1-\rho)N]}. \quad (3.27)$$

2. **Atualização de $\mathbf{v}_t$:** para $\mathbf{v}_{t-1}$ e γ_t fixos, é necessário derivar $\mathbf{v}_t$ da solução de:

$$\max_{\mathbf{v}} D(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v}} \mathbb{E}_{\mathbf{v}_{t-1}} I_{\{S(\mathbf{X}) \geq \gamma_t\}} \ln(f(\mathbf{X}; \mathbf{v})). \quad (3.28)$$

A contrapartida estocástica de (3.28) é a seguinte: para $\hat{\gamma}_t$ e $\mathbf{v}_{t-1}$ fixos, é necessário derivar $\mathbf{v}_t$ da seguinte forma:

$$\max_{\mathbf{v}} \hat{D}(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\{S(\mathbf{x}_i) \geq \gamma_t\}} \ln(f(\mathbf{X}_i; \mathbf{v})). \quad (3.29)$$

É importante observar que em contraste com o equacionamento para a configuração de evento raro, as fórmulas de otimização não contêm os termos de razão de verossimilhança W . A razão é que na configuração de evento raro o parâmetro inicial (nominal) $\mathbf{u}$ é especificado antecipadamente e é uma parte essencial do problema de estimativa. Em contraste, o vetor de referência inicial $\mathbf{u}$ na otimização é bastante arbitrário.

Outro ponto a ser levantado está na atualização do vetor de parâmetros $\mathbf{v}$. Ao invés de atualizar o vetor diretamente através da solução de (3.29), é recomendado utilizar a versão suavizada:

$$\hat{\mathbf{v}}_t = \alpha \tilde{\mathbf{v}}_t + (1 - \alpha) \hat{\mathbf{v}}_{t-1}, \quad (3.30)$$

onde $\tilde{\mathbf{v}}_t$ é o vetor de parâmetros obtido da solução de (3.29), e α é chamado de parâmetro de suavização, com $0 < \alpha \leq 1$. Se $\alpha = 1$ tem-se a regra de atualização original. A razão para usar a regra suavizada (3.30) em vez da regra de atualização original é para suavizar os valores de $\hat{\mathbf{v}}_t$ e para reduzir a probabilidade de que algum componente $\hat{v}_{t,i}$ de $\hat{\mathbf{v}}_t$ seja zero ou um nas primeiras iterações. Isto é particularmente importante quando $\hat{\mathbf{v}}_t$ é um vetor ou matriz de probabilidades.

Assim, o principal algoritmo de otimização CE, que inclui atualização suavizada do vetor de parâmetros $\mathbf{v}$, pode ser resumido como segue.

Algoritmo 3.1 (Algoritmo CE Principal Para Otimização [78])

- Passo 1. Definir $\hat{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{u}$. Configurar o contador de iterações $t = 1$.
- Passo 2. Gerar uma amostra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{N_{CE}}$ da distribuição $f(\cdot; \mathbf{v}_{t-1})$.
- Passo 3. Calcular a função de desempenho $S(\mathbf{X})$, ordenar de forma crescente seu $(1 - \rho)$ -quantil $\hat{\gamma}_t$ conforme (3.27). Se $\hat{\gamma}_t \leq \gamma$, então $\hat{\gamma}_t = \gamma$.
- Passo 4. Usar a mesma amostra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{N_{CE}}$ para calcular a eq. (3.29). Denotar a solução por $\tilde{\mathbf{v}}_t$.
- Passo 5. Aplicar (3.30) para suavizar o vetor $\tilde{\mathbf{v}}_t$.
- Passo 6. Se $t \geq t_{max}$, $\hat{\gamma}_t = \hat{\gamma}_{t-1} = \dots = \hat{\gamma}_{t-d}$, então parar (denotar T a iteração final); caso contrário, $t = t + 1$ e repetir a partir do Passo 2.

A equação (3.29) pode ser resolvida analiticamente [93]. Alguns exemplos de distribuições são [78]:

- **Normal:** Seja $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. A média e o desvio padrão na iteração t são atualizados por:

$$\hat{\mu}_t = \frac{\sum_{i=1}^N H(X_i) X_i}{\sum_{i=1}^N H(X_i)}, \quad (3.31)$$

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sum_{i=1}^N H(X_i) (X_i - \mu_t)^2}{\sum_{i=1}^N H(X_i)}. \quad (3.32)$$

- **Discreta com suporte finito:** Seja X uma variável discreta com suporte finito, assumindo valores de $\{a_1, \dots, a_m\}$. Seja $u_j = \mathbb{P}[X = a_j]$, $\forall j = 1, \dots, m$, e defina $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$. Cada impulso de probabilidade j é atualizado na iteração t por:

$$\hat{v}_{j,t} = \frac{\sum_{i=1}^N H(X_i) I_{\{X_i = a_j\}}}{\sum_{i=1}^N H(X_i)}. \quad (3.33)$$

- **Bernoulli:** Seja $X \sim \text{Ber}(u)$. A probabilidade na iteração t é calculada por:

$$v_t = \frac{\sum_{i=1}^N H(X_i)X_i}{\sum_{i=1}^N H(X_i)}. \quad (3.34)$$

A fim de ilustrar o equacionamento apresentado, o Apêndice C traz um exemplo de aplicação para o Algoritmo 3.1.

Como ferramenta de suporte às distribuições, a simulação Monte Carlo pode ser implementada. Muitos estudos de PET utilizam, em seus algoritmos, técnicas de amostragem aleatória baseadas em população para a estimação de funções, similares às baseadas em SMC. Um resumo pode ser verificado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Métodos de otimização versus modelos matemáticos de fluxo de potência que utilizam técnicas de amostragem aleatória.

	DC	AC	Outros
Otimização por Colônia de Formigas	[10]		
Otimização por Enxame de Partículas		[12]	
Algoritmo Genético			[69]
Evolução Diferencial Melhorada	[49]		

Essa dissertação dá enfoque ao uso da distribuição discreta com suporte finito, pois a natureza do problema PET exige que números inteiros sejam utilizados na determinação da quantidade de reforços que devem ser inseridos na rede base.

3.2.4.1 Entropia Cruzada Multiobjetivo

Quando um problema de otimização tem mais de um objetivo, é necessário lançar mão de uma ferramenta que seja capaz de solucionar e satisfazer todas as funções objetivos presentes. O método da entropia cruzada apresentado na seção anterior considera a minimização de apenas um objetivo.

Para contornar esse fato, as referências [80, 81] empregam o conceito de *Elite*. De maneira abreviada, a *Elite* busca ranquear as melhores soluções,

considerando todos os objetivos simultaneamente, em ordem de prioridade predefinida. A metodologia *Elite* auxilia o algoritmo a não ficar preso em ótimos locais, pois realiza a manutenção das melhores soluções. Para isso, é utilizada uma matriz composta por N linhas e $n + m$ colunas, onde N é um número arbitrário de soluções, n é o número de variáveis de decisão e m é o número de objetivos.

Os valores da função objetivo para o objetivo de maior prioridade são armazenados na coluna 1, e assim por diante até a coluna m . Os valores de amostra das variáveis de decisão são armazenados na coluna $m + 1$ até a coluna $m + n$. A estrutura é mostrada na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Matriz *Elite* [80].

Objetivos				Variáveis de decisão			
f_{11}	f_{12}	$\cdots$	f_{1m}	X_{11}	X_{12}	$\cdots$	X_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
f_{N1}	f_{N2}	$\cdots$	f_{Nm}	X_{N1}	X_{N2}	$\cdots$	X_{Nn}

Assim, é possível reescrever o Algoritmo 3.1, considerando a matriz *Elite*.

Algoritmo 3.2 (Algoritmo CE para Otimização Multiobjetivo)

- Passo 1. Definir $\hat{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{u}$. Configurar o contador de iterações $t = 1$. Definir a matriz *Elite* = $\emptyset$.
- Passo 2. Gerar uma amostra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{N_{CE}}$ da distribuição $f(\cdot; \mathbf{v}_{t-1})$. Remover duplicatas.
- Passo 3. Calcular as (i) funções objetivo do problema de otimização $S_i(\mathbf{X})$ e armazenar os objetivos para cada amostra.
- Passo 4. Adicionar os dados na *Elite*, considerando as colunas Objetivos de acordo com as prioridades. Classificar as colunas Objetivos em ordem crescente para problemas de minimização. Remover duplicatas e garantir o tamanho em N linhas.
- Passo 5. Utilizar as colunas, de amostra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$ da *Elite* para calcular a eq. (3.29). Denote a solução por $\tilde{\mathbf{v}}_t$.
- Passo 6. Aplicar (3.30) para suavizar o vetor $\tilde{\mathbf{v}}_t$.

Passo 7. Atualizar $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{v}}_t$.

Passo 8. Se $t = t_{max}$ ou se o critério de parada foi atingido, então pare (denote T a iteração final); caso contrário, $t = t + 1$ e repita a partir do Passo 2.

A fim de exemplificar, a Figura 3.1 mostra o fluxograma do Algoritmo 3.2.

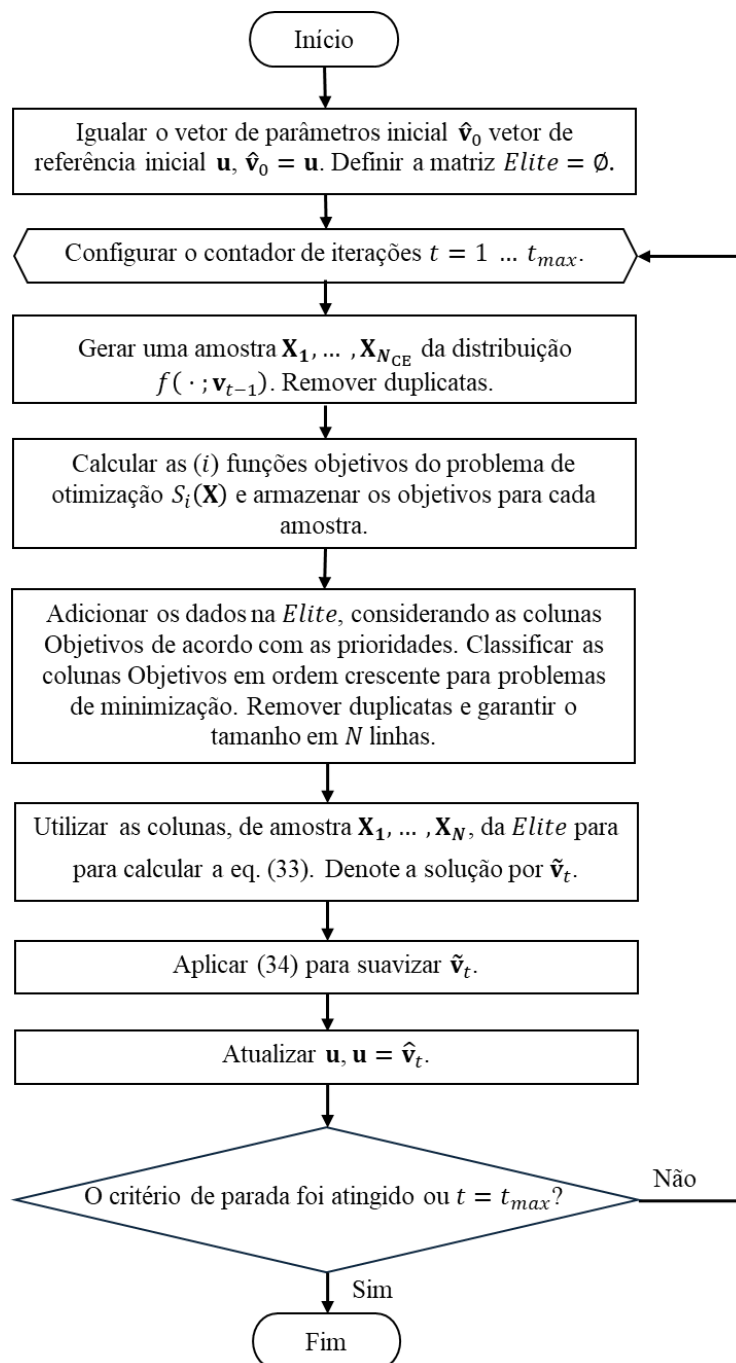


Figura 3.1 – Fluxograma do Algoritmo 3.2.

3.3

Entropia Cruzada no Planejamento da Expansão da Transmissão

Esta seção apresenta a formulação e metodologia de solução do problema PET estático proposto nesta dissertação. Na metodologia adotada, é considerada a inserção do critério de segurança "N-1" e o modelo de fluxo DC com perdas ôhmicas, para avaliar as configurações obtidas durante a execução do algoritmo.

Segundo [2], o problema PET, mesmo quando modelado com o modelo DC, se configura como um problema extremamente complexo devido ao alto número de alternativas de planos expansão do sistema. Além disso, a inclusão de restrições de segurança intensifica ainda mais essa complexidade.

Visto que é um problema de otimização não linear inteira mista, uma estratégia comum para lidar com a não linearidade das equações presentes no PET é o desacoplamento do problema original em dois subproblemas interdependentes: investimento e operação, que são resolvidos de forma alternada e iterativa [2].

- **Subproblema de Investimento**

O subproblema de investimento busca identificar planos de expansão do sistema que minimizem os custos de investimento, suprindo a demanda futura e atendendo a critérios de segurança. Sua formulação matemática [2] pode ser representada baseando-se no modelo já apresentado na equação (2.3):

$$\min_x f(x) = \sum_{(kl) \in \Omega_L^1} c_{kl} x_{kl} \quad (3.35.a)$$

sujeito a

$$0 \leq x_{kl} \leq \bar{x}_{kl} \quad \forall (k, l) \in \Omega_L^1 \quad (3.35.b)$$

onde $f(x)$ é a função objetivo do problema; x é o vetor decisão (plano de expansão); c_{kl} é dado em 10^6 \$.

- **Subproblema da Operação**

O subproblema de operação se dedica à avaliação de cada plano de expansão gerado durante a execução do algoritmo, considerando tanto a condição de rede intacta quanto cenários de contingências simples. Para a análise da rede intacta, o problema de otimização linear a seguir define o despacho ótimo de geração, buscando minimizar o custo de produção e o corte de carga do sistema [2]:

$$\min \sum_{k \in \Omega_k} c_{gk} g_k + \alpha_{op} \sum_{k \in \Omega_k} r_k \quad (3.36.a)$$

sujeito a

$$\sum_{(k,l) \in \Omega_L} b_{kl} \theta_{kl} + g_k + r_k = d_k + d_{fic} \quad \forall k \in \Omega_k \quad (3.36.b)$$

$$|b_{kl} \theta_{kl}| \leq x_{kl}^0 \bar{f}_{kl}^0 \quad \forall (k,l) \in \Omega_L^0 \quad (3.36.c)$$

$$|b_{kl} \theta_{kl}| \leq x_{kl} \bar{f}_{kl}^1 \quad \forall (k,l) \in \Omega_L^1 \quad (3.36.d)$$

$$\underline{g}_k \leq g_k \leq \bar{g}_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (3.36.e)$$

$$0 \leq r_k \leq d_k \quad \forall k \in \Omega_k \quad (3.36.f)$$

$$-\pi \leq \theta_k \leq \pi \quad \forall k \in \Omega_k, i \neq bsw \quad (3.36.g)$$

$$\theta_{bsw} = 0 \quad (3.36.h)$$

Considerando os dados já apresentados na equação (2.3): c_{gk} é o custo de produção dos geradores da barra k ; α_{op} é a penalização, de valor elevado em relação ao custo de produção (e.g., 10 vezes superior ao maior custo de produção), aplicada ao corte de carga; d_{fic} é o vetor de cargas (demandas) fictícias para representação das perdas na transmissão; bsw é o índice que representa a barra de referência angular para o sistema (barra swing).

- **Perdas Ôhmicas na Transmissão**

Para aprimorar a precisão da avaliação do subproblema de operação e, consequentemente, representar de forma mais fidedigna a operação futura do sistema, as perdas ôhmicas da transmissão devem ser consideradas na modelagem

[44, 45, 50, 52, 101]. Através de um processo iterativo simples, realizado durante a avaliação de cada plano sob a condição de rede intacta, as perdas são calculadas para cada ramo ativo kl do sistema [2]:

$$P_{kl}^{Perdas} = g_{kl} \theta_{kl}^2. \quad (3.37)$$

Em cada iteração, metade das perdas estimadas para cada ramo é distribuída como cargas fictícias nas barras terminais kl . O problema de otimização (3.36) é então resolvido novamente, utilizando essas cargas fictícias. Essa repetição do processo por duas vezes garante a convergência das estimativas e a obtenção de valores mais confiáveis das perdas. Os vetores finais de carga (incluindo as cargas fictícias que representam as perdas ativas) e de geração obtidos para a rede intacta (considerando os cortes de carga) fornecem subsídios essenciais para a avaliação do sistema sob contingências [2].

- **Critério de Segurança “N-1”**

O critério “N-1” é aplicado através da simulação da falha de um circuito em cada ramo ativo da rede e da resolução de um problema de otimização similar ao problema (3.36), sendo os limites de capacidade dos circuitos ignorados. Assim, é possível avaliar se o sistema, mesmo com a falha de um componente, consegue atender à demanda de energia sem a necessidade de redespacho da geração, exceto na barra de referência. Essa barra de referência, que possui limites mínimo e máximo de capacidade predefinidos, serve como ponto de controle para o sistema [2]. Um plano de expansão atende ao critério “N-1” quando, para o completo atendimento à carga, em todas as contingências simples não são verificadas sobrecargas ou cortes por ilhamento na rede de transmissão.

3.3.1

Aplicação do Algoritmo SMC-CE-PET

Primeiramente, para o problema PET proposto nesta dissertação, o algoritmo inicializa com a leitura e organização dos dados de entrada. De posse dos valores, o caso base do sistema é avaliado, ou seja, considera-se a solução do Subproblema

de Operação para a topologia inicial da rede de transmissão, ainda não reforçada. Para isso, inicia-se com a execução do fluxo de potência ótimo para avaliação da rede intacta, como definido na seção 3.3.

Inserido no fluxo de potência, está o cálculo das perdas elétricas (3.37), no qual para cada ramo, as barras terminais kl recebem metade das perdas estimadas na forma de cargas fictícias. O processo é realizado duas vezes.

Na sequência, é feita a análise de contingência “N-1”, onde são retirados individualmente os circuitos de cada ramo de interligação entre as barras da rede de transmissão. Por fim, o fluxo de potência no modo de contingência analisa se mais algum corte ocorreu, seja por sobrecarga ou por ilhamento.

Então, com o caso base (topologia inicial) não sendo capaz de suprir a transmissão de energia entre as unidades geradoras e as cargas, é necessária a inserção de reforços na rede. A fim de otimizar a resolução do problema PET, o algoritmo metaheurístico, apresentado na seção 3.2.4.1, precisa ser adaptado às características específicas do problema.

Assim, alguns parâmetros precisam ser previamente definidos como premissas que deverão ser adotadas durante todos os cálculos. São eles:

- N_{CE} é o tamanho total da amostra que deve ser considerada a cada iteração t ;
- N é o tamanho total da *Elite* que deve ser considerada a cada iteração t ;
- n é a quantidade total de ramos candidatos;
- m é a quantidade total de objetivos que devem ser considerados. No caso específico deste trabalho, os objetivos são minimizar: o corte de carga, o valor do investimento, a quantidade total de reforços e as perdas ôhmicas. Logo $m = 4$.

Então, o Algoritmo 3.2 pode ser aplicado ao PET:

- **Passo 1**

O Passo 1 define que o $\hat{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{u}$. Isso significa que o vetor de parâmetros inicial deverá ser igualado ao vetor de referência. Trazendo essa configuração para a

modelagem PET, $\mathbf{u}$ é a distribuição de probabilidades para cada ramo candidato ($\mathbf{cd}$). Considerando que $\bar{x}_{kl}$ é o número inteiro máximo de reforços que podem ser adicionados ao ramo candidato kl , $\mathbf{u}$ será uma matriz com n colunas e $\bar{x}_{kl}$ linhas. Ao considerar uma distribuição inicial não tendenciosa, é possível definir a probabilidade de cada elemento como:

$$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}. \quad (3.38)$$

Logo, ao somar todos os elementos de uma coluna, a probabilidade acumulada será unitária. A construção da matriz $\mathbf{u}$ pode ser vista na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Matriz $\mathbf{u}$.

Nº Reforços	cd_1	cd_2	...	cd_n
0	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$	...	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$
1	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$	...	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{x}_{kl}$	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$	...	$\frac{1}{1 + \bar{x}_{kl}}$

Outros arranjos de probabilidades iniciais foram testados, porém sem resultados satisfatórios ou ganhos consideráveis em termos de desempenho do algoritmo.

- **Passo 2**

O Passo 2 gera uma amostra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{N_{CE}}$ da distribuição $f(\cdot; \mathbf{v}_{t-1})$. Para construção de uma amostra de "pseudopopulação", emprega-se a simulação Monte Carlo como suporte para o CE.

Espelhando a inserção do SMC no conceito do PET que será resolvido através de CE, cada amostra consistirá em um vetor com n posições, considerando individualmente todos os candidatos. Ou seja, $\mathbf{X}_1 = [cd_1 \quad cd_2 \quad \dots \quad cd_n]$.

- **Passo 3**

O Passo 3 calcula a função do problema de otimização $S_i(\mathbf{X})$. Devido à natureza do CE, a solução do subproblema de investimento está intrínseca na avaliação de cada possível solução. Além disso, o subproblema de operação é calculado para o conjunto de amostra, considerando as perdas ôhmicas e a contingência determinística.

Após as análises, os dados de corte de carga, do valor do investimento, da quantidade total de reforços e das perdas ôhmicas são armazenados. Essa etapa se repete até que todas as amostras N_{CE} sejam executadas dentro do algoritmo.

- **Passo 4**

O Passo 4 adiciona os dados obtidos no Passo 3 na matriz *Elite*, ordena os objetivos de forma crescente, por ordem de prioridade, remove duplicatas e define o tamanho máximo em N linhas.

A ordem de prioridade dos objetivos se inicia com o corte de carga, visto que no plano ideal, nenhum tipo de corte, seja por sobrecarga ou ilhamento, é aceitável. Em segundo lugar está o valor do investimento, pois o custo de expansão deverá ser o mínimo possível dentro dos critérios de restrição. De mesma forma, o terceiro item é quantidade total de reforços e por último devem ser consideradas as perdas elétricas. É importante ressaltar que esses níveis hierárquicos inferiores servem para desempatar os superiores, quando valores iguais são encontrados.

- **Passo 5**

O Passo 5 utiliza as colunas, de amostra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$, da *Elite* para calcular a equação (3.29) que pode ser resolvida analiticamente, através da distribuição discreta com suporte finito (3.33). De maneira objetiva, para cada conjunto de amostras, $\tilde{\mathbf{V}}_t$ será a contagem da quantidade de reforços para cada ramo candidato.

- **Passo 6**

O Passo 6 aplica (3.30) para suavizar o vetor $\tilde{\mathbf{v}}_t$.

- **Passo 7**

O Passo 7 atualiza $\mathbf{u}$, considerando $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{v}}_t$, sendo $\hat{\mathbf{v}}_t$ a solução do Passo 6.

- **Passo 8**

No Passo 8 é realizada a verificação da convergência do algoritmo. Se $t = t_{max}$ ou se o critério de parada foi atingido então pare (denote T a iteração final); caso contrário, $t = t + 1$ e repetir a partir do Passo 2.

3.4

Considerações Finais

O método CE [77] transforma a otimização tradicional, reformulando-a como um problema de estimativa. Essa abordagem inovadora oferece uma maneira adaptável e eficaz de encontrar a distribuição amostral ideal, mesmo em cenários com funções objetivo conflitantes [80–82].

Resumidamente, o método é baseado em um procedimento iterativo simples no qual cada iteração contém duas fases. Primeiramente, gera-se uma amostra aleatória de dados de acordo com um critério especificado, e logo após, atualiza-se os parâmetros do artifício aleatório com base nos dados para produzir uma amostra melhor na próxima iteração [78]. Essa abordagem está exemplificada em [5].

