Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Anna Rafaela Silva Ferreira

Controle Preditivo Hierárquico de Veículos Robóticos

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós–graduação em Engenharia Mecânica, do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Marco Antonio Meggiolaro
Coorientadora: Prof.ª Vivian Suzano Medeiros

Rio de Janeiro
Junho de 2024

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Anna Rafaela Silva Ferreira

Controle Preditivo Hierárquico de Veículos Robóticos

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós–graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Marco Antonio Meggiolaro
Orientador
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof.ª Vivian Suzano Medeiros
Coorientadora
Universidade de São Paulo -USP

Prof. Arthur Martins Barbosa Braga
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Ivan Fabio Mota de Menezes
Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Daniel Henrique Braz de Sousa
Instituto Militar de Engenharia - IME

Prof. João Carlos Virgolino Soares
Istituto Italiano di Tecnologia - IIT

Rio de Janeiro, 05 de Junho de 2024

Anna Rafaela Silva Ferreira

Possui graduação em Engenharia Mecânica pelo Instituto Federal do Piauí (2013) e mestrado em Engenharia Mecânica pelo Instituto Militar de Engenharia (2017). Atualmente é professora substituta no Instituto de Computação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e professora auxiliar na Universidade Estácio de Sá. Possui experiência em modelagem e controle de sistemas, com foco em dinâmica de corpos rígidos e robótica móvel. Atualmente atua em pesquisas de métodos avançados de controle preditivo hierárquico para veículos robóticos com deslizamento, integrando técnicas de estimação de estado para sistemas com restrições não-holonômicas.

Ficha Catalográfica

Ferreira , Anna Rafaela Silva

Controle Preditivo Hierárquico de Veículos Robóticos / Anna Rafaela Silva Ferreira; orientador: Marco Antonio Meggiolaro; coorientadora: Vivian Suzano Medeiros. – 2024.

124 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2024.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Skid-Steer. 3. Robôs Móveis. 4. Controle de Modelo Preditivo. 5. Restrições Não-Holonômicas. 6. Controle Hierárquico. 7. Estimação de Estados por Horizonte Móvel. I. Meggiolaro, Marco Antonio. II. Medeiros, Vivian Suzano. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

A Deus, por me prover força e guiar meus caminhos, especialmente nos momentos de maiores dificuldades e dúvidas. Aos meus pais, Ivonete e Rafael, por sempre acreditarem em mim e me proporcionarem amor e acolhimento. Muito obrigada. Ao meu irmão, Fabrício, e à minha cunhada e irmã de coração, Karina, por sempre me apoiarem. Aos meus sobrinhos, Sophia e Felipe, que são meus pontos de luz, carinho e inspiração para crescimento. À toda minha família de Teresina, em especial às minhas primas Islaila e Iris Rebeca.

Agradecer também à minha companheira, Liliana, que chegou no meio dessa jornada. Sempre compreensiva nos momentos de ausência, e carinhosa, cúmplice e incentivadora nos momentos de presença.

Ao meu orientador, Professor Marco Meggiolaro, pela paciência e comprometimento ao longo desta tese. Aos meu coorientadores, Professor Helon Ayala e Professora Vivian Medeiros, pelo suporte, preenchimento de lacunas de conhecimento e inspiração. À PUC-RIO, por me proporcionar uma formação com professores excelentes.

Aos amigos feitos no LabRob (Laboratório de Robótica) — Fischer, João, Felipe, Paulo e Diego —, pelos momentos prazerosos de descontração e aprendizado. Aos meus orientandos de Iniciação Científica, por me tornarem uma pessoa mais compreensiva. Ao Elias, Bárbara, Pedro e Eduardo, pelas conversas nos corredores e durante as disciplinas. E às minhas amigas de Teresina, que tornaram essa jornada mais leve e especial.

Este estudo foi financiado em parte FAPERJ (Bolsas nº: E-26/2012.314/2016-APQ1 e E-26/201.358/2002-JCNE).

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.”

Resumo

Ferreira , Anna Rafaela Silva; Meggiolaro, Marco Antonio; Medeiros, Vivian Suzano. **Controle Preditivo Hierárquico de Veículos Robóticos**. Rio de Janeiro, 2024. 124p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Robôs móveis autônomos são um grande foco de pesquisa devido à sua aplicabilidade e interdisciplinaridade. Robôs móveis com roda de direção diferencial, além de possuírem alta não-linearidade, detêm uma característica inerente à sua geometria: suas rodas só podem girar em torno de eixos fixos, sem esterçamento. Com isso, o deslizamento longitudinal e lateral é inevitável, principalmente quando o sistema está em movimento sob efeitos dinâmicos significativos. Controle Preditivo baseado em Modelo Não-Linear, *Nonlinear Model Predictive Control* (NMPC), é amplamente utilizado nesses casos, já que consegue lidar com sistemas com múltiplas restrições. O presente trabalho apresenta modelos matemáticos de um robô móvel com roda do tipo skid-steer, procedente da direção diferencial, incluindo o deslizamento longitudinal, aos quais o NMPC é empregado para seguimento de trajetória, obtendo trajetórias similares à de referência. Verificando que o custo de processamento de tais controladores pode ser muito alto para uso em tempo real, um controle hierárquico é desenvolvido otimizando as forças longitudinais entre as rodas e o solo para encontrar deslizamentos de referência para uma determinada trajetória a ser seguida. Como em um ambiente real nem todos os estados podem ser medidos, o controle necessita também estimar os estados não medidos. A Estimação de Estados por Horizonte Móvel, (*Moving Horizon State Estimation* (MHSE)), derivada dos fundamentos do NMPC, foi utilizada para realizar a estimativa, já que possui recursos para manter o sistema sob as restrições. Com o MHSE, o deslizamento do sistema pode ser calculado a partir dos estados estimados para as trajetórias obtidas com o Controle Preditivo baseado em Modelo, (*Model Predictive Control* (MPC)). Por fim, uma rede neural foi treinada com os estados preditos e estimados com o MHSE para que pudesse substituí-lo para que todo o controle fosse utilizado em tempo real. Com isso, o tempo computacional foi reduzido devido a substituição do MHSE.

Palavras-chave

Skid-Steer; Robôs Móveis; Controle de Modelo Preditivo; Restrições Não-Holonômicas; Controle Hierárquico; Estimação de Estados por Horizonte Móvel.

Abstract

Ferreira , Anna Rafaela Silva; Meggiolaro, Marco Antonio (Advisor); Medeiros, Vivian Suzano (Co-Advisor). **Hierarchical Predictive Control of Robotic Vehicles**. Rio de Janeiro, 2024. 124p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Autonomous mobile robots are a major focus of research due to their applicability and interdisciplinarity. Depending on the type of locomotion, the system's controller needs to handle not only trajectory tracking but also the way the system interacts with the ground. Mobile robots with differential drive wheels, in addition to having high nonlinearity, possess an inherent characteristic due to their geometry: their wheels can only rotate around fixed axes, without steering. As a result, longitudinal and lateral slip is inevitable, especially when the system is in motion under significant dynamic effects. Nonlinear Model Predictive Control (NMPC) is widely used in these cases, as it can handle systems with multiple constraints. This work presents mathematical models of a skid-steer mobile robot, derived from differential drive, including longitudinal slip, to which NMPC is applied for trajectory tracking, achieving trajectories similar to the reference. Given that the processing cost of such controllers can be very high for real-time use, a hierarchical control is developed, optimizing the longitudinal forces between the wheels and the ground to find reference slips for a given trajectory to be followed. Since in a real environment not all states can be measured, the control also needs to estimate the unmeasured states. Moving Horizon State Estimation (MHSE), derived from the fundamentals of NMPC, was used to perform the estimation, as it has the resources to keep the system within the constraints. With MHSE, the system's slip can be calculated from the estimated states for the trajectories obtained with Model Predictive Control (MPC). Finally, a neural network was trained with the predicted and estimated states using MHSE to replace it so that the entire control could be used in real-time. As a result, computational time was reduced due to the replacement of MHSE.

Keywords

Skid Steer; Mobile Robots; Model Predicte Control; Non-holonomic Constrains; Hierarchical Control; Moving-Horizon State Estimation.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de Abreviaturas

AMR *Autonomous Mobile Robot*

EKF *Extended Kalman Filter*

IPOPT ***I**nterior **P**oint **O**ptimizer*

MHSE *Moving Horizon State Estimation*

MPC *Model Predictive Control*

NLP *Nonlinear Programming Problem*

NMPC *Nonlinear Model Predictive Control*

OCP *Optimal Control Problem*

PID controle proporcional integral derivativo

RMR robôs móveis com rodas

RMRSS robôs móveis com rodas do tipo *skid steer*

RMSE *Roor Mean Square Errors*

R^2 coeficiente de correlação múltipla

SMC *Sliding Mode Control*

SS *skid steering*

UKF *Unscented Kalman Filter*

UKF *Unscented Kalman Filter*

1
Introdução

1.1
Motivação

A Federação Internacional de Robótica (*International Federation of Robotics*, IFR) considera robôs móveis autônomos, *Autonomous Mobile Robot* (AMR), como robôs de serviços [1], os quais possuem suas maiores aplicações (entre 2020 e 2021) nas áreas de transporte e logística [2], atendimento automatizado [3], robótica médica [4], limpeza profissional [5] e na agricultura [6]. Além disso, encontram-se também empregados em inspeção, manutenção, construção, demolição, busca e resgate, dentre outros empregos. Essa larga aplicabilidade dos AMR vem da sua capacidade de explorar, navegar e interagir com o seu entorno de forma independente.

Para um robô possuir essa independência, ele precisa de três módulos básicos [7, 8]: Percepção, Localização e Planejamento de Trajetória e Controle de Movimento. A percepção busca responder à pergunta "o que está ao redor do robô?"por meio da interpretação dos dados dos sensores. Atribuindo significado a esses dados, o robô estima sua posição no ambiente, o que permite calcular trajetórias viáveis para conduzi-lo a um objetivo específico. Com as trajetórias ou perfis de velocidade ou torques desejados, os comandos dos atuadores são implementados a partir de uma estratégia de controle definida. Esse controle dos atuadores pode também sofrer interferência direta do estado do robô obtido pelo módulo de percepção. Esse fluxo de informação em um robô pode ser visto mais detalhadamente na Fig. 1.1, mostrando também a interdependência desses módulos.

Enfatizando as etapas de planejamento da trajetória e controle de movimento, várias são as estratégias possíveis. Como exemplos, tem-se algoritmos de busca heurística, planejamento baseado em grades, redes neurais, *Sliding Mode Control* (SMC) (controle que direciona a trajetória do sistema para uma superfície de deslizamento [96]), controle baseado em aprendizado de máquinas, controle proporcional integral derivativo (PID) (sinal de controle calculado a partir de uma relação com o sinal do erro, taxa de variação proporcional ao sinal do erro e pela derivada do erro [97]), MPC (*Model Predictive Control*),

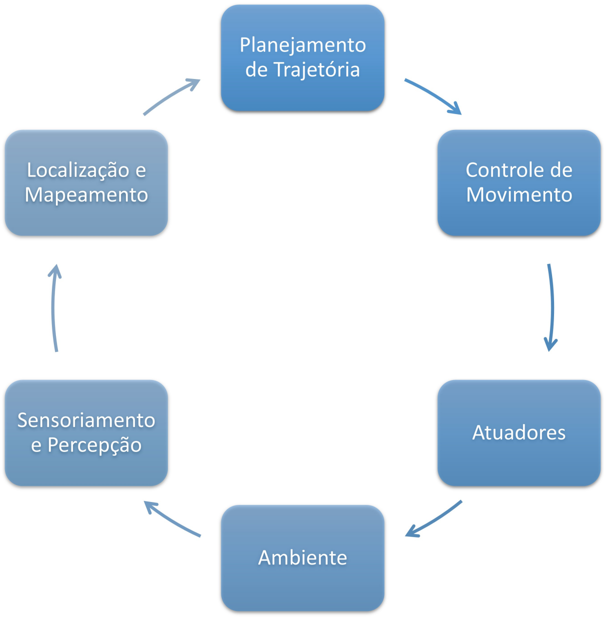

Figura 1.1: Visão geral dos módulos de um robô móvel autônomo.

controle de velocidade, dentre outros. Para cada tipo de controle, um tipo de modelagem do sistema pode ser mais conveniente, respeitando o grau de realidade que se queira.

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (*Model Predictive Control*, MPC) teve início na década de 1980 quando na procura de métodos de controle que substituíssem o já tradicional controle PID. Em 1979, Cutler e Ramaker [60] apresentaram um algoritmo chamado de DMC (*Dynamic Matrix Control*) que utilizava a dinâmica do processo com mínimos quadrados para diminuir a integral da curva erro/tempo. Esse artigo deu início ao estudo de técnicas que utilizassem otimização para encontrar a saída de controle do sistema, um dos fundamentos do controle preditivo.

Rawlings *et al.* [61] apresenta o modelo de controle preditivo (MPC) com dois conceitos básicos: utilizar o modelo dinâmico para prever o comportamento do sistema e otimizar a previsão para produzir a melhor decisão para o controle no momento atual, e usar o conjunto de entradas e saídas passados para determinar o estado inicial mais provável do sistema.

Com base nisso, pode-se apontar algumas propriedades básicas que classificam um algoritmo como MPC:

- O sistema precisa estar modelado, bem como equações de previsão do sinal de saída, que serão utilizadas para prever o comportamento do processo em um horizonte de tempo futuro;
- Definição do critério de otimização para o desempenho do sistema em malha fechada durante o horizonte de previsão;

- Otimização da função custo é feita em relação ao conjunto de sinais futuros de controle, e
- Utilização do sinal de controle ótimo dentro do tamanho do horizonte de controle.

Em relação ao sistema de atuação de robôs móveis, estes podem dividir em aquáticos, aéreos e terrestres [9]. Destacando os robôs terrestres, Bruzzone *et al.* [10, 11] apresentam uma revisão sobre os principais tipos de locomoção utilizados, que podem ser: robôs com rodas, com esteiras e com pernas. Os autores destacam que os robôs com pernas possuem uma maior mobilidade em ambientes não estruturados (como por exemplo terrenos irregulares, macios ou com obstáculos, além de ambientes que não possui nenhum meio para o robô se localizar), mas possuem uma menor velocidade e eficiência energética. Já os robôs com rodas possuem uma maior velocidade e eficiência energética, mas uma menor mobilidade em ambientes não estruturados. No meio termo, robôs com esteiras possuem uma mobilidade maior em comparação aos robôs com rodas, e uma velocidade e eficiência energética maior em relação aos robôs com pernas, no entanto o seu sistema mecânico de atuação é mais suscetível a falhas e maior complexidade de manutenção.

Muitas aplicações atuais para a robótica móvel exigem a navegação em ambientes não estruturados, podendo apresentar diversos obstáculos aos veículos robóticos, especialmente em casos onde não há conhecimento prévio do seu mapa. Em [12], uma série de trabalhos são apresentados na área de resgate em terrenos irregulares, evidenciando a necessidade de controles reativos e/ou preditivos.

A essas dificuldades, pode-se somar o deslizamento de uma ou mais rodas dos veículos robóticos, que em casos críticos pode causar perda de contato com o solo. Nesse ponto, a área de controle de trajetória se destaca, permitindo o controle de atuação em cada roda, evitando capotamentos durante manobras intensas e mantendo a estabilidade ao atravessar áreas com coeficientes de atrito variáveis.

Com o deslizamento, a estimativa de estados do robô torna-se um complicador, como por exemplo: se a roda está rotacionado e deslizando, o *encoder* acoplado a roda irá acusar que o robô está em movimento, o que na realidade não acontece. Diante disso, faz-se necessária a implementação de mecanismos que possam estimar a posição atual do robô com precisão, e diminuir o erro associado a ruídos nas medições. Estimação de Estado com Horizonte Móvel (*Moving Horizon State Estimation*, MHSE) e o filtro de Kalman são alguns desses mecanismos.

Estimação de Estado com Horizonte Móvel (*Moving Horizon State Estimation*, MHSE) pode ser definido como uma estratégia de otimização de estimativas de estados na qual o estado atual do sistema é inferido com base em uma sequência finita de medições passadas, ao mesmo tempo que incorpora informações da equação dinâmica do sistema [79]. Por ser um método baseado em otimização e utilizar um conjunto finito de dados para a estimativa, o MHSE se assemelha muito ao MPC, podendo ser aplicado a sistemas não lineares e com restrições, sendo essa uma das principais vantagens do MHSE.

A estimativa de estado com o filtro de Kalman é uma técnica recursiva que combina medições ruidosas e dinâmica do sistema para estimar seu estado atual. Essa abordagem iterativa atualiza continuamente as estimativas com novas medições e previsões do modelo, proporcionando estimativas precisas em tempo real, mesmo com ruídos. Amplamente usado em robótica, navegação e controle, o filtro de Kalman possui variações como o Filtro de Kalman Estendido (*Extended Kalman Filter* (EKF)) e o Filtro de Kalman *Unscented* (*Unscented Kalman Filter* (UKF)). Enquanto o EKF lida com não linearidades através de linearizações por derivadas parciais, o UKF utiliza pontos sigma para representar as não linearidades de forma mais precisa [107, 98, 99].

A implementação em tempo real do MPC é desafiadora devido à sua complexidade computacional, mas o controle hierárquico pode integrar essa complexidade com eficiência. O MHSE oferece melhor desempenho para sistemas não-lineares, permitindo restrições nas variáveis estimadas e superando métodos tradicionais como os filtros de Kalman. Considerando o avanço em aplicações de robótica móvel, especialmente para robôs com rodas, as pesquisas buscam tornar o sistema mais robusto e garantir a estabilidade em diversas condições. Este trabalho é motivado pela necessidade de desenvolver controles mais eficientes e precisos para robôs móveis, melhorando a navegação autônoma e a estabilidade, especialmente em ambientes não estruturados.

1.2 Objetivos

Tendo em vista o alto custo computacional que algoritmos baseados em otimização apresentam, como é o caso do MPC, o presente trabalho tem como objetivo desenvolver meios para o aumento da performance computacional do MPC e MHSE aplicados a um RMRSS, sistema que possui restrições físicas que devem ser consideradas para uma melhor eficiência.

1.3 Organização

A redação da tese está dividida na presente introdução, situando o contexto e a motivação para o trabalho; a apresentação do objeto de estudo, seguido por uma revisão da literatura com análises críticas sobre os temas abordados, terminando nos objetivos e contribuições desenvolvidos. Após a introdução, a modelagem matemática do sistema em diferentes níveis de complexidade é apresentada, bem como a validação dos modelos. Segue-se com a teoria do MPC utilizado e a sua aplicação nos modelos matemáticos desenvolvidos. No quarto capítulo, uma abordagem hierárquica utilizando MPC é apresentada. A seguir, apresenta-se a parte teórica sobre MHSE e sua aplicação no sistema para a estimativa dos estados. Por fim, discute-se a conclusão do trabalho, expondo pesquisas futuras.

1.4 Objeto de Estudo: Robôs do Tipo *Skid-Steer*

A forma como robôs móveis com rodas (RMR) se locomovem depende diretamente do tipo de roda que utilizam. Elas podem ser basicamente de quatro tipos: roda padrão, roda giratória, roda sueca e roda omnidirecional [8]. Além disso, a disposição de de cada roda no robô, se terá duas roda, três rodas, se elas serão fixas ou esterçáveis, também ditará a forma de locomoção e a complexidade do sistema. Em [108], os autores comparam essas rodas e sua disposição no chassi em relação à manobrabilidade, aos graus de liberdade, tamanho do raio e força de carregamento.

Um RMRSS é aquele que possui rodas do tipo padrão, podendo as rodas rotacionar apenas em torno no seu próprio eixo, sendo rodas não esterçáveis. Para que o robô realize uma curva, como na Fig. 1.2, as velocidades das rodas de um lado devem ser diferentes das velocidades das rodas do outro lado. Por conta dessa geometria do sistema, o robô consegue realizar uma rotação em torno do seu próprio eixo, Fig. 1.3.

Devido a sua construção mecânica, essas rodas possuem restrições cinemáticas que são aquelas impostas sobre os movimentos possíveis de um sistema [110]. As restrições cinemáticas que são observadas no RMRSS são do tipo não holonômicas, que caracterizam-se por não serem equações integráveis [101, 110, 117], ou seja, não podem ser expressas apenas em termos de posição do sistema. Dessa forma, sistemas não holonômicos tem seu movimento afetado por sua cinemática e seu comportamento só é descrito com posição e velocidade.

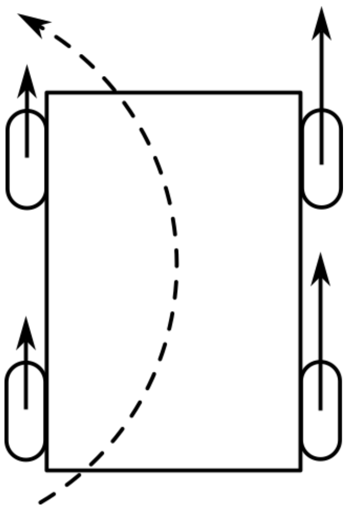

Figura 1.2: RMRSS realizando uma curva, necessitando de velocidades diferentes nas rodas de cada lado.

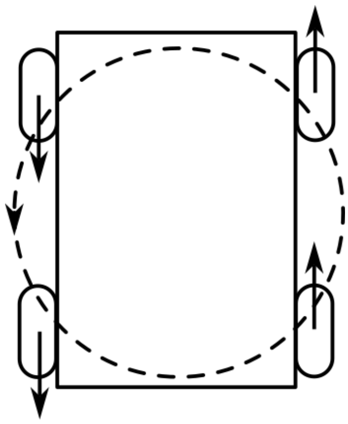

Figura 1.3: RMRSS realizando uma rotação em torno do próprio eixo, necessitando de velocidades em sentidos diferentes nas rodas de cada lado.

A principal vantagem do sistema de atuação *skid steering* (SS) é realizar manobras através da diferença de velocidades entre as rodas laterais, proporcionando alta mobilidade em superfícies irregulares [19]. Outras vantagens em relação à direção Ackermann (rodas esterçáveis) [92, 93, 109], por exemplo, são: estrutura mecânica simples, capacidade maior de carregamento e altas velocidades com baixo consumo de energia [20]. Entretanto, esse consumo de energia pode ser excessivo quando ele alcança um raio de giro igual a zero, devido a resistência lateral do movimento que surge devido ao deslizamento das rodas [20, 21]. Além disso, a modelagem do sistema pode ser complexa devido ao deslizamento, que é inerente ao modelo devido a sua construção mecânica, bem como o seu controle [22].

1.5 Revisão Bibliográfica

Nesta seção, serão abordados estudos relacionados ao presente trabalho, com ênfase na discussão daqueles que empregam RMRSS e a modelagem associada. Também será examinada a implementação de controle preditivo baseado em modelo, tanto com quanto sem estrutura hierárquica, além dos métodos de estimativa de estados utilizados.

1.5.1 Modelagem de Robôs Móveis do Tipo Skid Steering

Os RMRSS destacam-se por sua ampla aplicabilidade [14], como na construção civil [15], ambientes de fabricação [16], inspeção de minas [23], uso militar [17] e agricultura [18, 95]. Essas aplicações compartilham ambientes difíceis de acessar e/ou perigosos, superados pelas características do SS.

Um dos primeiros trabalhos com RMRSS foi realizado por [67], que apresenta teoria da dinâmica de sistemas com restrições não-holonômicas, seguido pelo controle de rastreamento de trajetória (*trajectory tracking*) e seguimento de caminho (*path following*). Sidek [66] continua a abordagem com a aplicação de um sistema SS em diferentes superfícies, analisando a força de tração nas rodas, modelada com o modelo de Pacejka [59], e os deslizamentos em cada um dos cenários. Os dois trabalhos apresentam tanto o modelo cinemático quanto o dinâmico do veículo, com a inclusão dos deslizamentos laterais e longitudinais.

