

## 2 Formulação Matemática

Neste capítulo serão apresentadas as equações que governam o problema físico: Equações clássicas de conservação de massa e de quantidade de movimento, de fração volumétrica e equações constitutivas para os fluidos não newtonianos. Para as equações supra-citadas foram adotadas as seguintes hipóteses:

- Fluidos incompressíveis;
- Escoamento laminar;
- Escoamento isotérmico;
- Dissipação viscosa desprezível;
- Simetria.

As equações de conservação utilizadas na mecânica dos fluidos são aplicadas sempre a partículas fluidas. Estas podem ser definidas como uma pequena massa de fluido, de identidade fixa, de volume infinitesimal  $\delta V$ . As equações que governam o problema são descritas a seguir:

### 2.1 Equação de Conservação de Massa

Por definição de conservação de massa, entende-se que para um dado volume de controle, a soma da taxa líquida de fluxo de massa que cruza a superfície de controle com a taxa de variação de massa dentro desse volume de controle é nula. Essa definição pode ser expressa pela equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2-1)$$

onde  $\rho$  é a densidade,  $\vec{v}$  é o vetor velocidade.

Considerando as hipóteses de fluido incompressível em todo o domínio, a equação acima se torna simplesmente

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2-2)$$

No sistema de coordenadas cilíndricas, dado que a geometria a ser estudada é um anular, a equação 2-2 se torna:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2-3)$$

## 2.2

### Equação de Conservação de Quantidade de Movimento Linear

A equação de conservação de quantidade de movimento linear (2ª lei de Newton) expressa que o somatório das forças externas é igual ao produto da massa pela aceleração. Por unidade de volume, tem-se que:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{g} \quad (2-4)$$

onde  $\frac{D\vec{v}}{dt}$  é a aceleração.  $\mathbf{T}$  é o tensor das tensões, que pode ser escrito como:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2-5)$$

sendo que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade,  $p$  é a pressão e  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor extra-tensão, que representa a parte viscosa do tensor das tensões que cai a zero após o cessar do movimento.

O comportamento mecânico dos materiais é descrito pela equação constitutiva, que relaciona a tensão com a cinemática. Neste trabalho, os fluidos foram modelados como fluido newtoniano e não newtoniano pelas equações de **Fluido Newtoniano Generalizado - FNG** (Bird *et al.* 1987)[2], dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (2-6)$$

$$\dot{\gamma} = \nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T \quad (2-7)$$

$$\dot{\gamma} \equiv |\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\dot{\gamma}^2)} \quad (2-8)$$

onde  $\eta$  é a função viscosidade,  $\dot{\gamma}$  é o tensor taxa de deformação e  $\dot{\gamma}$  a intensidade da taxa de deformação. Para fluidos newtonianos a função viscosidade é constante  $\eta(\dot{\gamma}) = \mu$ , onde  $\mu$  é a viscosidade absoluta.

Expandindo a equação de conservação de quantidade de movimento em coordenadas cartesianas temos:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r}\right] + \rho g_r \quad (2-9)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\tau_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r}\right] + \rho g_\theta \quad (2-10)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right] + \rho g_z \quad (2-11)$$

Nas equações 2-9 2-10 2-11,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $\partial p/\partial x$ ,  $\partial p/\partial y$  e  $\partial p/\partial z$  são os componentes cartesianos do gradiente de pressão.

Os componentes do tensor extra-tensão são:

$$\tau_{rr} = 2\eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) \quad (2-12)$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\eta(\dot{\gamma})\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \quad (2-13)$$

$$\tau_{zz} = 2\eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \quad (2-14)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \eta(\dot{\gamma})\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \quad (2-15)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{rz} = \eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad (2-16)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \eta(\dot{\gamma})\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \quad (2-17)$$

Para obter as três equações completas de conservação de quantidade de movimento basta substituir as equações 2-12 a 2-17 em 2-9 a 2-11.

### 2.3

#### Adimensionalização

A fim de ressaltar alguns parâmetros que, de certa forma, tem maior importância no problema, fez-se uma adimensionalização das principais

variáveis presentes na equação de conservação de massa e de quantidade de movimento, ainda no formato vetorial. A partir deste processo surgem naturalmente os parâmetros adimensionais que governam o problema.