Sua flexibilidade o torna ideal para resolução do problema PET. Além disso, a capacidade de fornecer diversas opções de planos de expansão o torna uma ferramenta valiosa para a tomada de decisões complexas.

4

Simulações e Resultados

4.1

Introdução

Para avaliar o desempenho do algoritmo SMC-CE-PET proposto nesta dissertação, este capítulo apresenta dois estudos de caso, baseados em sistemas de transmissão amplamente utilizados em estudos de planejamento de redes de transmissão.

A escolha do sistema IEEE-RTS [6], com as modificações consideradas por [2, 48, 51], e do Sistema Sul Brasileiro (SSB), com a configuração considerada em [2, 7, 47, 52], garante que a avaliação do SMC-CE-PET seja representativa, pois considera diferentes configurações e complexidades.

A relevância dos estudos apresentados neste capítulo reside em sua contribuição para o desenvolvimento da metodologia. Ao fornecer um campo de testes, esses estudos permitiram a formulação, análise e aperfeiçoamento dos procedimentos que fundamentam a metodologia.

Todas as rotinas computacionais do SMC-CE-PET foram implementadas no MATLAB® Versão 2022a. O computador utilizado possui processador Intel(R) Core(TM) i7-11390H @ 3.40GHz. Os índices utilizados para avaliar o desempenho da metodologia proposta, bem como os resultados obtidos para cada sistema em diferentes combinações de parâmetros, são apresentados nas seções seguintes.

4.2

Índices de Desempenho

Conforme [2] e [8], a fim de avaliar o desempenho da metodologia proposta são utilizados seis índices de desempenho, os quais são calculados a partir de várias execuções do SMC-CE-PET considerando diferentes sementes para geração de números pseudoaleatórios. A descrição destes seis índices é feita a seguir:

- T_M (unidade de tempo): É a média dos tempos de todas as execuções realizadas;

- **It_{Best}**: Iteração que identifica a melhor solução conhecida;
- **R_{Best}**: Número de execuções de ferramentas que identificaram a melhor solução conhecida;
- **N_{Top10}**: Número médio das 10 principais soluções identificadas entre todas as execuções;
- **D_{Best}** (em %): É o desvio percentual médio entre o menor investimento encontrado em cada execução e o investimento do melhor plano de expansão conhecido;
- **D_{10Best}** (em %): É o desvio percentual médio entre os 10 melhores investimentos encontrados em cada execução e o investimento do melhor plano conhecido.

A necessidade de cálculos de índices de desempenho se dá, principalmente, devido à natureza aleatória da simulação Monte Carlo, ferramenta base do método CE. Assim, é possível estabelecer uma análise quantitativa consistente a respeito dos desempenhos das diversas execuções do algoritmo.

4.3

Sistema de IEEE RTS 24 Barras

O sistema IEEE-RTS de 24 barras [6] é o primeiro utilizado para avaliação do desempenho do algoritmo SMC-CE-PET proposto. Este sistema possui em sua topologia original 38 circuitos, entre LTs e transformadores, distribuídos em 34 ramos. Os valores de demanda em cada barra e a capacidade de geração de cada unidade foram triplicados em relação à sua versão original, conforme [51], resultando em montantes de 8550 MW de carga e 10215 MW de capacidade de geração instalada. Os valores de investimento dos ramos candidatos à expansão foram ainda multiplicados por 100, do mesmo modo que em [53]. Os dados para estudo do PET são apresentados no Apêndice A, Seção A.1.

Na avaliação da rede intacta para o sistema IEEE-RTS, foi adotada uma ordem de despacho para as unidades de geração. Para tal, os custos de geração c_{gk} presentes na função objetivo do problema de otimização (3.36) são considerados iguais à ordem de prioridade. São adotados como ramos candidatos os 34 ramos existentes na topologia base da rede e mais 7 ramos novos, perfazendo um total de

41 ramos candidatos a expansão, os quais podem receber no máximo 3 reforços.

Logo, $\bar{x}_{kl} = 3$ e conforme a equação (3.38), $\frac{1}{1+\bar{x}_{kl}} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Para testar o algoritmo foram utilizados os seguintes parâmetros: $N_{CE} = 10.000$, $\alpha = 0,07$, $N = 100$, $t_{max} = 400$ e a *seed inicial* = 1. O algoritmo foi implementado com o seguinte critério de parada: caso os 50 melhores itens da *Elite* se mantenham inalterados por 10 iterações seguidas, encerra-se o algoritmo. O menor investimento encontrado, considerando todos os parâmetros, foi de 681,00 milhões de reais (R\$), sendo identificadas 10 diferentes soluções com este mesmo valor, e mesmo número de reforços. Dentre essas soluções, a que apresenta menor valor de perdas ativas (138,90 MW) possui os seguintes 17 reforços:

$$n_{01-05} = 1, n_{02-04} = 1, n_{03-09} = 2, n_{06-10} = 2, n_{07-08} = 3, n_{09-12} = 1, n_{10-12} = 2, \\ n_{12-13} = 2, n_{20-23} = 1 \text{ e } n_{14-23} = 2.$$

Na Figura 4.1, é apresentado um diagrama representativo do sistema IEEE-RTS, onde os circuitos em vermelho representam os reforços do melhor plano de expansão conhecido para esse sistema, conforme critérios de avaliação definidos.

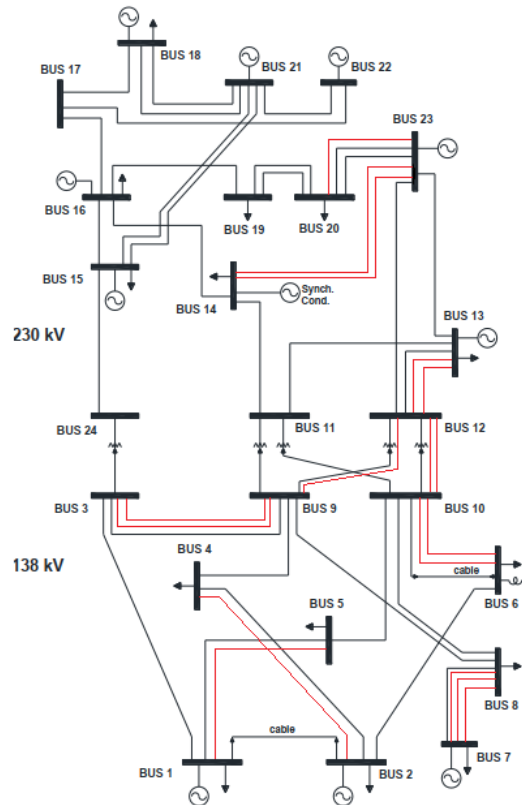


Figura 4.1 – Sistema IEEE-RTS com reforços adicionados.

O tempo total de simulação foi de 2h 47min e foram realizadas 174 iterações. A Figura 4.2 mostra a evolução do melhor plano de expansão (Top1) através das iterações, considerando três das quatro funções objetivos avaliadas na solução do problema: minimização de investimentos, número de reforços e perdas elétricas. É possível avaliar que na primeira iteração, o valor de investimento é alto, 2,039 bilhões de reais, portanto o número total de reforços também é, 48. Porém, consequentemente, as perdas ôhmicas, 108 MW, são menores que o melhor plano da última iteração.

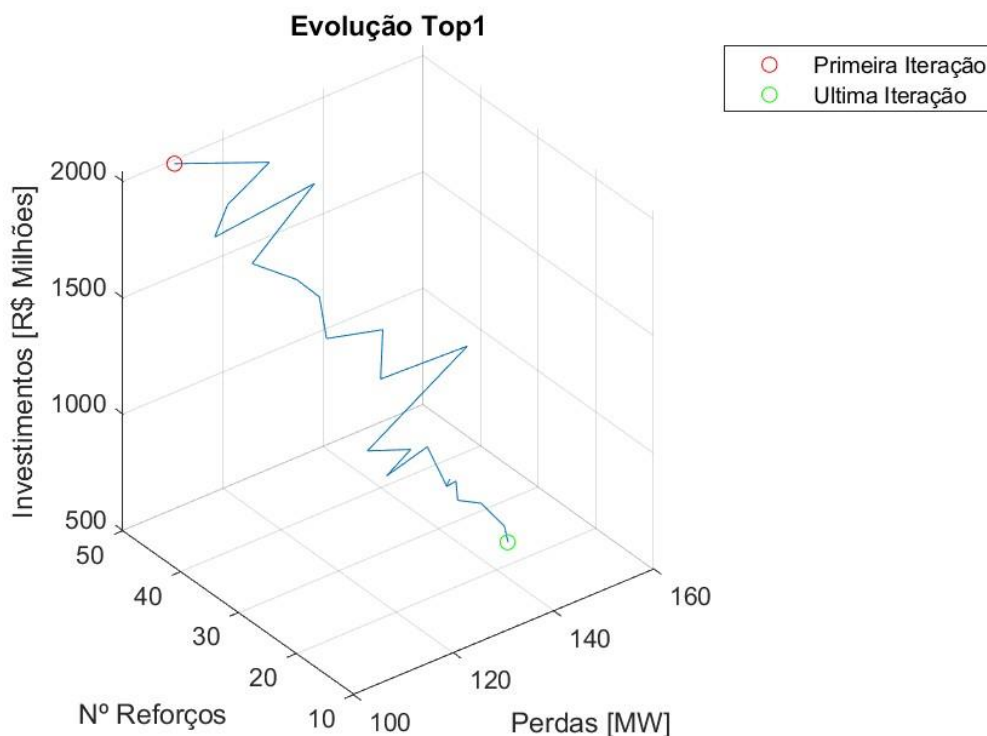


Figura 4.2 – IEEE-RTS: Evolução do melhor plano de expansão.

Na Figura A.1, presente no Apêndice A.1., é possível ver a evolução das probabilidades em cada ramo candidato ao longo das iterações. O método proposto atrelado à *Elite* possibilita que as probabilidades não se concentrem em uma quantidade de reforços específica, permitindo assim, que o algoritmo não fique preso em ótimos locais.

Já a Figura 4.3 exibe a evolução do investimento, número total de reforços e perdas do primeiro e último elemento da *Elite*, ou seja, o Top1 e o Top100. Como

mentionado anteriormente, é possível verificar o decrescimento do investimento, da quantidade de total de reforços e a variação das perdas ôhmicas.

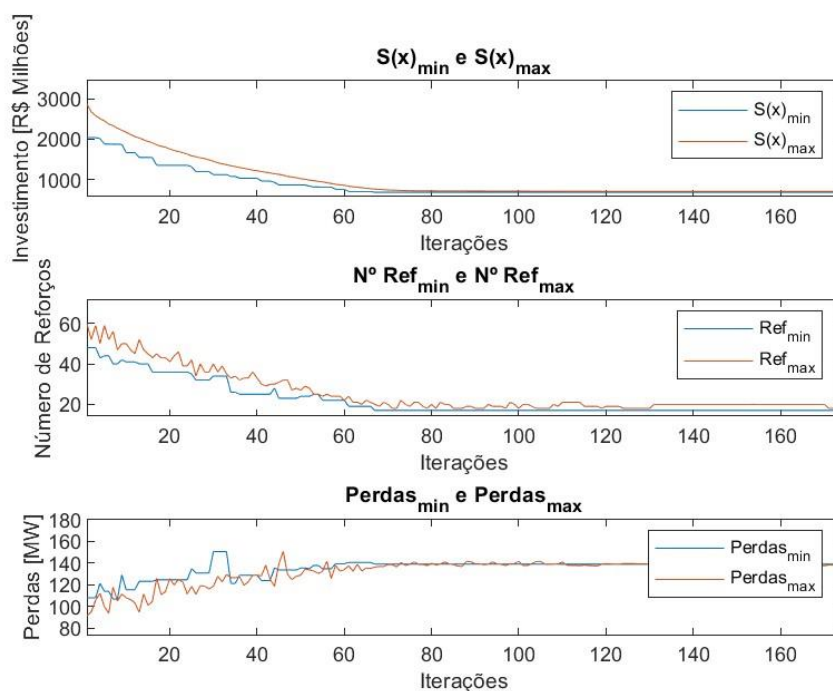


Figura 4.3 – IEEE-RTS: Evolução da *Elite*.

De forma a exibir mais opções de planos de expansão, os resultados e o número de reforços, por ramo candidato, nos dez melhores planos de expansão podem ser vistos na Tabela 4.1 e na Tabela 4.2, respectivamente. É importante salientar que nenhum plano de expansão apresentou corte de carga.

Tabela 4.1 – IEEE-RTS: Resultados nos dez melhores planos de expansão.

	Investimento (R\$ Milhões)	Número Total de Reforços	Perdas Ativas (MW)
Top1	681,00	17	138,90
Top2	681,00	17	138,98
Top3	681,00	17	139,01
Top4	681,00	17	139,18
Top5	681,00	17	139,20
Top6	681,00	17	139,21
Top7	681,00	17	139,39
Top8	681,00	17	139,47
Top9	681,00	17	139,83
Top10	681,00	17	139,91

Tabela 4.2 – IEEE-RTS: Número de reforços por ramo candidato nos dez melhores planos de expansão.

DE	PARA	Top1	Top2	Top3	Top4	Top5	Top6	Top7	Top8	Top9	Top10
01	02	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
01	03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
01	05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
02	04	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
02	06	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
03	09	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
03	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
04	09	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
05	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
06	10	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
07	08	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
08	09	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
08	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
09	11	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
09	12	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
10	11	0	1	0	2	1	2	1	2	1	0
10	12	2	1	2	0	1	0	1	0	1	2
11	13	0	1	1	2	2	2	1	1	0	0
11	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	13	2	1	1	0	0	0	1	1	2	2
12	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
21	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
01	08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02	08	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
06	07	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	23	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
16	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL		17	17	17	17	17	17	17	17	17	17

4.3.1

Sistema de IEEE RTS 24 Barras – Índices de Desempenho

Para calcular todos os índices mostrados na subseção 4.2, em um primeiro momento, foram escolhidos os seguintes parâmetros: $N_{CE} = 15.000$, $\alpha = 0,07$, $N = 100$, $t_{max} = 400$, com o critério de parada: caso os 50 melhores itens da *Elite*

se mantenham inalterados por 50 iterações seguidas, encerra-se o algoritmo.

Variou-se a *seed inicial* entre 1234 à 10234, aumentando em mil a cada nova execução, portanto, totalizando dez execuções diferentes. Os valores de investimento dos dez melhores planos de expansão estão apresentados na Tabela 4.3 e os índices de desempenho, para estes planos, estão expostos na Tabela 4.4.

Tabela 4.3 – IEEE-RTS: Investimento nos dez melhores planos de expansão por execução.

	IEEE.1	IEEE.2	IEEE.3	IEEE.4	IEEE.5
Top1	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top2	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top3	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top4	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top5	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top6	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top7	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top8	681,00	681,00	684,00	681,00	681,00
Top9	681,00	681,00	684,00	681,00	681,00
Top10	681,00	681,00	684,00	681,00	681,00
	IEEE.6	IEEE.7	IEEE.8	IEEE.9	IEEE.10
Top1	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top2	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top3	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top4	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top5	681,00	684,00	681,00	681,00	681,00
Top6	681,00	684,00	681,00	681,00	681,00
Top7	681,00	684,00	681,00	681,00	681,00
Top8	684,00	684,00	684,00	684,00	684,00
Top9	684,00	687,00	684,00	684,00	684,00
Top10	684,00	687,00	684,00	684,00	684,00

Tabela 4.4 – IEEE-RTS: Índices de desempenho.

	It _{Best}	N _{Top10}	D _{Best} (%)	D _{10Best} (%)	T _M (min)
IEEE.1	142	10	0,00	0,00	193,44
IEEE.2	111	10	0,00	0,00	244,72
IEEE.3	- ¹	7	0,00	1,32	126,68
IEEE.4	111	10	0,00	0,00	245,18
IEEE.5	131	10	0,00	0,00	223,23
IEEE.6	- ¹	7	0,00	1,32	213,15
IEEE.7	-	4	0,00	3,52	237,89
IEEE.8	149	7	0,00	1,32	341,28
IEEE.9	148	7	0,00	1,32	263,92
IEEE.10	197	7	0,00	1,32	229,25
Média	141,29 ²	7,9	0,00	1,01	231,87
R _{Best}	7				

¹ O melhor plano de investimento não foi encontrado durante a execução do algoritmo.

² Considerando somente a quantidade de iteração das seeds que encontraram o melhor plano.

É possível afirmar que o pior desempenho, considerando os índices N_{Top10} e $D_{10\text{Best}}$, foi o da execução IEEE.7, seguido por IEEE.3, IEEE.6, IEEE.8, IEEE.9 e IEEE.10. As demais encontraram integralmente os dez melhores planos de expansão. Além disso, 70% das execuções encontraram o melhor plano de investimento conhecido. E, considerando somente essas execuções, a média de iterações necessárias para catalogar o plano ótimo foi de aproximadamente 142.

A fim de avaliar o impacto dos parâmetros iniciais do algoritmo sobre os índices, uma nova execução dos testes foi realizada considerando: $N_{CE} = 30.000$, $\alpha = 0,05$, $N = 100$, $t_{max} = 400$, com o critério de parada: caso os 100 melhores itens da *Elite* se mantenham inalterados por 30 iterações seguidas, encerra-se o algoritmo. As *seeds iniciais* se mantiveram para possibilitar o comparativo.

Tabela 4.5 – IEEE-RTS: Investimento nos dez melhores planos de expansão por execução.

	IEEE.11	IEEE.12	IEEE.13	IEEE.14	IEEE.15
Top1	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top2	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top3	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top4	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top5	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top6	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top7	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top8	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top9	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top10	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
	IEEE.16	IEEE.17	IEEE.18	IEEE.19	IEEE.20
Top1	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top2	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top3	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top4	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top5	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top6	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top7	681,00	681,00	681,00	681,00	681,00
Top8	684,00	684,00	681,00	681,00	681,00
Top9	684,00	684,00	681,00	681,00	681,00
Top10	684,00	684,00	681,00	681,00	681,00

Tabela 4.6 – IEEE-RTS: Índices de desempenho.

	It_{Best}	N_{Top10}	D_{Best} (%)	D_{10Best} (%)	T_M (min)
IEEE.11	149	10	0,00	0,00	375,25
IEEE.12	110	10	0,00	0,00	346,08
IEEE.13	128	10	0,00	0,00	262,08
IEEE.14	131	10	0,00	0,00	349,68
IEEE.15	135	10	0,00	0,00	286,30
IEEE.16	122	7	0,00	1,32	369,91
IEEE.17	134	7	0,00	1,32	330,05
IEEE.18	105	10	0,00	0,00	436,90
IEEE.19	135	10	0,00	0,00	293,18
IEEE.20	192	10	0,00	0,00	403,95
Média	134,1	9,4	0,00	0,26	345,34
R_{Best}	10				

Ao comparar com o resultado anterior, todas as execuções encontraram o melhor plano de expansão obtendo a média de **R_{Best}** em 100%. Além disso, apenas a execução IEEE.16, que utilizou a *seed inicial* 6234, manteve os índices **N_{Top10}** e **D_{10Best}** estáveis. As demais apresentaram significativa melhora. A IEEE.17, que utilizou a *seed inicial* 7234, teve uma diminuição de 2,2% em **D_{10Best}** e um aumento de 30% em **N_{10Best}**, enquanto as rodadas IEEE.13, IEEE.18, IEEE.19 e IEEE.20, que utilizaram as *seeds iniciais* 3234, 8234, 9234 e 10234, respectivamente, reduziram totalmente o desvio percentual, encontrando integralmente os dez melhores planos de expansão.

Ao realizar a análise dos parâmetros, dobrando a população amostral e diminuindo o parâmetro de suavização, a média de tempo foi 1,5 vezes maior, porém a média **N_{Top10}** aumentou em 15% e a média **D_{10Best}** reduziu em 3,82 vezes. Sendo assim, é possível concluir que o melhor cenário para realização dos testes é escolher uma população amostral elevada e um parâmetro de suavização relativamente baixo.

O tempo computacional será onerado em detrimento da qualidade das soluções. No entanto, a prioridade é a busca por soluções otimizadas, mesmo que isso demande um tempo de processamento mais elevado. A qualidade do conjunto de planos de expansão na iteração final compensa o investimento em tempo computacional.

Com o objetivo de verificar a qualidade dos índices apresentados na Tabela 4.6, é possível realizar uma comparação com outras ferramentas, encontradas na literatura, que implementaram o sistema de teste IEEE-RTS. No entanto, é importante destacar que os desempenhos computacionais (tempos de execução)

obtidos em cada caso não podem ser comparados, já que diferentes linguagens de programação foram utilizadas, bem como computadores com diferentes configurações foram utilizados na realização dos testes.

Tabela 4.7 – IEEE-RTS: Comparação de índices de desempenho.

	R_{Best}	N_{Top10}	T_M (min)	D_{10Best} (%)
EGA-TEP [8]	10	9,6	13,50	0,09
GCA [8]	9	3,4	8,12	1,26
SMC-CE-PET	10	9,4	345,34	0,26

A Tabela 4.7 apresenta os índices das ferramentas utilizadas em [8], juntamente com aqueles verificados a partir do SMC-CE-PET. Os algoritmos EGA-TEP e GCA encontraram os mesmos melhores planos de expansão assim como exibido na Tabela 4.1. Conforme o comparativo, para o sistema IEEE-RTS, excluindo-se o indicador T_M , pode-se dizer que a ferramenta SMC-CE-PET apresentou desempenho similar ao EGA-TEP.

4.4

Sistema Sul Brasileiro (SSB)

Uma configuração do Sistema Sul Brasileiro (SSB) [7] foi também utilizada neste capítulo. Essa configuração possui 46 barras em sua topologia base, sendo 11 inicialmente isoladas da rede. Dentre essas 11 barras, 2 possuem geração e 9 correspondem a barras de passagem. Esta configuração do SSB possui ainda 47 ramos ativos, nos quais estão instalados 62 circuitos (linhas de transmissão e transformadores). Os 47 ramos existentes e mais 32 ramos novos totalizam 79 ramos candidatos, os quais podem receber até 3 reforços cada um, conforme considerado em [2]. Este sistema possui uma carga total de 6880 MW e uma capacidade máxima de geração de 10545 MW no horizonte de planejamento. Para o cálculo das perdas, assim como adotado em [52], o valor de resistência de cada circuito é considerado igual a 10% do valor de sua reatância. A ordem de despacho adotada para os testes realizados com esta configuração e as demais informações do sistema são apresentadas no Apêndice A, Seção A.2 desta dissertação.

Devido a magnitude do SSB, em comparação ao IEEE-RTS, os parâmetros escolhidos para execução do código sofreram ajustes. Para testar o algoritmo foram utilizados os seguintes dados: $N_{CE} = 20.000$, $\alpha = 0,01$, $N = 100$, $t_{max} = 1000$ e

a $seed = 1$. O algoritmo foi implementado com o seguinte critério de parada: caso os 100 melhores itens da *Elite* se mantenham inalterados por 30 iterações seguidas, encerra-se o algoritmo. A melhor solução encontrada para este último sistema possui investimento de 239,021 milhões de reais (R\$). As perdas ôhmicas obtidas para a configuração resultante correspondem a 184,78 MW. Os seguintes 22 reforços estão presentes nesta solução:

$$n_{02-05} = 1, n_{12-14} = 1, n_{19-21} = 1, n_{20-23} = 2, n_{24-33} = 1, n_{33-34} = 1, n_{32-43} = 1, \\ n_{42-44} = 1, n_{44-45} = 1, n_{20-21} = 3, n_{42-43} = 3, n_{46-06} = 2, n_{31-32} = 1 \text{ e } n_{05-06} = 3.$$

Na Figura 4.4, baseada em [2], é apresentado o digrama do SSB, com indicação em vermelho dos reforços indicados pela melhor solução encontrada.