Mazur e Cholewiński [68] desenvolvem um modelo matemático baseado na dinâmica de um SS, restrições não holonômicas e efeitos do terreno. Apesar do modelo dinâmico ter sido apresentado, os deslizamentos são postos como forças virtuais, sendo controladas ao longo do movimento. Rabiee e Biswas em [24] propõem um modelo cinemático baseado em atrito capaz de prever deslizamentos de RMRSS através de um modelo de interação roda-solo e odometria nas rodas, sensores visuais e IMU (*Inertial Measurement Unit*). Os autores utilizam apenas as forças estimadas para prever o deslizamento, permitindo uma representação mais próxima das condições reais do veículo, incluindo os efeitos do atrito e do deslizamento, sem a complexidade adicional associada à integração das acelerações.

Huskic *et al.* [25, 26] utilizam um controle de seguimento de trajetória em um RMRSS comercial, impondo a velocidade máxima permitida pelo sistema. Isso é feito em diferentes tipos de terrenos, com variação do coeficiente de atrito, utilizando apenas o modelo cinemático do sistema, sem considerar o deslizamento e os efeitos dinâmicos, tendo que implementar um controle que seja capaz de minimizar os impactos dessas condições, já que em alta velocidade existe efeitos dinâmicos. O escorregamento também é tratado como uma pertubação em [27], onde um modelo cinemático e controle baseados em erro de trajetória são aplicados a um SS utilizado em cultivo agrícola.

Um RMRSS com esteiras é utilizado em [28], onde implementa-se um modelo cinemático e dinâmico do robô com a inclusão do deslizamento nas equações. O deslizamento é estimado para identificar os parâmetros do terreno que são utilizados no modelo dinâmico do robô, e as forças entre a roda e o solo são modeladas por equações terro-mecânicas. Identificação de parâmetros do terreno a partir do deslizamento também é o foco do trabalho de Reina e Galati [29], utilizando modelos cinemático e dinâmico de um RMRSS com interação entre roda e solo, apresentando testes em asfalto, estrada de terra, solo arado e areia de praia.

Os autores em [33] implementam e comparam seis controladores diferentes para um robô SS com modelagem cinemática em ambientes externos. O deslizamento que ocorre é contornado com os controladores, utilizando a estimativa de estados do robô. Prado *et al.* [34] utilizam o modelo dinâmico, com dinâmica lateral e longitudinal do veículo acopladas, dinâmica de deslizamento e deslizamento lateral dos pneus, dinâmica de movimento no plano de guinada e arfagem, e estimativa de parâmetros do modelo para a sua estratégia de controle robusta em robôs SS. As forças de tração são modeladas com o modelo de Pacejka.

Liao *et al.* [30] implementam um modelo cinemático e dinâmico, incluindo o deslizamento na sua modelagem. As forças de interação entre roda e solo são modeladas a partir da força de fricção de Coulomb. Alipour *et al.* [53] também exibem modelo cinemático e dinâmico para um conjunto trator-trailer, sendo o modelo de LuGre implementado para as interações roda-solo.

A Tabela 1.1 apresenta um comparativo da literatura relacionada

Tabela 1.1: Comparativo da literatura envolvendo o tipo de modelagem do sistema, forças de interação roda-solo e a inclusão do deslizamento.

	Modelagem		Implementação do deslizamento	Forças de Interação roda solo
	cinemática	dinâmica		
[67]	x	x	perturbação compensada no controle	sem modelagem
[66]	x	x	incluída junto com restrições não holonômicas	Pacejka
[68]		x	forças virtuais	Coulomb
[24]	x		estimado	sem modelagem
[25, 26]	x		perturbação compensada no controle	sem modelagem
[28]	x	x	incluída junto com restrições não holonômicas	equações terro-mecânicas
[29]	x	x	estimado	estimado
[33]	x		perturbação compensada no controle	sem modelagem
[34]		x	estimado	Pacejka
[30]	x	x	incluída junto com restrições não holonômicas	Coulomb
[53]	x	x	incluída junto com restrições não holonômicas	LuGre

ao tipo de modelagem do sistema, a inclusão do deslizamento e as forças de interação roda-solo.

A maioria dos estudos se concentra na modelagem dinâmica do sistema, evidenciando a necessidade de considerar as forças e momentos nas interações roda-solo para uma representação mais realista e controle preciso. No entanto, a forma como o deslizamento é tratado varia: alguns estudos optam por tratá-lo como uma perturbação a ser compensada pelo controle, enquanto outros o integram diretamente nas restrições do sistema, proporcionando uma abordagem mais direta para lidar com o fenômeno.

Quanto às forças de interação roda-solo, a tabela demonstra a variedade de modelos utilizados, incluindo os modelos de Coulomb, Pacejka e LuGre, além de equações terramecânicas e forças virtuais. Essa diversidade de abordagens enfatiza a importância de escolher um modelo de interação adequado, uma vez que cada um apresenta vantagens e limitações específicas que podem afetar a precisão e o custo computacional da simulação e do controle. A tabela destaca também que, para sistemas mais complexos ou em condições de terreno variáveis, modelos como o de Pacejka ou LuGre podem oferecer maior realismo, enquanto modelos mais simplificados podem ser suficientes em situações controladas ou em simulações.

De acordo com [111, 112, 113, 114], a inclusão do deslizamento na modelagem, principalmente quando a análise dinâmica é requerida, aumenta a precisão dos sinal de controle requeridos. Em especial, [113] mostram que a inclusão do deslizamento no modelo de controle diminui a inércia causada pela movimentação de um manipulador robótico acoplado a um RMR. Sidek e Sarkar [115] mostram que a inclusão do deslizamento permite a implementação de controles mais avançados, aproveitando-se do fenômeno do deslizamento.

Com isso, observa-se que a modelagem dinâmica do sistema e a inclusão adequada do deslizamento são aspectos cruciais para um controle eficaz de sistemas robóticos móveis. A escolha do modelo de forças de interação roda-solo e a abordagem de modelagem (se estimada ou não, cinemática ou dinâmica) devem ser baseadas nas características específicas do sistema e nos objetivos de controle. Dessa forma, a implementação de uma abordagem híbrida na modelagem do sistema, cinemática e dinâmica, que integre o deslizamento de maneira mais abrangente, é um tópico promissor a ser investigado.

1.5.2 Controle Preditivo Baseado em Modelo e Estruturas Hierárquicas

Em terrenos não estruturados, situações de risco podem acontecer sem que sensores possam detectá-las. Diante disso, RMR necessitam de um sistema de controle que seja capaz de responder a tal quadro, contexto no qual dois tipos de controle podem ser citados: os reativos e os preditivos.

Um comportamento reativo é aquele que produz respostas seguras a condições inesperadas quando um sensor é ativado para um conjunto de ações predefinidas, como uma parada de emergência e curvas bruscas. Esse tipo de comportamento é implementado em um controle de baixo nível por Iagnemma *et al.* [35], que focam em determinar experimentalmente um modelo complexo necessário para uma previsão válida de comportamento em alta velocidade (7.4 m/s). Para modelos em alta velocidade, o comportamento balístico (quando todas as rodas descolam do solo), escorregamento da roda e deformação roda/solo devem ser considerados.

Na sua tese, Maciejowski [37] sintetiza bem as propriedades de um controle preditivo: existência de um modelo interno explícito, a ideia de horizonte de previsão e o cálculo do sinal de controle, otimizando o comportamento previsto da planta. A sequência de entradas de controle ótimo é calculada para uma evolução prevista do modelo do sistema em um horizonte finito. De acordo com Zeilinge [38] apenas os primeiros elementos da sequência de controle são aplicados (dependendo do formato do horizonte) e o estado do sistema é medido novamente no próximo tempo de amostragem.

Harasim e Trojnacki [48] apresentam uma revisão de controles preditivos em robôs móveis com rodas, onde abordam a estrutura cinemática dos robôs, escorregamento das rodas e formas de compensação, restrições (de ambiente e do robô), métodos de otimização da função objetivo, problemas de não-linearidade, linearidade, discretização, estabilidade do sistema de controle e uso de observadores de estado. Para os autores, o controle preditivo é encorajado em robôs móveis com rodas por conta da realização de movimentos precisos em condições adversas, como perda de sinal de localização ou falha de sensores.

Nascimento *et al* [39] apresentam um compilado de trabalhos que abordam o uso do MPC em robôs móveis não-holonômicos para rastreamento de trajetória. As variantes nesses estudos incluem a estabilidade, problemas de sensores, desafios na otimização do MPC (devido às restrições em sistemas não-holonômicos), modelos de sistemas em formas numéricas ou analíticas, lineares ou não lineares, e o modelo de predição escolhido, que influencia diretamente o custo computacional. Os autores destacam que os desafios ainda presentes na aplicação do MPC incluem o uso de robôs em espaços externos, estimativa de estado, minimização de incertezas e controle de estabilidade.

Em controle de sistemas, módulos são criados para uma melhor distribuição de tarefas. Algumas tarefas podem ser realizadas em uma frequência diferente de outras, permitindo que funções críticas operem com atualizações mais rápidas, enquanto tarefas de menor prioridade podem ser executadas com menor frequência. Essa abordagem hierárquica não só melhora a organização e eficiência do sistema, mas também otimiza o custo computacional, pois reduz a carga de processamento ao priorizar o uso de recursos para as funções essenciais. Ao dividir as tarefas em diferentes frequências, o sistema evita sobrecarga desnecessária, mantendo um desempenho robusto sem exigir alto poder computacional para todas as funções de controle.

Dessa diferença de frequência de requisição de dados, o sistema pode ser considerado um sistema hierárquico, ou em cascata. Scattolini [77] apresenta uma revisão de trabalhos abordando a diferença entre os vários modelos de estruturas com MPC, descentralizadas, distribuídas e hierárquicas, enfatizando que a seleção da estrutura de controle e protocolos de comunicação entre os níveis de controle são pontos que tem muito peso na implementação desse tipo de sistema.

Babu *et al.* [13] implementam o MPC alternando a sua função objetivo entre a minimização da velocidade linear e angular do veículo de direção esterçada autônomo quando em manobras, diminuindo o custo computacional em um modelo cinemático. Já [31] comparam o desempenho de um SS controlado por MPC com modelos de predição cinemático e dinâmico, penalizando a variação da velocidade angular quando em curvas, mostrando que a inclusão do deslizamento diminui o erro de trajetória, mas não apresentando o tempo computacional do controle.

Em [32], o MPC é utilizado para compensar os efeitos da falta de adesão entre a roda e o solo e da gravidade em um robô escalador SS. Em [34], os autores também utilizam MPC para mitigar as pertubações que ocorrem no SS, adaptando o controle para que as incertezas estejam limitadas a uma região próxima dos estados previstos, mostrando também o tempo computacional em uma média de $0,05$ s. Para diminuir o tempo computacional do MPC, os autores em [40] implementam o controle sem restrições terminais ou estabilizadoras aplicado para prevenir colisões entre RMRSS.

Os autores em [41] utilizam um manipulador flexível com seis graus de liberdade sendo movido por um RMRSS para implementar um controle hierárquico com um planejador de trajetória, otimização do ângulo das juntas por MPC e torques das rodas calculados por um controle proporcional-derivativo (PD). Em [42], os autores focam em como distribuir veículos elétricos dentro de uma rede de transporte. Eles levam em consideração o tempo mínimo de carregamento, o tempo de espera dos passageiros e o custo financeiro, utilizando dois modelos preditivos em cada camada da rede de transporte. Em [43], controle por modos deslizantes e um observador de perturbações não lineares são implementados em cascata e aplicados a um helicóptero quadrotor para mitigar distúrbios combinados e não combinados dos erros originados pelas estimativas de estados.

Liao *et al.* [30] desenvolvem um controle adaptativo robusto hierárquico para resolver o problema de sobrecarga das rodas em um RMRSS. Prasad e Ma [44] também apresentam um controle hierárquico aplicado a um modelo dinâmico com estimativa de deslizamento em um RMRSS de seis rodas. Mondal *et al.* [45] comparam o uso de modelos cinemáticos e dinâmicos para rastreamento de trajetória em robôs com direção diferencial de duas rodas, implementando um controle hierárquico com MPC e um controlador proporcional-integral (PI) de baixo nível, mas sem incluir o deslizamento. Rastreamento líder-seguidor em robôs de duas rodas não-holonômicos realizado com um modelo dinâmico sem deslizamento é apresentado por [46], usando controle hierárquico com estrutura variável como um compromisso entre desempenho e uma saída de controle sem oscilações. Modelos dinâmicos de RMRSS incluindo deslizamento também são tratados em [47] e em [50], neste último o controle abrange uma alternância entre modelos com e sem deslizamento.

Outros tipos de veículos com rodas direcionáveis ou omnidirecionais também usam deslizamento para aumentar a controlabilidade. Nahidi *et al.* [49] incluem deslizamento no modelo dinâmico de um veículo com direção esterçada em um controle hierárquico usando MPC em alto nível. Ren *et al.* [51] aplicam um controle hierárquico com MPC para controlar o ângulo de direção e as forças de um veículo de direção esterçada, seguido por controle de estabilidade anti-deslizamento. Rastreamento de trajetória com a função de otimização do MPC sendo resolvida por redes neurais é desenvolvido por [52], aplicado a um robô omnidirecional. Zhang *et al.* [63] também usam um robô omnidirecional para aplicar controle hierárquico com MPC que pode alternar entre vários modos de supervisão de trajetória no controle de baixo nível.

A partir dos trabalhos citados, observa-se que a complexidade computacional introduzida por modelos preditivos dinâmicos é um desafio para a implementação em tempo real do MPC, mas não implica necessariamente em comprometimento do desempenho do sistema. Implementações e adaptações do MPC foram desenvolvidas com o objetivo de reduzir o custo computacional, sem perder a essência do controle preditivo. Essas abordagens incluem simplificações nos modelos dinâmicos, métodos de otimização mais eficientes e a utilização de estruturas hierárquicas, permitindo que o MPC continue sendo aplicável em tempo real, mantendo a estabilidade e o desempenho do sistema. O controle hierárquico, em especial, apresenta-se como uma solução para a integração da complexidade do sistema com a eficiência do sistema de controle.

1.5.3 Estimação de Estado com Horizonte Móvel

Por conta do fenômeno de deslizamento inerente ao RMRSS, é crucial compreender e modelar adequadamente o comportamento dinâmico desses veículos, tornando técnicas de estimativa de estado indispensáveis nesses sistemas [64, 69]. Teji *et al.* [80] compilam trabalhos sobre robôs móveis *off-road* mostrando a importância da estimativa do deslizamento da roda e controladores para compensar esse efeito. Singh *et al.* [81] apresentam trabalhos que implementam estimadores baseados em modelos cinemáticos. A abordagem de MHSE pode ser particularmente útil nesse contexto, pois permite adaptar continuamente o estado do sistema com base nas informações mais recentes, possibilitando uma estimativa mais precisa e dinâmica do estado do robô em tempo real.

Além do MHSE, o filtro de Kalman (e suas derivações) é bastante utilizado e bem definido na literatura. Em [82], os autores combinam sensores para estimar conjuntamente a posição, orientação, velocidade e derrapagem das rodas, incorporando os valores estimados no processo de atualização do UKF. Rodríguez *et al.* [83] também utilizam UKF, integrando estimativas de forças de contato com a estimativa de parâmetros e estados do veículo. Javier Prado *et al.* [84] desenvolvem um sistema de controle adaptativo para um robô móvel, capaz de se ajustar a diferentes condições de terreno, seguindo trajetórias específicas, combinando a estimativa de estado com MHSE e o controle em tempo real usando MPC.

Liu *et al.* [85] e Gu *et al.* [86] apresentam um estimador de estados para um sistema em que os sensores possuem taxas de amostragem diferentes, e utilizam um MHSE quando ocorre ausência de amostras por algum dos sensores. Em [34], uma abordagem de MPC é utilizada para reforçar as ações de controle no sistema dinâmico de um robô móvel SS, empregando também MHSE para a estimativa dos estados e parâmetros. Essa abordagem é posteriormente aplicada em tempo real, com controle distribuído para compensar o deslizamento longitudinal e lateral, ou seja, um controle para cada efeito [87].

Já [64] estimam o coeficiente de atrito da estrada em duas etapas: primeiro, o estimador calcula as forças laterais a partir da dinâmica do veículo, e depois avalia o coeficiente de atrito, desacoplando assim a dinâmica do veículo da dinâmica da roda, o que melhora o desempenho em tempo real. Outros trabalhos para estimativa de parâmetros de estrada podem ser encontrados em [88]. Souza [118] implementa uma rede neural treinada com dados de interação entre a dinâmica lateral e longitudinal de um veículo com esterçamento, reduzindo os custos computacionais para controladores preditivos.

Song *et al.* [89] implementam uma rede neural para modelar as relações entre a velocidade lateral e o ângulo de escorregamento lateral de um sistema automotivo, fornecendo essa relação para um estimador de horizonte móvel (MHE) que otimiza as estimativas dos estados.

A maioria dos trabalhos anteriores que focam em estimativa de estado para RMRSS utiliza métodos de tradicionais, como filtros de Kalman e suas derivações. No entanto, particularmente para sistemas não-lineares, o MHSE apresenta melhor performance e permite a inclusão de restrições na estimativa das variáveis, limitando seus valores máximos e mínimos. Para os trabalhos que utilizam o MHSE, o modelo utilizado comumente não considera o deslizamento inerente a esse tipo de robô e sofrem com o custo computacional adicional gerado pelo MHSE.

1.6 Contribuições

O trabalho apresenta as seguintes contribuições:

1. Desenvolver modelos matemáticos que representem a dinâmica de um RMRSS, de forma que apenas estados que consigam ser medidos diretamente, como a velocidade angular da roda ou a velocidade angular do chassi, sejam encontrados na equação de estado, mesmo com a inclusão das restrições cinemáticas inerentes ao sistema. Isso será realizado com a inserção da cinemática, diminuindo a complexidade do sistema.

2. Aplicar o MPC nos modelos matemáticos desenvolvidos, comparando os tempos computacionais e erros de trajetória de cada modelo. Espera-se observar que a inclusão dos deslizamentos no modelo de predição diminua o erro de trajetória, mas aumente o custo computacional do controle.

3. Desenvolver um sistema de controle hierárquico com MPC para rastreamento de trajetória em um RMRSS. Este sistema utilizará um modelo dinâmico simplificado como modelo de predição e controle proporcional de baixo nível para a velocidade das rodas. O desafio principal é a implementação eficaz do MPC utilizando um modelo completo, visando melhorar o desempenho do controle. O sistema de controle hierárquico proposto deve reduzir as operações computacionais e proporcionar uma melhora no desempenho em trajetórias de alta velocidade, como mudanças de faixa dupla, conforme será demonstrado nos resultados de simulação.

4. Abordar a estimativa de estado de um RMRSS a partir de uma rede neural treinada com dados estimados por um MHSE, além de comparar este último com um EKF. Espera-se que os resultados mostrem que as estimativas do MHSE, quando comparadas com o EKF, permaneçam próximas aos valores reais. Em relação à rede neural treinada a partir dessas mesmas estimativas, os dados de validação da rede neural também devem mostrar similaridade com os dados de treinamento, sendo capaz de estimar corretamente o estado do sistema. A utilização de uma rede neural para a estimativa de estado deve apresentar um custo computacional consideravelmente menor que o do MHSE, justificando a sua implementação e uso para aplicações em tempo real.

2
Modelagem Matemática

Como a modelagem matemática é essencial para compreender o comportamento dinâmico do sistema e para o desenvolvimento de estratégias de controle eficazes, neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos e as equações que descrevem o movimento do veículo robótico com deslizamento. O equacionamento do sistemas com restrições é apresentado, bem como quatro modelos dinâmicos com diferentes níveis de complexidade, posteriormente validados.

2.1
Equação de Movimento com Restrição

Seja um sistema não holonômico n-dimensional com coordenadas generalizadas $\boldsymbol{q} = [q_1\ q_2\ ...\ q_n]^T$ e sujeito a m restrições. O sistema pode ser descrito a partir da Equação Euler-Lagrange [100, 101, 102]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{2-1}$$

podendo ser reorganizada como:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{2-2}$$

onde $\boldsymbol{q} \in R^{n\times 1}$ é um vetor de coordenadas generalizadas e $\dot{\boldsymbol{q}} \in R^{n\times 1}$ é um vetor de velocidades lineares e angulares generalizadas; $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) \in R^{n\times n}$ é uma matriz de inércia definida positiva simétrica do sistema; $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in R^{n\times 1}$ é o vetor de forças centrífugas e de Coriolis; $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q}) \in R^{n\times(n-m)}$ e $\boldsymbol{u} \in R^{(n-m)\times 1}$ são as matrizes de transformação de entrada e o vetor de entrada, respectivamente; $\boldsymbol{\lambda} \in R^{m\times 1}$ é o vetor de multiplicadores de Lagrange e $\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q}) \cdot \lambda$ corresponde às forças de restrições relacionadas com as restrições cinemáticas.

As equações de restrições cinemáticas são aquelas que podem ser escritas e definidas como:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \tag{2-3}$$

onde $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) \in R^{m\times m}$ é uma matriz associada com as restrições cinemáticas do sistema, aqui restrições não-holonômicas. Para que possa retirar a matriz $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$ da Equação (2-2), obtêm-se uma matriz pertencente ao espaço nulo da matriz $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$. Seja $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$ uma matriz de posto cheio $(n - m)$ formado por um conjunto de campos vetoriais suaves e linearmente independentes abrangendo o espaço nulo de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$, ou seja,

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})^T \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})^T = \boldsymbol{0} \tag{2-4}$$

De acordo com as Equações (2-3) e (2-4), é possível encontrar um vetor função auxiliar $\boldsymbol{\nu}(t) \in R^{(n-m)\times 1}$ tal que para todo t de tal forma que

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(t) \tag{2-5}$$

Esse vetor de velocidades é um conjunto de velocidades independentes do sistema onde, se tiver esse conjunto definido, as outras velocidades também estarão definidas pela relação acima. Dessa forma, diferenciando a Equação (2-5), tem-se

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{\nu}(t) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}(t) \tag{2-6}$$

Logo, a equação de movimento terá o seguinte desenvolvimento com a aplicação da equação acima e da multiplicação à esquerda da Equação (2-2) por $\boldsymbol{S}^T$ para a retirada do vetor de restrições ($\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}$):

$$\boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot (\dot{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}}) + \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{2-7}$$

$$\boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \dot{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} \tag{2-8}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{S})^{-1} \cdot (\boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \dot{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{S}^T \cdot \boldsymbol{C}) \tag{2-9}$$

A Equação (2-9) satisfaz as restrições do sistema, útil para propósitos de controle já que Equação (2-3) de restrição de igualdade está integrada na equação dinâmica, resultando em um sistema não linear afim sem restrições. Além disso, permite o controle a partir das velocidades independentes do sistema.

2.2 Restrições Não-Holonômicas

As restrições que regem a cinemática de uma roda são a de rolamento puro e a de velocidade lateral nula [8].

Para as equações abaixo, x_a e y_a são as posições x e y do sistema no inercial, respectivamente e ϕ a orientação do sistema em relação ao inercial.

- Rolamento puro: A roda só gira quando o movimento acontecer na direção apropriada. O movimento da roda só ocorre na direção do plano da roda e é proporcional à rotação da mesma. Sendo $v_{x_{roda_i}}$ a velocidade longitudinal da roda i e y_{roda_i} a ordenada da roda i no sistema móvel, a restrição pode ser modelada da seguinte forma:

$$v_{x_{roda_i}} = r \cdot \dot{\theta}_i = \dot{x}_a \cdot \cos\phi + \dot{y}_a \cdot \sin\phi - \dot{\phi} y_{roda_i} \qquad (2\text{-}10)$$

– Velocidade lateral: A componente da velocidade da roda ortogonal ao plano da roda deve ser zero. Sendo $v_{y_{roda_i}}$ a velocidade lateral da roda i e x_{roda_i} a abcissa da roda i no sistema móvel, a restrição pode ser modelada da seguinte forma:

$$v_{y_{roda_i}} = 0 = -\dot{x}_a \cdot \sin\phi + \dot{y}_a \cdot \cos\phi + \dot{\phi} x_{roda_i} \qquad (2\text{-}11)$$

A Fig. 2.1 sintetiza as equações acima, evidenciando o rolamento puro e a velocidade lateral nula.