Escolheu-se o diâmetro hidráulico  $Dh$ , a velocidade na entrada  $v_e$  e a viscosidade do fluido não newtoniano  $\eta_c$  como o comprimento, velocidade, e viscosidade características, respectivamente.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \vec{p}}{\partial x} + \rho \vec{g} + \vec{S} \quad (2-18)$$

Na equação acima,  $\vec{S}$  é o termo fonte associado à tensão superficial, dado pela expressão abaixo:

$$S = \sigma \frac{\rho \kappa_i \nabla \alpha_i}{0.5(\rho_i + \rho_j)} \quad (2-19)$$

Grandezas a serem adimensionalizadas:

$$x^* = \frac{x}{Dh} \quad (2-20)$$

$$t^* = \frac{v_e t}{L} \quad (2-21)$$

$$v^* = \frac{v}{v_e} \quad (2-22)$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_c} \quad (2-23)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho v_e^2} \quad (2-24)$$

Substituindo as grandezas acima na equação 2-18 temos:

$$\rho \frac{v_e^2}{L} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \rho \frac{v_e^2}{Dh} \vec{v}^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial x^*} = \frac{\eta_c \cdot v_e}{Dh^2} \frac{1}{\partial x^*} \left( \eta^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial x^*} \right) - \frac{\rho v_e^2}{Dh} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \rho \vec{g} + \sigma \frac{\rho \kappa_i \nabla \alpha_i}{0.5(\rho_i + \rho_j)} \quad (2-25)$$

Na equação acima,  $\kappa$  é a curvatura da superfície gerada pela interface entre os fluidos, que é dada pelo divergente do vetor unitário normal à superfície, ou seja  $\kappa = \nabla \cdot \hat{n}$ .

Dividindo a equação 2-25 por  $\frac{\rho v_e^2}{Dh}$  e definindo que  $\kappa_i^* = \kappa_i Dh$  e

$(\nabla\alpha_i)^* = \nabla\alpha_i Dh$ , onde o índice  $i$  diz respeito a cada fase, temos:

$$\frac{Dh}{L} \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial x^*} = \frac{\eta_c}{\rho v_e Dh} \frac{1}{\partial x^*} (\eta^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial x^*}) - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{Dh}{v_e^2} \vec{g} + \frac{\sigma}{\bar{\rho} v_e^2 Dh} \kappa_i^* (\nabla\alpha_i)^* \quad (2-26)$$

Analisando a equação 2-26, pode-se extrair os parâmetros adimensionais que governam o problema. São eles:

$$\text{Razão de aspecto} = \frac{Dh}{L} \quad (2-27)$$

$$\text{Número de Reynolds} = Re = \frac{\rho v_e Dh}{\eta_c} \quad (2-28)$$

$$\text{Número de Froude} = Fr^2 = \frac{v_e^2}{g Dh} \quad (2-29)$$

$$\text{Número de Weber} = We = \frac{\rho v_e^2 Dh}{\sigma} \quad (2-30)$$

$$\text{Número de Capilaridade} = Ca = \frac{We}{Re} = \frac{\eta_c v_e}{\sigma} \quad (2-31)$$

Na equação de conservação de massa a adimensionalização é trivial e pode ser observada na equação 2-32, não originando nenhum parâmetro adimensional.

$$\nabla \cdot v^* = 0 \quad (2-32)$$

## 2.4

### Funções Viscosidade

Diversos modelos diferentes para as funções viscosidade descrevem bem o comportamento viscoplástico dos fluidos reais. Nesse trabalho serão utilizados somente dois deles:

- 1. Modelo de *Carreau*

Esse modelo representa de forma bastante satisfatória fluidos que apresentam dois patamares newtonianos de viscosidade, um a baixas taxas de deformação e outro a altas taxas. Entre estes patamares, a viscosidade decresce com a taxa de cisalhamento, segundo uma lei de potência.

$$\eta = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}} \quad (2-33)$$

onde,  $\eta_\infty$  é a viscosidade a altas taxas de deformação;  $\eta_0$  é a viscosidade a baixas taxas de deformação;  $\lambda$  é uma constante com dimensão de tempo que fisicamente indica a faixa de transição a partir da qual a viscosidade deixa o patamar constante e começa a diminuir e  $n$  é o índice *power-law*.