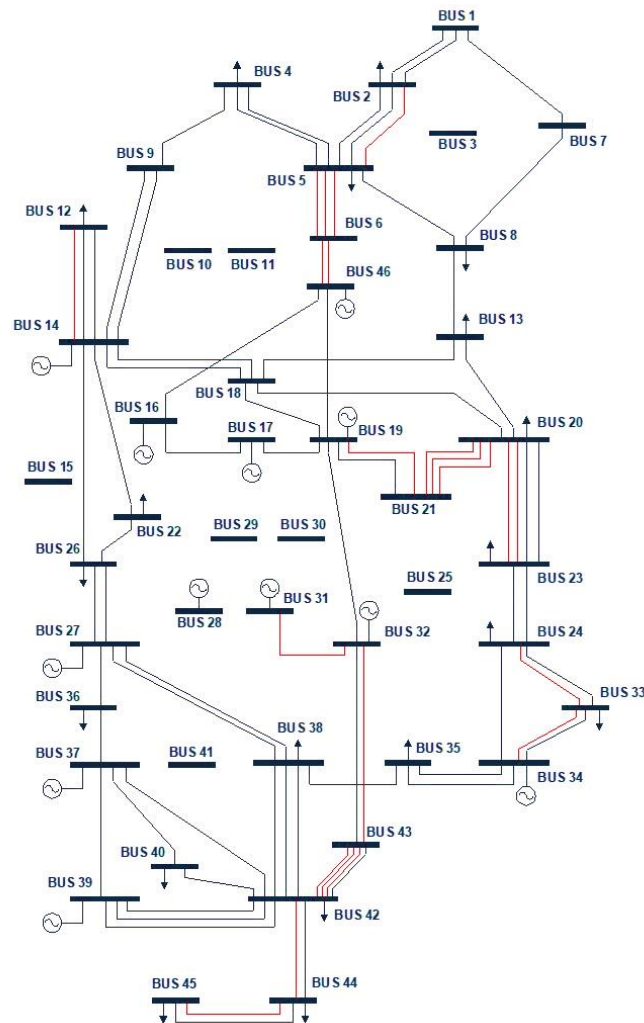


Figura 4.4 – SSB com reforços adicionados.

O tempo total de simulação foi de 17h 26min e foram realizadas 974 iterações. A Figura 4.5 mostra a evolução do melhor plano de expansão (Top1) através das iterações. É possível avaliar que na primeira iteração, o valor de investimento é alto, 1,15 bilhões de reais, portanto o número total de reforços também é, 95. Porém, consequentemente, as perdas ôhmicas são menores, 110,77 MW, que o melhor plano da última iteração.

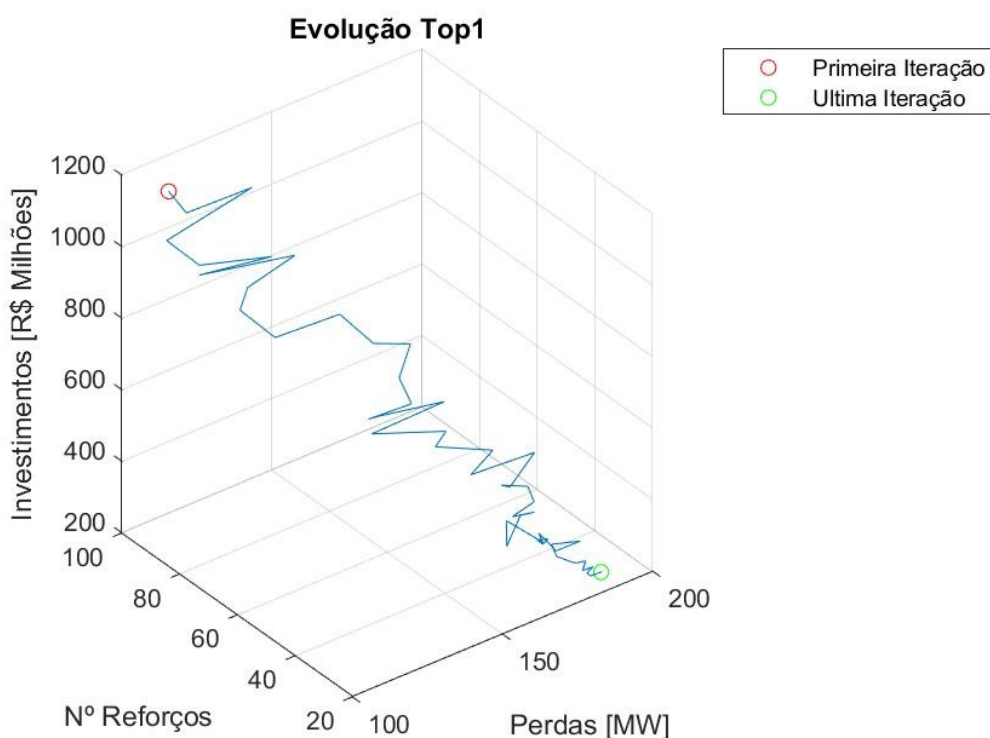


Figura 4.5 – SSB: Evolução do melhor plano de expansão.

Da mesma forma que o sistema IEEE-RTS, na Figura B.1, presente no Apêndice B, é possível ver a evolução das probabilidades em cada ramo candidato ao longo das iterações. Já a Figura 4.6 exibe a evolução do investimento, número total de reforços e perdas do primeiro e último elemento da *Elite*.

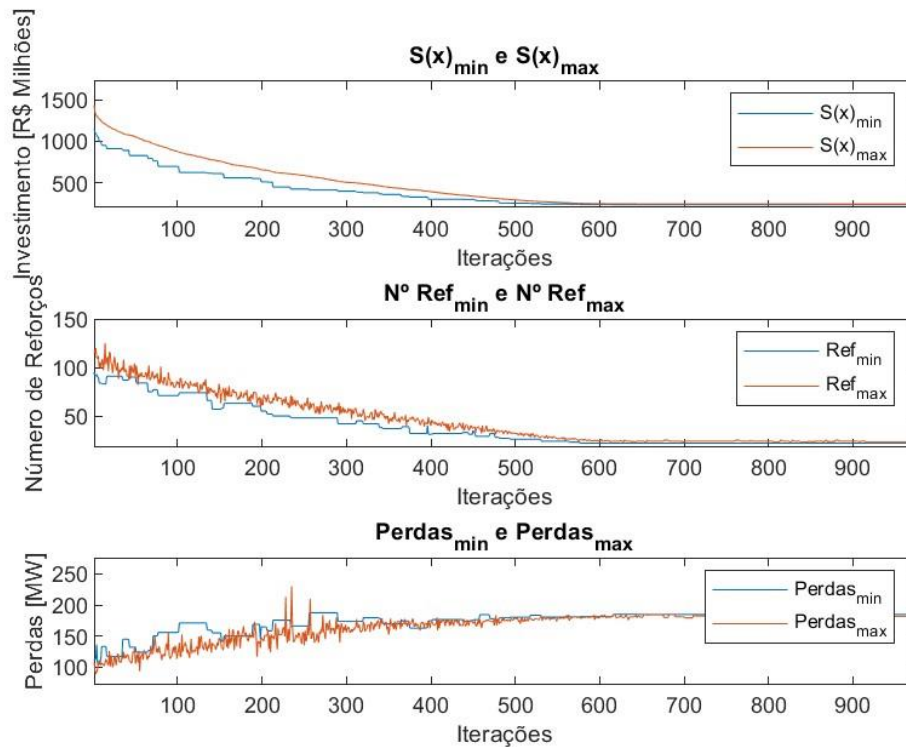


Figura 4.6 – SSB: Evolução da *Elite*.

Os resultados e o número de reforços, por ramo candidato, nos dez melhores planos de expansão podem ser vistos nas Tabela 4.8 e na Tabela 4.9, respectivamente. É importante salientar que nenhum plano de expansão apresentou corte de carga.

Tabela 4.8 – SSB: Resultados nos dez melhores planos de expansão.

	Investimento (R\$ Milhões)	Número Total de Reforços	Perdas Ativas (MW)
Top1	239,021	22	184,78
Top2	239,425	22	185,02
Top3	240,233	22	181,11
Top4	240,637	22	181,36
Top5	241,350	23	184,37
Top6	241,602	23	184,18
Top7	241,754	23	184,61
Top8	242,006	23	184,43
Top9	242,556	22	181,90
Top10	242,562	23	180,70

DE	PARA	Top1	Top2	Top3	Top4	Top5	Top6	Top7	Top8	Top9	Top10
46	03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	45	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
15	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
46	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	41	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02	03	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
05	06	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
09	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL		22	22	22	22	23	23	23	23	22	23

A referência [2] encontrou os dez melhores planos de expansão conforme a Tabela 4.10. Porém, ao realizar o comparativo com o resultado da execução do algoritmo SMC-CE-PET (Tabela 4.11), é possível notar que método proposto nesta dissertação elencou uma quantidade maior de planos de expansão.

Tabela 4.10 – SSB: Resultados nos 10 melhores planos de expansão segundo [2].

Plano	Investimento (milhões de \$)	Perdas Ativas (MW)	Número de Reforços	Posição na Tabela 4.11
1	239,021	184,78	22	Top1
2	239,425	185,02	22	Top2
3	240,233	181,11	22	Top3
4	240,637	181,36	22	Top4
5	242,556	181,90	22	Top9
6	242,960	182,15	22	Top13
7	245,087	176,04	23	Top40
8	246,456	179,11	24	Top92
9	247,410	176,84	23	-
10	247,466	179,25	24	-

Tabela 4.11 – SSB: Resultados nos cem melhores planos de expansão.

	Investimento (R\$ Milhões)	Número Total de Reforços	Perdas Ativas (MW)		Investimento (R\$ Milhões)	Número Total de Reforços	Perdas Ativas (MW)
1	239,021	22	184,78	51	245,339	23	179,46
2	239,425	22	185,02	52	245,345	24	184,14
3	240,233	22	181,11	53	245,390	23	184,99
4	240,637	22	181,36	54	245,395	24	180,15
5	241,350	23	184,37	55	245,541	23	180,63
6	241,602	23	184,18	56	245,541	23	181,56
7	241,754	23	184,61	57	245,547	24	180,34
8	242,006	23	184,43	58	245,592	23	184,98
9	242,556	22	181,90	59	245,597	24	183,97
10	242,562	23	180,70	60	245,642	23	181,07
11	242,612	23	184,31	61	245,642	23	184,90
12	242,814	23	180,51	62	245,693	23	182,83
13	242,960	22	182,15	63	245,693	23	184,85
14	242,966	23	180,94	64	245,699	24	184,35
15	243,016	23	184,56	65	245,743	23	179,71
16	243,218	23	180,76	66	245,799	24	180,40
17	243,370	23	184,76	67	245,844	23	184,74
18	243,679	24	184,22	68	245,895	23	180,84
19	243,774	23	185,01	69	245,945	23	180,50
20	243,824	23	180,71	70	245,945	23	180,88
21	243,931	24	183,77	71	245,951	24	184,15
22	244,083	24	184,45	72	246,008	25	184,14
23	244,127	23	183,12	73	246,046	23	181,32
24	244,183	24	183,82	74	246,052	24	183,77
25	244,228	23	180,96	75	246,073	23	183,68
26	244,279	23	180,45	76	246,097	23	184,76
27	244,329	23	184,18	77	246,103	24	184,59
28	244,335	24	184,01	78	246,147	23	184,77
29	244,531	23	183,37	79	246,153	24	180,31
30	244,582	23	181,09	80	246,198	23	181,07
31	244,587	24	184,07	81	246,203	24	184,07
32	244,683	23	180,70	82	246,248	23	184,99
33	244,683	23	184,50	83	246,260	25	183,62
34	244,733	23	184,43	84	246,299	23	181,09
35	244,885	23	181,49	85	246,349	23	180,75
36	244,891	24	180,55	86	246,349	23	181,02
37	244,941	24	183,91	87	246,355	24	184,40
38	244,986	23	181,34	88	246,400	23	181,06
39	244,986	23	184,74	89	246,405	24	180,12
40	245,087	23	176,04	90	246,412	25	184,37
41	245,087	23	184,75	91	246,450	23	180,99
42	245,137	23	181,31	92	246,456	24	179,11
43	245,143	24	180,10	93	246,456	24	182,72
44	245,188	23	184,73	94	246,477	23	183,93
45	245,193	24	183,72	95	246,501	23	179,06
46	245,238	23	184,65	96	246,501	23	181,00
47	245,289	23	181,73	97	246,501	23	184,17
48	245,289	23	182,58	98	246,501	23	185,01
49	245,289	23	184,67	99	246,512	25	183,41
50	245,295	24	180,78	100	246,551	23	181,79

4.4.1

Sistema de SSB – Índices de Desempenho

Para calcular todos os índices mostrados em 4.2, foram escolhidos os seguintes parâmetros: $N_{CE} = 100.000$, $\alpha = 0,01$, $N = 100$, $t_{max} = 1000$, com o critério de parada: caso os 100 melhores itens da *Elite* se mantenham inalterados por 30 iterações seguidas, encerra-se o algoritmo. Variou-se a *seed* entre 1234 à 10234, aumentando em mil a cada nova execução, portanto, totalizando dez execuções com “pseudopopulações” diferentes. Os resultados estão na Tabela 4.12 e na Tabela 4.13.

Tabela 4.12 – SSB: Investimento nos dez melhores planos de expansão por execução.

	SSB.1	SSB.2	SSB.3	SSB.4	SSB.5
Top1	239,021	239,021	239,425	239,021	239,425
Top2	239,425	239,425	240,637	239,425	240,233
Top3	240,233	240,233	241,754	240,233	240,637
Top4	240,637	240,637	242,006	240,637	241,754
Top5	241,350	241,350	242,96	241,350	242,006
Top6	241,602	241,602	242,966	241,602	242,960
Top7	241,754	241,754	243,016	241,754	242,966
Top8	242,006	242,006	243,218	242,006	243,016
Top9	242,556	242,556	243,774	242,556	243,218
Top10	242,562	242,562	244,083	242,562	243,774
	SSB.6	SSB.7	SSB.8	SSB.9	SSB.10
Top1	239,021	239,021	239,021	239,021	239,021
Top2	239,425	239,425	239,425	239,425	239,425
Top3	240,233	240,233	240,233	240,233	240,233
Top4	240,637	240,637	240,637	240,637	240,637
Top5	241,350	241,350	241,350	241,350	241,350
Top6	241,602	241,602	241,602	241,602	241,602
Top7	241,754	241,754	241,754	241,754	241,754
Top8	242,006	242,006	242,006	242,006	242,006
Top9	242,556	242,556	242,556	242,556	242,556
Top10	242,562	242,562	242,562	242,562	242,562

É possível afirmar que 80% das execuções encontraram o melhor plano de expansão. Além disso, o pior desempenho, considerando os índices R_{Best} , N_{10Best} , D_{Best} e D_{10Best} , foram os das chamadas SSB.3 e SSB.5. As demais encontraram integralmente os dez melhores planos de expansão. Devido a magnitude do sistema e o elevado tempo de execução, nenhum outro comparativo foi realizado.

Tabela 4.13 – SSB: Índices de desempenho.

	It_{Best}	N_{10Best} (%)	D_{Best} (%)	D_{10Best} (%)	T_M (min)
SSB.1	540	10	0,00	0,00	1932,07
SSB.2	589	10	0,00	0,00	1704,08
SSB.3	- ¹	4	0,17	5,26	870,490
SSB.4	691	10	0,00	0,00	2347,83
SSB.5	- ¹	5	0,17	3,66	1206,78
SSB.6	607	10	0,00	0,00	1732,83
SSB.7	573	10	0,00	0,00	1970,75
SSB.8	586	10	0,00	0,00	1927,98
SSB.9	637	10	0,00	0,00	3187,05
SSB.10	481	10	0,00	0,00	1384,01
Média	588²	8,9	0,03	0,89	1826,39
R_{Best} (%)	8				

Por fim, vale comentar que a ferramenta SMC-CE-PET proposta identificou um conjunto de 10 melhores planos de expansão superior àquele identificado em [8], com emprego dos algoritmos EGA-TEP e CGA, o que mostra sua boa capacidade da ferramenta na exploração do espaço de soluções. Mas como os índices de desempenho são calculados em relação a este conjunto, não é possível então realizar uma comparação direta do desempenho entre essas ferramentas para o SSB por meio dos índices

4.5 Considerações Finais

Este capítulo apresenta os resultados obtidos pela aplicação do SMC-CE-PET na resolução do problema de planejamento estático da transmissão em dois sistemas de pequeno porte.

Como modelagem matemática, foi escolhida a utilização do modelo linearizado, DC. O cálculo de estimativa de perdas foi agregado a fim de melhorar a robustez dos resultados. Além disso, o critério de segurança “N-1” foi implementado de modo a garantir que todos os planos de expansão atendessem a tal critério.

A avaliação do desempenho da ferramenta se baseia em indicadores específicos, calculados estatisticamente a partir de diversas execuções da rotina

¹ O melhor plano de investimento não foi encontrado durante a execução do algoritmo.

² Considerando somente a quantidade de iteração das seeds que encontraram o melhor plano de investimento.

implementada. Essa abordagem quantitativa permite medir a efetividade da ferramenta em diferentes cenários e identificar potencial para melhorias.

A partir dos estudos realizados, verificou-se que o método SMC-CE-PET apresentou desempenho satisfatório, sendo capaz de encontrar as melhores soluções conhecidas na literatura para o sistema IEEE-RTS. Apesar do desempenho computacional não poder ser comparado nesse caso, devido às diferenças em termos de implementação e recurso computacional empregado, pode-se dizer que a qualidade das melhores soluções identificadas é similar às aquelas já conhecidas. Para o estudo com o SSB, o método proposto foi capaz de identificar um conjunto de soluções com qualidade superior àquele conhecido. Vale ressaltar, no entanto, que uma comparação mais detalhada em termos de desempenho exija também a verificação do desempenho computacional entre todas as ferramentas.

5 Conclusões

Neste trabalho, propõe-se uma nova metodologia para o planejamento estático da expansão de sistemas de transmissão, baseada na simulação Monte Carlo e no método da entropia cruzada (SMC-CE-PET). Através dos dados operação do sistema em condições normais e de contingência são definidas as necessidades de reforço de elementos da rede.

De maneira geral, o desempenho da rede intacta é verificado através de um algoritmo de fluxo de potência linearizado (DC) atrelado a um estimador de perdas ôhmicas nas linhas de transmissão. Após, o método da entropia cruzada é empregado ao PET, como ferramenta para definição de reforços da rede. Além disso, os objetivos do algoritmo são a minimização: do corte de carga, do valor do investimento, da quantidade total de reforços e das perdas ôhmicas.

Para garantir a segurança e a confiabilidade do sistema elétrico, o critério determinístico “N-1” é utilizado no planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Ao aplicar este critério em todas as etapas do processo de otimização, é possível encontrar soluções que minimizam os custos de investimento e, ao mesmo tempo, garantem a integridade do sistema. Essa abordagem se mostra mais eficiente do que métodos que verificam as restrições de segurança apenas nas soluções finais, uma vez que evita a necessidade de descartar soluções promissoras por não atenderem aos requisitos de segurança.

A fim de avaliar a eficácia e a robustez do SMC-CE-PET em diferentes cenários, foram utilizados dois sistemas de teste de referência, IEEES-RTS [6] e SSB [7], amplamente utilizados na literatura. Esses sistemas, caracterizados por diferentes topologias e tamanhos, permitiram simular diversas condições de operação e avaliar o desempenho do algoritmo em relação a outros métodos propostos em trabalhos publicados.

A avaliação do desempenho do SMC-CE-PET foi realizada através da aplicação de técnicas estatísticas sobre os resultados de diversas execuções, permitindo a quantificação e comparação de diferentes indicadores de desempenho.

Esses índices verificam não só a incidência e a qualidade da melhor solução identificada para cada sistema (índices $\mathbf{I}_{\text{Best}}$, $\mathbf{R}_{\text{Best}}$ e $\mathbf{D}_{\text{Best}}$), mas também a qualidade do conjunto final das melhores soluções obtidas (índices $\mathbf{N}_{10\text{Best}}$ e $\mathbf{D}_{10\text{Best}}$), além do tempo total de execução do algoritmo ($\mathbf{T}_{\text{M}}$).

Os resultados obtidos indicam que o SMC-CE-PET proposto é capaz de identificar, de forma consistente, soluções de alta qualidade, tanto em termos do melhor quanto dos dez melhores planos de expansão.

5.1 Trabalhos Futuros

A metodologia proposta nesta dissertação demonstrou ser uma ferramenta eficaz para o planejamento da expansão de sistemas de transmissão, apresentando resultados promissores em diversos cenários. Com base nesses resultados e na necessidade de aprimorar ainda mais a ferramenta, propõem-se as seguintes linhas de pesquisa futuras:

- Aprimoramento do algoritmo (SMC-CE-PET) proposto nesta dissertação:
 - Estender o algoritmo para a solução do PET via MOO (*multi-objective optimization*) usando o método CE;
 - Implementar o algoritmo em uma linguagem de programação para alto desempenho computacional, (i.e., C#, C++, Julia), a fim de diminuir os tempos de execução computacional;
 - Aplicar em sistemas reais de grande porte, possivelmente comparando diferentes métodos de solução em relação à qualidade das soluções e eficiência computacional;
 - Adaptar o algoritmo para receber o critério de segurança probabilístico;
 - Estudos de estratégias para ajuste adaptativo dos parâmetros presentes na metodologia, a fim de reduzir a necessidade de interferência pessoal na adoção de valores.
 - Adaptação do SMC-CE-PET para consideração de planejamento multiestágio (ou dinâmico) da transmissão;
 - Adaptar o algoritmo para a execução em processamento paralelo e distribuído, visando à redução do esforço computacional.

- Incorporação do problema de compensação reativa da rede durante a solução do PET, ao menos considerando o conjunto final de soluções viáveis do SMC-CE-PET.

Referências Bibliográficas

- [1] REZENDE, L. S. **Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão: Avaliação de Metaheurísticas e Critérios de Segurança**. Tese de Doutorado—Itajubá: UNIFEI, 2011.
- [2] ASSIS, F. A. DE. **Algoritmo Metaheurístico Construtivo para Solução do Problema de Planejamento da Expansão da Transmissão**. Tese de Doutorado—Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2018.
- [3] SILVA, I. S. **Planejamento da Expansão da Transmissão com Critérios de Segurança via Algoritmo Genético Especializado**. Dissertação de Mestrado—[s.l.] PUC-Rio, 2020.
- [4] HEMMATI, R.; HOOSMAND, R.-A.; KHODABAKHSHIAN, A. **State-of-the-art of transmission expansion planning: Comprehensive review**. Renewable and Sustainable Energy Reviews, v. 23, p. 312–319, 2013.
- [5] DE BOER, P.-T.; KROESE, D. P.; MANNOR, S.; RUBINSTEIN, R. Y. **A tutorial on the cross-entropy method**. Annals of operations research, v. 134, p. 19–67, 2005.
- [6] SUBCOMMITTEE, P. **IEEE Reliability Test System**. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, v. PAS-98, n. 6, p. 2047–2054, nov. 1979.
- [7] HAFFNER, S.; MONTICELLI, A.; GARCIA, A.; MANTOVANI, J.; ROMERO, R. **Branch and bound algorithm for transmission system expansion planning using a transportation model**. IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution, v. 147, n. 3, p. 149, 2000.
- [8] ASSIS, F. A.; SILVA, I. S.; LEITE DA SILVA, A. M.; RESENDE, L. C. **Transmission planning with security criteria via enhanced genetic algorithm**. Electrical Engineering, v. 103, n. 4, p. 1977–1987, ago. 2021.
- [9] ASSIS, F. A.; LEITE DA SILVA, A. M.; MANSO, L. A. F.; CASTRO, J. F. C. **Transmission expansion planning of large power networks via constructive metaheuristics with security constraints and load uncertainty analysis**. International Transactions on Electrical Energy Systems, v. 31, n. 1, jan. 2021.
- [10] LEITE DA SILVA, A. M.; REZENDE, L. S.; MANSO, L. A. F.; RESENDE, L. C. **Reliability worth applied to transmission expansion planning based on ant colony system**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 32, n. 10, p. 1077–1084, dez. 2010.
- [11] RIDER, M. J.; GARCIA, A. V.; ROMERO, R. **Power system transmission network expansion planning using AC model**. IET Generation, Transmission & Distribution, v. 1, n. 5, p. 731–742, 2007.