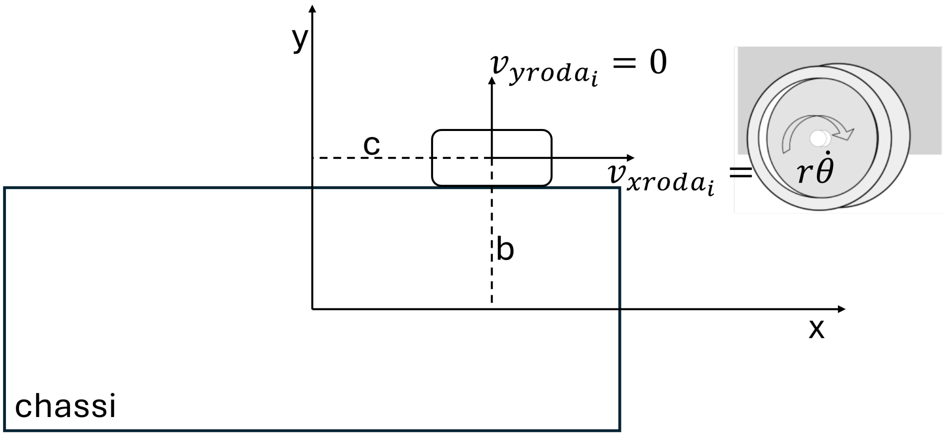

Figura 2.1: Esquema do chassi e uma roda, mostrando as velocidades da roda, em relação ao chassi, quando ocorre rolamento puro e velocidade lateral nula.

Entretanto, [36] prova que somente robôs móveis com rodas não centradas podem preservar restrições longitudinais e laterais. Como o robô utilizado nesta tese faz parte do grupo de rodas fixas e centradas, visto na Fig. 2.2, as restrições não serão cumpridas.

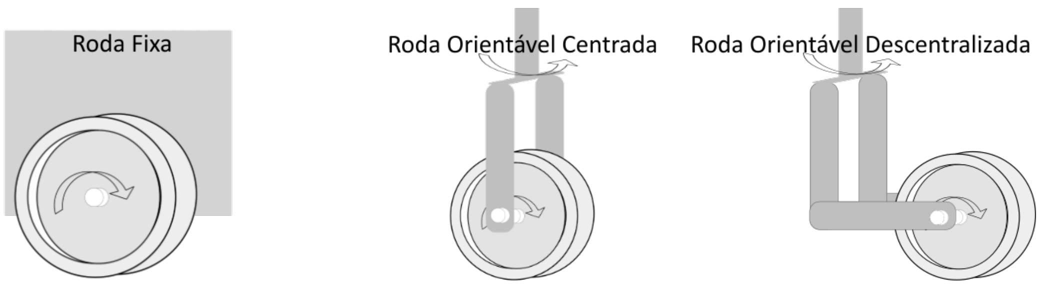

Figura 2.2: Tipos de rodas: roda fixa, orientável centrada e orientável descentralizada.

Logo, o deslocamento total da roda, como na Fig. 2.3, tem a inclusão do deslizamento longitudinal (ζ) e lateral (η) [66].

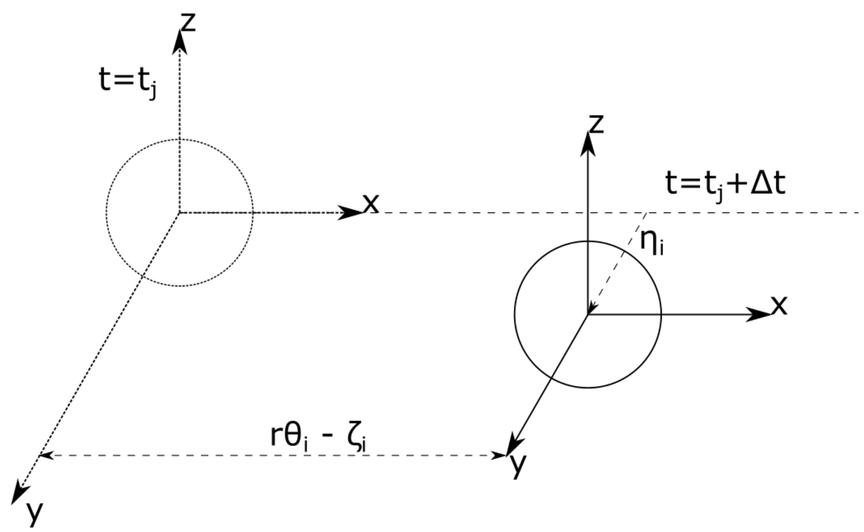

Figura 2.3: Sistema em movimento quando ocorre deslizamento lateral (η) e longitudinal ($r \cdot \theta - \zeta$).

2.3 Modelos Matemáticos

2.3.1 Configuração Física do Robô de 2 Rodas

A maior parte dos robôs comerciais oferece apenas velocidades como comandos de controle; entretanto um modelo dinâmico real recebe torques.

O RMRSS com duas rodas é apresentado na Fig. 2.4, que tem duas rodas acionadas independentemente. O robô possui um sistema de coordenadas xy fixado no seu chassi, com origem localizada entre as duas rodas, e o sistema de coordenadas do referencial inercial é representado por I_xI_y. O robô com duas rodas possui uma terceira roda, mas apenas de sustentação, não sendo uma roda ativa. Os parâmetros do robô são traduzidos pela Tabela 2.1.

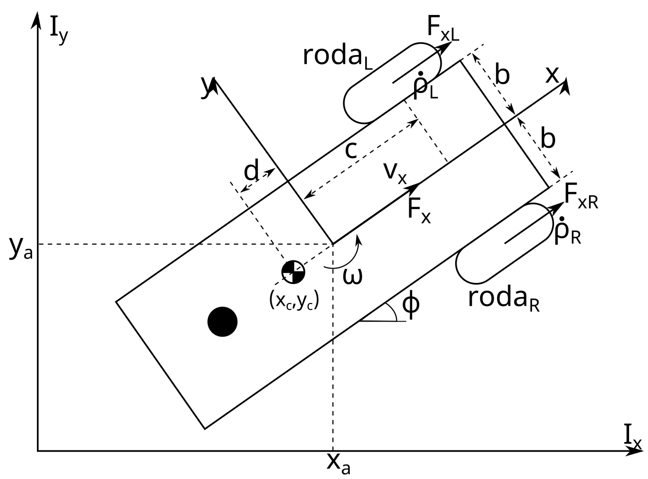

Figura 2.4: Configuração do robô com 2 rodas.

Tabela 2.1: Parâmetros do robô de duas rodas.

x_a	posição em x do sistema xy para o sistema I_xI_y
y_a	posição em y do sistema xy para o sistema I_xI_y
x_c	posição em x do centro de massa do chassi para o sistema xy
y_c	posição em y do centro de massa do chassi para o sistema xy
m_c	massa do chassi
I_c	momento de inércia do chassi em torno do seu eixo z
ϕ	orientação do chassi em relação ao sistema I_yI_x
v_x	velocidade longitudinal do chassi
ω	velocidade angular do chassi
$2 \cdot b$	largura do robô
c	distância do eixo dianteiro das rodas para o sistema xy
d	distância no eixo x do centro de massa do sistema para o sistema xy
m_r	massa da roda
r	raio da roda
I_r	momento de inércia da roda em torno do seu eixo de rotação
I_{r_z}	momento de inércia da roda em torno do eixo de rotação do chassi
$\dot{\theta}_R$	velocidade angular da roda da direita (*right*)
$\dot{\theta}_L$	velocidade angular da roda da esquerda (*left*)
$\dot{\rho}_R$	velocidade linear da roda da direita (*right*)
$\dot{\rho}_L$	velocidade linear da roda da esquerda (*left*)
F_{x_R}	força longitudinal aplicada na roda direita
F_{x_L}	força longitudinal aplicada na roda esquerda
F_a	força aerodinâmica de resistência do ar

2.3.2 Modelo de Predição 1

Nesse modelo, apenas a dinâmica do chassi é descrita matematicamente, simulando um modelo dinâmico de uma partícula orientada. A equação da dinâmica do sistema é escrita pela Equação (2-12) e as forças de tração são as entradas do sistema. A força aerodinâmica de resistência do ar é dada por $F_a = C_a \cdot {v_x}^2$, sendo C_a o coeficiente da força aerodinâmica [72]. Esse modelo não possui matriz de restrições cinemáticas, como mostrado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\phi} \\ \dot{v}_x \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cdot \cos\phi \\ v_x \cdot \sin\phi \\ \omega \\ \frac{F_{x_R} + F_{x_L} - F_a}{m_c} \\ \frac{(F_{x_R} - F_{x_L}) \cdot b}{I_c} \end{bmatrix} \tag{2-12}$$

2.3.3 Modelo de Predição 2

Para esse modelo, dispõe-se da dinâmica do chassi e das rodas, tendo os torques como entradas do sistema. Considerando-se todas as restrições não-holonômicas, mas sem deslizamento. Isso não quer dizer que o deslizamento não exista, apenas se está desconsiderando seu efeito no modelo.

Com a restrição de velocidade lateral sendo obedecida, as Equações (2-10) e (2-11) não-holonômicas das rodas possuem a seguinte forma:

$$0 = c \cdot \dot{\phi} + \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) - \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-13}$$

$$\dot{\theta}_R \cdot r = b \cdot \dot{\phi} + \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) + \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-14}$$

$$\dot{\theta}_L \cdot r = -b \cdot \dot{\phi} + \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) + \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) \tag{2-15}$$

As coordenadas generalizadas consideradas serão:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \phi \\ \theta_R \\ \theta_L \end{bmatrix} \tag{2-16}$$

Utilizando as Equações (2-10) e (2-11), a matriz de restrições cinemáticas tem a seguinte forma:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \cos(\phi) & c & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & b & -r & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & -b & 0 & -r \end{bmatrix} \tag{2-17}$$

Encontrando uma matriz pertencente ao espaço nulo de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$, obtêm-se:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{r \cdot (b \cdot \cos(\phi) + c \cdot \sin(\phi))}{2 \cdot b} & \frac{r \cdot (b \cdot \cos(\phi) - c \cdot \sin(\phi))}{2 \cdot b} \\ -\frac{r \cdot (c \cdot \cos(\phi) - b \cdot \sin(\phi))}{2 \cdot b} & \frac{r \cdot (c \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi))}{2 \cdot b} \\ \frac{r}{2 \cdot b} & -\frac{r}{2 \cdot b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-18}$$

Aplicando a relação Equação (2-5):

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{r\cdot(b\cdot\cos(\phi)+c\cdot\sin(\phi))}{2\cdot b} & \frac{r\cdot(b\cdot\cos(\phi)-c\cdot\sin(\phi))}{2\cdot b} \\ -\frac{r\cdot(c\cdot\cos(\phi)-b\cdot\sin(\phi))}{2\cdot b} & \frac{r\cdot(c\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))}{2\cdot b} \\ \frac{r}{2\cdot b} & -\frac{r}{2\cdot b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix} \tag{2-19}$$

Observando a equação acima, pode-se concluir que o vetor de velocidades independentes é constituído da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix} \tag{2-20}$$

Para obter a equação de movimento do modelo 2 através da Equação Euler-Lagrange, e considerando nula a energia potencial, necessita-se das velocidades linear e angular dos centros de massa do chassi e das rodas no sistema de coordenadas inercial. As posições de cada elemento e suas velocidades no sistema inercial são apresentadas nas equações abaixo:

– Chassi

$$\boldsymbol{p}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - d\cdot\cos\phi \\ y_a - d\cdot\sin\phi \end{bmatrix} \tag{2-21}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a + d\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi \\ \dot{y}_a - d\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi \end{bmatrix} \tag{2-22}$$

– Roda direita

$$\boldsymbol{p}_{r_R} = \begin{bmatrix} x_{r_R} \\ y_{r_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + c\cdot\cos\phi + b\cdot\sin\phi \\ y_a + c\cdot\sin\phi - b\cdot\cos\phi \end{bmatrix} \tag{2-23}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{r_R} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{r_R} \\ \dot{y}_{r_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a - c\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi + b\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi \\ \dot{y}_a + c\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi + b\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi \end{bmatrix} \tag{2-24}$$

– Roda esquerda

$$\boldsymbol{p}_{r_L} = \begin{bmatrix} x_{r_L} \\ y_{r_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + c\cdot\cos\phi - b\cdot\sin\phi \\ y_a + c\cdot\sin\phi + b\cdot\cos\phi \end{bmatrix} \tag{2-25}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{r_L} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{r_L} \\ \dot{y}_{r_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a - c\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi - b\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi \\ \dot{y}_a + c\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi - b\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi \end{bmatrix} \tag{2-26}$$

Agora, as energias cinéticas de cada elemento podem ser calculadas, como apresentado em seguida:

$$T_c = \frac{m_c\cdot d^2\cdot\dot{\phi}^2}{2} + m_c\cdot\sin(\phi)\cdot d\cdot\dot{\phi}\cdot\dot{x}_a - m_c\cdot\cos(\phi)\cdot d\cdot\dot{\phi}\cdot\dot{y}_a + \frac{I_c\cdot\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m_c\cdot\dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_c\cdot\dot{y}_a^2}{2} \tag{2-27}$$

$$
\begin{aligned}
T_{r_R} = {} & \frac{m_r \cdot b^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \sin(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{m_r \cdot c^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} \\
& - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_{r,z} \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_R^2}{2} \\
& + \frac{m_r \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{y}_a^2}{2}
\end{aligned}
\tag{2-28}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{r_L} = {} & \frac{m_r \cdot b^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} - m_r \cdot \cos(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{m_r \cdot c^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} \\
& - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_{r,z} \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_L^2}{2} \\
& + \frac{m_r \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{y}_a^2}{2}
\end{aligned}
\tag{2-29}
$$

Para o detalhamento do desenvolvimento matemático, ver Apêndice A. Pela cinemática, tem-se a relação ente as velocidades angulares das rodas com a velocidade linear e angular do chassi, como mostrado abaixo:

$$v_x = \frac{r \cdot (\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L)}{2} \tag{2-30}$$

$$\omega = \frac{r \cdot (\dot{\theta}_R - \dot{\theta}_L)}{2 \cdot b} \tag{2-31}$$

Então:

$$\dot{\theta}_R = \frac{v_x + b \cdot \omega}{r} \tag{2-32}$$

$$\dot{\theta}_L = \frac{v_x - b \cdot \omega}{r} \tag{2-33}$$

$$\ddot{\theta}_R = \frac{\dot{v}_x + b \cdot \dot{\omega}}{r} \tag{2-34}$$

$$\ddot{\theta}_L = \frac{\dot{v}_x - b \cdot \dot{\omega}}{r} \tag{2-35}$$

A equação de movimento final do sistema é:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\phi} \\ \dot{v}_x \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
v_x \cdot \cos(\phi) + c \cdot \omega \cdot \sin(\phi) \\
v_x \cdot \sin(\phi) - c \cdot \omega \cdot \cos(\phi) \\
\omega \\
\frac{r \cdot (\tau_R + \tau_L - c \cdot m_c \cdot \omega^2 \cdot r - d \cdot m_c \cdot \omega^2 \cdot r)}{2 \cdot I_r + m_c \cdot r^2 + 2 \cdot m_r \cdot r^2} - \frac{F_a}{(m_c + 2 \cdot m_r)} \\
\frac{r \cdot (b \cdot \tau_R - b \cdot \tau_L + c \cdot m_c \cdot \omega \cdot r \cdot v_x + d \cdot m_c \cdot \omega \cdot r \cdot v_x)}{2 \cdot I_r \cdot b^2 + I_c \cdot r^2 + 2 \cdot I_{r_z} \cdot r^2 + 2 \cdot b^2 \cdot m_r \cdot r^2 + c^2 \cdot m_c \cdot r^2 + d^2 \cdot m_c \cdot r^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot m_c \cdot r^2}
\end{bmatrix}
\tag{2-36}
$$

Nesse modelo, a dinâmica das rodas é incluída na dinâmica do chassi, uma vez que não ocorre deslizamento. Assim, a cinemática das rodas e do chassi é diretamente relacionada pela velocidade angular das rodas e pelas velocidades longitudinal e angular do chassi. A equação completa para o caso em que o centro de massa está fora da origem pode ser analisada no Apêndice A.

2.3.4 Modelo de Predição 3

O modelo 3 adiciona ao modelo 2 o deslizamento longitudinal no modelo matemático do sistema. Com a restrição de velocidade lateral sendo obedecida, as Equações (2-10) e (2-11) não-holonômicas das rodas para este sistema possuem a seguinte forma:

$$0 = c \cdot \dot{\phi} + \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) - \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-37}$$

$$\dot{\rho}_R = b \cdot \dot{\phi} + \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) + \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-38}$$

$$\dot{\rho}_L = -b \cdot \dot{\phi} + \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) + \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) \tag{2-39}$$

Ao vetor de coordenadas generalizadas são adicionadas duas variáveis que representaram a velocidade linear de cada roda. Os torques são as entradas do sistema. O novo vetor de coordenadas generalizadas é:

$$\boldsymbol{q} = [x_a \; y_a \; \phi \; \rho_R \; \rho_L \; \theta_R \; \theta_L]^T \tag{2-40}$$

onde ρ_R e ρ_L são as posições lineares da $roda_R$ e $roda_L$ respectivamente.

A matriz de restrições cinemáticas é dada por:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \cos(\phi) & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & -b & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-41}$$

Encontrando uma matriz pertencente ao espaço nulo de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$, obtêm-se:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{b\cdot\cos(\phi)+c\cdot\sin(\phi)}{2b} & \frac{b\cdot\cos(\phi)-c\cdot\sin(\phi)}{2b} & 0 & 0 \\ -\frac{c\cdot\cos(\phi)-b\cdot\sin(\phi)}{2b} & \frac{c\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi)}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-42}$$

Aplicando a relação Equação (2-5):

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \frac{b\cdot\cos(\phi)+c\cdot\sin(\phi)}{2b} & \frac{b\cdot\cos(\phi)-c\cdot\sin(\phi)}{2b} & 0 & 0 \\ -\frac{c\cdot\cos(\phi)-b\cdot\sin(\phi)}{2b} & \frac{c\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi)}{2b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \end{bmatrix} \tag{2-43}$$

Observando a equação acima, pode-se concluir que o vetor de velocidades independentes é constituído da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\nu}(t) = [\dot{\rho}_R \ \dot{\rho}_L \ \dot{\theta}_R \ \dot{\theta}_L]^T \tag{2-44}$$

As velocidades do chassi e das rodas continuam as mesmas dadas pelas equações Equações (2-22), (2-24) e (2-26), logo as energias cinéticas não se alteram, mas as derivadas da Equação (2-1) alteram-se por conta do novo conjunto de coordenadas generalizadas. O desenvolvimento da dinâmica encontra-se no Apêndice A.

Ainda que o vetor de velocidades independentes exista, não se trabalha com essas velocidades quando com robôs móveis com rodas, mas sim com as velocidades do chassi. Pela cinemática, tem-se a relação ente as velocidades lineares das rodas com a velocidade linear e angular do chassi, como mostrado abaixo:

$$v_x = \frac{(\dot{\rho}_R + \dot{\rho}_L)}{2} \tag{2-45}$$

$$\omega = \frac{(\dot{\rho}_R - \dot{\rho}_L)}{2 \cdot b} \tag{2-46}$$

Então:

$$\dot{\rho}_R = v_x + b \cdot \omega \tag{2-47}$$

$$\dot{\rho}_L = v_x - b \cdot \omega \tag{2-48}$$

$$\ddot{\rho}_R = \dot{v}_x + b \cdot \dot{\omega} \tag{2-49}$$

$$\ddot{\rho}_L = \dot{v}_x - b \cdot \dot{\omega} \tag{2-50}$$

Já para esse modelo, a dinâmica das rodas são expostas através dos torques aplicados nas rodas e das forças de tração entre as rodas e o solo, como na Equação (2-51) abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\phi} \\ \dot{v}_x \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cdot \cos(\phi) + c \cdot \omega \cdot \sin(\phi) \\ v_x \cdot \sin(\phi) - c \cdot \omega \cdot \cos(\phi) \\ \omega \\ \frac{F_{x_R} + F_{x_L} - m_c \cdot \omega^2 \cdot (c+d) - F_a}{m_c + 2 \cdot m_r} \\ \frac{r \cdot \tau_R - r \cdot \tau_L + m_c \cdot \omega \cdot vx \cdot (c+d)}{2 \cdot m_r \cdot b^2 + m_c \cdot c^2 + 2 \cdot m_c \cdot c \cdot d + m_c \cdot d^2 + I_c + 2 \cdot I_{r_z}} \\ \frac{\tau_R - F_{x_R} \cdot r}{I_r} \\ \frac{\tau_L - F_{x_L} \cdot r}{I_r} \end{bmatrix} \tag{2-51}$$

2.3.5
Configuração Física do Robô de 4 Rodas

Nessa seção, o modelo para um RMRSS com quatro rodas, como visto na Fig. 2.5, é apresentado, contendo também as rodas acionadas independentemente. O robô possui um sistema de coordenadas xy fixado no seu chassi, com origem localizada entre as duas rodas, e possui o sistema de coordenadas de referência em OI_xI_y. Os parâmetros do robô são apresentados na Tabela 2.2. Como os parâmetros do chassi e os sistemas de coordenadas continuam os mesmos apresentados na Tabela 2.1, eles não foram mostrados nessa nova tabela. Os torques são as entradas do sistema. A Fig. 2.6 mostra em detalhe as velocidades lineares das rodas.

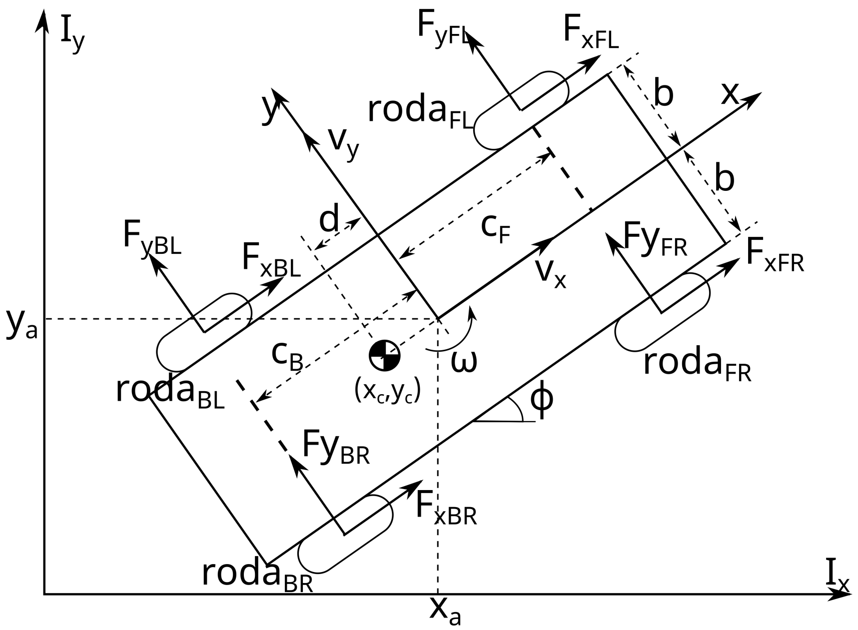

Figura 2.5: Configuração do robô com 4 rodas.