O comportamento da viscosidade com a taxa de cisalhamento para o modelo de *Carreau* pode ser visto na figura 2.1.

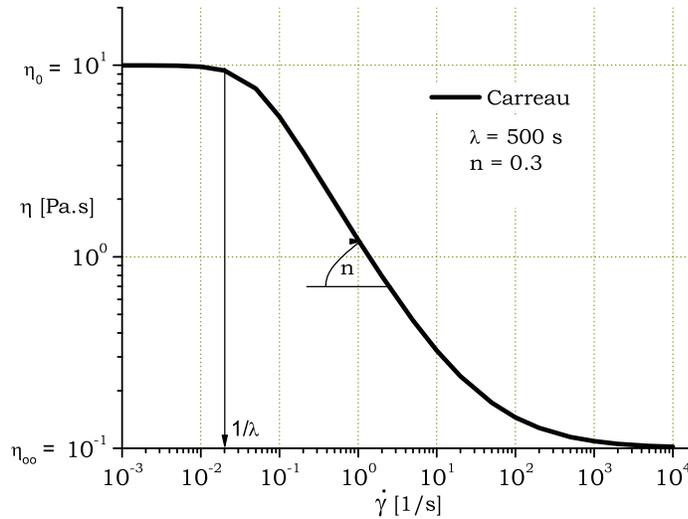


Figura 2.1: Função Viscosidade - *Carreau*

- 2. Modelo de *Herschel-Bulkley*

Esse modelo permite a representação matemática da tensão limite de escoamento. Em baixas taxa de deformação, sua viscosidade tende a infinito. A altas taxas ele se comporta como um material cuja viscosidade segue uma lei de potência. A função viscosidade é dada por:

$$\eta = \begin{cases} \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\dot{\gamma}^{n-1}, & \text{se } \tau > \tau_0; \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2-34)$$

A fim de evitar problemas numéricos devido à singularidade da função, será adotado um truncamento no valor da viscosidade, definindo-se para esta um valor máximo, que ocorre quando no fluido é aplicada uma tensão menor que a tensão limite de escoamento.

Nesta equação,  $\tau_0$  é a tensão limite de escoamento;  $k$  é o índice de consistência e  $n$  é o índice *power-law*.

O comportamento da viscosidade pelo modelo *Herschel-Bulkley* se encontra na figura 2.2.

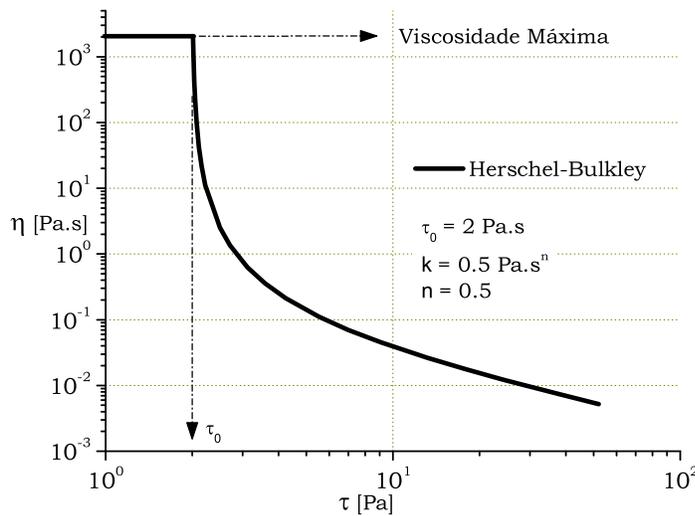


Figura 2.2: Função Viscosidade - *Herschel-Bulkley*

## 2.5 Standoff

Um parâmetro comumente usado para descrever a excentricidade de um espaço anular é o *standoff* (STO). Ele pode ser definido pela equação 2-35 e observado na figura 2.3:

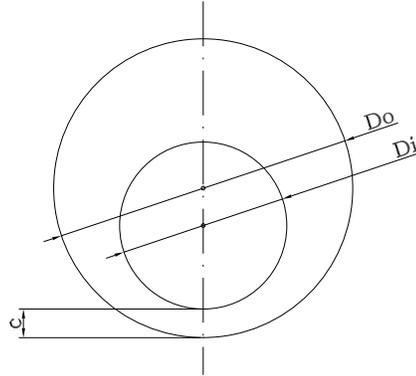


Figura 2.3: Excentricidade

$$STO = \chi = \frac{c}{\frac{D_o}{2} - \frac{D_i}{2}} = \frac{2c}{D_o - D_i} \quad (2-35)$$

Na equação acima,  $c$  representa a menor folga existente no espaço anular.  $D_o$  e  $D_i$  são os diâmetros do tubo externo e interno respectivamente. Quando tivermos  $\chi = 0$ , significa que a excentricidade é máxima. Por outro lado, se  $\chi = 1$  temos a situação de cilindros concêntricos.

## 2.6

### Tensão Superficial

A importância da tensão superficial pode ser determinada baseada em uma das duas grandezas adimensionais a seguir:

- Número de capilaridade ( $Ca$ ), se  $Re \ll 1$ ;
- Número de Weber ( $We$ ), se  $Re \gg 1$ .

As respectivas definições destes parâmetros adimensionais são dados pelas seguintes equações:

$$Ca = \frac{\eta \bar{v}}{\sigma} \quad (2-36)$$

$$We = \frac{\rho \bar{v}^2 Dh}{\sigma} \quad (2-37)$$

Nas equações acima,  $\rho$  é a densidade do fluido;  $\eta$  é a viscosidade do fluido para o caso geral não newtoniano;  $\bar{v}$  é a velocidade média do escoamento;  $Dh$  é o Diâmetro hidráulico para espaços anulares =  $D_o - D_i$  = diâmetro interno do cilindro externo - diâmetro externo do cilindro interno;  $\sigma$  é tensão superficial entre fluidos.

Os efeitos de tensão superficial podem ser desprezados se  $Ca \gg 1$  ou  $We \gg 1$ .

## 2.7

### Condições de Contorno

Ao criar a geometria no programa Gambit, deve-se definir as condições de contorno para cada uma das 6 faces, já que, no caso, a malha é tri-dimensional. No FLUENT, essas condições podem ser alteradas ou aprimoradas. Na figura 3.2 vemos um esquema da geometria na configuração  $\chi = 0,5$ , com as indicações das condições de contorno utilizadas. São elas:

- **Entrada** - Velocidade prescrita com perfil uniforme -  $v_z(r, \theta, 0) = v_e$   
;  $v_r(r, \theta, 0) = 0$  ;  $v_\theta(r, \theta, 0) = 0$  ;

A condição de entrada determina que a velocidade é uniforme e normal à superfície de entrada. Para cada vazão o valor médio da velocidade na entrada era modificado no painel de condições de contorno do FLUENT, de acordo com os valores da tabela 4.1.

- **Saída** - Difusão desprezível na saída -  $\partial v / \partial z(r, \theta, L) = 0$  ;

A condição na saída implica que o fluxo difusivo de todas as variáveis na direção do escoamento seja nula, ou seja, que o escoamento esteja localmente desenvolvido. Essa condição pode parecer uma imposição forte para esse problema. No entanto, a região de interesse se encontra a uma distância suficiente grande para que os efeitos na saída não afetem o resultado, no caso o formato da interface observado.

- **Parede** - Não-deslizamento -  $v_z(\textit{parede}, z) = 0$ ; e Impermeabilidade -  $v_r(\textit{parede}, z) = 0$  ;

Como condição de parede, considerou-se o não-deslizamento e a impermeabilidade. Nesse item também é determinado o ângulo de contato entre os fluidos e a parede, para efeitos de tensão superficial. O valor determinado foi de  $90^\circ$ .

- **Simetria**

O plano de simetria é usado quando o escoamento e a geometria têm um padrão que pode ser espelhado.

## 2.8 Condições Iniciais

Como condições iniciais, considerou-se que em  $t \leq 0$ , o fluido a ser deslocado ocupa todo o interior do domínio computacional em repouso ( $v_r = v_\theta = v_z = 0$ ). No instante inicial,  $t > 0$ , o fluido deslocador é instantaneamente bombeado e cruza a superfície de entrada com velocidade prescrita pela condição de contorno descrita acima.