- [12] HOOSHMAND, R.-A.; HEMMATI, R.; PARASTEGARI, M. **Combination of AC Transmission Expansion Planning and Reactive Power Planning in the restructured power system**. Energy Conversion and Management, v. 55, p. 26–35, mar. 2012.
- [13] RAHMANI, M.; RASHIDINEJAD, M.; CARRENO, E. M.; ROMERO, R. **Efficient method for AC transmission network expansion planning**. Electric Power Systems Research, v. 80, n. 9, p. 1056–1064, set. 2010.
- [14] YOUSSEF, H. K.; HACKAM, R. **New transmission planning model**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 4, n. 1, p. 9–18, fev. 1989.
- [15] HARIYANTO, N.; NURDIN, M.; HAROEN, Y.; MACHBUB, C. **Decentralized and simultaneous generation and transmission expansion planning through cooperative game theory**. Int. J. Electr. Eng. Inf, v. 1, n. 2, p. 149–164, 2009.
- [16] YOUSSEF, H. K. M. **Dynamic transmission planning using a constrained genetic algorithm**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 23, n. 8, p. 857–862, nov. 2001.
- [17] GARVER, L. **Transmission Network Estimation Using Linear Programming**. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, v. PAS-89, n. 7, p. 1688–1697, set. 1970.
- [18] MANSO, L. A. F.; ASSIS, F. A.; LEITE DA SILVA, A. M.; RESENDE, L. C.; SANTOS, F. L. **Constructive heuristic algorithm for sub-transmission system planning**. 2014 Power Systems Computation Conference. Wrocław, Poland: IEEE, ago. 2014.
- [19] ROMERO, R.; MONTICELLI, A. **A hierarchical decomposition approach for transmission network expansion planning**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 9, n. 1, p. 373–380, fev. 1994.
- [20] PADIYAR, K. R.; SHANBHAG, R. S. **Comparison of methods for transmission system expansion using network flow and DC load flow models**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 10, n. 1, p. 17–24, jan. 1988.
- [21] SAMARAKOON, H. M. D. R. H.; SHRESTHA, R. M.; FUJIWARA, O. **A mixed integer linear programming model for transmission expansion planning with generation location selection**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 23, n. 4, p. 285–293, maio 2001.
- [22] ALIZADEH, B.; JADID, S. **Reliability constrained coordination of generation and transmission expansion planning in power systems using mixed integer programming**. IET Generation, Transmission & Distribution, v. 5, n. 9, p. 948, 2011.
- [23] LEOU, R.-C. **A multi-year transmission planning under a deregulated market**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 33, n. 3, p. 708–714, mar. 2011.

- [24] AL-HAMOUZ, Z. M.; AL-FARAJ, A. S. **Transmission-expansion planning based on anon-linear programming algorithm**. Applied Energy, v. 76, n. 1–3, p. 169–177, set. 2003.
- [25] TOR, O. B.; GUVEN, A. N.; SHAHIDEHPOUR, M. **Congestion-Driven Transmission Planning Considering the Impact of Generator Expansion**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 23, n. 2, p. 781–789, maio 2008.
- [26] ROH, J. H.; SHAHIDEHPOUR, M.; WU, L. **Market-Based Generation and Transmission Planning With Uncertainties**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 24, n. 3, p. 1587–1598, ago. 2009.
- [27] CHOI, J.; MOUNT, T. D.; THOMAS, R. J. **Transmission Expansion Planning Using Contingency Criteria**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 22, n. 4, p. 2249–2261, nov. 2007.
- [28] BUSTAMANTE-CEDENO, E.; ARORA, S. **Multi-step simultaneous changes Constructive Heuristic Algorithm for Transmission Network Expansion Planning**. Electric Power Systems Research, v. 79, n. 4, p. 586–594, abr. 2009.
- [29] DUSONCHET, Y.; EL-ABIAD, A. **Transmission Planning Using Discrete Dynamic Optimizing**. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, v. PAS-92, n. 4, p. 1358–1371, jul. 1973.
- [30] LEITE DA SILVA, A. M.; CASSULA, A. M.; BILLINTON, R.; MANSO, L. A. F. **Integrated reliability evaluation of generation, transmission and distribution systems**. IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution, v. 149, n. 1, p. 1, 2002.
- [31] AL-SABA, T.; EL-AMIN, I. **The application of artificial intelligent tools to the transmission expansion problem**. Electric Power Systems Research, v. 62, n. 2, p. 117–126, jun. 2002.
- [32] QU, G.; CHENG, H.; YAO, L.; MA, Z.; ZHU, Z. **Transmission surplus capacity based power transmission expansion planning**. Electric Power Systems Research, v. 80, n. 1, p. 19–27, jan. 2010.
- [33] GEORGILAKIS, P. S. **Market-based transmission expansion planning by improved differential evolution**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 32, n. 5, p. 450–456, jun. 2010.
- [34] EGHBAL, M.; SAHA, T. K.; HASAN, K. N. **Transmission expansion planning by meta-heuristic techniques: A comparison of Shuffled Frog Leaping Algorithm, PSO and GA**. 2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting. San Diego, CA: IEEE, jul. 2011.
- [35] JALILZADEH, S.; KAZEMI, A.; SHAYEGHI, H.; MADAVI, M. **Technical and economic evaluation of voltage level in transmission network expansion planning using GA**. Energy Conversion and Management, v. 49, n. 5, p. 1119–1125, maio 2008.

- [36] GIL, H. A.; SILVA, E. L. **A reliable approach for solving the transmission network expansion planning problem using genetic algorithms.** Electric Power Systems Research, v. 58, n. 1, p. 45–51, maio 2001.
- [37] MAHDAVI, M.; SHAYEGHI, H.; KAZEMI, A. **DCGA based evaluating role of bundle lines in TNEP considering expansion of substations from voltage level point of view.** Energy Conversion and Management, v. 50, n. 8, p. 2067–2073, ago. 2009.
- [38] SHAYEGHI, H.; JALILZADEH, S.; MAHDAVI, M.; HADADIAN, H. **Studying influence of two effective parameters on network losses in transmission expansion planning using DCGA.** Energy Conversion and Management, v. 49, n. 11, p. 3017–3024, nov. 2008.
- [39] FOROUD, A. A.; ABDOOS, A. A.; KEYPOUR, R.; AMIRAHMADI, M. **A multi-objective framework for dynamic transmission expansion planning in competitive electricity market.** International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 32, n. 8, p. 861–872, out. 2010.
- [40] MAGHOULI, P.; HOSSEINI, S. H.; BUYGI, M. O.; SHAHIDEHPOUR, M. **A Multi-Objective Framework for Transmission Expansion Planning in Deregulated Environments.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 24, n. 2, p. 1051–1061, maio 2009.
- [41] BINATO, S.; OLIVEIRA, G. C.; ARAUJO, J. L. **A greedy randomized adaptive search procedure for transmission expansion planning.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 16, n. 2, p. 247–253, maio 2001.
- [42] SHAYEGHI, H.; MAHDAVI, M.; BAGHERI, A. **Discrete PSO algorithm based optimization of transmission lines loading in TNEP problem.** Energy Conversion and Management, v. 51, n. 1, p. 112–121, jan. 2010.
- [43] CORTES-CARMONA, M.; PALMA-BEHNKE, R.; MOYA, O. **Transmission Network Expansion Planning by a Hybrid Simulated Annealing Algorithm.** 2009 15th International Conference on Intelligent System Applications to Power Systems. Curitiba, Brazil: IEEE, nov. 2009.
- [44] LEITE DA SILVA, A. M.; FONSECA, L. A. M.; RESENDE, L. C.; REZENDE, L. S. **Tabu Search Applied to Transmission Expansion Planning Considering Losses and Interruption Costs.** Proceedings of the 10th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems. Puerto Rico: 25 maio 2008.
- [45] BRAGA, A. S.; SARAIVA, J. T. **Transmission expansion planning and long term marginal prices calculation using simulated annealing.** 2003 IEEE Bologna Power Tech Conference Proceedings, Bologna, Italy: IEEE, 2003.
- [46] POUBEL, R. P. B.; OLIVEIRA, E. J.; MANSO, L. A. F.; HONÓRIO, L. M.; OLIVEIRA, L. W. **Tree searching heuristic algorithm for multi-stage transmission planning considering security constraints via genetic algorithm.** Electric Power Systems Research, v. 142, p. 290–297, jan. 2017.

- [47] MONTICELLI, A.; SANTOS, A.; F. PEREIRA, M. V.; CUNHA, S. H.; PARKER, B. J.; PRACA, J. C. G. **Interactive Transmission Network Planning Using a Least-Effort Criterion**. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, v. PAS-101, n. 10, p. 3919–3925, out. 1982.
- [48] ROMERO, R.; ROCHA, C.; MANTOVANI, J. R. S.; SANCHEZ, I. G. **Constructive heuristic algorithm for the DC model in network transmission expansion planning**. IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution, v. 152, n. 2, p. 277, 2005.
- [49] ZHAO, J. H.; DONG, Z. Y.; LINDSAY, P.; WONG, K. P. **Flexible Transmission Expansion Planning With Uncertainties in an Electricity Market**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 24, n. 1, p. 479–488, fev. 2009.
- [50] LEITE DA SILVA, A. M.; REZENDE, L. S.; MANSO, L. A. F.; ANDERS, G. J. **Transmission expansion planning: A Discussion on Reliability and “N-1” Security Criteria**. 2010 IEEE 11th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems. Singapore, Singapore: IEEE, jun. 2010.
- [51] RISHENG FANG; HILL, D. J. **A new strategy for transmission expansion in competitive electricity markets**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 18, n. 1, p. 374–380, fev. 2003.
- [52] LEITE DA SILVA, A. M.; FREIRE, M. R.; HONÓRIO, L. M. **Transmission expansion planning optimization by adaptive multi-operator evolutionary algorithms**. Electric Power Systems Research, v. 133, p. 173–181, abr. 2016.
- [53] SILVA, I. J.; RIDER, M. J.; ROMERO, R.; GARCIA, A. V.; MURARI, C. A. **Transmission network expansion planning with security constraints**. IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution, v. 152, n. 6, p. 828, 2005.
- [54] GOMES, P. V.; SARAIVA, J. T. **State-of-the-art of transmission expansion planning: A survey from restructuring to renewable and distributed electricity markets**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 111, p. 411–424, out. 2019.
- [55] ROMERO, R.; ROCHA, C.; MANTOVANI, M.; MANTOVANI, J. R. S. **Analysis of heuristic algorithms for the transportation model in static and multistage planning in network expansion systems**. IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution, v. 150, n. 5, p. 521, 2003.
- [56] SILVA SOUSA, A.; ASADA, E. N. **Combined heuristic with fuzzy system to transmission system expansion planning**. Electric Power Systems Research, v. 81, n. 1, p. 123–128, jan. 2011.
- [57] VILLASANA, R.; GARVER, L.; SALON, S. **Transmission Network Planning Using Linear Programming**. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, v. PAS-104, n. 2, p. 349–356, fev. 1985.

- [58] AKBARI, T.; RAHIMIKIAN, A.; KAZEMI, A. **A multi-stage stochastic transmission expansion planning method**. Energy Conversion and Management, v. 52, n. 8–9, p. 2844–2853, ago. 2011.
- [59] ALGUACIL, N.; MOTTO, A. L.; CONEJO, A. J. **Transmission expansion planning: a mixed-integer LP approach**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 18, n. 3, p. 1070–1077, ago. 2003.
- [60] BINATO, S.; PEREIRA, M. V. F.; GRANVILLE, S. **A new Benders decomposition approach to solve power transmission network design problems**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 16, n. 2, p. 235–240, maio 2001.
- [61] BAHIENSE, L.; OLIVEIRA, G. C.; PEREIRA, M.; GRANVILLE, S. **A mixed integer disjunctive model for transmission network expansion**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 16, n. 3, p. 560–565, ago. 2001.
- [62] GARCES, L. P.; CONEJO, A. J.; GARCIA-BERTRAND, R.; ROMERO, R. **A Bilevel Approach to Transmission Expansion Planning Within a Market Environment**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 24, n. 3, p. 1513–1522, ago. 2009.
- [63] OLIVEIRA, G. C.; BINATO, S.; PEREIRA, M. V. F. **Value-Based Transmission Expansion Planning of Hydrothermal Systems Under Uncertainty**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 22, n. 4, p. 1429–1435, nov. 2007.
- [64] MOREIRA, A.; STREET, A.; ARROYO, J. M. **An Adjustable Robust Optimization Approach for Contingency-Constrained Transmission Expansion Planning**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 30, n. 4, p. 2013–2022, jul. 2015.
- [65] CADINI, F.; ZIO, E.; PETRESCU, C. A. **Optimal expansion of an existing electrical power transmission network by multi-objective genetic algorithms**. Reliability Engineering & System Safety, v. 95, n. 3, p. 173–181, mar. 2010.
- [66] CHUNG, T. S.; LI, K. K.; CHEN, G. J.; XIE, J. D.; TANG, G. Q. **Multi-objective transmission network planning by a hybrid GA approach with fuzzy decision analysis**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 25, n. 3, p. 187–192, mar. 2003.
- [67] XIAOTONG, L.; YIMEI, L.; XIAOLI, Z.; MING, Z. **Generation and Transmission Expansion Planning Based on Game Theory in Power Engineering**. Systems Engineering Procedia, v. 4, p. 79–86, 2012.
- [68] JIN, Y.-X.; CHENG, H.-Z.; YAN, J.; ZHANG, L. **New discrete method for particle swarm optimization and its application in transmission network expansion planning**. Electric Power Systems Research, v. 77, n. 3–4, p. 227–233, mar. 2007.
- [69] YANG, N.; WEN, F. **A chance constrained programming approach to transmission system expansion planning**. Electric Power Systems Research, v. 75, n. 2–3, p. 171–177, ago. 2005.

- [70] REZENDE, L. S.; LEITE DA SILVA, A. M.; MELLO, L. H. **Artificial immune system applied to the multi-stage transmission expansion planning**. Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, vol. 5666, pp. 178–191. Springer, ago. 2009.
- [71] RUBINSTEIN, R. Y. **Optimization of computer simulation models with rare events**. European Journal of Operational Research, v. 99, n. 1, p. 89–112, maio 1997.
- [72] RUBINSTEIN, R. **The Cross-Entropy Method for Combinatorial and Continuous Optimization**. Methodology And Computing In Applied Probability, v. 1, n. 2, p. 127–190, 1999.
- [73] KROESE, D. P.; POROTSKY, S.; RUBINSTEIN, R. Y. **The Cross-Entropy Method for Continuous Multi-Extremal Optimization**. Methodology and Computing in Applied Probability, v. 8, n. 3, p. 383–407, set. 2006.
- [74] MAGALHAES CARVALHO, L.; LEITE DA SILVA, A. M.; MIRANDA, V. **Security-Constrained Optimal Power Flow via Cross-Entropy Method**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 33, n. 6, p. 6621–6629, nov. 2018.
- [75] HARRISON, R. L.; GRANJA, C.; LEROY, C. **Introduction to Monte Carlo Simulation**. Bratislava (Slovakia): 2010.
- [76] MOONEY, C. Z. **Monte Carlo simulation**. Thousand Oaks, Calif: Sage Publications, 1997.
- [77] RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. **Simulation and the Monte Carlo method**. Third edition ed. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2017.
- [78] RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. **The cross-entropy method: a unified approach to combinatorial optimization, Monte-Carlo simulation and machine learning**. New York: Springer, 2011.
- [79] COSTA, A.; JONES, O. D.; KROESE, D. **Convergence properties of the cross-entropy method for discrete optimization**. Operations Research Letters, v. 35, n. 5, p. 573–580, set. 2007.
- [80] BEKKER, J.; ALDRICH, C. **The cross-entropy method in multi-objective optimisation: An assessment**. European Journal of Operational Research, v. 211, n. 1, p. 112–121, maio 2011.
- [81] HABER, R. E.; BERUVIDES, G.; QUIZA, R.; HERNANDEZ, A. **A Simple Multi-Objective Optimization Based on the Cross-Entropy Method**. IEEE Access, v. 5, p. 22272–22281, 2017.
- [82] BERUVIDES, G.; QUIZA, R.; HABER, R. E. **Multi-objective optimization based on an improved cross-entropy method. A case study of a micro-scale manufacturing process**. Information Sciences, v. 334–335, p. 161–173, mar. 2016.
- [83] LEITE DA SILVA, A. M.; FERNANDEZ, R. A. G.; SINGH, C. **Generating Capacity Reliability Evaluation Based on Monte Carlo Simulation and Cross-Entropy Methods**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 25, n. 1, p. 129–137, fev. 2010.

- [84] LEITE DA SILVA, A. M.; MELO, A. C. G.; CUNHA, S. H. F. **Frequency and duration method for reliability evaluation of large-scale hydrothermal generating systems**. IEE Proceedings C Generation, Transmission and Distribution, v. 138, n. 1, p. 94, 1991.
- [85] CARVALHO, L. D. M.; GONZALEZ-FERNANDEZ, R. A.; LEITE DA SILVA, A. M.; ROSA, M. A.; MIRANDA, V. **Simplified Cross-Entropy Based Approach for Generating Capacity Reliability Assessment**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 28, n. 2, p. 1609–1616, maio 2013.
- [86] GONZALEZ-FERNANDEZ, R. A.; LEITE DA SILVA, A. M. **Reliability Assessment of Time-Dependent Systems via Sequential Cross-Entropy Monte Carlo Simulation**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 26, n. 4, p. 2381–2389, nov. 2011.
- [87] CASTRO, A. M.; LEITE DA SILVA, A. M. **Optimal Contracting of Transmission System Usage Combined With Subtransmission Planning via Cross-Entropy Method**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 38, n. 5, p. 4881–4889, set. 2023.
- [88] ZHAO, Y.; TANG, Y.; LI, W.; YU, J. **Composite Power System Reliability Evaluation Based on Enhanced Sequential Cross-Entropy Monte Carlo Simulation**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 34, n. 5, p. 3891–3901, set. 2019.
- [89] LEITE DA SILVA, A. M.; GONZALEZ-FERNANDEZ, R. A.; FLAVIO, S. A.; MANSO, L. A. F. **Composite reliability evaluation with renewable sources based on quasi-sequential Monte Carlo and cross entropy methods**. 2014 International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS). Durham: IEEE, jul. 2014.
- [90] ANSARI, O. A.; CHUNG, C. Y. **A Hybrid Framework for Short-Term Risk Assessment of Wind-Integrated Composite Power Systems**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 34, n. 3, p. 2334–2344, maio 2019.
- [91] TOMASSON, E.; SODER, L. **Improved Importance Sampling for Reliability Evaluation of Composite Power Systems**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 32, n. 3, p. 2426–2434, maio 2017.
- [92] WANG, Y.; GUO, C.; WU, Q. H. **A Cross-Entropy-Based Three-Stage Sequential Importance Sampling for Composite Power System Short-Term Reliability Evaluation**. IEEE Transactions on Power Systems, v. 28, n. 4, p. 4254–4263, nov. 2013.
- [93] CASTRO, A. M. **Aplicações do Método da Entropia Cruzada em Estimação de Risco e Otimização de Contrato de Montante de Uso do Sistema de Transmissão**. PhD Thesis—[s.l.] PUC-Rio, 2021.
- [94] KIM, J.; LEE, J.; JOO, S.-K. **Assessment of Conditional Value at Risk (CVaR) in transmission investment using Cross Entropy method**. 2009 Transmission & Distribution Conference & Exposition: Asia and Pacific. Seoul, South Korea: IEEE, out. 2009.
- [95] LEITE DA SILVA, A. M.; CASTRO, A. M. **Risk Assessment in Probabilistic Load Flow via Monte Carlo Simulation and Cross-**

- Entropy Method.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 34, n. 2, p. 1193–1202, mar. 2019.
- [96] KAZEMDEHDASHTI, A.; MOHAMMADI, M.; SEIFI, A. R. **Application of generalised cross-entropy method in probabilistic power flow.** IET Generation, Transmission & Distribution, v. 12, n. 11, p. 2745–2754, jun. 2018.
 - [97] KAZEMDEHDASHTI, A.; MOHAMMADI, M.; SEIFI, A. R. **The Generalized Cross-Entropy Method in Probabilistic Optimal Power Flow.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 33, n. 5, p. 5738–5748, set. 2018.
 - [98] JALOCON, C. L. C.; NERVES, A. C. **Renewable energy portfolio planning using the cross-entropy method.** 2013 IEEE PES Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC). Kowloon, Hong Kong: IEEE, dez. 2013.
 - [99] SEBAA, K.; BOUHEDDA, M.; TLEMÇANI, A.; HENINI, N. **Location and tuning of TCPSTs and SVCs based on optimal power flow and an improved cross-entropy approach.** International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 54, p. 536–545, jan. 2014.
 - [100] CHEN, J.-C.; LI, W.-T.; WEN, C.-K.; TENG, J.-H.; TING, P. **Efficient Identification Method for Power Line Outages in the Smart Power Grid.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 29, n. 4, p. 1788–1800, jul. 2014.
 - [101] LEITE DA SILVA, A. M.; COSTA CASTRO, J. F.; GONZALEZ-FERNANDEZ, R. A. **Spinning Reserve Assessment Under Transmission Constraints Based on Cross-Entropy Method.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 31, n. 2, p. 1624–1632, mar. 2016.
 - [102] WANG, Y. **An Adaptive Importance Sampling Method for Spinning Reserve Risk Evaluation of Generating Systems Incorporating Virtual Power Plants.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 33, n. 5, p. 5082–5091, set. 2018.
 - [103] LEITE DA SILVA, A. M.; COSTA CASTRO, J. F.; BILLINTON, R. **Probabilistic Assessment of Spinning Reserve via Cross-Entropy Method Considering Renewable Sources and Transmission Restrictions.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 33, n. 4, p. 4574–4582, jul. 2018.
 - [104] ERNST, D.; GLAVIC, M.; STAN, G.-B.; MANNOR, S.; WEHENKEL, L. **The cross-entropy method for power system combinatorial optimization problems.** 2007 IEEE Lausanne Power Tech. Lausanne, Switzerland: IEEE, jul. 2007.
 - [105] WANG, G.; ZHA, Y.; WU, T.; QIU, J.; PENG, J.; XU, G. **Cross entropy optimization based on decomposition for multi-objective economic emission dispatch considering renewable energy generation uncertainties.** Energy, v. 193, p. 116790, fev. 2020.
 - [106] CASTRO, J. F. C.; ROSAS, P. A. C.; MEDEIROS, L. H. A.; LEITE DA SILVA, A. M. **Operating Reserve Assessment in Systems with Energy Storage and Electric Vehicles.** 2020 International Conference on

Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS). Liege, Belgium: IEEE, ago. 2020.