Tabela 2.2: Parâmetros do robô de quatro rodas.

v_x	velocidade longitudinal do chassi
v_y	velocidade lateral do chassi
ω	velocidade angular do chassi
$2 \cdot b$	largura do robô
c_F	distância do eixo dianteiro das rodas para o sistema xy
c_B	distância do eixo traseiro das rodas para o sistema xy
d	distância no eixo x do centro de massa do sistema para o sistema xy
m_r	massa da roda
r	raio da roda
I_r	momento de inércia da roda em torno do seu eixo de rotação
$I_{r_{zF}}$	momento de inércia das rodas dianteiras em torno do eixo de rotação do chassi
$I_{r_{zB}}$	momento de inércia das rodas traseiras em torno do eixo de rotação do chassi
$\dot{\theta}_{FR}$	velocidade angular da roda da dianteira direita (*front right*)
$\dot{\theta}_{FL}$	velocidade angular da roda da dianteira esquerda (*front left*)
$\dot{\theta}_{BR}$	velocidade angular da roda da traseira direita (*back right*)
$\dot{\theta}_{BL}$	velocidade angular da roda da traseira esquerda (*back left*)
$\dot{\rho}_{FR}$	velocidade longitudinal da roda da dianteira direita (*front right*)
$\dot{\rho}_{FL}$	velocidade longitudinal da roda da dianteira esquerda (*front left*)
$\dot{\rho}_{BR}$	velocidade longitudinal da roda da traseira direita (*back right*)
$\dot{\rho}_{BL}$	velocidade longitudinal da roda da traseira esquerda (*back left*)
$\dot{\eta}_{FR}$	velocidade lateral da roda da dianteira direita (*front right*)
$\dot{\eta}_{FL}$	velocidade lateral da roda da dianteira esquerda (*front left*)
$\dot{\eta}_{BR}$	velocidade lateral da roda da traseira direita (*back right*)
$\dot{\eta}_{BL}$	velocidade lateral da roda da traseira esquerda (*back left*)
$F_{x_{FR}}$	força longitudinal aplicada na roda dianteira direita
$F_{x_{FL}}$	força longitudinal aplicada na roda dianteira esquerda
$F_{x_{BR}}$	força longitudinal aplicada na roda traseira direita
$F_{x_{BL}}$	força longitudinal aplicada na roda traseira esquerda

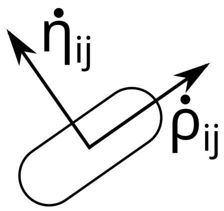

Figura 2.6: Velocidades longitudinal e lateral das rodas. Os índices i e j refornecem-se a F ou B e a R ou L, respectivamente.

2.3.6 Modelo de predição 4

Esse sistema, além do deslizamento longitudinal, terá também o deslizamento lateral, que será a própria velocidade lateral da roda. A partir das Equações (2-10) e (2-11), as equações não-holonômicas das rodas para este sistema possuem a seguinte forma:

$$\dot{\eta}_{\mathrm{FR}} = c_F \cdot \dot{\phi} + \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) - \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-52}$$

$$\dot{\eta}_{\mathrm{FL}} = c_F \cdot \dot{\phi} + \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) - \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-53}$$

$$\dot{\eta}_{\mathrm{BR}} = \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) - c_B \cdot \dot{\phi} - \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-54}$$

$$\dot{\eta}_{\mathrm{BL}} = \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) - c_B \cdot \dot{\phi} - \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-55}$$

$$\dot{\rho}_{\mathrm{FR}} = b \cdot \dot{\phi} + \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) + \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-56}$$

$$\dot{\rho}_{\mathrm{FL}} = \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) - b \cdot \dot{\phi} + \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-57}$$

$$\dot{\rho}_{\mathrm{BR}} = b \cdot \dot{\phi} + \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) + \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-58}$$

$$\dot{\rho}_{\mathrm{BL}} = \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) - b \cdot \dot{\phi} + \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \tag{2-59}$$

Tendo o vetor de coordenadas generalizadas como na Equação (2-60),

$$\boldsymbol{q} = [x\ y\ \phi\ \eta_{FR}\ \eta_{FL}\ \eta_{BR}\ \eta_{BL}\rho_{FR}\ \rho_{FL}\ \rho_{BR}\ \rho_{BL}\ \theta_{FR}\ \theta_{FL}\ \theta_{BR}\ \theta_{BL}]^T \tag{2-60}$$

a matriz de restrições cinemáticas é descrita pela Equação (2-61) abaixo:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \sin(\phi) & -\cos(\phi) & -c_F & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) & -c_F & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) & c_B & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) & c_B & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\phi) & -\sin(\phi) & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\phi) & -\sin(\phi) & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\phi) & -\sin(\phi) & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\phi) & -\sin(\phi) & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-61}$$

Encontrando uma matriz pertencente ao espaço nulo de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$, obtêm-se:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \frac{b\cos(\phi)-c_B\sin(\phi)}{2b} & \frac{b\cos(\phi)+c_B\sin(\phi)}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \frac{c_B\cos(\phi)+b\sin(\phi)}{2b} & -\frac{c_B\cos(\phi)-b\sin(\phi)}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{c_B+c_F}{2b} & -\frac{c_B+c_F}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{c_B+c_F}{2b} & -\frac{c_B+c_F}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-62}$$

Aplicando a relação Equação (2-5):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\phi} \\ \dot{\eta}_{FR} \\ \dot{\eta}_{FL} \\ \dot{\eta}_{BR} \\ \dot{\eta}_{BL} \\ \dot{\rho}_{FR} \\ \dot{\rho}_{FL} \\ \dot{\rho}_{BR} \\ \dot{\rho}_{BL} \\ \dot{\theta}_{FR} \\ \dot{\theta}_{FL} \\ \dot{\theta}_{BR} \\ \dot{\theta}_{BL} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \frac{b\cos(\phi)-c_B\sin(\phi)}{2b} & \frac{b\cos(\phi)+c_B\sin(\phi)}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \frac{c_B\cos(\phi)+b\sin(\phi)}{2b} & -\frac{c_B\cos(\phi)-b\sin(\phi)}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2b} & -\frac{1}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{c_B+c_F}{2b} & -\frac{c_B+c_F}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{c_B+c_F}{2b} & -\frac{c_B+c_F}{2b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \\ \nu_6 \\ \nu_7 \end{bmatrix} \tag{2-63}$$

Observando a equação acima, pode-se concluir que o vetor de velocidades independentes é constituído da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\nu}(t) = [\dot{\eta}_{BR}\ \dot{\rho}_{FR}\ \dot{\rho}_{FL}\ \dot{\theta}_{FR}\ \dot{\theta}_{FL}\ \dot{\theta}_{BR}\ \dot{\theta}_{BL}]^T \tag{2-64}$$

A partir das Equações (2-52), (2-59) e (2-63), constata-se que as velocidades longitudinais das rodas do lado direito são iguais, bem como as do lado esquerdo. As velocidades laterais das rodas dianteiras são iguais e dependentes das velocidades laterias das rodas traseiras, que também são análogas entre si.

Alterando o conjunto das velocidades independente para um conjunto que contenha as velocidades relativas ao chassi, utiliza-se a cinemática do sistema para realizar a mudança de coordenadas, como nas Equações (2-65) e (2-66):

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{c_B}{2\cdot b} & \frac{-c_B}{2\cdot b} & 1 \\ \frac{1}{2\cdot b} & -\frac{1}{2\cdot b} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\rho}_{FR} \\ \dot{\rho}_{FL} \\ \dot{\eta}_{BR} \end{bmatrix} \tag{2-65}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_{FR} \\ \dot{\rho}_{FL} \\ \dot{\eta}_{BR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{bmatrix} \tag{2-66}$$

Por fim, a equação de movimento do sistema é mostrado na Equação (A-64), no Apêndice A.

2.3.7
Compêndio das Entradas e Saídas dos Modelos

Para simplificação de leitura e exposição, apresenta-se na Tabela 2.3 os sinais de controle e os estados de saída para cada modelo.

Tabela 2.3: Vetor de estados e sinais de controle para cada modelo.

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
$\boldsymbol{x}$	$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \phi \\ v_x \\ \omega \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \phi \\ v_x \\ \omega \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \phi \\ v_x \\ \omega \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ \phi \\ v_x \\ v_y \\ \omega \\ \dot{\theta}_{FR} \\ \dot{\theta}_{FL} \\ \dot{\theta}_{BR} \\ \dot{\theta}_{BL} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{u}$	$\begin{bmatrix} F_{xR} \\ F_{xL} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \tau_{FR} \\ \tau_{FL} \\ \tau_{BR} \\ \tau_{BL} \end{bmatrix}$

2.4 Forças de Interação entre Roda e Solo

A modelagem da interação entre a roda e o solo é fundamental já que é através da fricção entre eles que é gerado as forças que movimentam o RMR. Vários modelos são utilizados na literatura [54, 55], podendo ser modelos baseado em física, ou baseados em dados empíricos e semi-empíricos [56].

Um dos mais utilizados é o modelo de forças de interação desenvolvido por Pacejka [57], escolhido para ser utilizado neste trabalho por conta que seus parâmetros podem ser encontrados a partir da massa, sem a necessidade do conhecimento prévio das condições do terreno, nem do próprio modelo físico do sistema, além de se ter já parâmetros prontos na literatura para diversos modelos de veículos. Além disso, esse modelo de força retém as não linearidades da interação roda-solo. Trata-se de um modelo empírico de pneu, também conhecido por Fórmula Mágica, por não existir uma base física para a estrutura da equações. Apesar disso, as equações se adaptam a uma variedade de condições de operação.

A força de fricção vem a partir do atrito entre o pneu e o solo, descrito pelo seu coeficiente de atrito. A relação entre a força de atrito e o coeficiente é tipicamente descrita por:

$$F_x = F_N \cdot \mu \tag{2-67}$$

onde μ é mais conhecido como o coeficiente de atrito, F_x é a força de fricção ou força de tração longitudinal na roda e F_N é a força normal exercida pela roda. O coeficiente de atrito depende diretamente do deslizamento que ocorre entre as superfícies em contato. Logo, a força de fricção também dependerá do deslizamento.

O deslizamento é um fenômeno que aparece quando há uma velocidade relativa normalizada entre o solo e a roda [58]. A partir daqui, o deslizamento será denotado por s. A Equação (2-68) descreve essa relação de velocidades, onde v é a velocidade da roda em contato com o solo, r é o raio da roda e $\dot{\theta}$ a velocidade angular da roda, sendo então $r \cdot \dot{\theta}$ a velocidade linear da roda. Devido a dificuldade de encontrar a velocidade de contato da roda com o solo, esta pode ser entendida como a velocidade longitudinal do chassi, como exibido abaixo:

$$s = \frac{r \cdot \dot{\theta} - v}{\max(r \cdot \dot{\theta}, v)} \tag{2-68}$$

O deslizamento, sendo uma velocidade relativa, pertence ao intervalo $[-1, 1]$: quando negativo, o sistema esta em frenagem (a velocidade linear da roda é menor que a do chassi); quando positivo, está em processo de aceleração (a velocidade linear da roda é maior que a do chassi); igual a zero, o sistema está em rolamento puro da roda (a velocidade linear da roda é igual a do chassi).

As equações de Pacejka descrevem as forças longitudinais, laterais e o torque autocompensador; entretanto, neste trabalho, apenas as forças longitudinais serão consideradas. A escolha de focar exclusivamente nas forças longitudinais se deve ao fato de que, no movimento do RMRSS, essa é a força que exerce um efeito constante e significativo a todo instante do movimento. A fórmula é vista na Equação (2-69),

$$F_x = F_N \cdot D \cdot \sin\left(C \cdot \arctan\left(B \cdot \{[(1-E) \cdot s + E/B \cdot \arctan(B \cdot s)]\}\right)\right) \quad (2\text{-}69)$$

em que os coeficientes B, C, D e E são dados empíricos, podendo ser calculados a partir da massa do veículo [59].

Logo, comparando a Equação (2-67) e Equação (2-69), o coeficiente de atrito é dado pela equação abaixo:

$$\mu = D \cdot \sin\left(C \cdot \arctan\left(B \cdot \{[(1-E) \cdot s + E/B \cdot \arctan(B \cdot s)]\}\right)\right) \quad (2\text{-}70)$$

De acordo com [59], os parâmetros empíricos da fórmula acima podem ser calculados a partir das equações abaixo:

$$D = a_1 \cdot F_N^2 + a_2 \cdot F_N \quad (2\text{-}71)$$

$$BCD = \frac{a_3 \cdot F_n^2 + a_4 \cdot F_N}{e^{a_5 \cdot F_N}} \quad (2\text{-}72)$$

$$C = 1.65 \text{ (para força longitudinal)} \quad (2\text{-}73)$$

$$B = \frac{BCD}{CD} \quad (2\text{-}74)$$

$$E = a_6 \cdot F_N^2 + a_7 \cdot F_7 + a_8 \quad (2\text{-}75)$$

sendo que F_N precisa estar em kN e os parâmetros a_i são os coeficientes do pneu com a influencia da força normal. Esses valores são vistos na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Coeficientes para a fórmula de Pacejka com a influência do carregamento [59] para a força longitudinal

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_7
-21.3	1144	49.6	226	0.069	-0.006	0.056	0.486

A relação entre o deslizamento e o coeficiente de atrito pode ser observada na Fig. 2.7, implementada a partir da Equação (2-70), com uma massa de 40 kg. Essa figura mostra que em um determinado valor de deslizamento, o coeficiente de atrito é máximo, consequentemente a força longitudinal também terá o seu máximo em um determinado deslizamento.

A Fig. 2.8 mostra como a força longitudinal pode variar com a massa e o deslizamento.

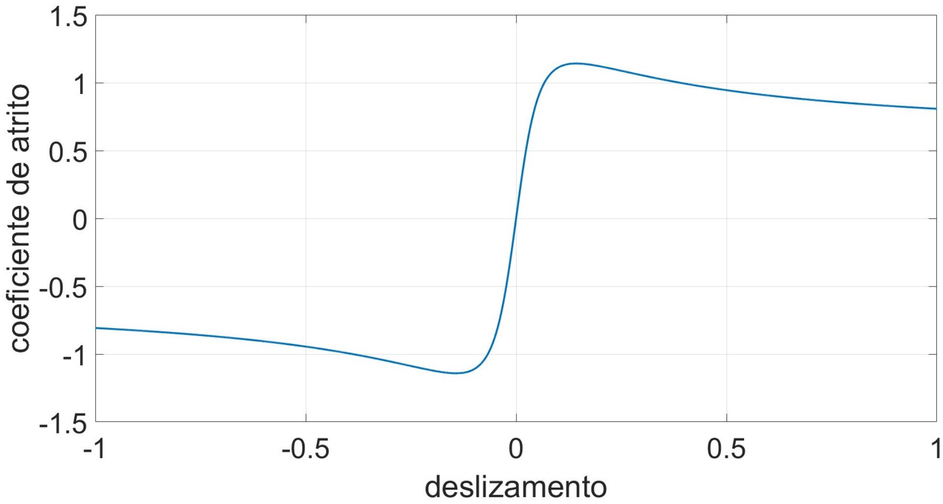

Figura 2.7: Variação do coeficiente de atrito com o deslizamento a partir da fórmula de Pacejka.

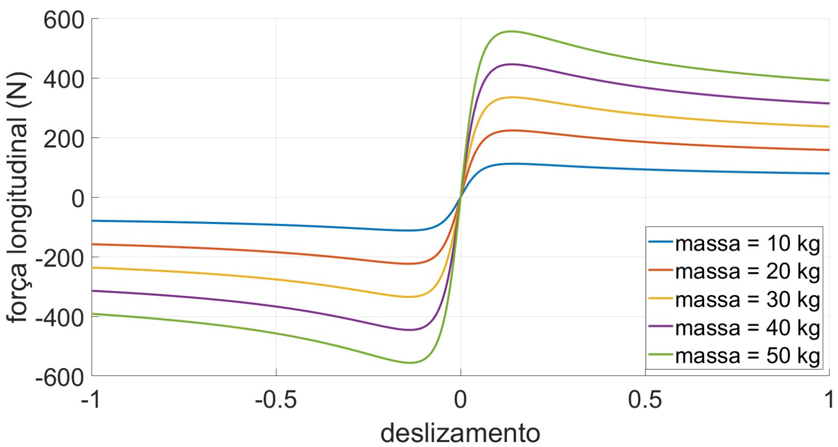

Figura 2.8: Relação do deslizamento com a força longitudinal a partir da fórmula de Pacejka com a variação da massa.

2.5 Validação dos Modelos

Para os modelos com 2 rodas, os valores dos parâmetros físicos são apresentados na Tabela 2.5. Já os valores dos parâmetros físicos para o modelo de 4 rodas é apresentado na Tabela 2.6.

Uma vez apresentados os modelos matemáticos dos RMR utilizados e da força de interação, será apresentada a validação dos modelos. Para isso, se baseou nos resultados de validação de [53]. A simulação foi feita em MATLAB com duração de 5 s, com um tempo de amostragem de $T = 10^{-2}$ s e utilizando o CVODES [94] para a integração do modelo dinâmico e simulação do sistema. Inicialmente o sistema está parado numa posição inicial com $x_a = 0$, $y_a = 0$ e $\phi = \pi/6$.

Em um primeiro cenário, apresentado na Fig. 2.9, foram aplicados torques

Tabela 2.5: Parâmetros físicos para os modelos com duas rodas.

Parâmetro	Valor	Unidade
m_c	15	kg
I_c	0,537	$kg \cdot m^2$
$2 \cdot b$	0,48	m
c	0,05	m
d_x	0	m
d_y	0	m
m_r	0,5	kg
r	0,095	m
I_r	0,0023	$kg \cdot m^2$
I_{r_z}	0,0011	$kg \cdot m^2$

Tabela 2.6: Parâmetros físicos para os modelos com quatro rodas.

Parâmetro	Valor	Unidade
m_c	10,4	kg
I_c	0,2309	$kg \cdot m^2$
$2 \cdot b$	0,3790	m
c_F	0,0975	m
c_B	0,1546	m
d_x	0	m
d_y	0	m
m_r	0,4	kg
r	0,05	m
I_r	0,0005	$kg \cdot m^2$
I_{r_zF}	0,0185	$kg \cdot m^2$
I_{r_zB}	0,0242	$kg \cdot m^2$

iguais nas rodas de magnitude $0,1\ Nm$. Observa-se que para torques iguais os modelos seguem em linha reta, divergindo apenas na distância alcançada, onde o modelo 4 foi o que apresentou a maior distância percorrida.

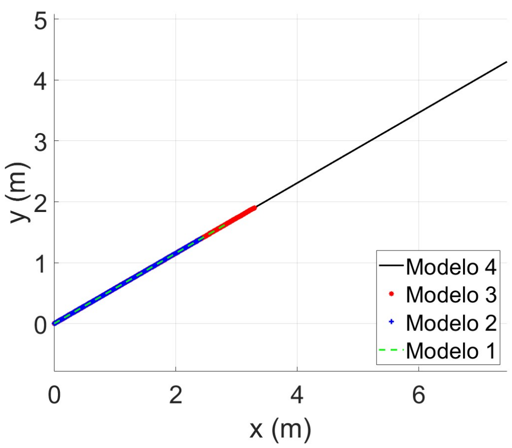

Figura 2.9: Aplicação de torques iguais nas rodas.

Em um segundo cenário, apresentado na Fig. 2.10, aplicou-se torques diferentes nas rodas: para o lado direito, aplicou-se um torque de $0,2\ Nm$ e para o lado esquerdo, um torque de $0,1\ Nm$. Novamente o modelo 4 percorreu uma maior distância tendendo a realizar uma trajetória de arco. O modelo 1 realizou uma trajetória circular.

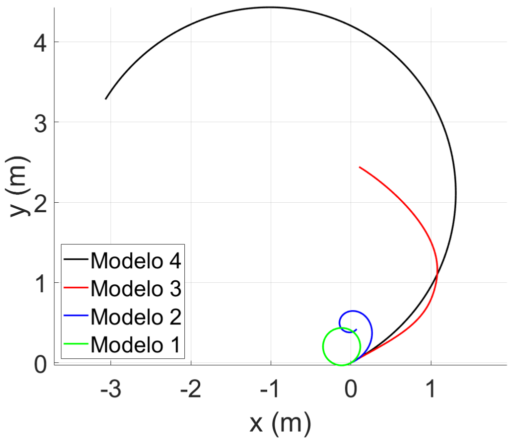

Figura 2.10: Aplicação de torques diferentes nas rodas.

Já os modelos 2 e 3, que possuem a dinâmica das duas rodas, realizam trajetórias diferentes. Enquanto o modelo 2 realiza uma curva mais fechada, o modelo 3 tende a abrir mais a curva, assemelhando-se mais à trajetória do modelo 4.

Com os gráficos apresentados nos dois cenários, há uma concordância nas trajetórias efetuadas a partir do torques aplicados. Quando torques iguais, o sistema tende a seguir sem alterar a sua direção. Já com torques diferentes, as curvas seguidas não foram similares, apesar de realizarem a curva para o sentido contrário a roda de maior torque aplicado. A razão é a inclusão dos deslizamentos no modelo de predição e simulação.

3
Controle Preditivo Baseado em Modelo

Neste capítulo, a teoria do MPC será abordada, focando no NMPC, já que os modelos de predição utilizados são não lineares, apresentando a sua implementação computacional e a sua aplicação nos modelos matemáticos.

3.1
Estratégia do MPC

Controle preditivo baseado em modelo (*Model Predicte Control*, MPC) tem como ponto principal a otimização de variáveis a partir da minimização de uma função objetivo. A Fig. 3.1 esquematiza a estratégia do MPC, mostrando como, a partir do estado atual $\boldsymbol{x}$, do sinal de controle passado $\boldsymbol{u}$ e do sinal de controle previsto (ou sinal de controle otimizado) $\boldsymbol{u}^*$, o estado previsto $\bar{\boldsymbol{x}}$ é calculado ao longo de um horizonte de controle N. A sequência de ações de controle previstas $\boldsymbol{u}^*$ são ajustadas, ao longo de cada iteração do controle, para mover o estado previsto $\bar{\boldsymbol{x}}$ em direção ao estado de referência $\boldsymbol{ref}$.

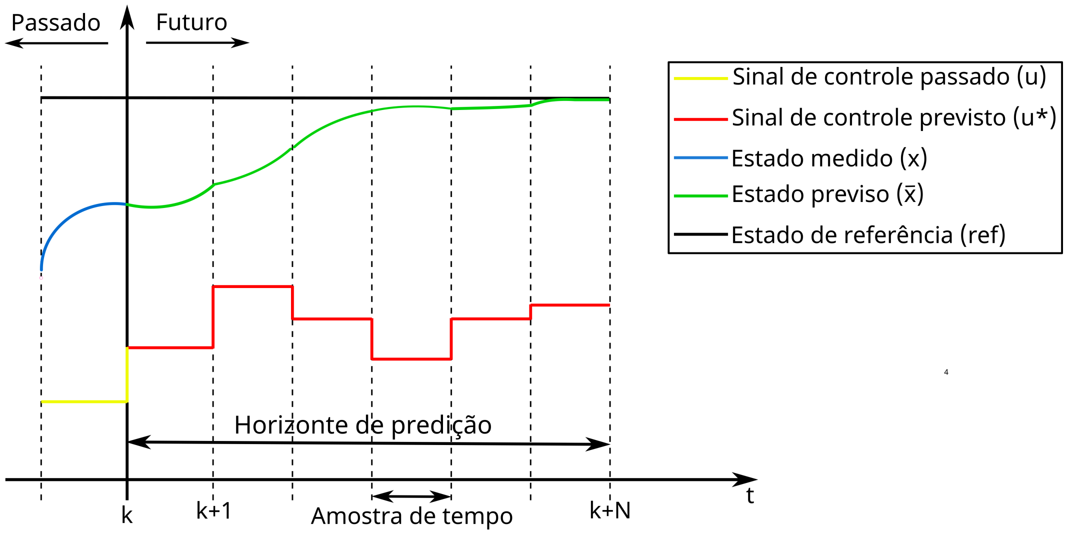

Figura 3.1: Estratégia do MPC

Camacho e Bordons [62] apresentam uma possível expressão generalizada para a função objetivo para cada amostra de tempo, representada pela Equação (3-1). Essa função apresenta o custo a cada amostra de tempo. Em alguns métodos, o esforço de controle não é calculado, enquanto que em outros, o sinal de controle aparece diretamente, como é o caso deste trabalho. A função custo é exibida abaixo:

$$l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{ref}\|_{\boldsymbol{Q}}^2 + \|\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_{ref}\|_{\boldsymbol{R}_1}^2 + \|\Delta \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{R}_2}^2 \tag{3-1}$$

Na equação acima, as matrizes $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}_1$ e $\boldsymbol{R}_2$ são pesos que consideram o comportamento futuro, e podem ser ajustados com referência a um controle padrão ou uma estratégia de projeto para um processo específico. A primeira parcela penaliza a diferença dos estados previstos com o estado de referência, a segunda parcela penaliza o sinal de controle previsto com a sua referência e a última parcela penaliza a variação do sinal de controle. Esta última parcela é importante para prevenir oscilações indesejadas no sinal de controle.

As referências utilizadas para o estado são equações parametrizadas pelo tempo, o que consiste em um problema de rastreamento de trajetória, ou seja, o controle preocupa-se em manter o sistema em uma determinada trajetória no espaço, dado uma configuração inicial para seus estados [73, 74].