- [107] YUAN, Y.; LIU, Z.; CHEN, Z.; HOEJ JENSEN, K.; POPOV, M. **Quantifying frequency containment reserve using cross-entropy frequency-constrained contingency-state-analysis model**. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, v. 145, p. 108705, fev. 2023.
- [108] ABREU, C.; SOARES, I.; OLIVEIRA, L.; RUA, D.; MACHADO, P.; CARVALHO, L.; PEÇAS LOPES, J. A. **Application of genetic algorithms and the cross-entropy method in practical home energy management systems**. IET Renewable Power Generation, v. 13, n. 9, p. 1474–1483, jul. 2019.
- [109] ONS - OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO. **A Expansão da Transmissão**.
- [110] KALTENBACH, J.; PESCHON, J.; GEHRIG, E. **A Mathematical Optimization Technique for the Expansion of Electric Power Transmission Systems**. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, v. PAS-89, n. 1, p. 113–119, jan. 1970.
- [111] FISCHL, R. **Optimal system expansion: a critical review**. Proceedings of the ERDA Conference: Systems, Engineering for Power: Status and Prospects. 1975.
- [112] BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to linear optimization**. Belmont, Mass: Athena Scientific, 1997.
- [113] BOYD, S. P.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2004.
- [114] LATORRE, G.; CRUZ, R. D.; AREIZA, J. M.; VILLEGAS, A. **Classification of publications and models on transmission expansion planning**. IEEE Transactions on power systems, v. 18, n. 2, p. 938–946, 2003.
- [115] M. ALMUFTI, S.; AHMAD SHABAN, A.; ARIF ALI, Z.; ISMAEL ALI, R.; A. DELA FUENTE, J. **Overview of Metaheuristic Algorithms**. Polaris Global Journal of Scholarly Research and Trends, v. 2, n. 2, p. 10–32, 29 abr. 2023.
- [116] HONORIO, L. M.; LEITE DA SILVA, A. M. L.; BARBOSA, D. A. **A Cluster and Gradient-Based Artificial Immune System Applied in Optimization Scenarios**. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 16, n. 3, p. 301–318, jun. 2012.
- [117] REZENDE, L. S.; LEITE DA SILVA, A. M.; HONORIO, L. M. **Artificial Immune Systems and Differential Evolution Based Approaches Applied to Multi-Stage Transmission Expansion Planning**. 2009 15th International Conference on Intelligent System Applications to Power Systems. Curitiba, Brazil: IEEE, nov. 2009.
- [118] LEITE DA SILVA, A. M.; REZENDE, L. S.; HONÓRIO, L. M.; MANSO, L. A. F. **Performance comparison of metaheuristics to solve the multi-**

- stage transmission expansion planning problem.** IET Generation, Transmission & Distribution, v. 5, n. 3, p. 360, 2011.
- [119] LEITE DA SILVA, A. M.; MANSO, L. A. F.; SALES, W. S.; FLAVIO, S. A.; ANDERS, G. J.; RESENDE, L. C. **Chronological Power Flow for Planning Transmission Systems Considering Intermittent Sources.** IEEE Transactions on Power Systems, v. 27, n. 4, p. 2314–2322, nov. 2012.
 - [120] LEITE DA SILVA, A. M.; SACRAMENTO, C. E.; MANSO, L. A. F.; REZENDE, L. S.; RESENDE, L. C.; SALES, W. S. **Optimization Advances in Electric Power Systems - Chapter 4: Metaheuristics-Based Optimization Methods for Transmission Expansion Planning Considering Unreliability Costs.** New York: Nova Science Publishers, 2008.
 - [121] LEITE DA SILVA, A. M.; REZENDE, L. S.; MANSO, L. A. F. **Innovations in Power Systems Reliability - Transmission Expansion Planning: A Methodology to Include Security Criteria and Uncertainties Using Optimization Techniques.** London: Springer London, 2011.
 - [122] MELLO, T. H.; RUBINSTEIN, R. Y. **Estimation of rare event probabilities using cross-entropy.** Proceedings of the Winter Simulation Conference. San Diego, CA, USA: IEEE, 2002.

Apêndice A

Dados do Sistema IEEE-RTS

Os dados de barra para este sistema estão presentes na Tabela A.1. Os dados de ramos candidatos ao reforço para o estudo PET são apresentados na Tabela A.2. Nesta última tabela, os ramos de 1 a 34 possuem circuitos em operação na topologia base da rede, já os ramos de 35 a 41 correspondem a ramos novos [2].

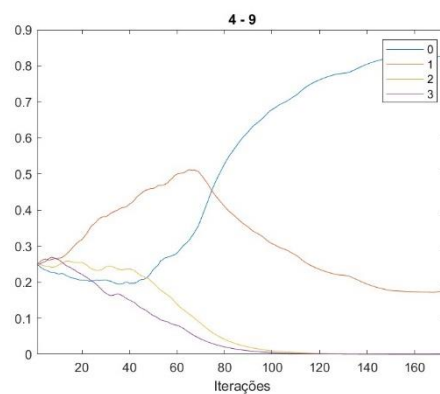
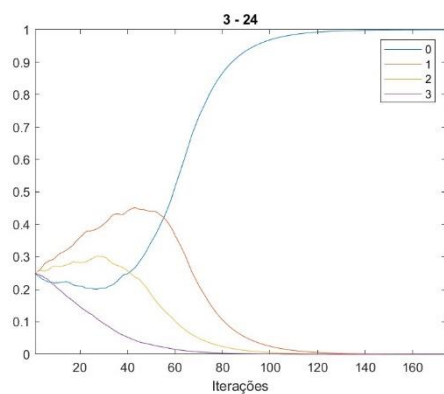
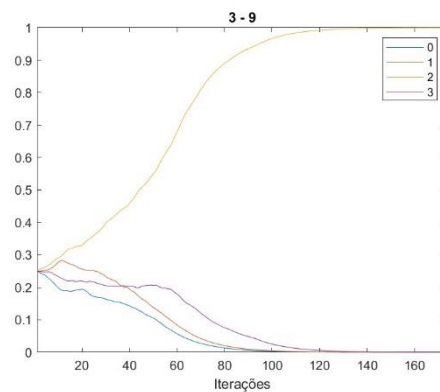
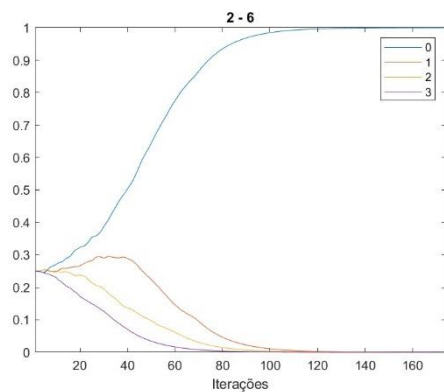
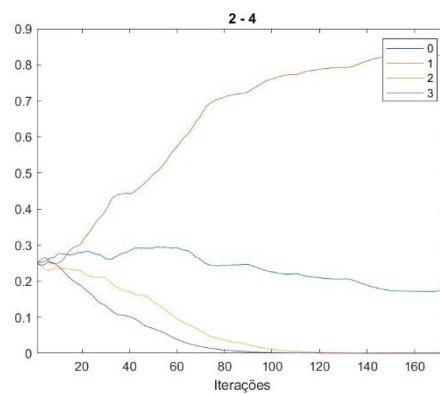
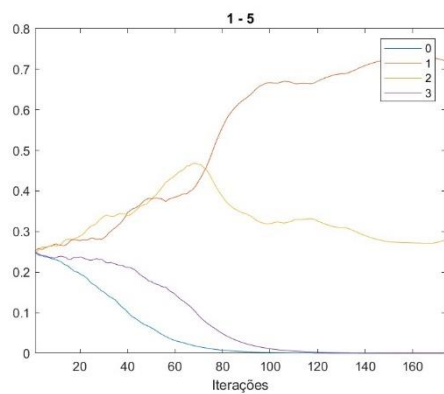
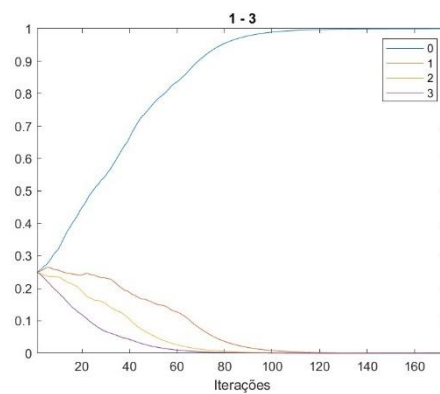
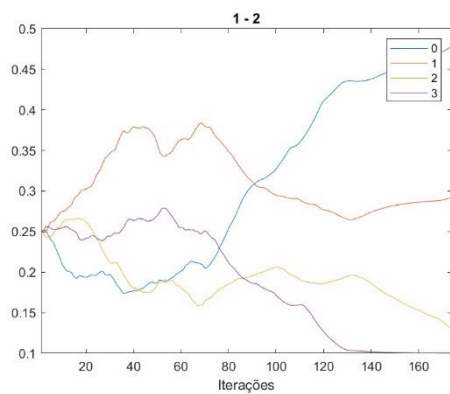
Tabela A.1 – Dados de barra – IEEE-RTS.

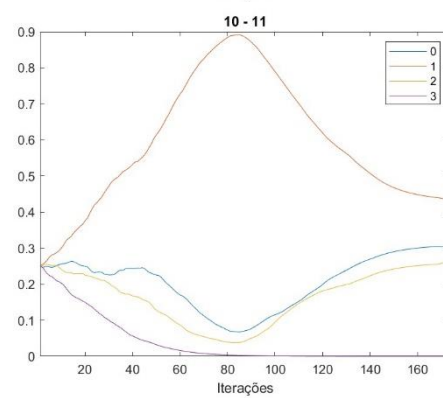
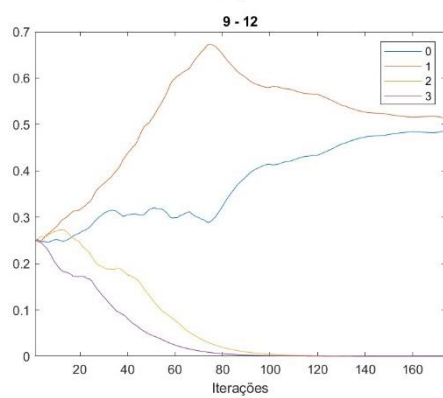
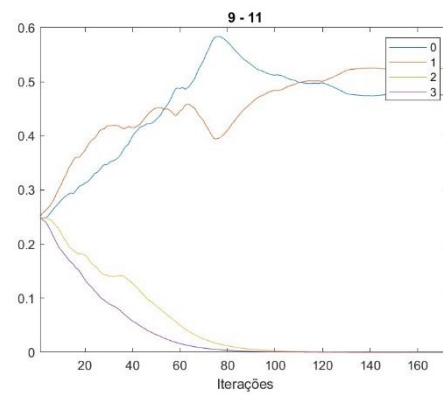
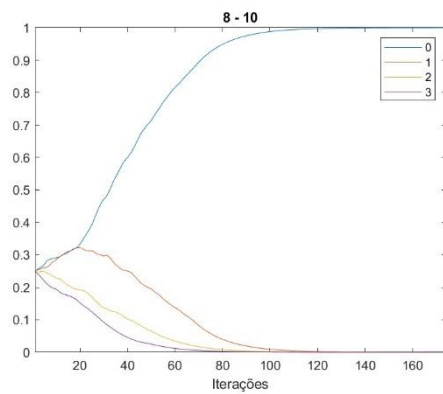
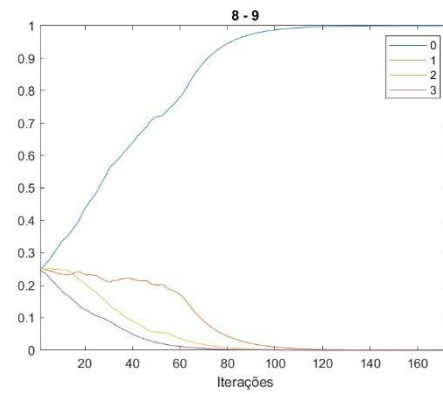
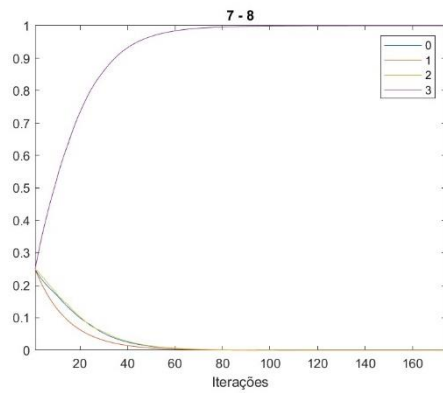
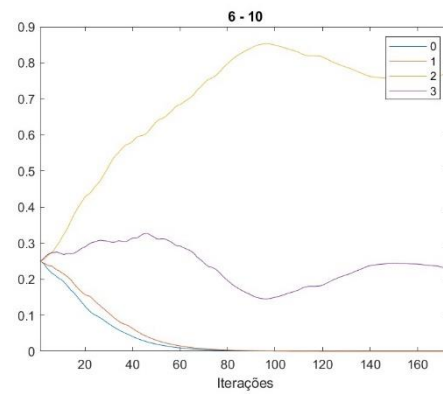
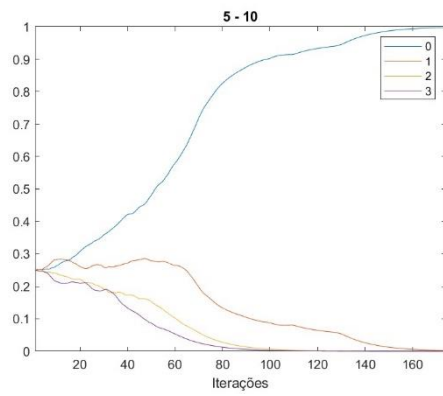
Barra	Carga (MW)	Geração Máxima (MW)	Prioridade no Despacho da Geração	Nível de Tensão (kV)
01	324	576	3	138
02	291	576	1	138
03	540	0	—	138
04	222	0	—	138
05	213	0	—	138
06	408	0	—	138
07	375	900	2	138
08	513	0	—	138
09	525	0	—	138
10	585	0	—	138
11	0	0	—	230
12	0	0	—	230
13	795	1773	4	230
14	582	0	—	230
15	951	645	5	230
16	300	465	7	230
17	0	0	—	230
18	999	1200	9	230
19	543	0	—	230
20	384	0	—	230
21	0	1200	8	230
22	0	900	10	230
23	0	1980	6	230
24	0	0	—	230
TOTAL:	8550	10215		

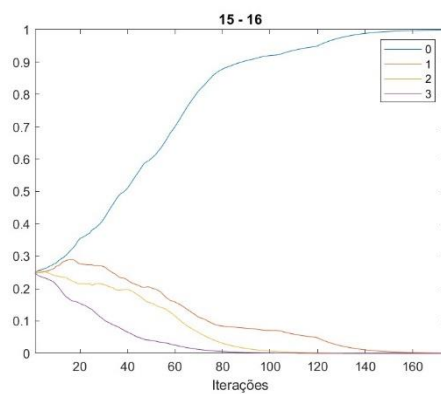
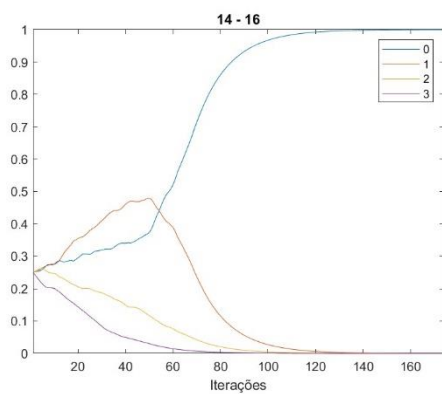
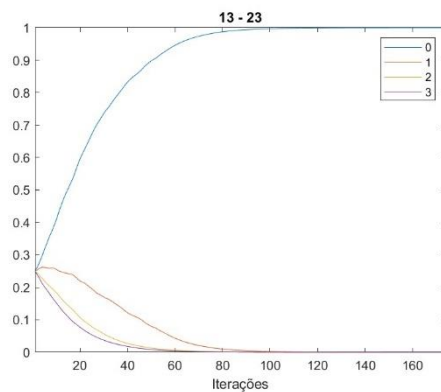
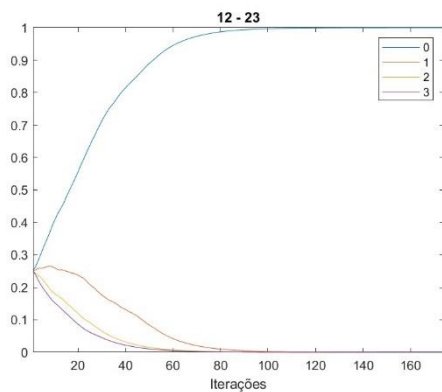
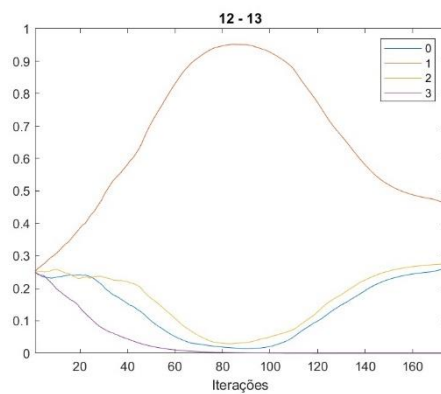
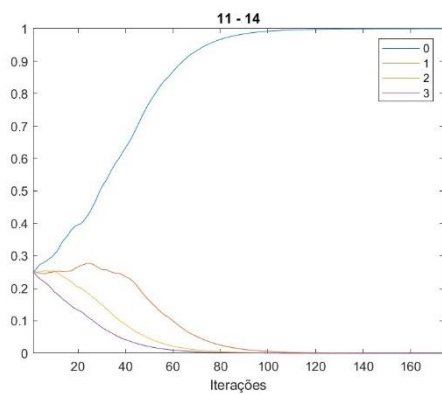
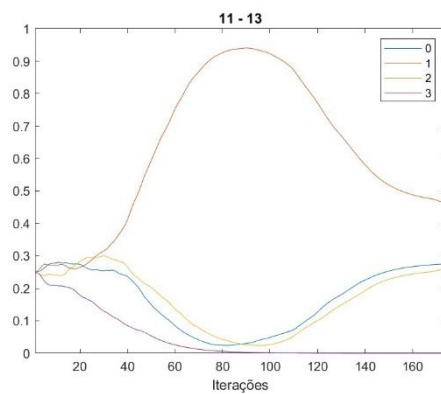
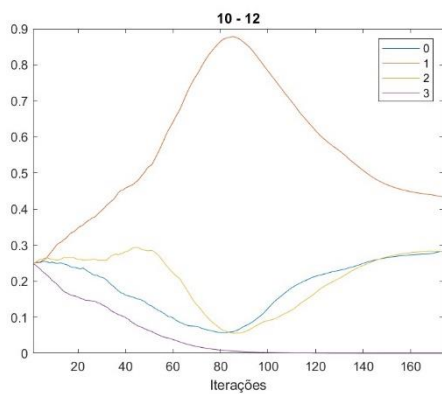
Tabela A.2 – Dados de ramos - Sistema IEEE-RTS.

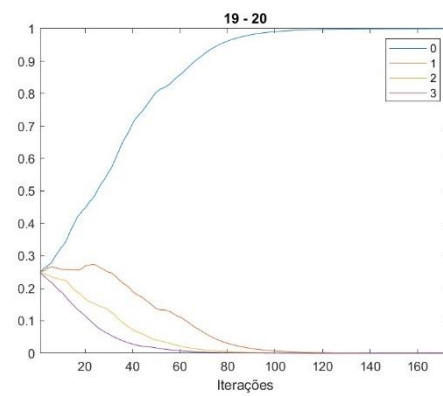
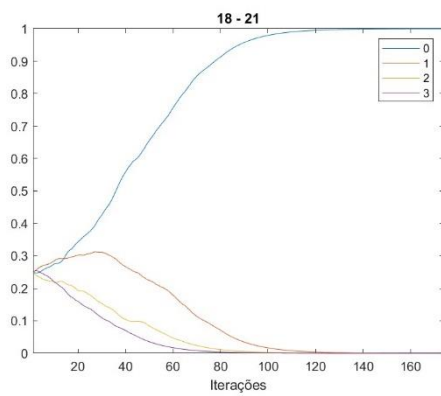
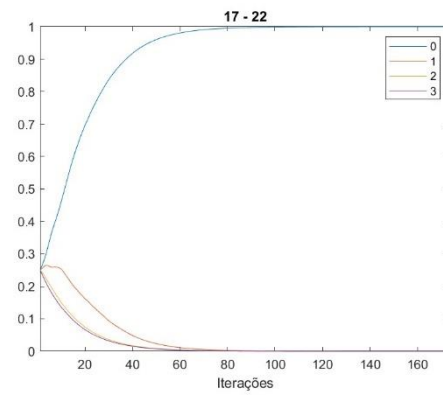
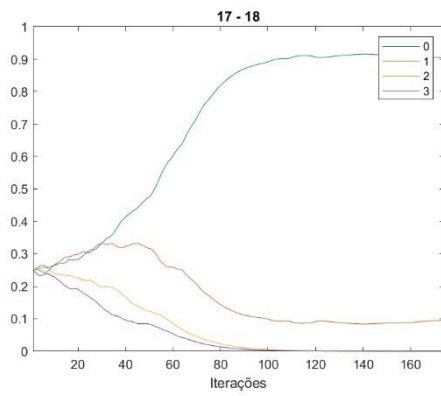
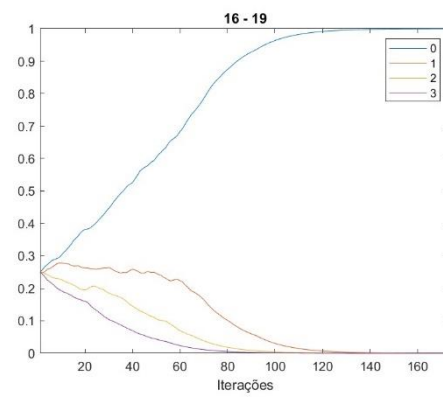
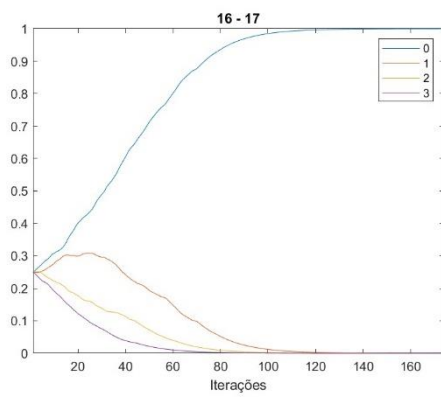
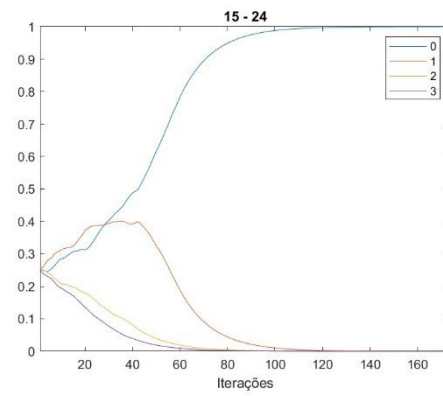
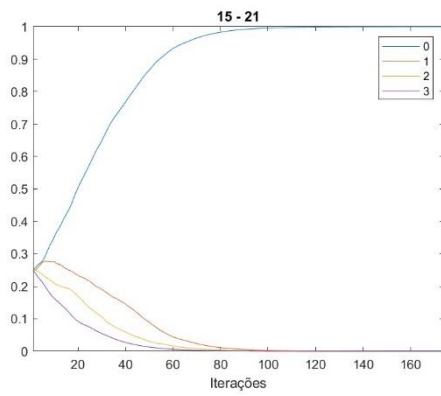
Nº	DE	PARA	Circuitos existentes	R_{ij} (p.u.)	X_{ij} (p.u.)	$f_{ij}^{\max}$ (MW)	c_{ij} (milhões de \$)
01	01	02	1	0,0026	0,0139	175	3,00
02	01	03	1	0,0546	0,2112	175	55,00
03	01	05	1	0,0218	0,0845	175	22,00
04	02	04	1	0,0328	0,1267	175	33,00
05	02	06	1	0,0497	0,1920	175	50,00
06	03	09	1	0,0308	0,1190	175	31,00
07	03	24	1	0,0023	0,0839	175	50,00
08	04	09	1	0,0268	0,1037	175	27,00
09	05	10	1	0,0228	0,0883	175	23,00
10	06	10	1	0,0139	0,0605	175	16,00
11	07	08	1	0,0159	0,0614	175	16,00
12	08	09	1	0,0427	0,1651	175	43,00
13	08	10	1	0,0427	0,1651	175	43,00
14	09	11	1	0,0023	0,0839	400	50,00
15	09	12	1	0,0023	0,0839	400	50,00
16	10	11	1	0,0023	0,0839	400	50,00
17	10	12	1	0,0023	0,0839	400	50,00
18	11	13	1	0,0061	0,0476	500	66,00
19	11	14	1	0,0054	0,0418	500	58,00
20	12	13	1	0,0061	0,0476	500	66,00
21	12	23	1	0,0124	0,0966	500	134,00
22	13	23	1	0,0111	0,0865	500	120,00
23	14	16	1	0,0050	0,0389	500	54,00
24	15	16	1	0,0022	0,0173	500	24,00
25	15	21	1	0,0063	0,0490	500	68,00
26	15	24	1	0,0067	0,0519	500	72,00
27	16	17	1	0,0033	0,0259	500	36,00
28	16	19	1	0,0030	0,0231	500	32,00
29	17	18	1	0,0018	0,0144	500	20,00
30	17	22	1	0,0135	0,1053	500	146,00
31	18	21	1	0,0033	0,0259	500	36,00
32	19	20	1	0,0051	0,0396	500	55,00
33	20	23	1	0,0028	0,0216	500	30,00
34	21	22	1	0,0087	0,0678	500	94,00
35	01	08	0	0,0174	0,1344	500	35,00
36	02	08	0	0,0164	0,1267	500	33,00
37	06	07	0	0,0249	0,1920	500	50,00
38	13	14	0	0,0058	0,0447	500	62,00
39	14	23	0	0,0080	0,0620	500	86,00
40	16	23	0	0,0106	0,0822	500	114,00
41	19	23	0	0,0078	0,0606	500	84,00