Ao longo de todo o horizonte de controle N, com os estados e sinais de controle tendo seus valores inicias e pertencendo a um intervalo, o problema toma a forma de um problema de controle ótimo (*Optimal Control Problem* (OCP)), em que a função (Equação (3-2)) é minimizada, tendo como restrições o modelo de predição (Equação (3-2b)), o estado e sinal de controle inicial (Equação (3-2c) e Equação (3-2d)) e restrições de caixa do estado e do sinal de controle (Equação (3-2e) e Equação (3-2f)), que são limites inferiores e superiores impostos a essas variáveis que irão otimizar a função custo. Esse conjunto de equações em visualizado a seguir:

$$\min_{\boldsymbol{u}} \quad J_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} l(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)) \tag{3-2a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)) \quad , \tag{3-2b}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad , \tag{3-2c}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \quad , \tag{3-2d}$$

$$\boldsymbol{u} \in U, \quad \forall k \in [0, N-1], \tag{3-2e}$$

$$\boldsymbol{x} \in X, \quad \forall k \in [0, N] \tag{3-2f}$$

Após encontrar a sequência de sinal de controle (do tamanho do horizonte de predição) que otimize a função custo, apenas o primeiro sinal de controle é aplicado no sistema, enquanto que todo o restante do conjunto é descartado. Isso porque no instante seguinte de amostragem $\bar{\boldsymbol{x}}(k+1)$ já será conhecido e todas as etapas serão repetidas. Essa ideia de atualização constante do sinal de controle é apresentada na Fig. 3.2.

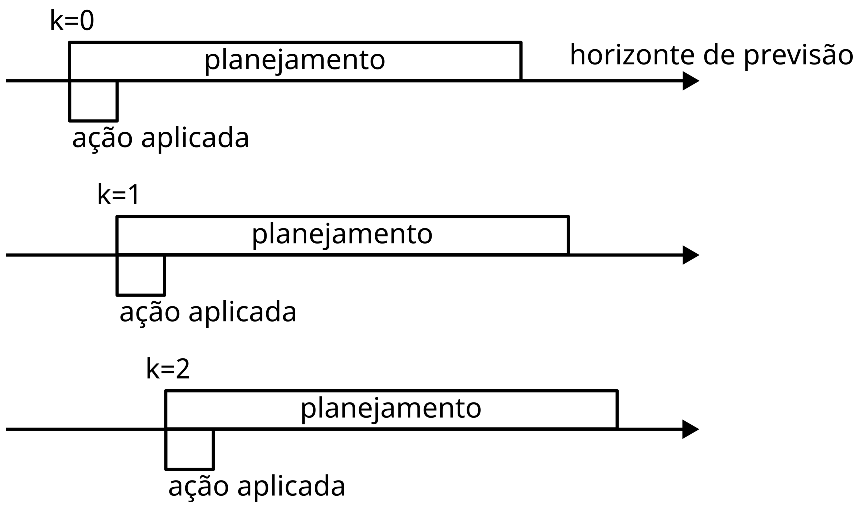

Figura 3.2: Atuação do sinal de controle com o tempo.

Com a estratégia do MPC definida, o foco se volta para o modelo utilizado na predição do comportamento do sistema. Para isso, a equação diferencial ordinária do modelo dinâmico é resolvida em intervalos discretos ao longo do horizonte, com um período de amostragem Δt, como apresentado na Equação (3-3) abaixo:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\right) \xrightarrow[\text{Amostra de Tempo } (\Delta t)]{\text{Discretização}} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)\right) \tag{3-3}$$

Na equação acima, quando ocorre a discretização, convertemos uma equação diferencial para uma forma discreta. Isso permite que o sistema seja analisado ou simulado em intervalos específicos de tempo k.

Com a discretização, transforma-se o OCP em um problema de programação não linear (*Nonlinear Programming Problem* (NLP)). Essa mudança na formulação do problema é justificada por já existirem diversos algoritmos de otimização numérica desenvolvidos para a solução de NLP que são disponíveis de forma aberta e podem ser utilizados em diversas linguagens. O problema agora terá a equação abaixo como base, sendo $\boldsymbol{\Phi}$ a função a ser minimizada, $\boldsymbol{w}$ as variáveis de decisão da minimização, $\boldsymbol{g}_1$ as restrições de desigualdade (dadas pelas restrições de caixa) e $\boldsymbol{g}_2$ as restrições de igualdade (dadas pelo modelo de predição). A função e as restrições são apresentadas a seguir:

$$\min_{\boldsymbol{w}} \quad \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{w}) \tag{3-4a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{w}) \leq \boldsymbol{0}, \tag{3-4b}$$

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0} \tag{3-4c}$$

A transcrição do OCP para o NLP pode ocorrer por dois métodos: disparo único (*single shooting*) e múltiplos disparos (*multiple shooting*) [70, 71]. O primeiro método minimiza a função otimizando apenas os sinais de controle. Já o segundo método, minimiza a função com a otimização dos sinais de controle e com os estados, permitindo uma maior continuidade nos sinais gerados, apesar de apresentar um maior custo computacional.

Adotando o método de disparos múltiplos para a resolução do NLP, as variáveis de decisão tornam-se os estados e os sinais de controle calculados no horizonte de predição, ou seja, $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{u}_0, \cdots, \boldsymbol{u}_{N-1}]$. Uma importância tem que ser dada ao conjunto de restrições de igualdade. Essas restrições irão garantir a continuidade da dinâmica do sistema, limitando o erro entre o estado previsto com o estado anterior ao longo de todo o horizonte de predição. Assim, esse conjunto de restrições é descrito abaixo:

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0) - \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{N-1}, \boldsymbol{u}_{N-1}) - \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{3-5}$$

Rakovic e Levine [65] conceituam um algoritmo básico de MPC. Explicitando a função custo e as restrições, obtém-se o Algoritmo 1. Dado um estado inicial, um controle inicial, um horizonte de predição e o tempo inicial, o algoritmo mede o estado atual, calcula a sequência de controles ótimos que minimize a função de custo sujeita às restrições. Aplica-se o primeiro elemento da sequência controle ótimo, incrementa-se o tempo e todo o processo é repetido a partir da medição dos estados.

Algorithm 1 Pseudocódigo para MPC

Requer: $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{u_0}$, $N > 0$ e $k := 0$
Garante: $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0}$ e $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u_0}$

1: medir o estado $\boldsymbol{x}(k)$.
2: calcular $\boldsymbol{u}^* = (\boldsymbol{u}^*(0), \boldsymbol{u}^*(1), ..., \boldsymbol{u}^*(N-1))$ que satisfaça

$$\min_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}} \quad J_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{3-6a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leq \mathbf{0}, \tag{3-6b}$$

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \tag{3-6c}$$

3: aplicar $\boldsymbol{u}^*(0)$.
4: $k = k + 1$.
5: voltar para passo 1.

3.2
Parâmetros e Referências Utilizados no NMPC

A Fig. 3.3 mostra o fluxo de controle aplicado ao sistema. Dados os estados de referência, que serão funções no tempo para a posição do centro de massa do robô (x_{ref}, y_{ref}), o erro para essa referência será medido e fornecido como entrada para o NMPC, que calcula os sinais de controle $\boldsymbol{u}^*$. Esses sinais são aplicados ao modelo dinâmico, que retorna a posição simulada (x, y). Para o NMPC, o modelo de predição será igual ao modelo dinâmico, ou seja, o modelo de predição irá descrever completamente o comportamento do sistema.

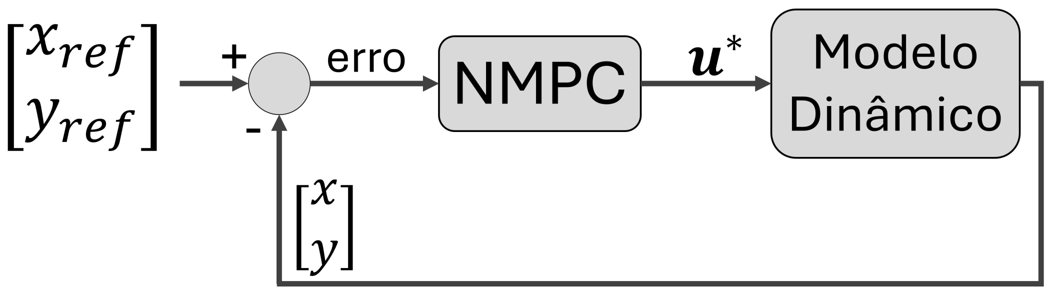

Figura 3.3: Fluxo de controle do NMPC aplicado ao RMR.

O sistema de controle foi implementado utilizando a ferramenta de otimização não linear CasADI [76], que utiliza o ***I**nterior **P**oint **O**ptimizer* (IPOPT) [75] como *solver* para o NLP. O CVODES [94] foi utilizado para a integração do modelo dinâmico e simulação do sistema. As simulações apresentadas em todo este trabalho foram realizadas com MATLAB instalado em uma máquina com Intel(R) Core(TM) i7-9750H CPU 2.60GHz e 8.00GB RAM.

O IPOPT é um algoritmo de otimização primal-dual (minimização de uma função objetivo sujeita a restrições) de ponto interior para NLP que utiliza método de busca de linha com filtro [103]. Como é bastante difundido na literatura por ser capaz de tratar problemas com um grande números de variáveis e restrições, foi escolhido para este trabalho.

Os modelos utilizados foram apresentados na Seção 2.3. Os parâmetros físicos dos modelos são encontrados nas Tabelas 2.1 e Tabela 2.2. A trajetória de referência é uma mudança dupla de faixa (*double lane change*), apresentada na Fig. 3.4, com duração total da trajetória de 10 segundos e tendo suas equações apresentadas na Equação (3-7) e na Equação (3-8), mostradas abaixo.

$$x_{ref}(t) = 2 \cdot t, \;\; 0 \leq t \leq 10 \tag{3-7}$$

$$y_{ref}(t) = \begin{cases} \frac{3.2}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{2}{20}\pi\left(10 \cdot t - 30\right)\right)\right), & 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{3.2}{2}\left(1 - \tanh\left(\frac{2}{25}\pi\left(10 \cdot t - 82.5\right)\right)\right), & 5 \leq t \leq 10 \end{cases} \tag{3-8}$$

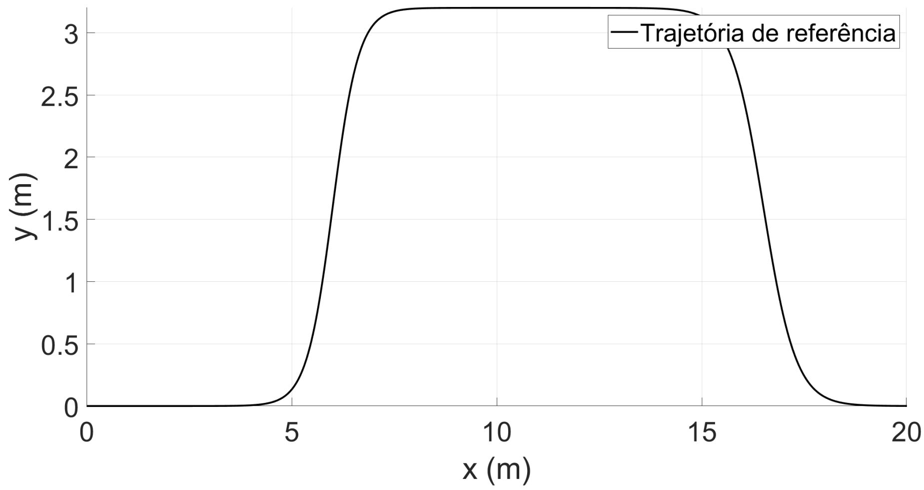

Figura 3.4: Trajetória de referência para mudança dupla de faixa.

A partir da derivação da equações acima, obtêm-se a curva de referência para a velocidade longitudinal do chassi, como visto na Fig. 3.5.

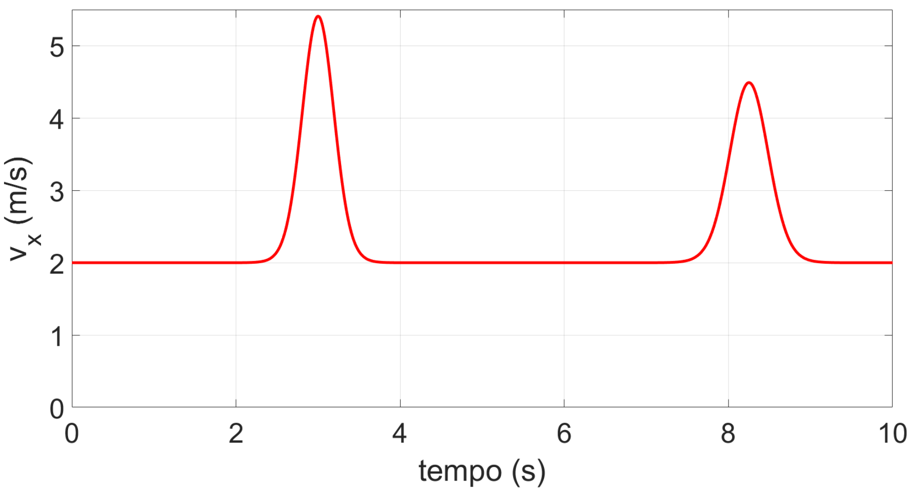

Figura 3.5: Velocidade longitudinal de referência para mudança dupla de faixa.

Os parâmetros utilizados no NMPC são mostrados na Tabela 3.1. Os valores apresentados foram obtidos de forma empírica. O tempo de amostragem utilizado para o NMPC é $T_{mpc} = 10^{-2}$ s, logo a duração total total do horizonte de predição pode ser obtida através da multiplicação do número de amostras N pelo tempo de amostragem T_{mpc}. Como pode ser visto, em maioria dos casos, o horizonte de predição utilizado foi de 15 ms, exceto para o modelo 2, cujo controle apresentou melhores resultados para um horizonte um pouco maior, 25 ms.

A velocidade inicial foi definida com um valor diferente de zero para evitar instabilidade numérica por possível divisão por zero. Os estados inciais são apresentados na Tabela 3.2, de acordo com as Tabelas 2.1, 2.2 e 2.3. As restrições de caixa para os estados não são impostas, mas como os estados fazem parte das variáveis de otimização (já que se realiza o método de múltiplos disparos) elas são definidas como $-\inf \leq \boldsymbol{x} \leq \inf$.

Tabela 3.1: Parâmetros do MPC utilizado na simulação nos modelos.

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
N	15	25	15	15
Q	$[10^4\ 10^4]$	$[10^4\ 10^4]$	$[10^4\ 10^4]$	$[10^4\ 10^4]$
$[R_1\ R_2]$	$[10^{-3}\ 10^{-3}]$	$[10^0\ 10^0]$	$[10^{-3}\ 10^0]$	$[10^{-3}\ 10^0]$

Tabela 3.2: Valores dos estados inicias para cada modelo.

	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
$\boldsymbol{x}$	$\begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ m \\ 0\ rad \\ 1.5\ m/s \\ 0\ rad/s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ m \\ 0\ rad \\ 1.5\ m/s \\ 0\ rad/s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ m \\ 0\ rad \\ 1.5\ m/s \\ 0\ rad/s \\ 15.7895\ rad/s \\ 15.7895\ rad/s \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0\ m \\ 0\ m \\ 0\ rad \\ 1.5\ m/s \\ 0\ m/s \\ 0\ rad/s \\ 30\ rad/s \\ 30\ rad/s \\ 30\ rad/s \\ 30\ rad/s \end{bmatrix}$

Já em relação as restrições para os sinais de controle, fez-se os passos dados pelo Algoritmo 2, que calcula a força longitudinal máxima que pode ser obtida a partir da massa do sistema. Esse valor será o valor limite do sinal de controle para o modelo 1 (Equação (3-9)), e o valor limite para os modelos 2, 3 e 4 será essa mesma força multiplicada pelo raio da roda (Equação (3-10)).

Algorithm 2 Calculo dos limites para os sinais de controle

Requer: força normal do sistema, $s \in [-1, 1]$
1: calcular a F_x com a Equação (2-69)
2: $F_{max} = \max(F_x)$
3: $\tau_{max} = F_{max} \cdot r$

$$-F_{max} \leq \boldsymbol{u} \leq F_{max} \tag{3-9}$$

$$-F_{max} \cdot r \leq \boldsymbol{u} \leq F_{max} \cdot r \tag{3-10}$$

3.3 Métricas de Avaliação

Para avaliar de forma quantitativa o desempenho dos controladores para o rastreamento das trajetórias de referência, serão utilizadas neste trabalho duas métricas que relacionam os valores dos estados calculados pelo MPC e os estados de referência dados pela trajetória a ser rastreada. A primeira é o erro quadrático médio (*Roor Mean Square Errors* (RMSE)), que faz a média das diferenças ao quadrado entre os valores calculados e os de referência. Quanto menor o valor do RMSE, melhor o desempenho do sistema de controle. A sua fórmula pode ser vista na Equação (3-11) abaixo:

$$RMSE(k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\|e_{k,i}\|^2}{n}} \tag{3-11}$$

O segundo método de avaliação utilizado será o coeficiente de correlação múltipla R^2, que representa a variância dos dados calculados em relação aos de referência, podendo medir a qualidade do ajuste (se o modelo explica a variabilidade dos dados) e comparar os modelos. Essa métrica possui valores dentro do intervalo de 0 e 1, sendo que quanto mais próximo de 1, mais perto o valor obtido está do valor de referência. A fórmula para o R^2 é dada pela Equação (3-12) abaixo:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2}{\sum_{k=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_k - \bar{\boldsymbol{x}}_k\|^2} \tag{3-12}$$

Essas métricas são complementares: o (RMSE) ajuda a identificar a precisão absoluta, enquanto o R^2 avalia a consistência no ajuste à trajetória de referência.

3.4 Aplicação do MPC e Resultados

O NMPC foi aplicado para o rastreamento de trajetória do robô utilizando os quatro modelos propostos. Para todos os casos, o mesmo modelo foi utilizado tanto para a predição do NMPC, como para a simulação do comportamento do sistema.

Para o modelo 1, as entradas são as forças de tração nas rodas, cuja solução é apresentada na Fig. 3.6. Inicialmente o sinal de controle é alto devido a inércia do sistema. Vencida a inércia, a força se mantém positiva e próxima a zero, como pode-se ver no detalhe da figura, devido a existência de força de resistência do ar.

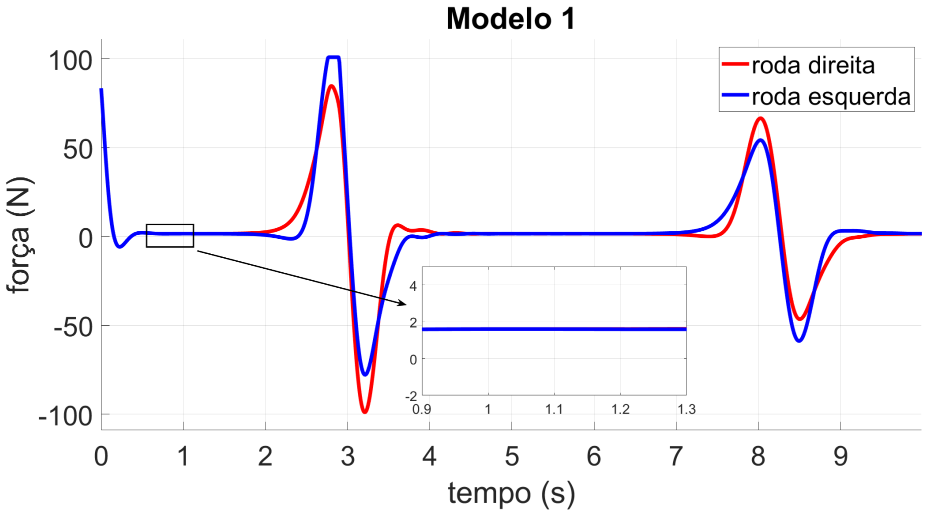

Figura 3.6: Forças aplicadas nas rodas para o controle do robô utilizando o modelo 1 como modelo de predição.

Quando nas curvas, (primeira mudança de faixa aproximadamente entre $[2, 4]$ s e segunda mudança de faixa aproximadamente entre $[7, 9]$ s.), os sinais de controle se alteram. Para os modelos de duas rodas, os sinais de controle começam se alterando para a roda direita na primeira mudança de faixa, já que essa roda possui um arco de curva maior para percorrer, mas logo o sinal de controle da roda esquerda se intensifica para que o RMR possa completar a mudança de faixa. Esse padrão se mantêm o mesmo nos torque aplicados no modelo 2 e no modelo 3, cujos sinais de controle podem ser observados nas Fig. 3.7 e 3.8, respectivamente.

O leitor pode visualizar o modelo 3 realizando a trajetória com a sua mudança de orientação junto aos torques aplicados em cada instante de tempo no vídeo disponível em `https://youtu.be/YDf3J413QIM`.

O mesmo ocorre para a segunda mudança de faixa, em que a roda esquerda tem uma mudança inicial do sinal de controle, seguido pelo incremento do sinal da roda direita para a finalização da curva.

Conforme mostrado na Fig. 3.9, no modelo 4, os torques se alteram quase simultaneamente para todas as rodas. Durante a primeira curva à esquerda, as rodas da direita exibem torques positivos, enquanto as rodas da esquerda exibem torques negativos. Isso é devido à natureza da trajetória de referência a ser seguida. As rodas do lado de fora da curva necessitam de um esforço maior para que o centro de massa se mantenha na trajetória. Esse padrão se reverte na segunda mudança de faixa.

Essa conjunto de torque similar para as rodas da direita e da esquerda se dá pelo modelo matemático, em que o vetor de coordenadas generalizadas do modelo (Equação (2-64)) mostra que as velocidades lineares das rodas do

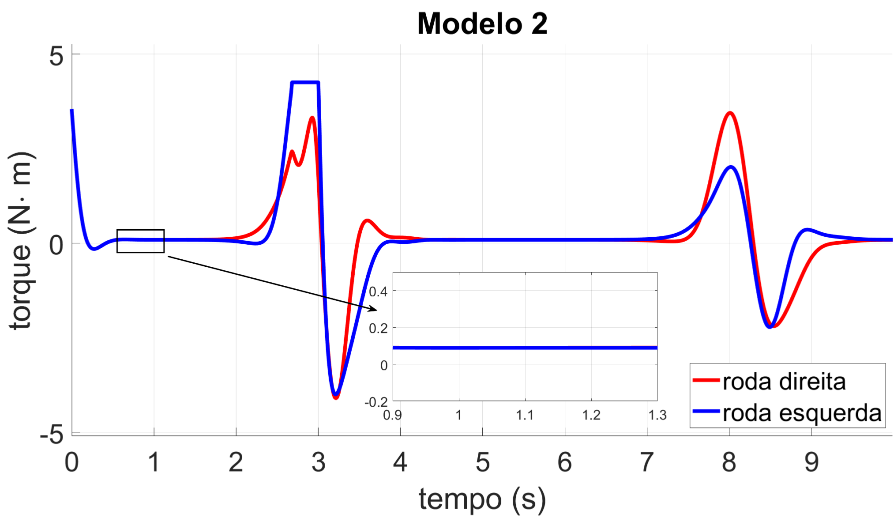

Figura 3.7: Torques aplicados nas rodas para o controle do robô utilizando o modelo 2 como modelo de predição.

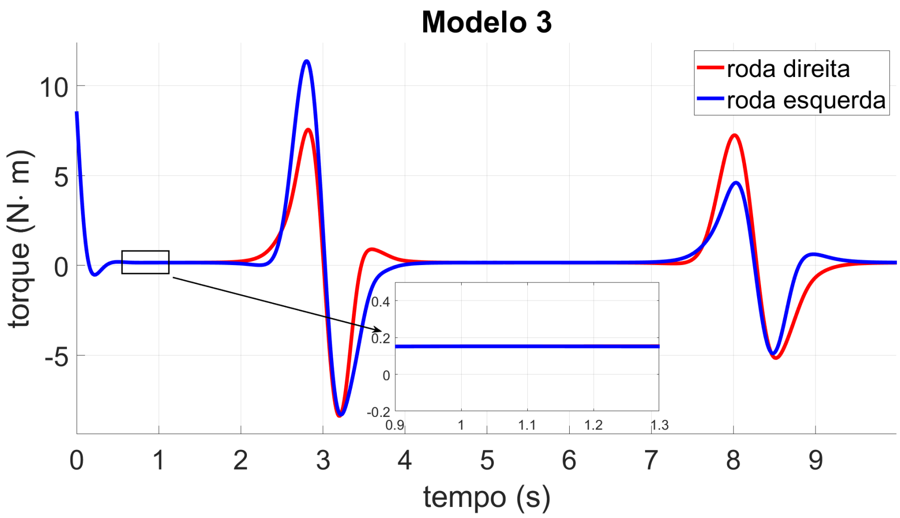

Figura 3.8: Torques aplicados nas rodas para o controle do robô utilizando o modelo 3 como modelo de predição.

lado direito são iguais, bem como as do lado esquerdo. Dessa forma, a curva dos torques calculados pelo NMPC corresponde ao modelo utilizado em que as rodas laterais do mesmo lado do robô possuem o mesmo comportamento no sentido longitudinal.