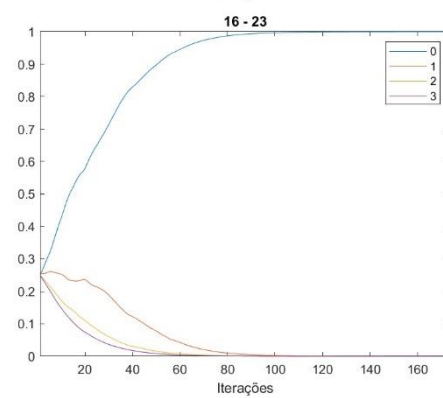
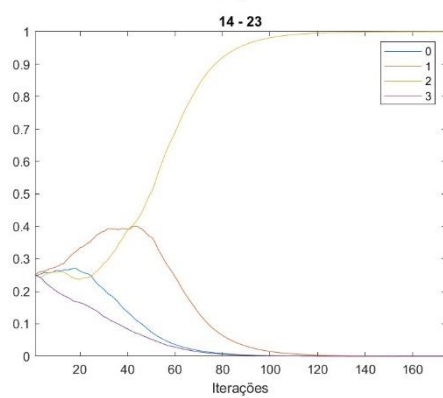
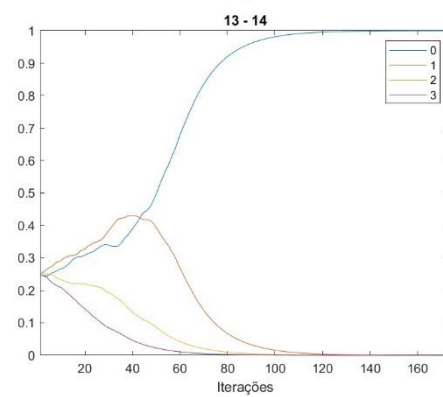
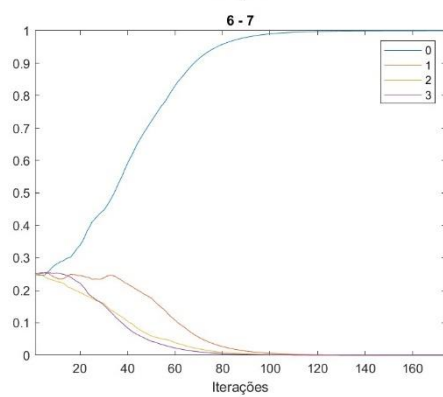
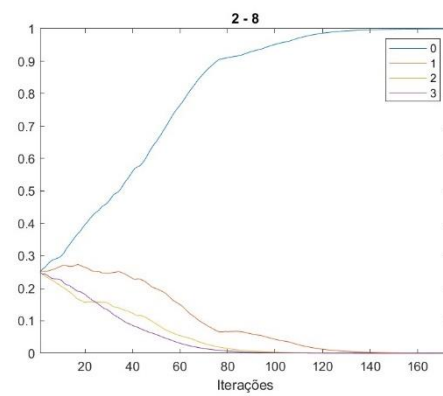
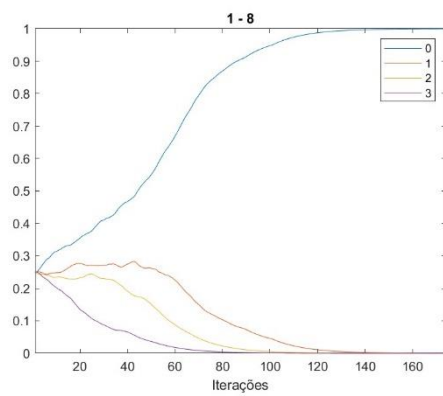
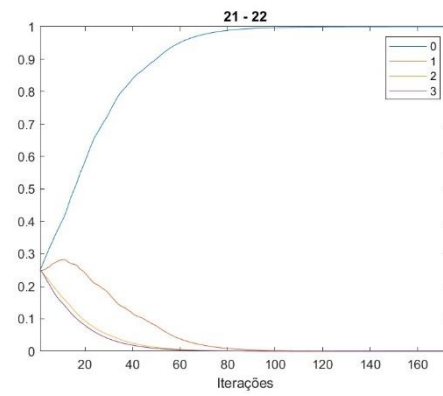
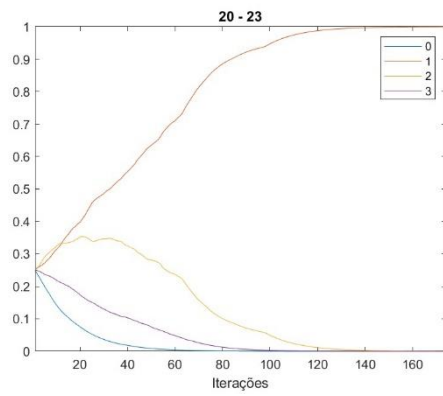
A Figura A.1 apresenta a evolução dos ramos candidatos ao longo das iterações.











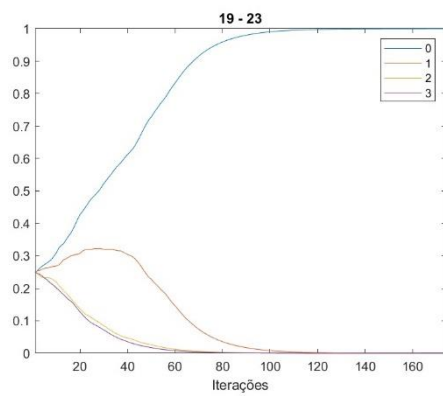


Figura A.1 – IEEE-RTS: Evolução dos ramos candidatos ao longo das iterações.

Apêndice B

Dados do Sistema SSB

Os dados relativos às barras da rede são apresentados na Tabela B.1. Por fim, os dados dos ramos candidatos ao reforço estão presentes na Tabela B.2. Dentre estes ramos, os 47 primeiros (ramos de 1 a 47) possuem circuitos na topologia base do sistema, já os 32 ramos restantes (ramos de 48 a 79) configuram novos caminhos para o reforço da rede no estudo PET [2].

Tabela B.1 – Dados de barra – SSB.

Barra	Carga (MW)	Geração Máxima (MW)	Prioridade no Despacho da Geração	Nível de Tensão (kV)
01	0	0	–	230
02	443,1	0	–	230
03	0	0	–	500
04	300,7	0	–	230
05	238	0	–	230
06	0	0	–	500
07	0	0	–	230
08	72,2	0	–	230
09	0	0	–	230
10	0	0	–	500
11	0	0	–	230
12	511,9	0	–	230
13	185,8	0	–	230
14	0	1257	10	230
15	0	0	–	230
16	0	2000	11	500
17	0	1050	2	500
18	0	0	–	230
19	0	1670	1	500
20	1091,2	0	–	230
21	0	0	–	500
22	81,9	0	–	230
23	458,1	0	–	230
24	478,2	0	–	230
25	0	0	–	500
26	231,9	0	–	230
27	0	220	6	230
28	0	800	12	500
29	0	0	–	230
30	0	0	–	500
31	0	700	8	500
32	0	500	7	500

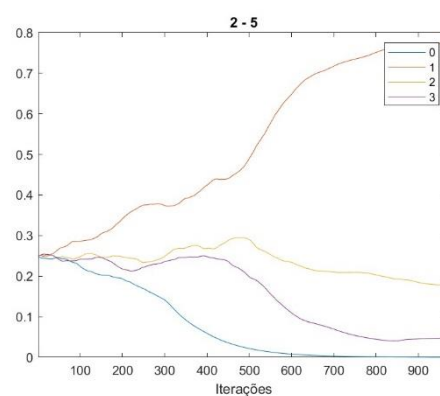
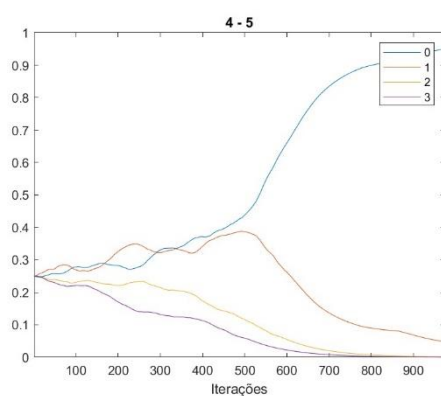
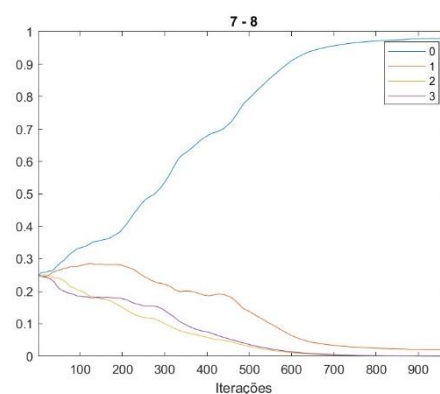
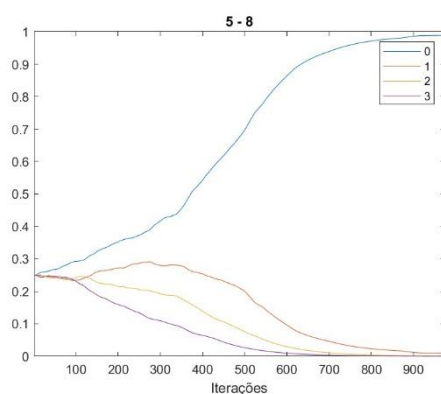
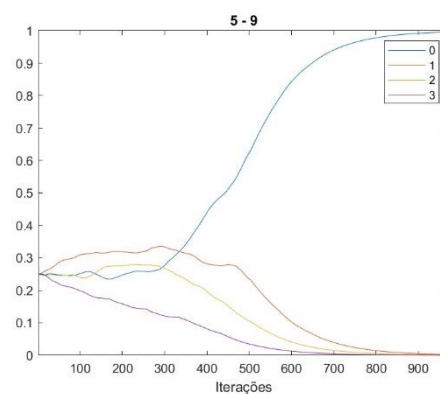
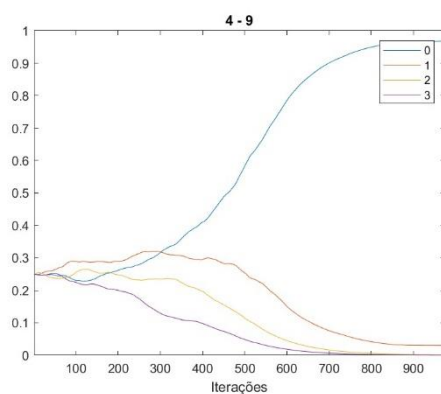
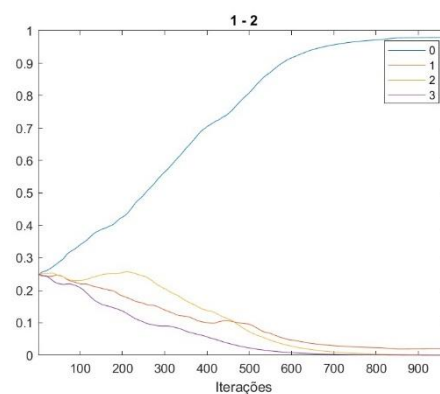
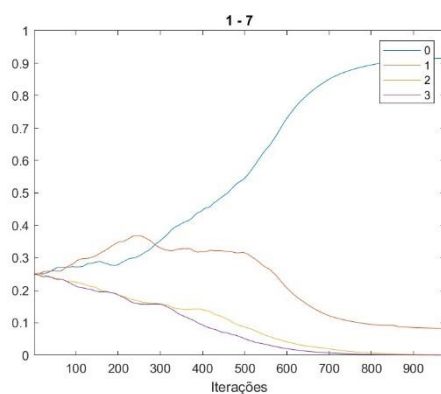
33	229,1	0	—	230
34	0	748	5	230
35	216	0	—	230
36	90,1	0	—	230
37	0	300	9	230
38	216	0	—	230
39	0	600	3	230
40	262,1	0	—	230
41	0	0	—	500
42	1607,9	0	—	230
43	0	0	—	500
44	79,1	0	—	230
45	86,7	0	—	230
46	0	700	4	500
TOTAL:	6880	10545		

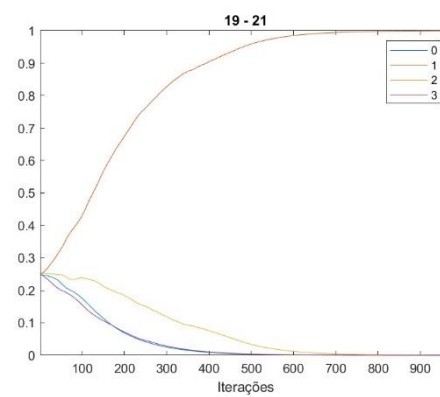
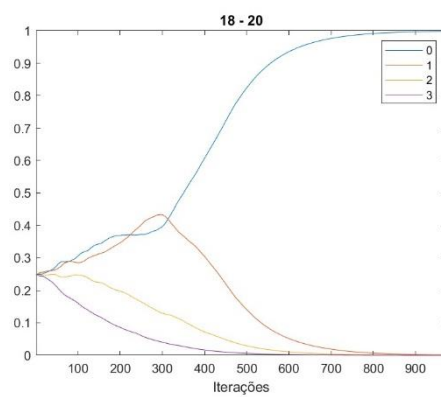
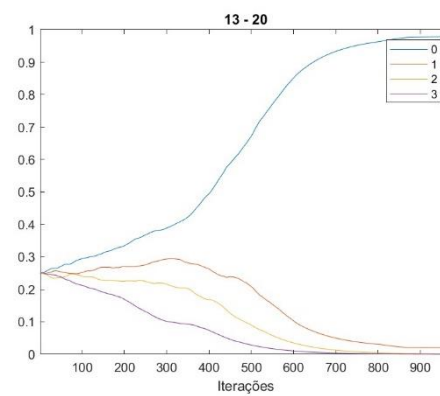
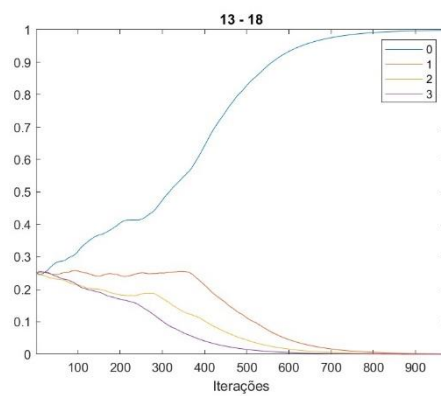
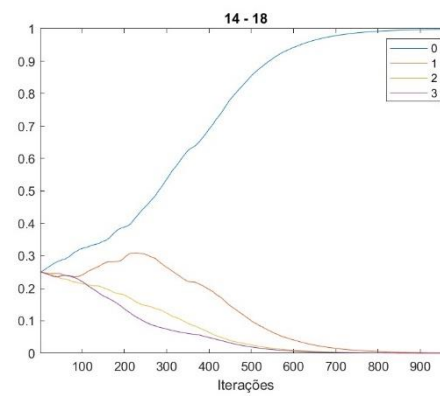
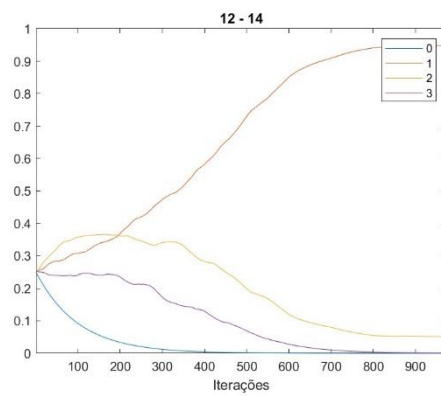
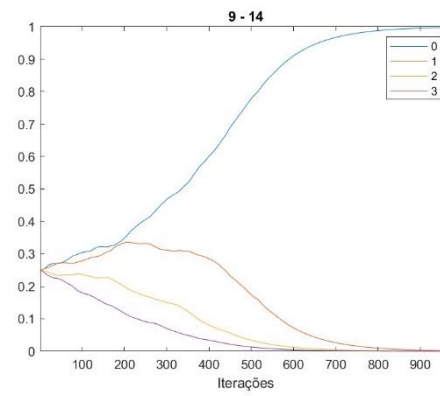
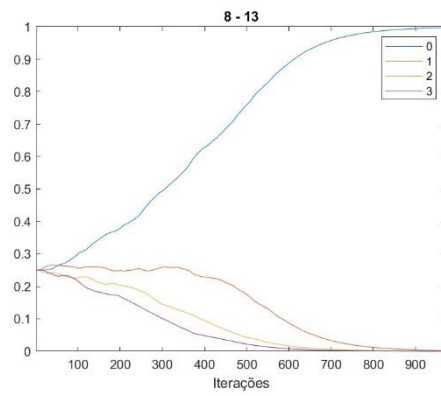
Tabela B.2 – Dados de ramos candidatos – SSB.

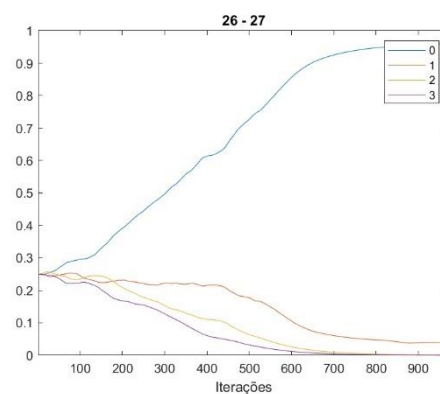
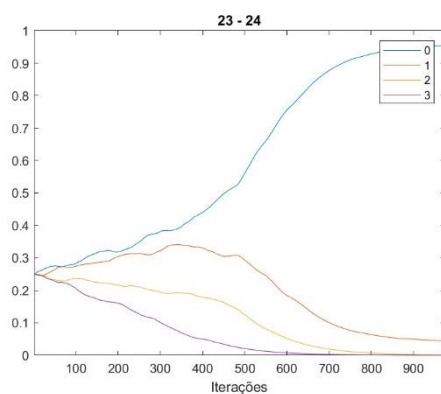
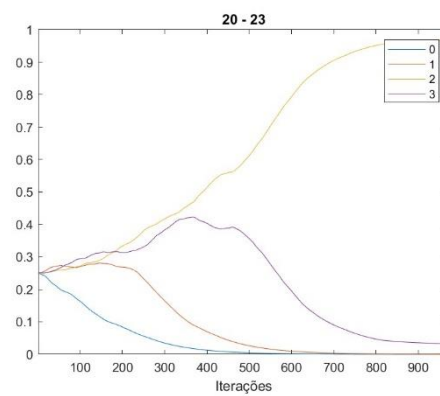
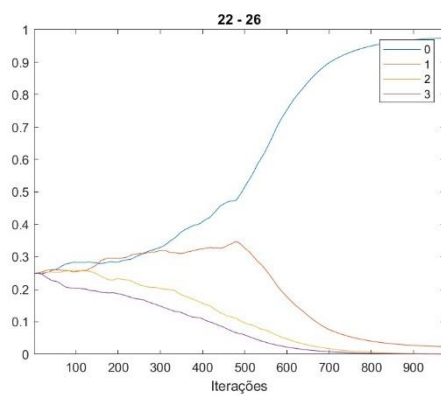
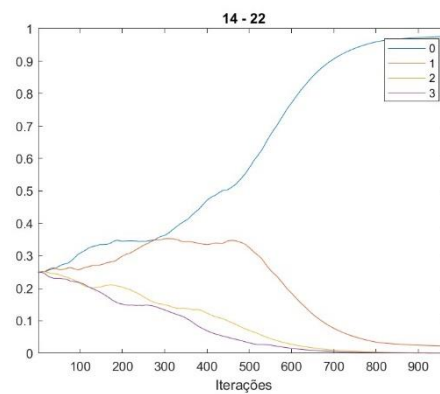
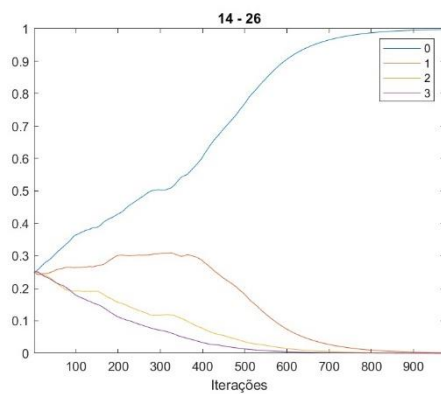
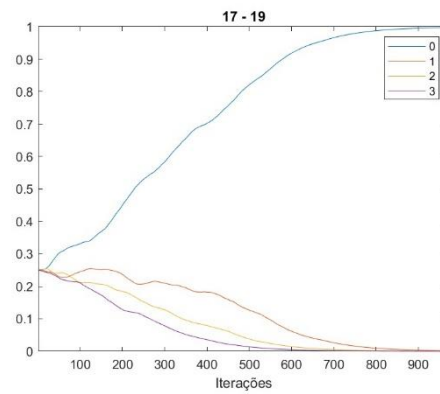
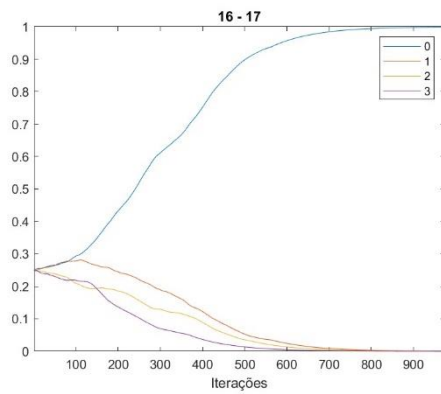
Nº	DE	PARA	Circuitos existentes	R_{ij} (p.u.)	X_{ij} (p.u.)	$f_{ij}^{\max}$ (MW)	C_{ij} (milhões de \$)
01	01	07	1	0,00616	0,0616	270	4,349
02	01	02	2	0,01065	0,1065	270	7,076
03	04	09	1	0,00924	0,0924	270	6,217
04	05	09	1	0,01173	0,1173	270	7,732
05	05	08	1	0,01132	0,1132	270	7,480
06	07	08	1	0,01023	0,1023	270	6,823
07	04	05	2	0,00566	0,0566	270	4,046
08	02	05	2	0,00324	0,0324	270	2,581
09	08	13	1	0,01348	0,1348	240	8,793
10	09	14	2	0,01756	0,1756	220	11,267
11	12	14	2	0,00740	0,0740	270	5,106
12	14	18	2	0,01514	0,1514	240	9,803
13	13	18	1	0,01805	0,1805	220	11,570
14	13	20	1	0,01073	0,1073	270	7,126
15	18	20	1	0,01997	0,1997	200	12,732
16	19	21	1	0,00278	0,0278	1500	32,632
17	16	17	1	0,00078	0,0078	2000	10,505
18	17	19	1	0,00061	0,0061	2000	8,715
19	14	26	1	0,01614	0,1614	220	10,409
20	14	22	1	0,00840	0,0840	270	5,712
21	22	26	1	0,00790	0,0790	270	5,409
22	20	23	2	0,00932	0,0932	270	6,268
23	23	24	2	0,00774	0,0774	270	5,308
24	26	27	2	0,00832	0,0832	270	5,662
25	24	34	1	0,01647	0,1647	220	10,611
26	24	33	1	0,01448	0,1448	240	9,399
27	33	34	1	0,01265	0,1265	270	8,288
28	27	36	1	0,00915	0,0915	270	6,167
29	27	38	2	0,02080	0,2080	200	13,237
30	36	37	1	0,01057	0,1057	270	7,025
31	34	35	2	0,00491	0,0491	270	3,591
32	35	38	1	0,01980	0,198	200	12,631
33	37	39	1	0,00283	0,0283	270	2,329
34	37	40	1	0,01281	0,1281	270	8,389
35	37	42	1	0,02105	0,2105	200	13,388