Calculados os sinais de controle para cada modelo, as trajetórias resultantes são apresentadas na Fig. 3.10. Em todos os casos, o NMPC foi capaz de rastrear a trajetória desejada. Pelo detalhe apresentado nesse gráfico, na saída da primeira mudança de faixa, o modelo 2 é o que mais se distancia da trajetória de referência.

O erro no rastreamento da trajetória calculado com RMSE, tanto no eixo x quanto no eixo y, é analisado a partir das Figs. 3.11 e 3.12. Dentre os modelos

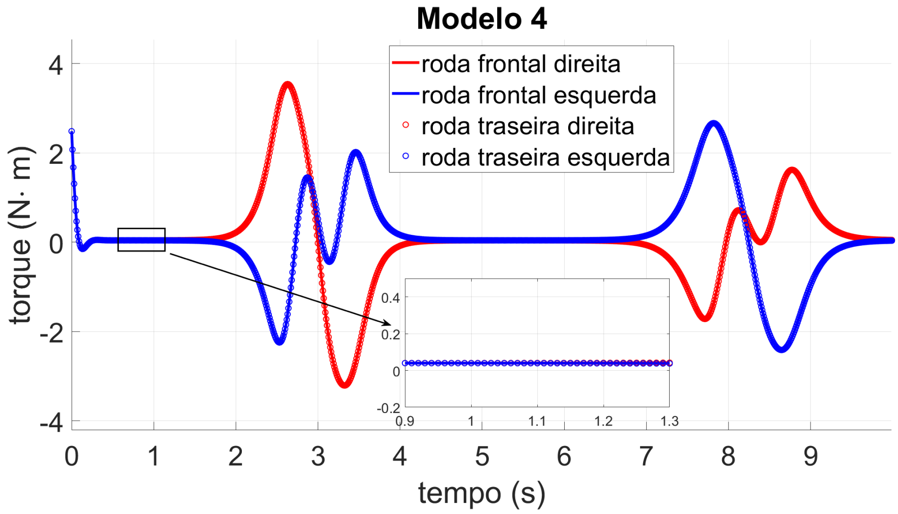

Figura 3.9: Torques aplicados nas rodas para o controle do robô utilizando o modelo 4 como modelo de predição.

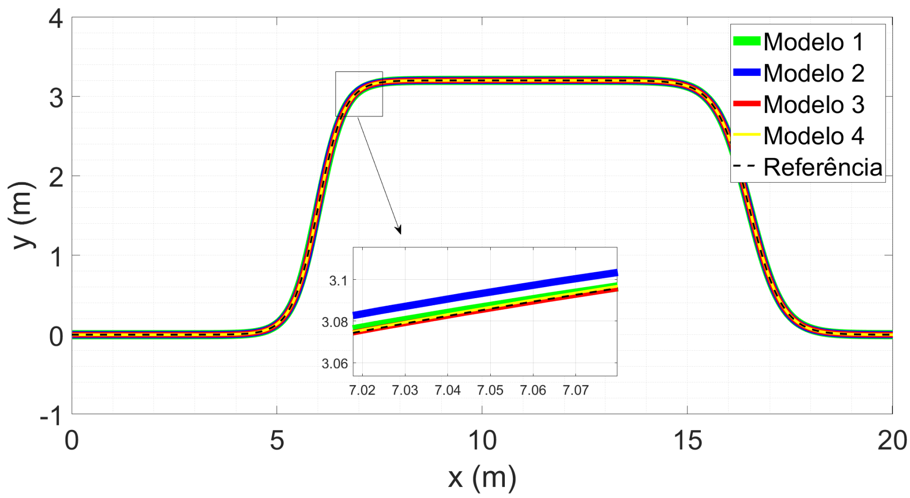

Figura 3.10: Trajetórias executas pelo robô com diferentes modelos de predição.

utilizados, o modelo 2 é aquele que apresenta o maior erro, tanto no eixo x quando no erro y, sugerindo maior dificuldade em lidar com mudanças bruscas na sua dinâmica. Já o controle dos modelos 1, 3 e 4 apresentam erros menores nos dois eixos, mostrando um desempenho melhor quando ocorrem variações abruptas de direção de movimento.

As Figs. 3.13 e 3.14 relacionam as velocidades lineares e angulares, respectivamente, do chassi ao longo do tempo para cada modelo. Durante as mudanças de faixa, as velocidades possuem uma grande variação, seguida por retorno rápido às suas velocidades estáveis. O gráfico da velocidade longitudinal ainda mostra a comparação da velocidade obtida com a velocidade de referência. A Fig. 3.15 apresenta o erro de rastreamento das velocidades longitudinais ao longo do tempo para cada modelo. Observa-se que, novamente, o modelo 2 foi

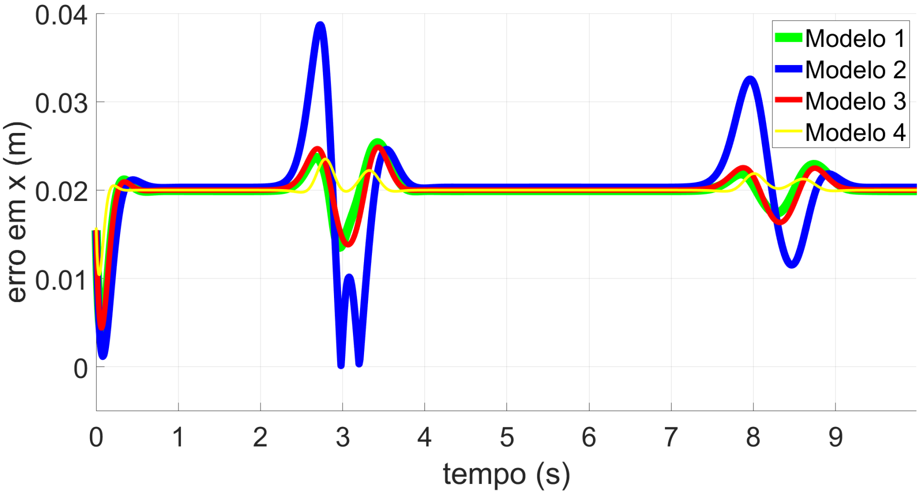

Figura 3.11: Comparação do erro de trajetória no eixo x para cada modelo de predição.

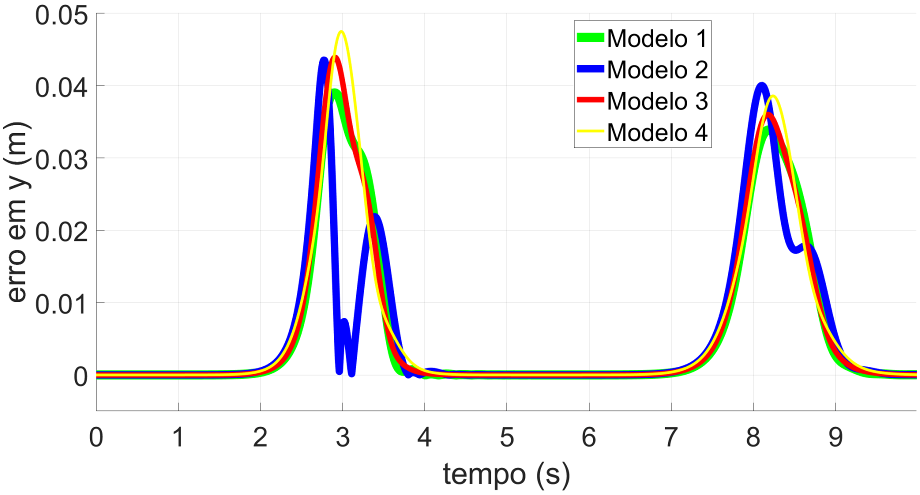

Figura 3.12: Comparação do erro de trajetória no eixo y para cada modelo de predição.

aquele que mais teve o maior erro.

A Tabela 3.3 mostra o custo computacional médio do NMPC, calculado a partir da média do tempo de otimização do NMPC em cada iteração, e o R^2 para cada modelo considerado.

Observa-se que o tempo de processamento aumenta consideravelmente conforme o modelo se torna mais complexo. Para todos os modelos, o R^2 para a variável x é 1, indicando que o ajuste feito pelo controle foi perfeito. Para a variável y, o valor de R^2 é próximo a 1, indicando que os modelos também conseguem rastrear a ordenada do robô. Embora todos os modelos tenham valores altos de R^2 para v_x, o modelo 2 apresentou um desempenho ligeiramente inferior. Isso pode indicar que o modelo 2 tem mais dificuldades em prever a

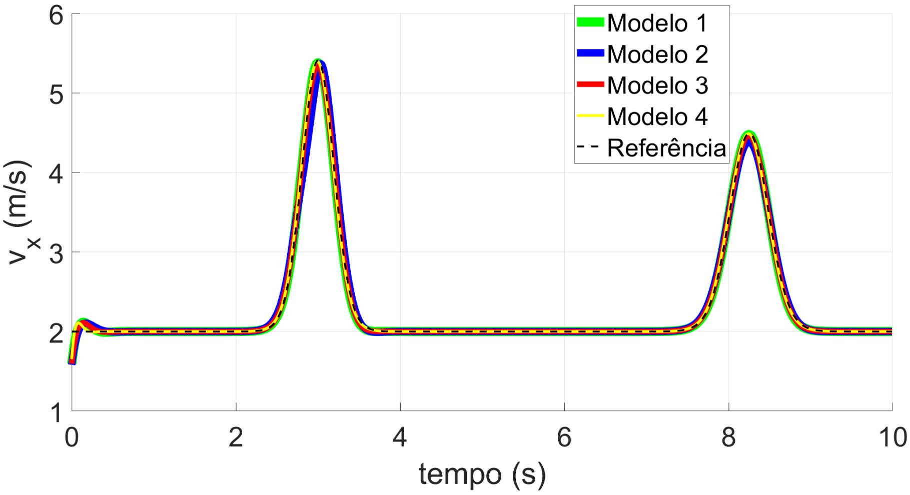

Figura 3.13: Comparação da variação da velocidade longitudinal do chassi ao longo do tempo para cada modelo de predição.

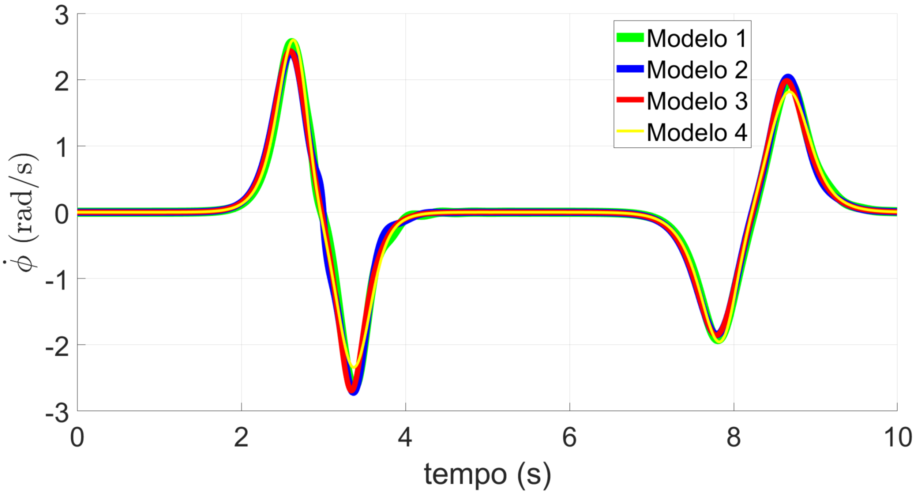

Figura 3.14: Comparação da variação da velocidade angular do chassi ao longo do tempo para cada modelo de predição.

Tabela 3.3: Tempo computacional médio do NMPC por iteração e métrica R^2 para cada modelo.

		R^2		
	Tempo (s)	eixo x	eixo y	v_x
Modelo 1	$0,0513$	1	$0,9999$	$0,9985$
Modelo 2	$0,0975$	1	$0,9999$	$0,9929$
Modelo 3	$0,8519$	1	$0,9999$	$0,9984$
Modelo 4	$2,2733$	1	$0,9999$	$0,9984$

velocidade v_x com a mesma precisão dos outros modelos.

Calculando-se os deslizamentos para os modelos 3 e 4 através da Equação (2-68), obtém-se os gráficos vistos nas Figs. 3.16 e 3.17, respectivamente. Observa-se que nos intervalos de tempo em que ocorrem as mudanças de faixa,

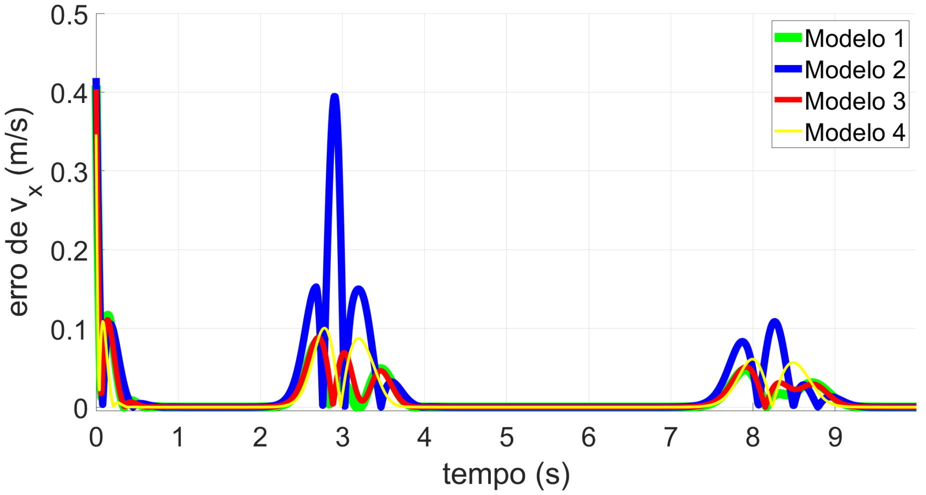

Figura 3.15: Comparação do erro de velocidade longitudinal do chassi ao longo do tempo para cada modelo de predição.

os deslizamentos seguem o mesmo padrão das curva de torque. Para o modelo 3, o deslizamento na entrada de cada curva é maior para a roda interna à curva, seguindo também o padrão apresentados pelos torques calculados para os modelos 3 e 4. Além disso, os valores dos deslizamentos ficam dentro do limite de $[-1, 1]$, sendo que o deslizamento do modelo 4 é dez vezes menor que o do modelo 3.

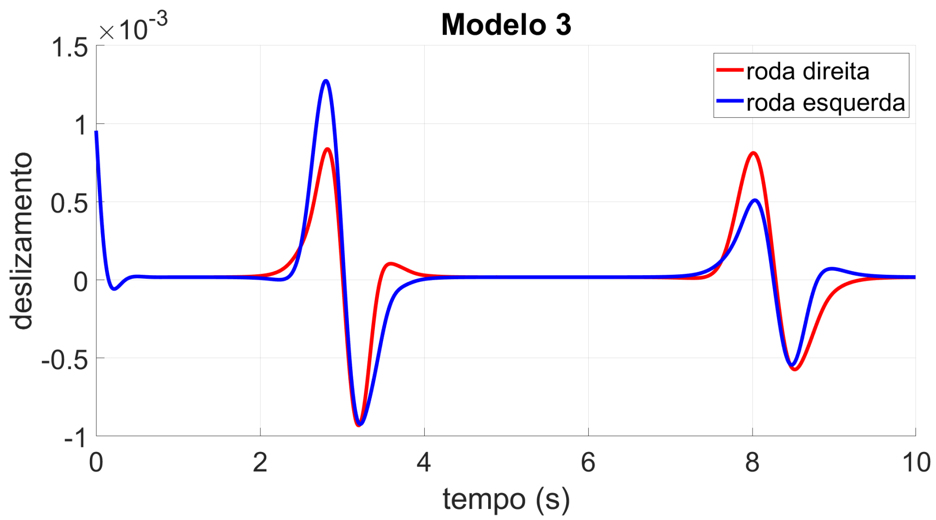

Figura 3.16: Deslizamentos das rodas calculados a partir do modelo 3 como modelo de predição.

A força longitudinal entre a roda e o solo, calculada a partir da Equação (2-69), é apresentada para os modelos 3 e 4 nas Figs. 3.18 e 3.19, respectivamente. A mesma análise aplicada ao deslizamento também é válida para esta grandeza, onde as forças geradas seguem o mesmo padrão do torque otimizado. Nota-se ainda que as forças do modelo 4 são inferiores às do modelo 3.

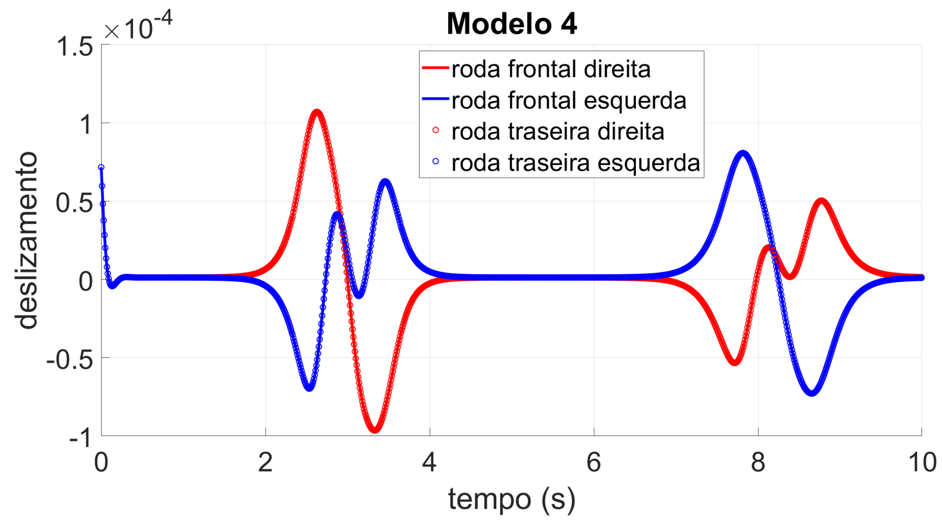

Figura 3.17: Deslizamentos das rodas calculados a partir do modelo 4 como modelo de predição.

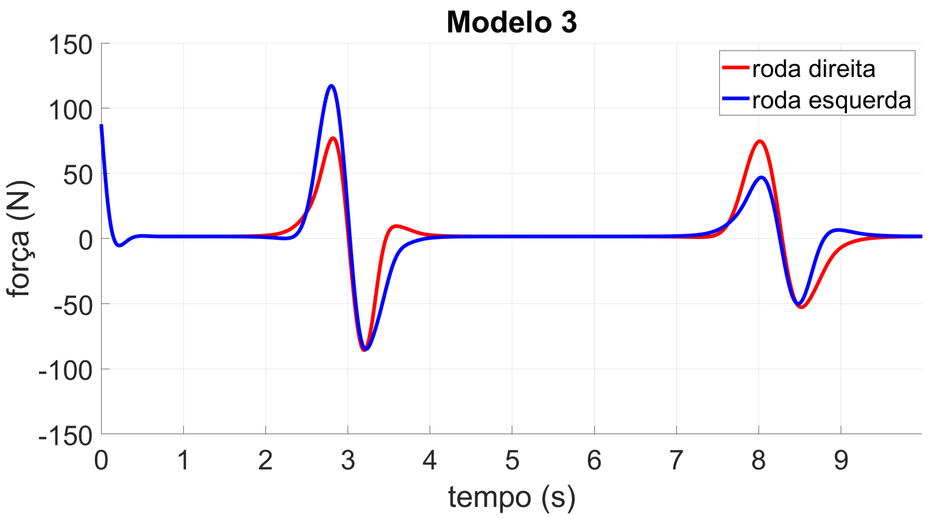

Figura 3.18: Forças de tração nas rodas calculados a partir do modelo 3 como modelo de predição.

A Fig. 3.20 mostra o tempo computacional do NMPC a cada iteração para o modelo 3 como modelo de predição. Observa-se que o controle utiliza um maior tempo quando principalmente na saída da inércia e a primeira curva (na Fig 3.10, entre os instantes $[0, 4]$ s e na Fig 3.20 entre as iterações $[0, 350]$). É nesse intervalo em que ocorre a computação das primeiras sequencias de controle otimizadas, o alcance da velocidade de referência para a trajetória e a chegada à primeira curva. Essas alterações causam maiores penalidades na otimização, necessitando de um maior esforço por parte do controle em diminui-las.

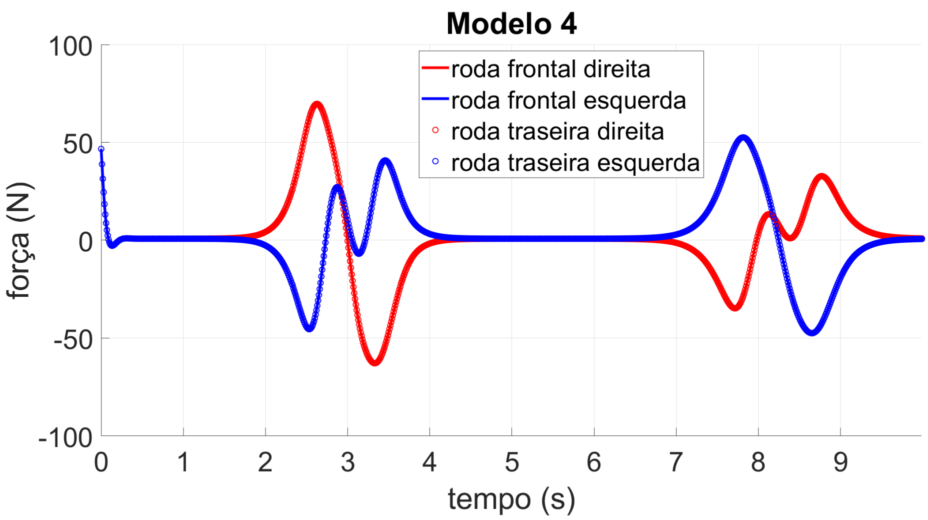

Figura 3.19: Forças de tração nas rodas calculados a partir do modelo 4 como modelo de predição.

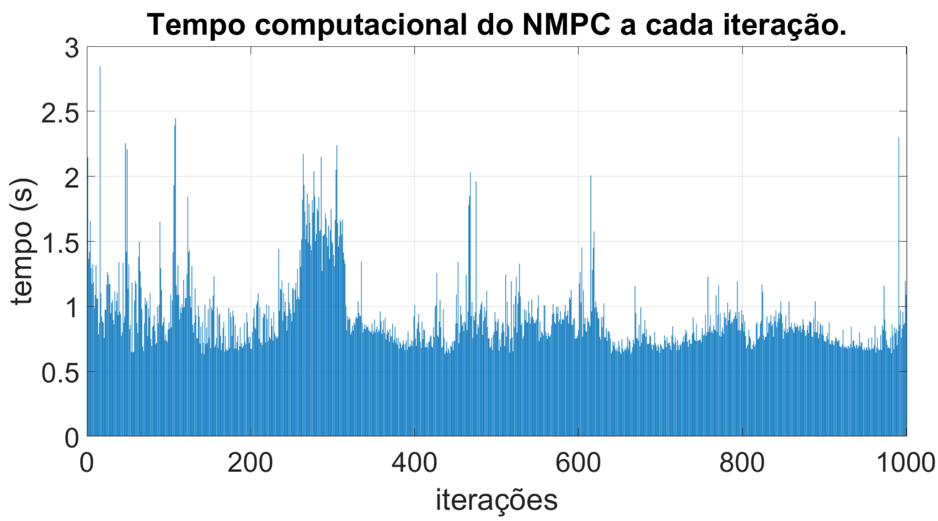

Figura 3.20: Tempo computacional de execução do NMPC a cada iteração quando utilizado o modelo 3 como modelo de predição.