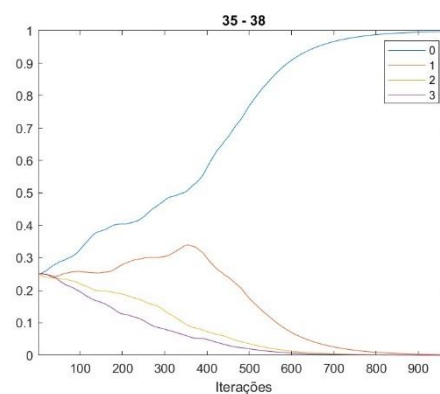
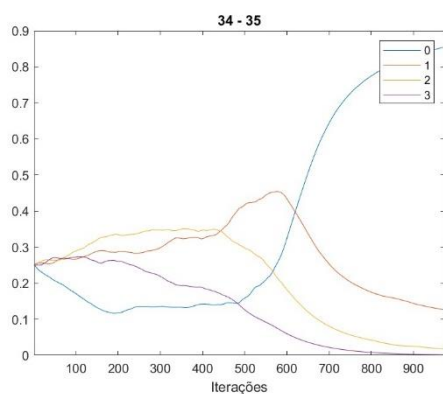
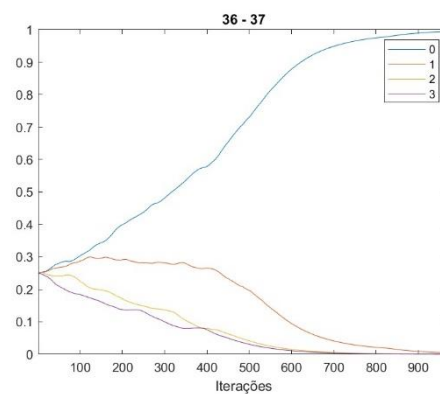
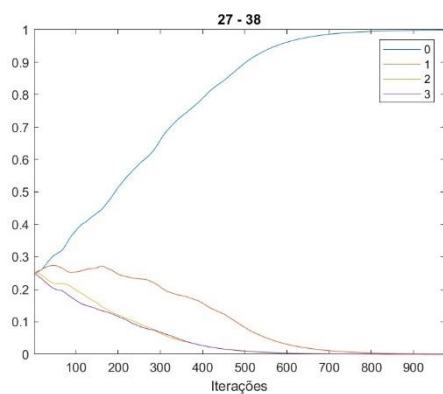
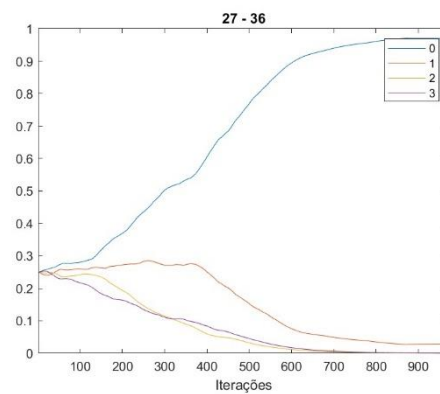
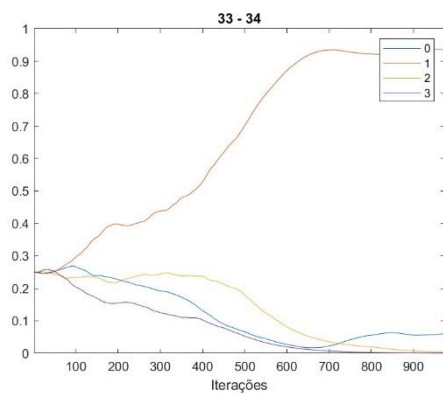
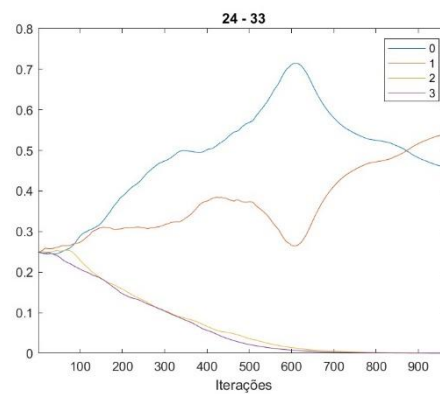
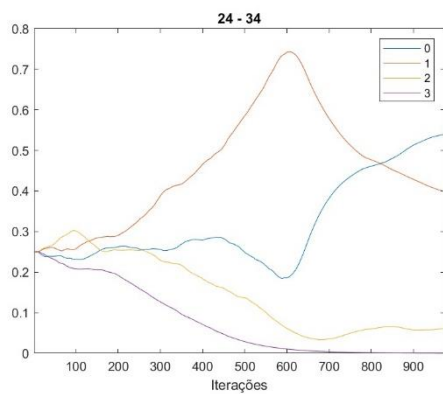
Nº	DE	PARA	Circuitos existentes	R_{ij} (p.u.)	X_{ij} (p.u.)	$f_{ij}^{\max}$ (MW)	c_{ij} (milhões de \$)
36	39	42	3	0,02030	0,2030	200	12,934
37	40	42	1	0,00932	0,0932	270	6,268
38	38	42	3	0,00907	0,0907	270	6,116
39	32	43	1	0,00309	0,0309	1400	35,957
40	42	44	1	0,01206	0,1206	270	7,934
41	44	45	1	0,01864	0,1864	200	11,924
42	19	32	1	0,00195	0,0195	1800	23,423
43	46	19	1	0,00222	0,0222	1800	26,365
44	46	16	1	0,00203	0,0203	1800	24,319
45	18	19	1	0,00125	0,0125	600	8,178
46	20	21	1	0,00125	0,0125	600	8,178
47	42	43	1	0,00125	0,0125	600	8,178
48	02	04	0	0,00882	0,0882	270	5,965
49	14	15	0	0,00374	0,0374	270	2,884
50	46	10	0	0,00081	0,0081	2000	10,889
51	04	11	0	0,02246	0,2246	240	14,247
52	05	11	0	0,00915	0,0915	270	6,167
53	46	06	0	0,00128	0,0128	2000	16,005
54	46	03	0	0,00203	0,0203	1800	24,319
55	16	28	0	0,00222	0,0222	1800	26,365
56	16	32	0	0,00311	0,0311	1400	36,213
57	17	32	0	0,00232	0,0232	1700	27,516
58	19	25	0	0,00325	0,0325	1400	37,748
59	21	25	0	0,00174	0,0174	2000	21,121
60	25	32	0	0,00319	0,0319	1400	37,109
61	31	32	0	0,00046	0,0046	2000	7,052
62	28	31	0	0,00053	0,0053	2000	7,819
63	28	30	0	0,00058	0,0058	2000	8,331
64	27	29	0	0,00998	0,0998	270	6,672
65	26	29	0	0,00541	0,0541	270	3,894
66	28	41	0	0,00339	0,0339	1300	39,283
67	28	43	0	0,00406	0,0406	1200	46,701
68	31	41	0	0,00278	0,0278	1500	32,632
69	32	41	0	0,00309	0,0309	1400	35,957
70	41	43	0	0,00139	0,0139	2000	17,284
71	40	45	0	0,02205	0,2205	180	13,994
72	15	16	0	0,00125	0,0125	600	8,178
73	46	11	0	0,00125	0,0125	600	8,178
74	24	25	0	0,00125	0,0125	600	8,178
75	29	30	0	0,00125	0,0125	600	8,178
76	40	41	0	0,00125	0,0125	600	8,178
77	02	03	0	0,00125	0,0125	600	8,178
78	05	06	0	0,00125	0,0125	600	8,178
79	09	10	0	0,00125	0,0125	600	8,178

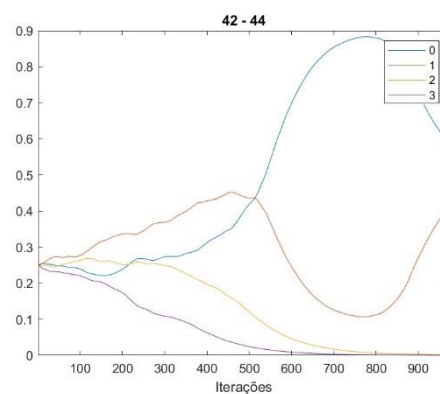
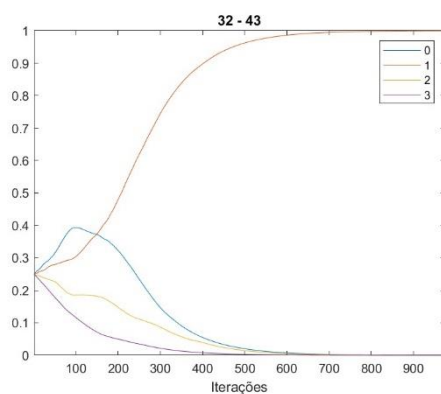
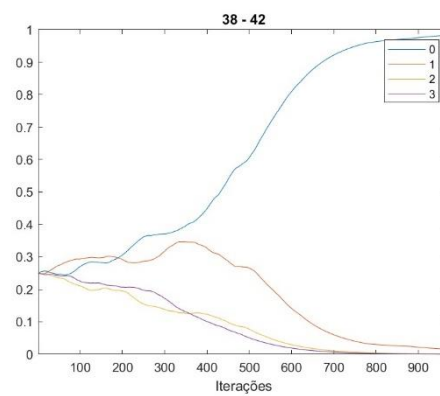
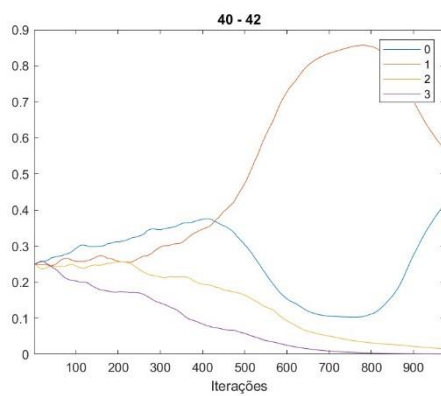
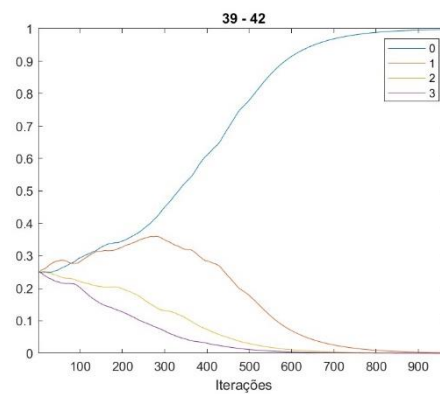
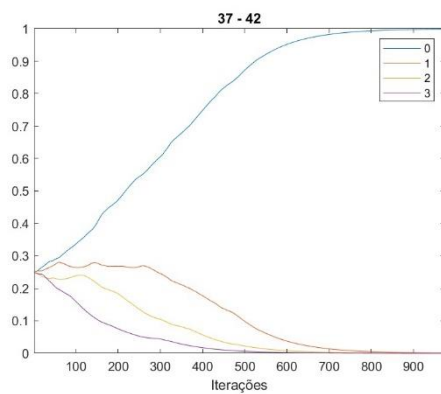
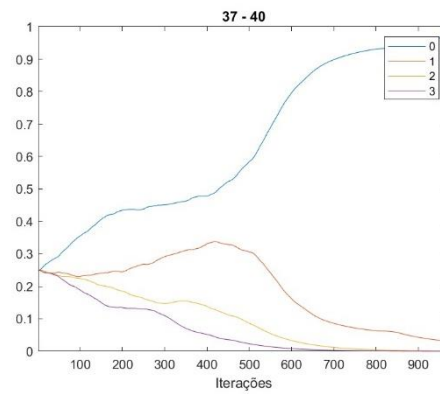
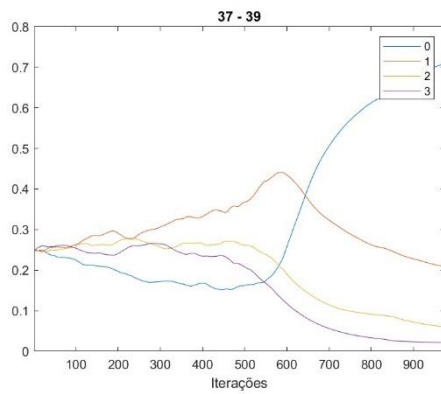
A Figura B.1 apresenta a evolução dos ramos candidatos ao longo das iterações.

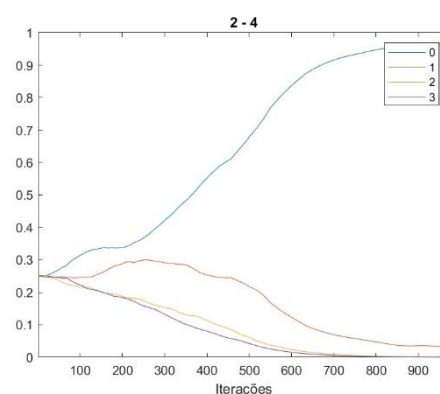
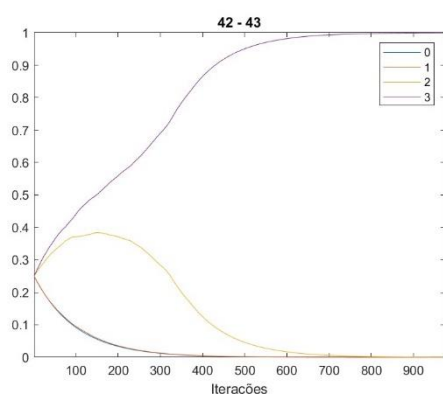
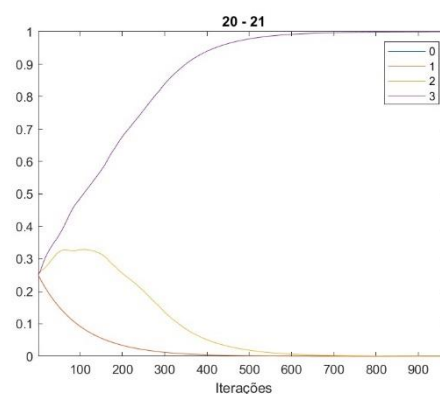
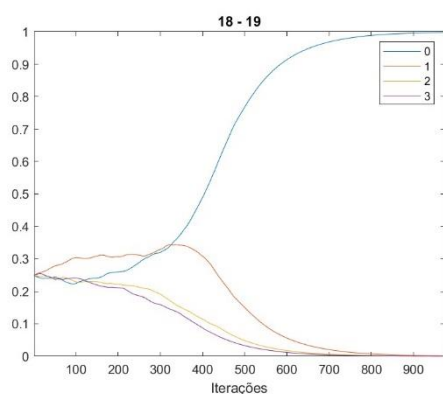
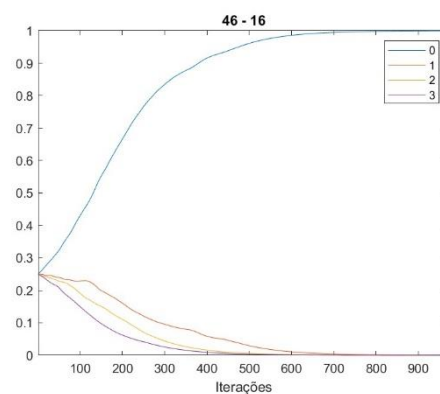
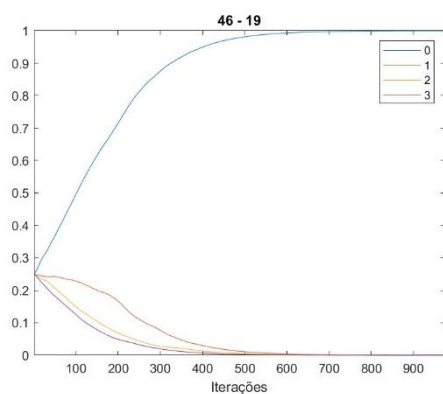
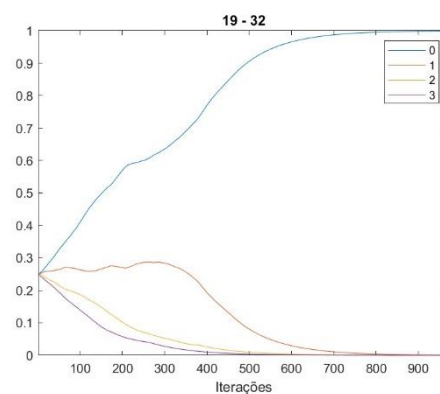
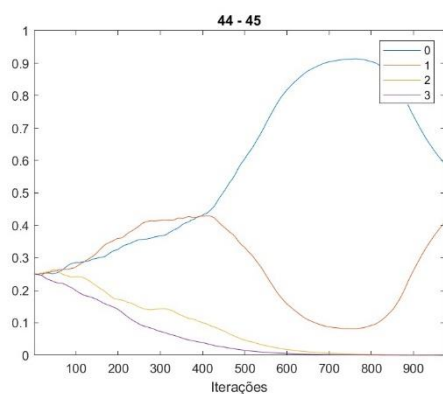


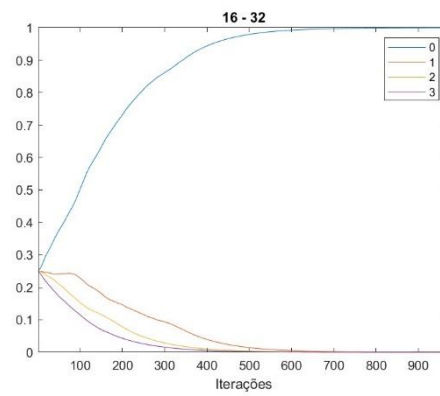
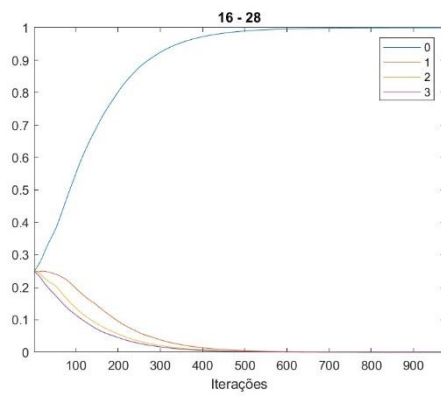
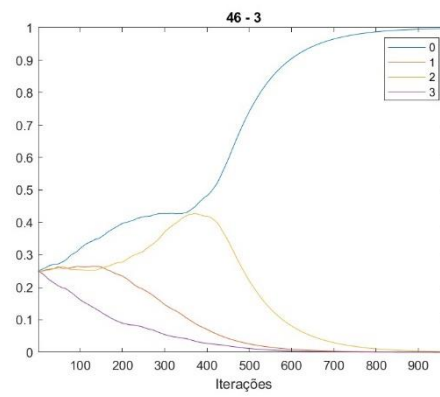
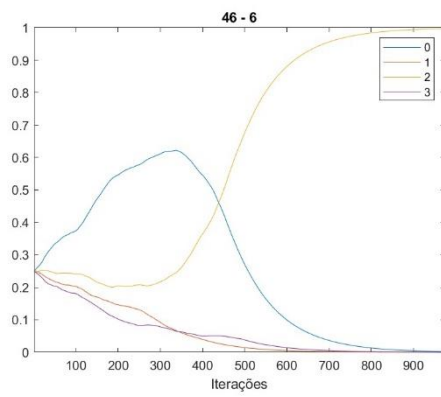
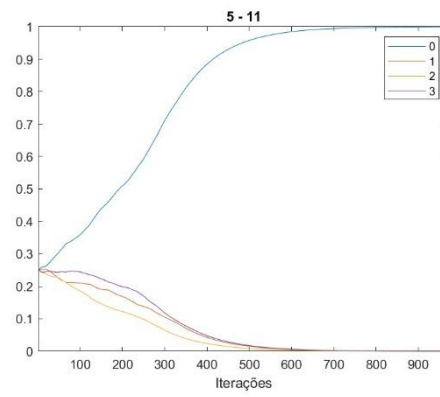
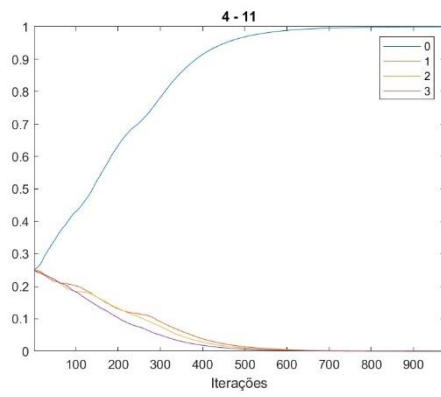
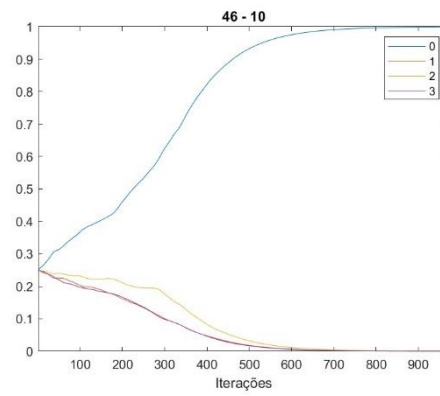
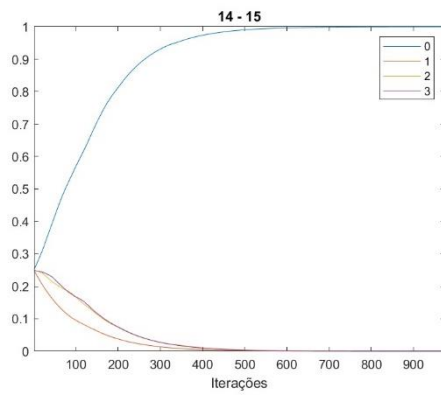