3.5 Discussão

Este capítulo apresentou os resultados da aplicação de um NMPC para rastreamento de trajetória em RMRSS com modelos dinâmicos de diferentes graus de complexidade, utilizando o mesmo modelo para a predição do NMPC e para a simulação do sistema. Os resultados mostram a viabilidade do uso de NMPC para o controle para sistemas com alto grau de não linearidade, como é o caso dos modelos 2, 3 e 4, e com restrições, já que a discretização do modelo impõe restrições de desigualdade e igualdade.

O NMPC apresentou um desempenho muito similar para todos os modelos propostos. Em especial, os modelos 1 e 4 possuem erros próximos (Figs. 3.11

e 3.12), entretanto, o modelo 1 é o mais simples dinâmica e cinematicamente, logo será sempre mais rápido que os outros modelos e tão acurado quanto outros modelos. Esse efeito também é visto na Tabela 3.3, onde os valores da métrica R^2 são muito próximos.

Como o deslizamento afeta significativamente o comportamento do robô, especialmente em situações críticas como a mudança de orientação do chassi, é necessário considerá-lo na modelagem. Apenas os modelos 3 e 4 incluem tanto a dinâmica do chassi quanto das rodas, além dos deslizamentos. Dentre esses dois, o modelo 3 apresentou um custo computacional mais de quatro vezes menor para a trajetória proposta. Portanto, ele será o utilizado nas aplicações dos próximos capítulos. Além disso, espera-se que, em um robô real, um modelo mais completo que considere o deslizamento das rodas ofereça melhor desempenho, especialmente em altas velocidades.

O NMPC conseguiu realizar o rastreamento de trajetória com sucesso para todos os modelos apresentados. Os sinais otimizados pelo controle seguem um padrão similar, já que a referência é a mesma para todos os modelos, além da função custo. É importante salientar que as velocidades obtidas, tanto longitudinal quanto angular, também seguem o padrão de curva do sinal de controle, tento variação principalmente durante os intervalos de mudança de faixa.

Uma desvantagem observada na implementação do MPC foi o tempo computacional gasto. Isso, se aplicado a um sistema experimental torna-se inviável, já que para um sistema real o tempo do controle deve ficar idealmente abaixo de 10 ms [78]. Além disso, o MPC mostrou-se muito sensível aos parâmetros físicos do RMR e aos parâmetros da otimização, como a janela de previsão e os pesos da função custo. No entanto, deve se levar em consideração que a ferramenta utilizada para os testes e a implementação do controlador (MATLAB) não é a mais eficiente. Uma implementação em C++, por exemplo, iria apresentar um custo computacional significativamente menor [104].

Um alternativa para reduzir o custo computacional do controlador e ainda usar um modelo de predição representativo de um robô SS, que permita controlador o deslizamento de forma explícita, é propor uma estrutura hierárquica com camadas de diferentes níveis de complexidade. Essa abordagem é discutida e implementada no capítulo a seguir.

4
Controle Hierárquico Aplicado em Robôs do Tipo Skid-Steer

Este capítulo apresenta o desenvolvimento sistema de controle hierárquico com MPC para melhorar o tempo computacional de rastreamento de trajetórias utilizando dois modelos matemáticos de RMRSS em diferentes camadas do controlador.

4.1
Abordagem Hierárquica Proposta

Para tentar diminuir o tempo de processamento do controle MPC, uma estrutura hierárquica será implementada. Seu fluxo de controle é apresentado na Fig. 4.1.

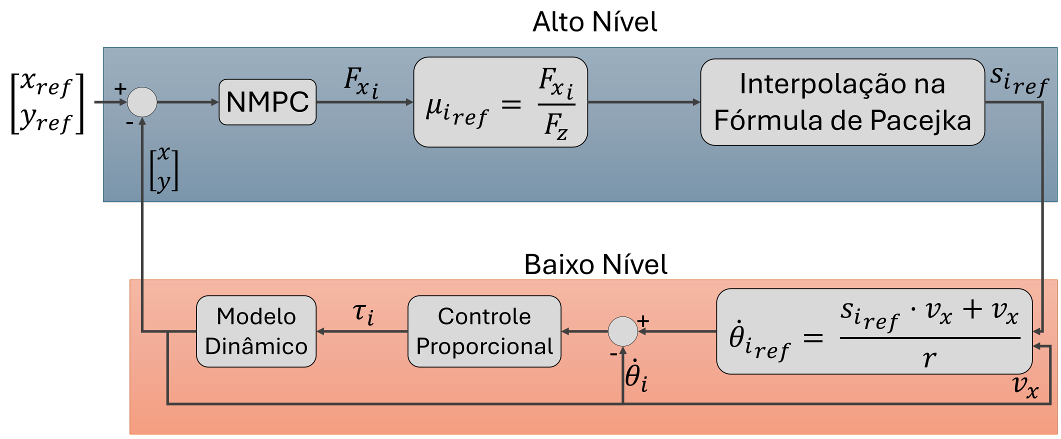

Figura 4.1: Sistema de controle hierárquico.

O controle hierárquico emprega uma abordagem de duas camadas com diferentes modelos e controladores em cada camada, além de diferentes tempos de amostragem. A camada de alto nível utiliza um modelo dinâmico simplificado do robô, o modelo 1 apresentado na Equação (2-12), com o MPC calculando as forças longitudinais de referência para o robô seguir uma trajetória usando um tempo de amostragem mais longo. A camada de baixo nível usa um controlador proporcional para rastrear as taxas de deslizamento desejadas com um tempo de amostragem mais curto e o modelo 3 (descrito pela Equação (2-51)) é utilizado para a simulação do sistema. Assim, o controle de alto nível roda numa frequência menor que o controle de alto nível.

Após a otimização das forças longitudinais pelo NMPC, o coeficiente de atrito é determinado utilizando a Equação (2-67). Em seguida, através de uma interpolação utilizando a fórmula de forças de Pacejka, é calculado o deslizamento correspondente àquela força. Esse processo proporciona valores de referência para o coeficiente de atrito e para o deslizamento de cada roda. Como a frequência de controle do nível superior é inferior à do outro nível, esses valores de referência permanecem constantes até a próxima amostragem do nível superior.

O controle de baixo nível recebe o valor do deslizamento de referência do controle de alto nível e o valor da velocidade longitudinal atual do chassi para calcular a velocidade angular de roda, dita aqui como velocidade angular de referência. Com essa velocidade angular de referência e a velocidade angular atual da roda, calcula-se com um controle proporcional um conjunto de torques que será aplicado ao modelo dinâmico do robô. Este modelo tem uma complexidade maior do que o modelo de predição utilizado pelo MPC.

4.2 Parâmetros e Referências Utilizados

As simulações utilizaram o modelo 1 como modelo de predição para o NMPC e o modelo 3 para a simulação do sistema. A escolha do modelo 1 como modelo de predição é devido ao seu tempo de processamento no NMPC ser o menor, como visto no capítulo anterior; e o modelo 3 sendo utilizado na simulação corrige os efeitos da dinâmica e do deslizamento que ocorrem no sistema. Esses modelos foram descritos com detalhes na Seção 2.3 e seus parâmetros físicos estão apresentados na Tabela 2.5. A formulação do NMPC é a mesma utilizada no capítulo anterior, com os parâmetros apresentados na Tabela 4.1. O estado inicial do sistema é apresentado pelos valores a seguir:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \pi/2 \; rad \\ 1.5 \; m/s \\ 0 \; rad/s \\ 15.78 \; rad/s \\ 15.78 \; rad/s \end{bmatrix} \tag{4-1}$$

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados no MPC não hierárquico e hierárquico.

Parâmetro	descrição	valor
$\boldsymbol{Q}$	peso do erro na trajetória	$[10^4\ 10^4]$
$[R_1\ R_2]$	peso do controle e da variação do controle	$[10^{-3}\ 10^0]$
K_p	ganho proporcional	4
N	horizonte de predição	25
T_s	atempo de amostragem do controle de baixo nível	$10^{-2}\ s$
T_{MPC}	tempo de amostragem do controle de alto nível (MPC)	$2.5 \cdot 10^{-1}\ s$

Os resultados para o sistema de controle hierárquico proposto foram obtidos para duas trajetórias de referência:

– mudança dupla de faixa, modelado por:

$$ref(t) = \begin{cases} [5 \cdot t; 1.25 \cdot (1 + \tanh((2/30) \cdot \pi \cdot (10 \cdot t - 30)))], & t <= 5, \\ [5 \cdot t; 1.25 \cdot (1 - \tanh((2/25) \cdot \pi \cdot (10 \cdot t - 82.5)))], & t > 5, \end{cases} \tag{4-2}$$

– circular, modelado por:

$$ref(t) = [\cos(t - \pi/2); \sin(t - \pi/2) + 1] \tag{4-3}$$

Comparações entre os sistemas de controle hierárquico e não hierárquico são apresentadas para ambas as trajetórias através de gráficos com a trajetória obtida e a desejada em cada caso, o cálculo do RMSE e do R^2 para as posições x e y do robô, o tempo de execução do controlador, e da análise dos torques aplicados nas rodas, da velocidade do chassi, do deslizamento e das velocidades angulares resultantes do controle do sistema. A estrutura do controle não-hierárquico é a mesma apresentada no capítulo anterior.

4.3 Resultados

4.3.1 Mudança dupla de faixa

A Fig. 4.2 mostra a trajetória de referência e as realizadas pelos dois sistemas de controle propostos. Os percursos obtidos pelos controladores mostram-se aproximados, apresentando uma diferença maior nas entradas e saídas das curvas. Essa diferença é melhor observada na Tabela 4.2, onde pode ser visto que o erro do controle não-hierárquico é menor que o do controle hierárquico.

O leitor pode visualizar o sistema realizando a trajetória com controle hierárquico no vídeo disponível em `https://youtu.be/XnAcYadz2xE`.

Apesar de apresentar o menor erro no rastreamento da trajetória, o controle não-hierárquico possui o maior custo computacional de processamento, visto na Tabela 4.3 que apresenta o tempo médio de cálculo do MPC para cada iteração, uma vez que o vetor de estado tem mais variáveis e o modelo utilizado é não-linear.

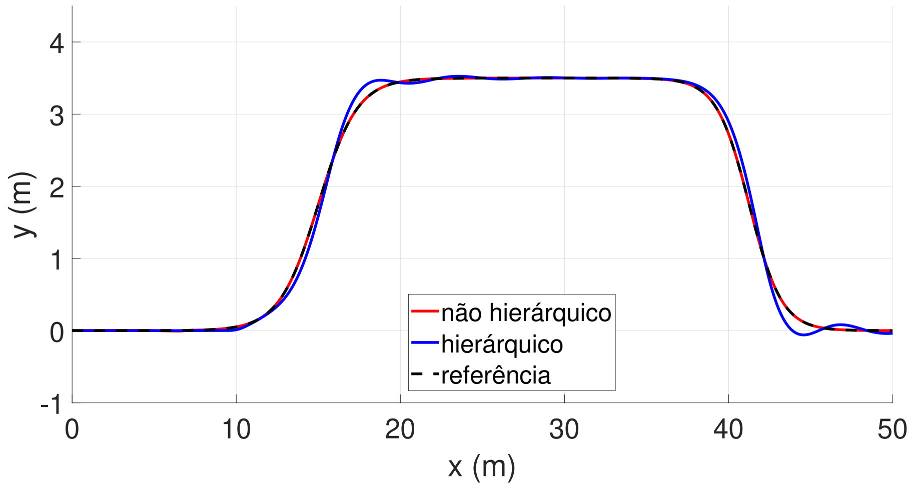

Figura 4.2: Trajetória realizada pelos controles MPC não hierárquico (vermelho) e MPC-hierárquico (azul).

Tabela 4.2: Erros para trajetória de mudança de faixa.

	RMSE		R2	
	eixo x (m)	eixo y (m)	eixo x	eixo y
Não Hierárquico	$2.4269 \cdot 10^{-1}$	$1.3519 \cdot 10^{-2}$	$9.9972 \cdot 10^{-1}$	$9.9993 \cdot 10^{-1}$
Hierárquico	$5.4657 \cdot 10^{-1}$	$6.7482 \cdot 10^{-2}$	$9.9861 \cdot 10^{-1}$	$9.9825 \cdot 10^{-1}$

Tabela 4.3: Tempo médio de processamento do MPC a cada iteração para trajetória de mudança de faixa.

	Tempo de processamento (s)
Não Hierárquico	0.9179
Hierárquico	0.0176

Os torques aplicados nas rodas são mostrados na Fig. 4.3. Os torques possuem uma grande variação inicialmente, e quando o robô começa a entrar na primeira curva (aproximadamente no segundo 3), essa variação diminui. A alta variação inicial do torque também pode ser observada na velocidade do chassi, apresentada na Fig. 4.4, que tem uma alta crescente, seguida por uma diminuição do seu valor até estabilizar em aproximadamente 5 m/s. Após isso, observa-se uma mudança de velocidade durante as curvas de mudança de

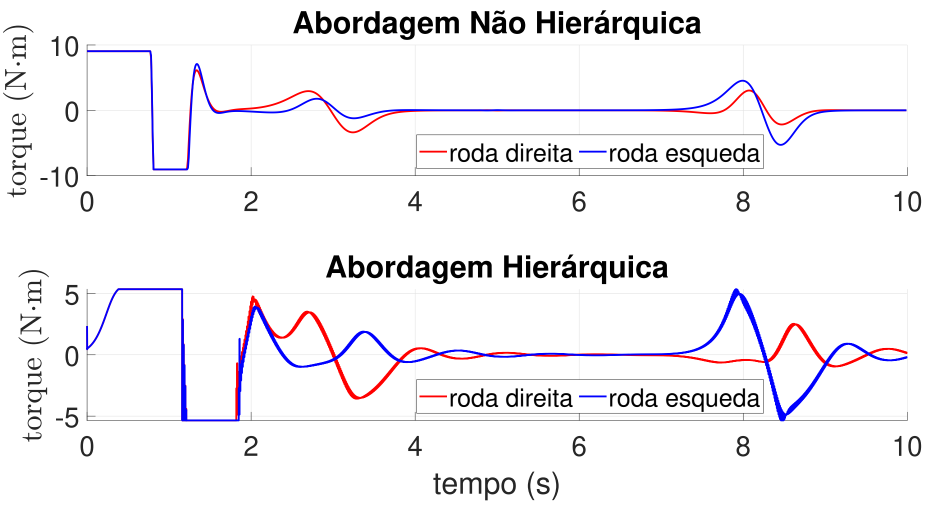

Figura 4.3: Torques de atuação obtidos por cada sistema de controle para a manobra de mudança de faixa dupla

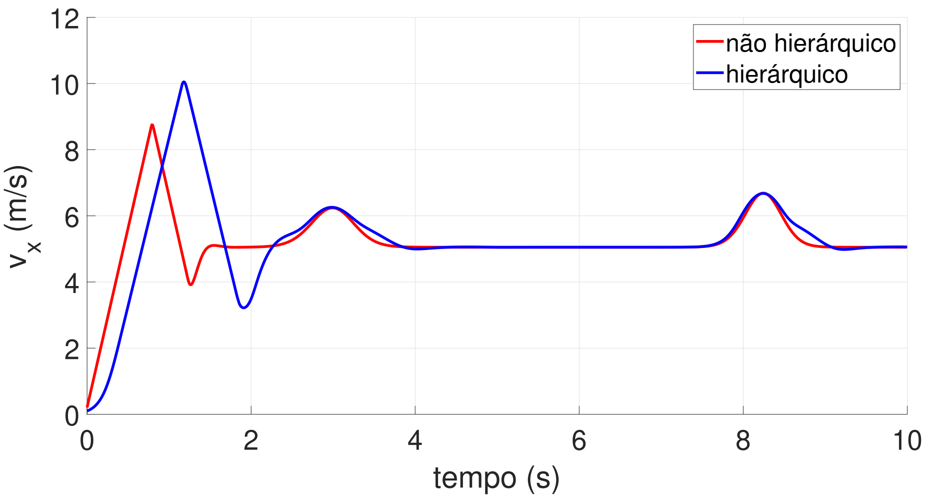

Figura 4.4: Velocidade longitudinal do chassi obtida por cada sistema de controle para a manobra de mudança de faixa dupla

faixa, em torno do segundo 3 e segundo 8, onde ocorre um pequeno aumento da velocidade, como esperado.

Essa grande variação inicial dos torques, e como consequência da velocidade longitudinal, é devido ao robô iniciar o movimento com uma velocidade baixa, e para vencer a inércia do sistema, o controle tende a aplicar torques altos nas rodas, fazendo com que as velocidades das rodas sejam maiores do que a velocidade linear do robô, acarretando a deslizamento entre a roda e o solo. Passado esse momento inicial, o torque diminui para que o veículo estabilize em torno da velocidade desejada pela trajetória, fazendo com que o deslizamento também diminua de valor. Durante as curvas, uma pequena variação no torque nas rodas ocorre para que as rodas alcancem diferentes velocidades angulares, levando também a uma variação no deslizamento.

Na Fig. 4.5, observa-se o deslizamento calculado pelo controle de alto nível em tracejado e o deslizamento encontrado com as velocidades do robô. O deslizamento de referência fica dentro do limite, $[-1, 1]$, e mesmo nas curvas, intervalos críticos da trajetória, o deslizamento calculado segue a sua referência. No início do movimento o erro é maior devido aos limites (Equação (3-10)) impostos ao sinal de controle no modelo de baixo nível.

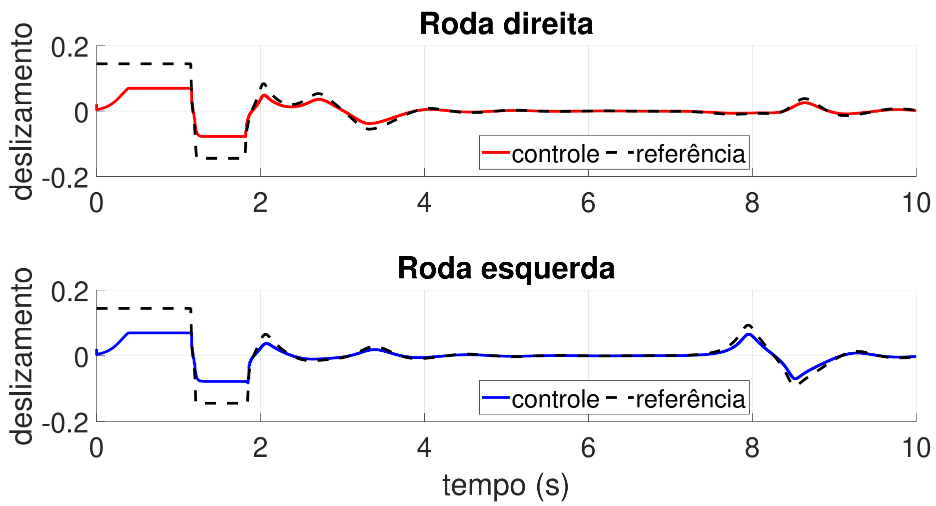

Figura 4.5: Comparataivo entre o deslizamento de referência calculado no controle de alto nível com o deslizamento calculado a partir do estados de saída do controle de baixo nível.

Do controle hierárquico são obtidas duas velocidades angulares das rodas: a de referência, obtida a partir do deslizamento de referência, e a do modelo dinâmico do robô. A comparação entre esses valores é vista na Fig. 4.6, com as curvas de cada roda dos dois controles sendo similares.

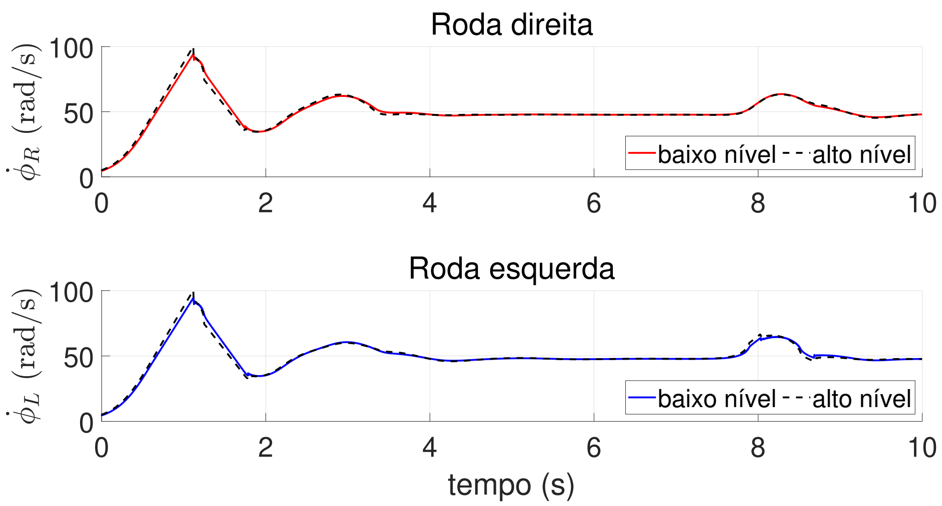

Figura 4.6: Comparação entre as velocidades angulares das rodas.

4.3.2 Circular

A Fig. 4.7 apresenta a trajetória circular realizada pelos controles, que são similares à de referência. A magnitude dos erros de rastreamento de trajetória é próxima, como mostrado na Tabela 4.4. Assim como na trajetória de mudança de faixa, o tempo computacional médio do NMPC do controle hierárquico é menor, conforme observado na Tabela 4.5. O leitor pode visualizar o sistema realizando a trajetória com controle hierárquico no vídeo disponível em `https://youtu.be/61zVowg__sc`.

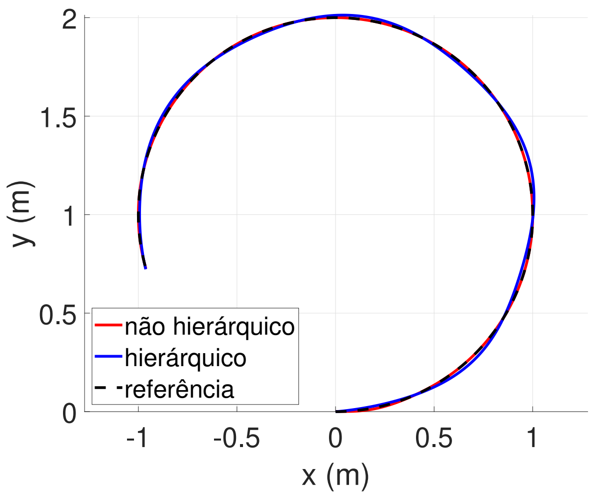

Figura 4.7: Trajetória realizada pelos controles MPC (vermelho) e MPC-hierárquico (azul) em trajetória circular.

Tabela 4.4: Erro da trajetória circular.

	RMSE		R2	
	eixo x (m)	eixo y (m)	eixo x	eixo y
Não Hierárquico	$6.6313 \cdot 10^{-3}$	$1.4147 \cdot 10^{-3}$	$9.9991 \cdot 10^{-1}$	1
Hierárquico	$2.4066 \cdot 10^{-2}$	$6.8664 \cdot 10^{-3}$	$9.9886 \cdot 10^{-1}$	$9.9989 \cdot 10^{-1}$

Tabela 4.5: Tempo médio de processamento do MPC a cada iteração para trajetória circular.

	Tempo de processamento (s)
Não Hierárquico	$4,1673$
Hierárquico	$0,2220$

Os torques aplicados nas rodas, apresentados na Fig. 4.8, aumentam no início do movimento para vencer a inércia. Nota-se que, como o movimento sempre muda de direção, os torques não chegam ao valor de zero. A velocidade do chassi, apresentada na Fig. 4.9, mantém-se em 1 m/s, de acordo com a equação de referência para a trajetória (Equação (4-3)). Como a velocidade não varia, o tempo de processamento é menor, já que a sequência ótima das forças longitudinais não se altera muito ao longo da trajetória.