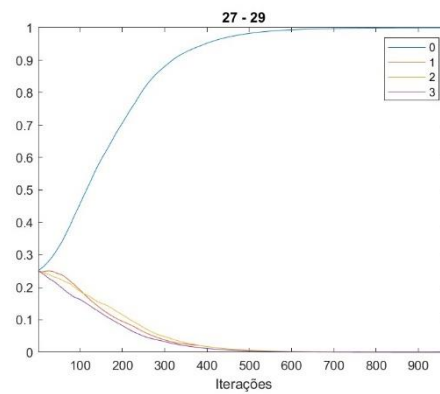
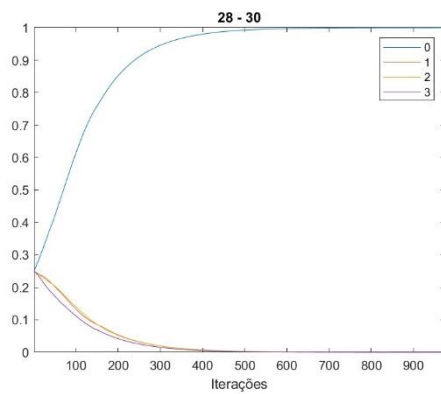
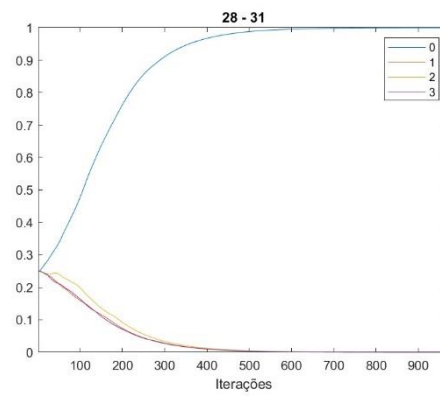
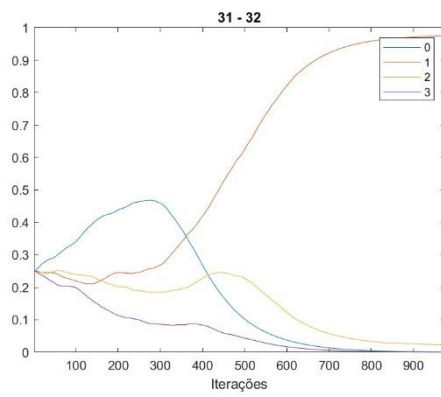
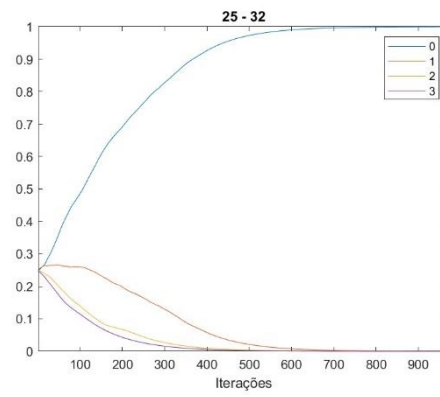
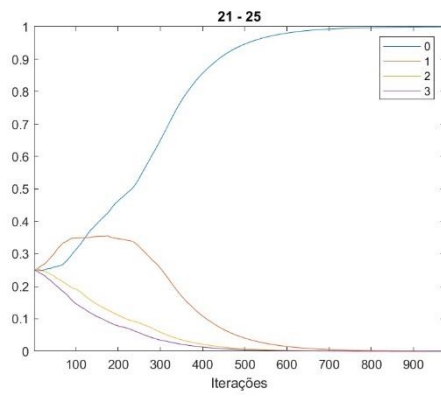
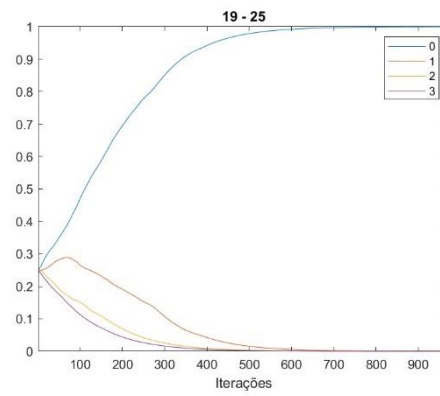
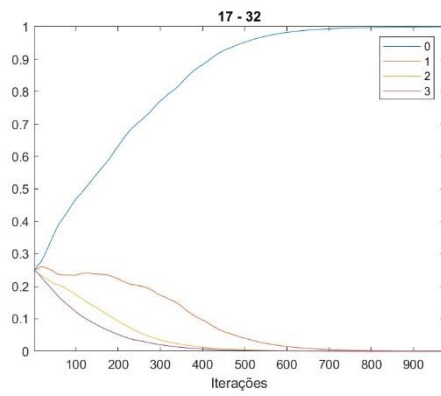


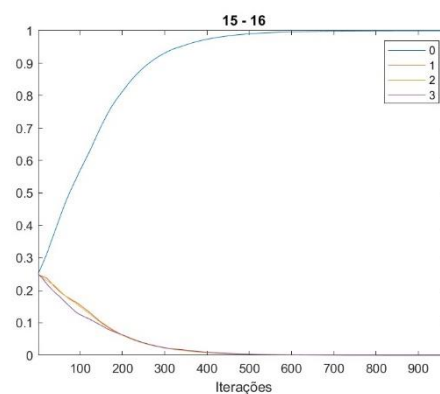
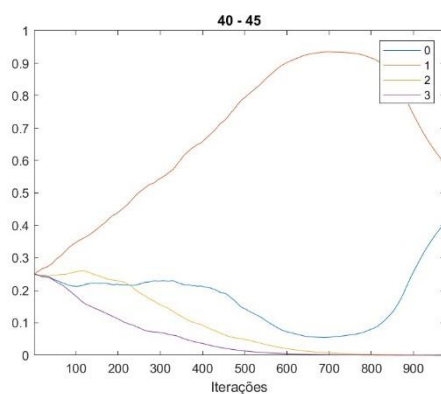
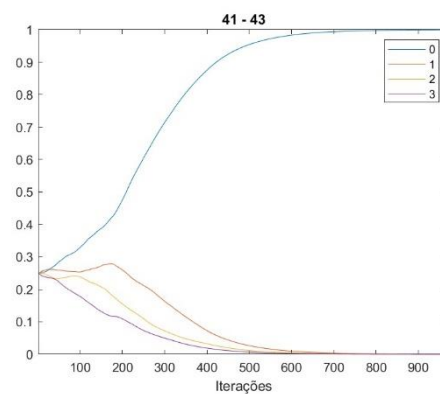
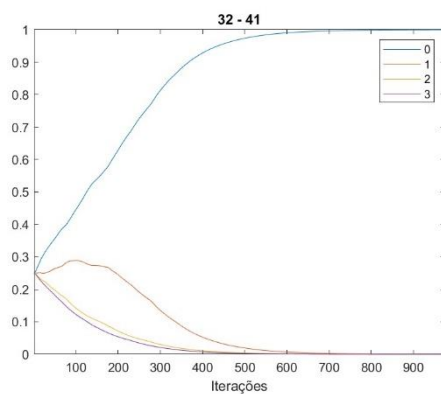
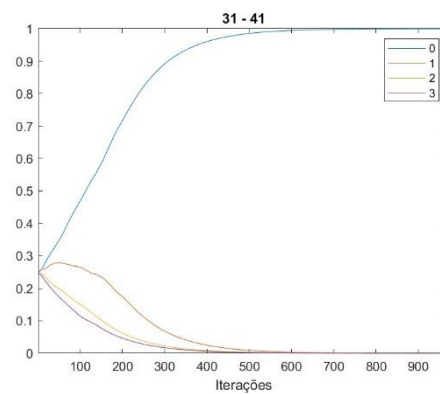
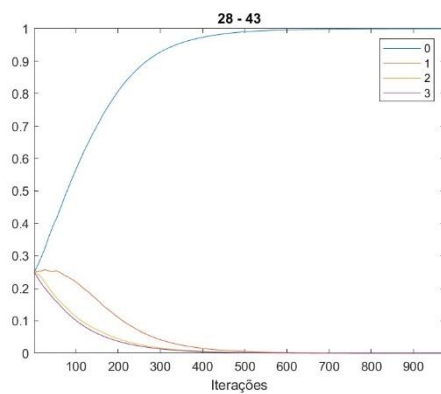
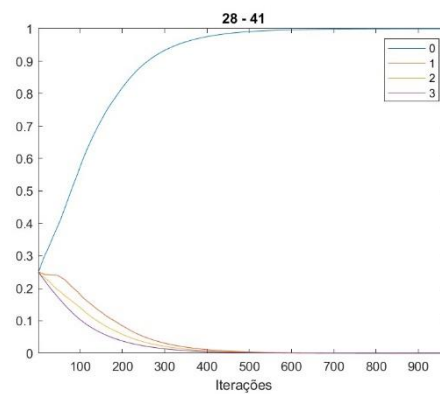
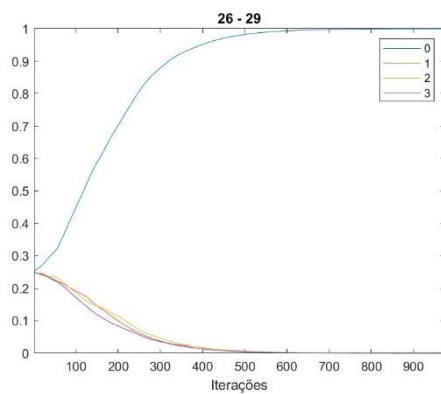












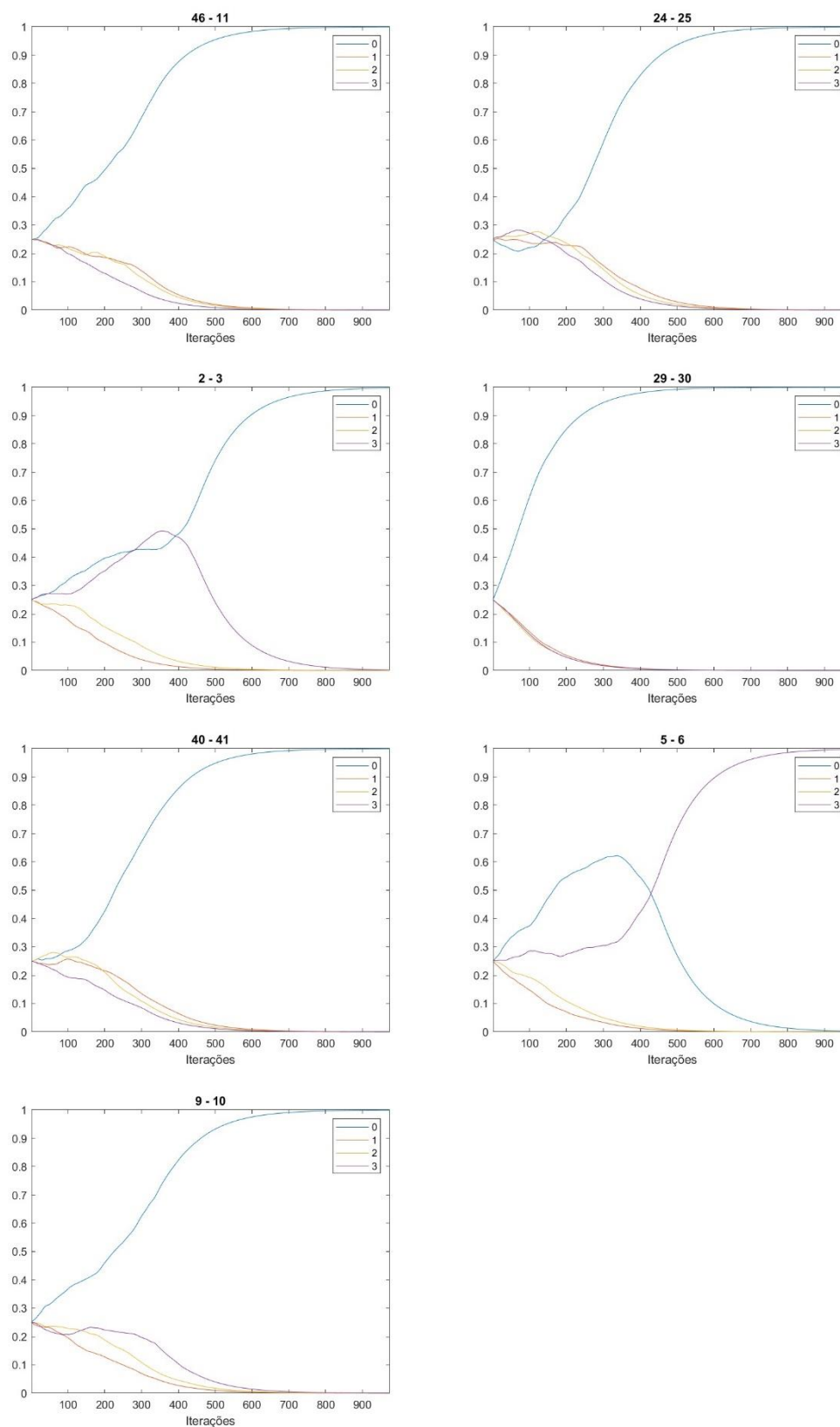


Figura B.1 – SSB: Evolução dos ramos candidatos ao longo das iterações.

Apêndice C

Exemplo Matemático para o Método da Entropia Cruzada

Seja uma função de desempenho conhecida, como por exemplo, x^2 . O objetivo será minimizar essa função, logo, $\min_{x \in \mathcal{X}} S(x) = x^2$. Sabe-se que o valor mínimo de $S(x)$ é zero, para o qual x também é zero. A Figura C.1 ilustra o gráfico de $S(x)$ para o intervalo $[-15, 15]$.

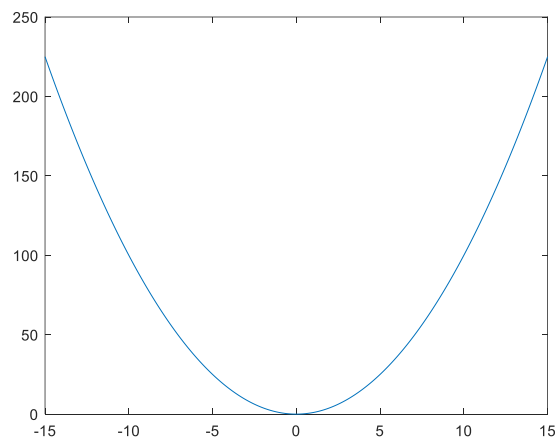


Figura C.1 – Gráfico de x^2 .

Para inicialização do Algoritmo 3.1, algumas premissas devem ser definidas. Entre elas: $\rho = 0,01$, $\alpha = 0,7$ e $t_{max} = 8$. Além disso, o parâmetro nominal ($\mathbf{u}$) também deve ser escolhido. Para esse exemplo, será utilizada uma função distribuição normal para x , com valores de μ (média) igual a 10, σ (desvio padrão) igual a 1. Adota-se também $N_{CE} = 2000$ amostras. Um histograma para a primeira população amostrada pode ser visto na Figura C.2.

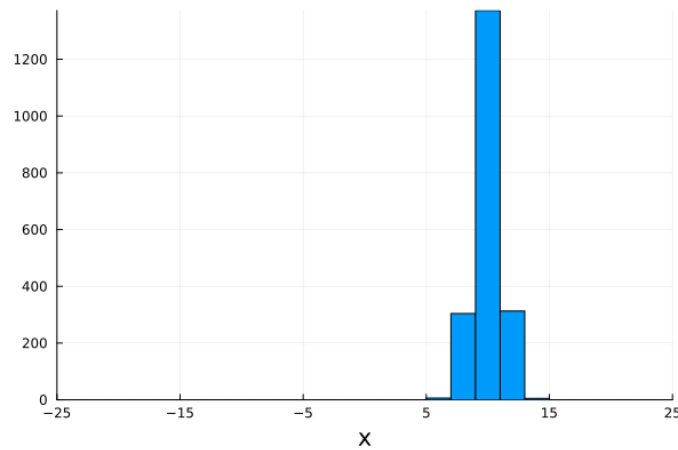


Figura C.2 – Função distribuição normal aleatória para $\mathbf{X}$ em $t = 1$.

Na sequência, a função de desempenho $S(\mathbf{X})$ é calculada, Figura C.3, e os valores de $S(\mathbf{X})$ devem ser classificados de forma decrescente, através de um vetor ordenação.

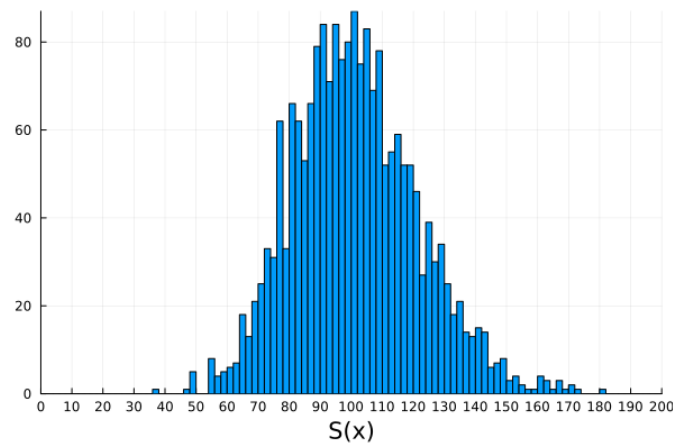


Figura C.3 – Função de desempenho $S(\mathbf{X})$ em $t = 1$.

Para definir o parâmetro de nível, é utilizada a seguinte equação: $(1 - \rho)$ -quantil $\hat{\gamma}_t$. Como $\rho = 0,01$, $\log(1 - 0,01) \times 2000 = 1980$. O valor 1980 deve ser correlacionado com a posição 1980 do vetor ordenação. Então, o valor da função de desempenho presente nessa posição deve ser considerado como parâmetro de nível $\hat{\gamma}_t$.

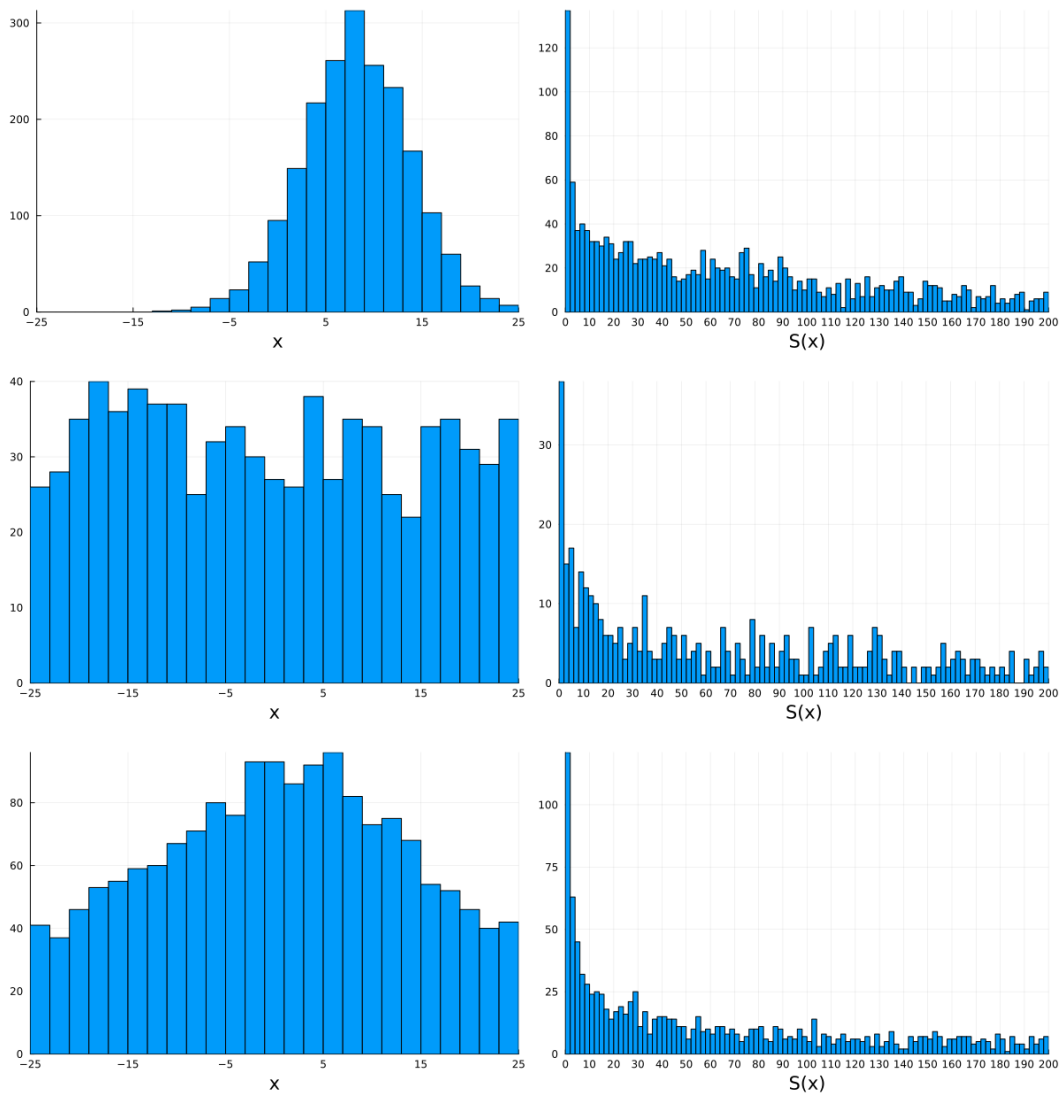
Para os valores em que $S(\mathbf{X}) \leq \hat{\gamma}_t$, as amostras de $\mathbf{X}$ devem ser consideradas para calcular a eq. (3.29). Visto que a distribuição inicial é dada por uma função de

probabilidade normal, a eq. (3.29) pode ser resolvida através das eqs. (3.31) e (3.32). Essa solução deve ser denotada como $\tilde{\mathbf{v}}_t$.

Em seguida, é necessário aplicar o processo de suavização com a eq. (3.30).

Com base no novo vetor de parâmetros, $\mathbf{v}_t$, que nesse caso contém a média e o desvio padrão da distribuição que rege a variável de decisão x , uma nova população $\mathbf{X}$ é amostrada, $S(\mathbf{X})$ é calculado novamente, um novo parâmetro de nível é determinado e assim sucessivamente até a parada do algoritmo.

A Figura C.4 mostra a evolução das amostras através do algoritmo entre as iterações $t = 2$ à $t = 8$. E como de se esperar, conclui-se que $S(\mathbf{X})^* = 0$ e $x^* = 0$.



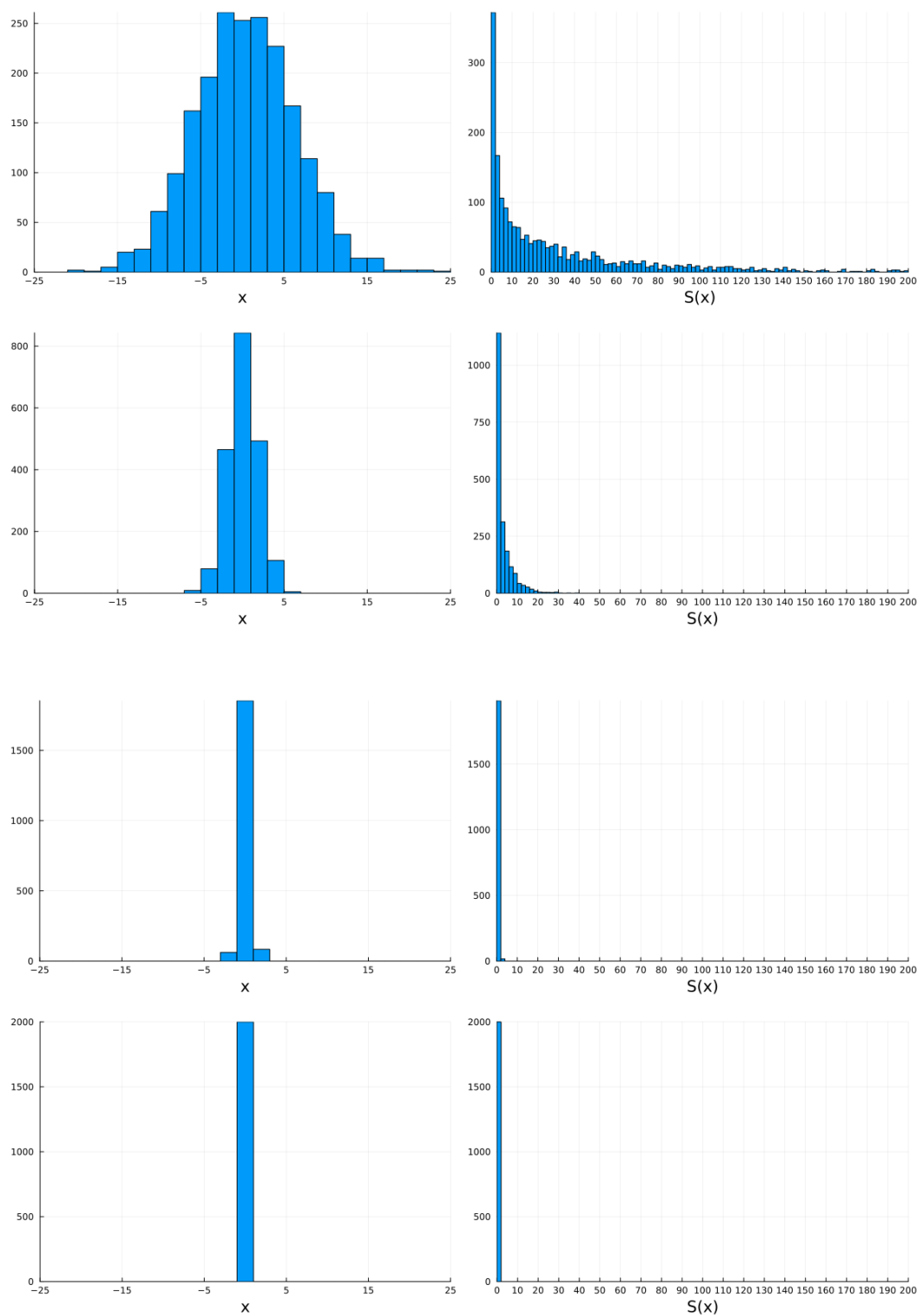


Figura C.4 – Função distribuição normal aleatória para X e função de desempenho $S(X)$ em $t = 2 \dots 8$.