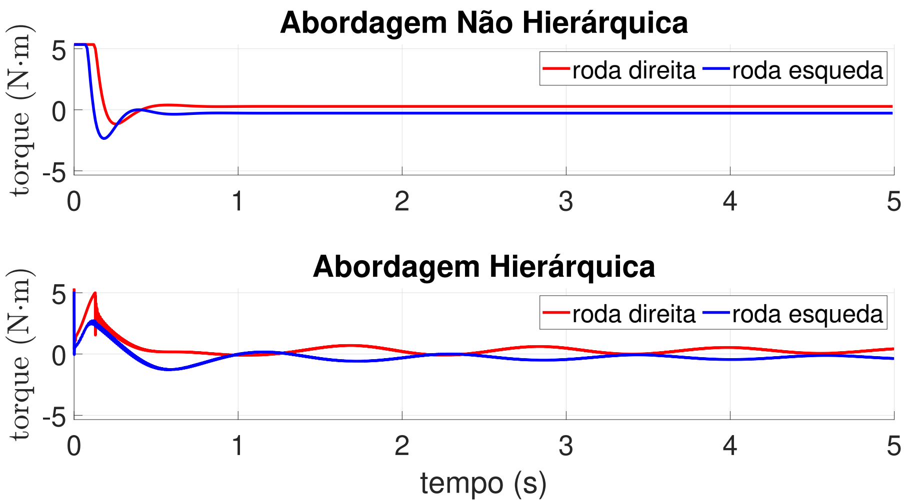

Figura 4.8: Torques obtidos pelos controles e aplicados em cada roda na trajetória circular.

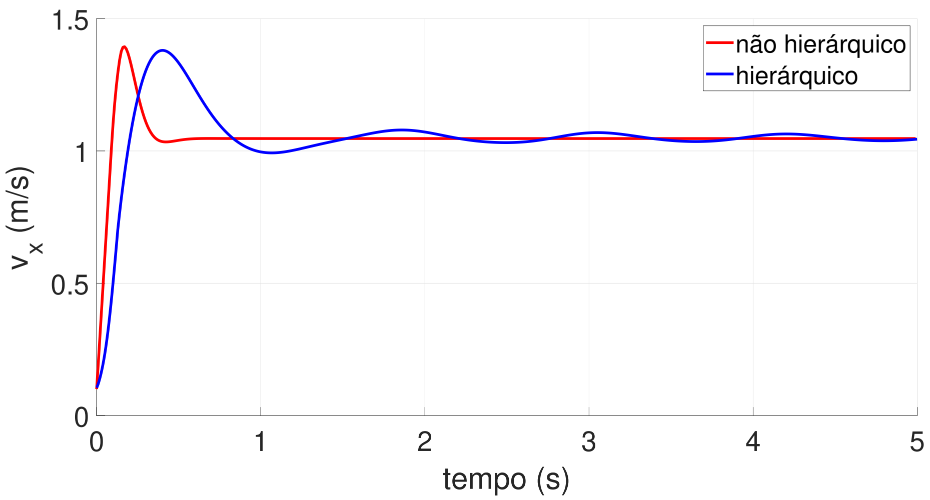

Figura 4.9: Velocidade do chassi alcançada na trajetória circular.

Os deslizamentos observados na Fig. 4.10 também correspondem com o perfil obtido para os torques. No início do movimento, os deslizamentos são altos, permanecendo baixos em seguida. É válido observar que os valores de torques e deslizamentos para a roda direita são sempre maiores que a da esquerda, já que ela possui um caminho maior a percorrer para que o chassi realize a trajetória desejada. Por fim, as velocidades angulares das rodas obtidas são similares às velocidades angulares de referência. Essa comparação é vista na Fig. 4.11.

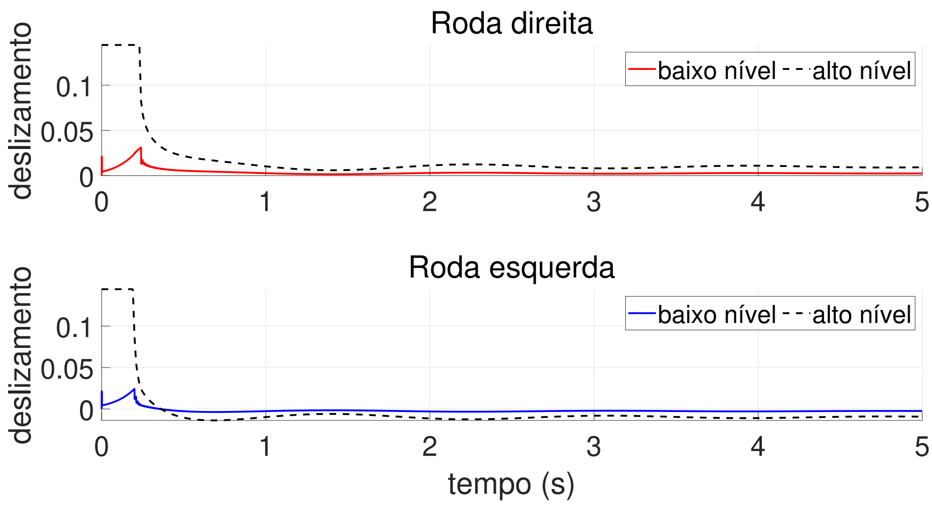

Figura 4.10: Deslizamento em cada roda na trajetória circular.

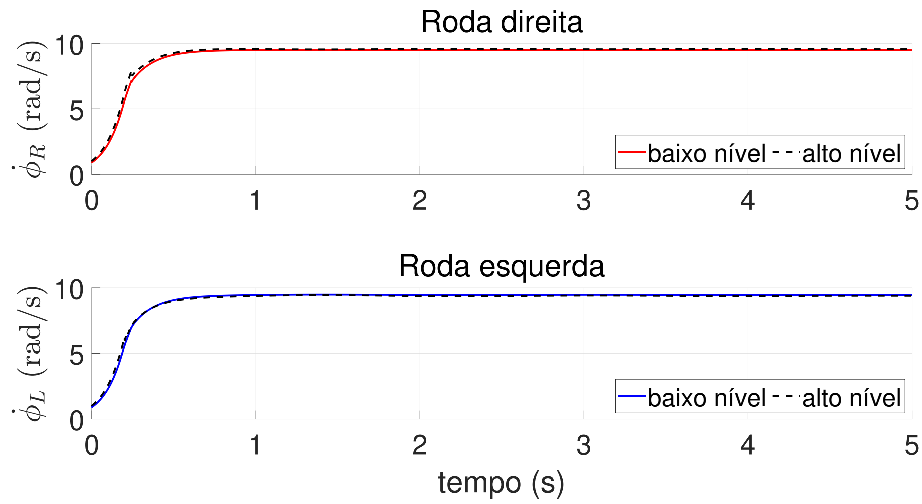

Figura 4.11: Comparação entre as velocidades angulares das rodas na trajetória circular.

4.3.3 Comparação entre o MPC Hierárquico e um Controle Proporcional

Nesta etapa, compara-se o controle hierárquico com um controle proporcional tradicional. O controle proporcional aqui implementado calcula as velocidades angulares de referência a partir do erro da posição e orientação do chassi [91]. O fluxo de controle é visto na Fig 4.12, em que o erro do controle proporcional é calculado a partir da diferença entre as velocidades angulares das rodas calculadas do modelo cinemático e as velocidades angulares das rodas do modelo 3.

O controle proporcional foi simulado em ambiente Simulink, com valor do ganho proporcional $K_p = 4$, tempo de simulação de 10 s e utilizando um integrador de passo fixo igual a 10^{-3} s. A comparação entre a trajetória dos

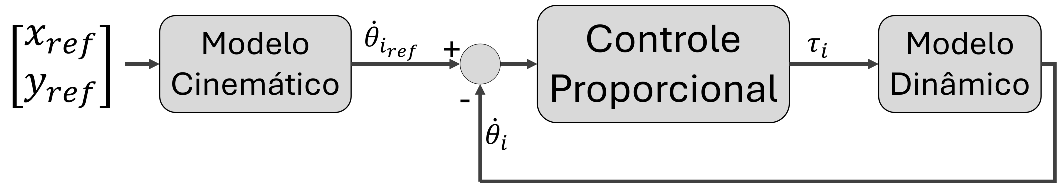

Figura 4.12: Diagrama de bloco do controle proporcional.

controles é apresentada na Fig. 4.13, observando que o controle proporcional segue a trajetória de referência, mas não a completa.

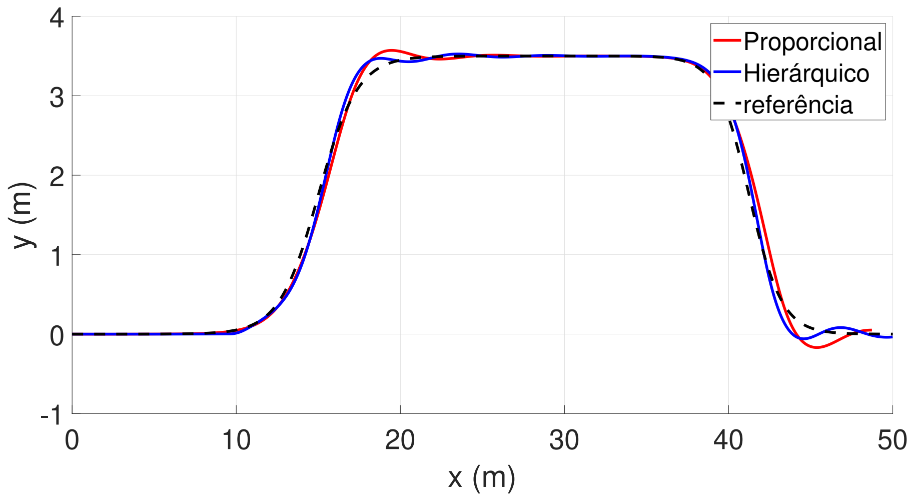

Figura 4.13: Trajetória realizada pelo controle proporcional (vermelho) e MPC-hierárquico (azul).

Os torques obtidos são vistos na Fig. 4.14. O torque obtido pelo controle proporcional nos instantes iniciais é alto para as duas rodas, movimentando o robô. Assim que a velocidade de trajetória é obtida, o torque cessa. Durante as mudanças de faixa, os torques aplicados nas rodas são alterados, bem como a velocidade do chassi, visto na Fig. 4.15, que se mantém na maior parte do percurso constante em 5 m/s.

Já os deslizamentos das rodas não se mantém dentro dos limites máximos, notado na Fig. 4.16, alcançando valores próximos dos limites físicos do fenômeno de deslizamento no início da trajetória. Isso pode levar a um maior desgastes das rodas. As velocidades angulares das rodas são apresentadas na Fig. 4.17 e seguem as velocidades angulares de referência, como esperado.

4.4 Discussão

Como visto na Tabela 4.3, o custo computacional do controle hierárquico é cinquenta vezes menor que o do controle não-hierárquico. Por esse motivo, o controle hierárquico é mais vantajoso, já que o tempo de processamento é

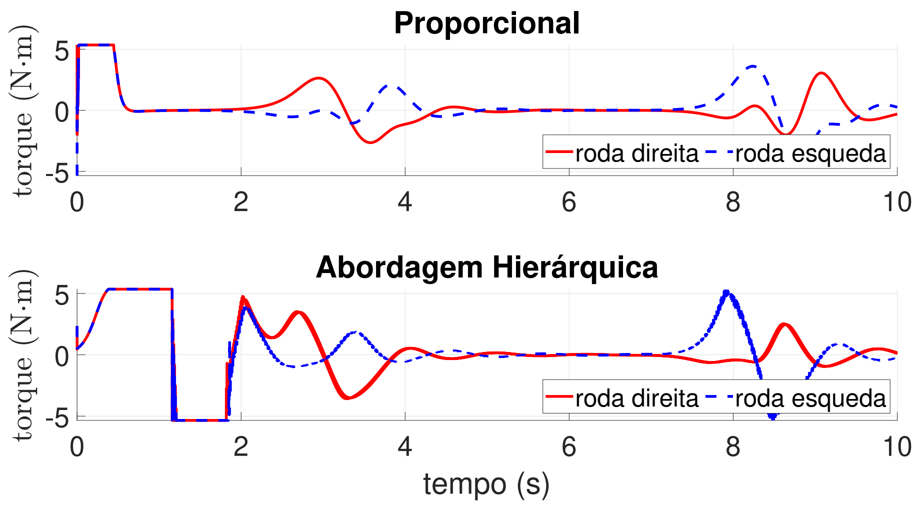

Figura 4.14: Torques obtidos pelos controles e aplicados em cada roda.

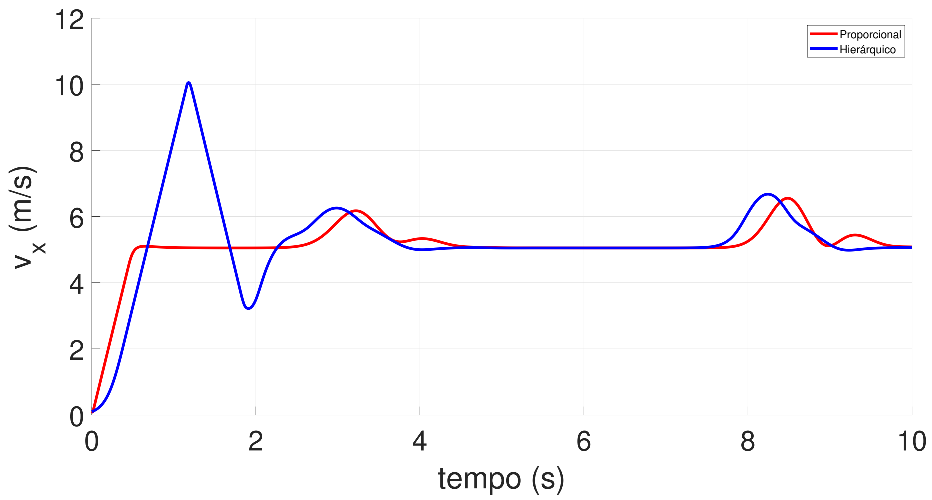

Figura 4.15: Velocidade do chassi alcançada no controle proporcional em vermelho, hierárquico com $N = 25$ em azul.

menor e no controle de baixo nível utiliza um modelo dinâmico que inclui deslizamento, incluindo características inerentes do sistema no controle.

A diferença de velocidade do robô, quando este sai da inércia, é alta devido à não inclusão do deslizamento no modelo de predição do MPC. Dessa forma, a velocidade cresce até que a posição do robô chegue naquela definida pela equação da trajetória naquele instante de tempo.

As oscilações do torque e da velocidade quando no controle hierárquico (Fig. 4.3, Fig. 4.4, Fig. 4.8 e Fig. 4.9) é esperado já que o controle de baixo nível é um controle proporcional. Nos controles não hierárquico e hierárquico, o deslizamento fica dentro do limite relatado pela literatura e dentro dos limites de força máxima longitudinal, tendo os maiores valores quando o sistema está saindo da inércia, condizendo com a física do sistema.

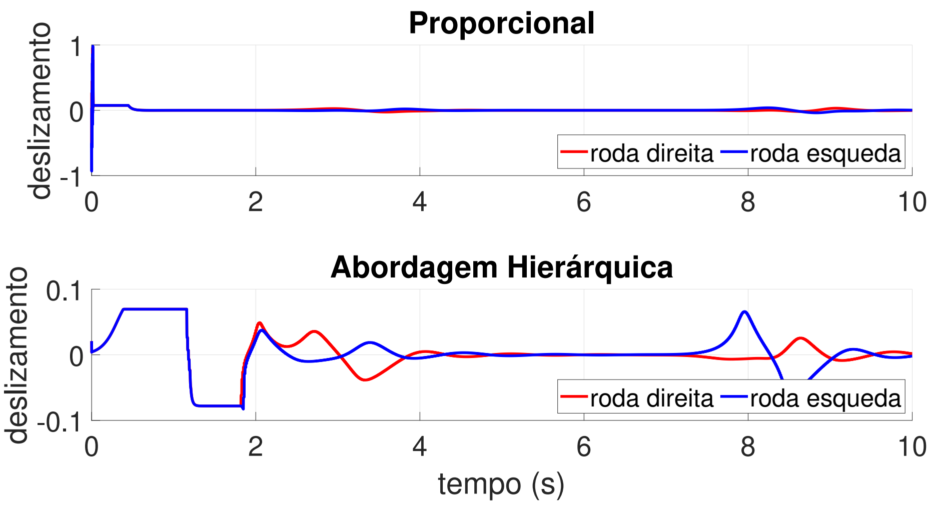

Figura 4.16: Deslizamento em cada roda. Controle proporcional em vermelho, hierárquico com $N = 25$ em azul e hierárquico com $N = 50$ em magenta.

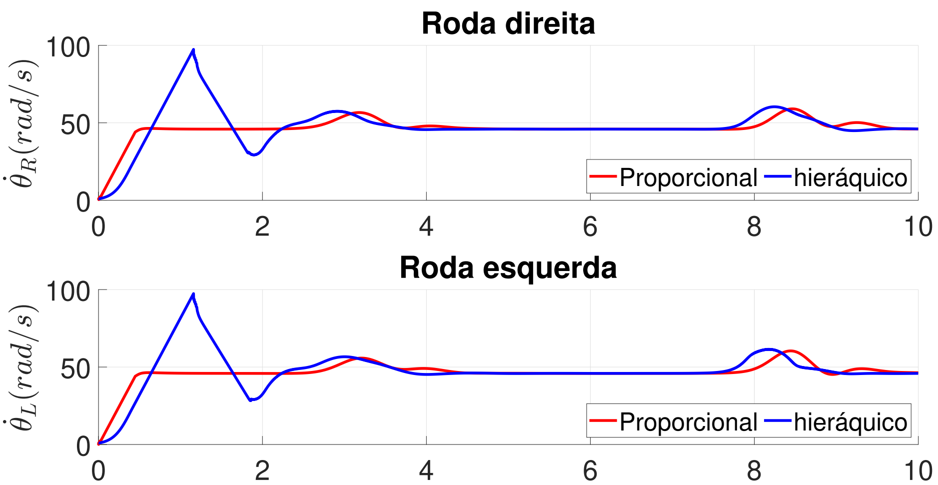

Figura 4.17: Comparação entre as velocidades angulares das rodas.

A finalização da trajetória pelo controle hierárquico baseado em MPC evidencia a sua eficiência em prever passos futuros e ajustar o sinal de controle de modo a garantir que a trajetória seja cumprida no tempo desejado. Diferente do controle proporcional, que ajusta sua ação apenas como resposta ao erro de entrada do ganho proporcional, o MPC hierárquico antecipa e corrige possíveis desvios de forma preditiva. Apesar de ser conhecido que os termos integrais e derivativos podem corrigir erros acumulados, optou-se por não incluí-los devido à alta oscilação nos estados observada quando aplicados ao sistema, resultado da alta não linearidade do comportamento do sistema, que apresentou instabilidade e oscilações intensas sem trazer benefícios adicionais aos resultados.

5
Comparativo entre Rede Neural e MHSE na Estimação de Estado

Este capítulo discute a estimativa de estados de um RMRSS usando a abordagem MHSE e sua aproximação por uma rede neural. Inicialmente, os resultados do MHSE foram comparados com diferentes horizontes de predição e com um filtro de Kalman estendido, demonstrando a robustez do MHSE. Em seguida, as saídas desse estimador foram utilizadas para treinar uma rede neural para substituí-lo, mostrando o potencial dessa abordagem ao eliminar a necessidade do custoso processo de otimização na estimativa de estados.

5.1
Estratégia do MHSE

Comumente, tanto em robótica móvel, como em diversas outras áreas, medições obtidas por sensores podem conter erros e/ou ruídos causados por diferentes fatores externos, incluindo interferência eletromagnética, falha na alimentação, entre outros. Essas perturbações podem comprometer a estimativa de estados do sistema e, por consequência, levar a falhas no sistema de controle. Diante disso, faz-se necessária a implementação de mecanismos que possam estimar a posição atual do robô com precisão, e diminuir o erro associado a ruídos nas medições. Estimação de Estado com Horizonte Móvel (*Moving Horizon State Estimation*, MHSE) é um desses mecanismos, baseado em otimização, que calcula o estado atual do sistema dado um conjunto finito de medições passadas, tanto medições dos estados observáveis quanto dos sinais de entrada.

Para ilustrar o funcionamento do MHSE, a Fig. 5.1 mostra um conjunto passado de medições, um conjunto de estados estimados na iteração anterior, e um novo conjunto de estados estimados calculados na iteração atual. É através desses dados passados, tantos os medidos e os estimados, que se obtém uma estimativa para o estado atual. O tamanho desse conjunto de dados é chamado de horizonte de estimativa N_{mhse}.

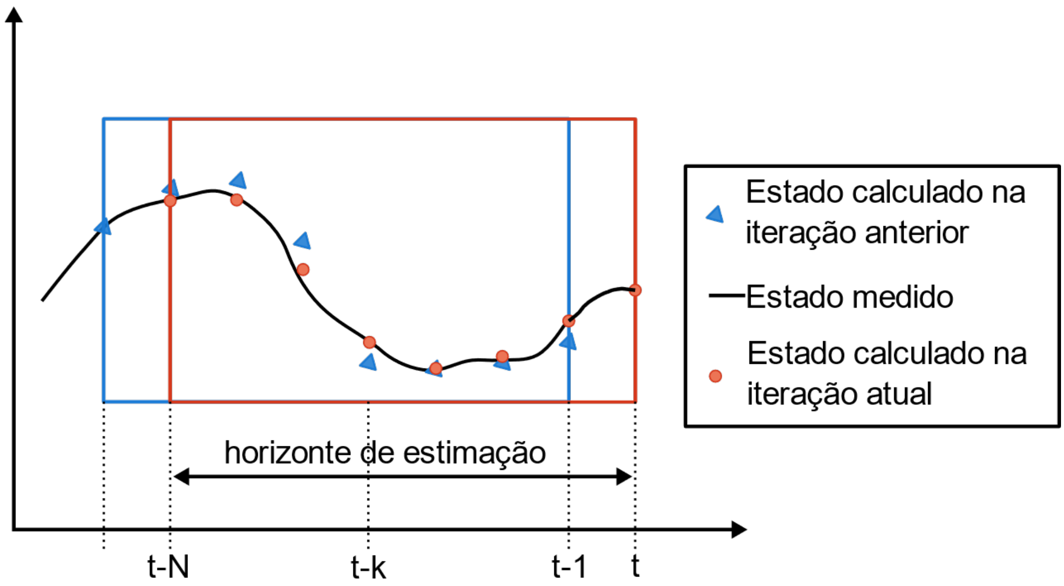

Figura 5.1: Conceito da estimativa de estados com um horizonte finito.

Sistemas discretos no tempo podem ser escritos de forma geral como na Equação (5-1),

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \\ \boldsymbol{y}_k &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{5-1}$$

onde $\boldsymbol{x}_{k+1}$ é o vetor de estado no tempo $k+1$, $\boldsymbol{y}_k$ é o vetor de saídas no tempo k, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)$ é a equação de estado do sistema não linear, que depende dos estados $\boldsymbol{x}_k$ e da ação de controle $\boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)$ é o vetor de estados medidos e $\boldsymbol{v}_k$ é o ruído na aquisição das medidas [79]. É importante ressaltar que nem toda variável de estado é possível ser medida e devem ser estimadas a partir das equações de estado do sistema. Dessa forma, o MHSE também auxilia na estimativa desses variáveis que não podem ser medidas e dos medidas com ruído

Esse ruído e distúrbios comumente presentes na aquisição de medições em robôs móveis justificam o uso de filtros e estimadores, dado que os próprios sensores podem ter erros inerentes. Além disso, nem toda variável do estado do sistema pode ser medida e precisa ser calculada com base nas equações de estado do sistema. Dessa forma, o MHSE ajuda na estimação de dados não medidos e daqueles medidos com ruído.

Dado um instante k, e uma janela de medições anteriores de tamanho N_{mhse}, um problema de controle ótimo pode ser formulado onde o objetivo é encontrar a melhor sequência de estados estimados que se ajustem às medições obtidas. Para isso, a seguinte função custo é utilizada:

$$J(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}) = \|\hat{\boldsymbol{x}}_{k-N_{mhse}|k} - \bar{\boldsymbol{x}}_{k-N_{mhse}|k}\|^2_{\boldsymbol{Q}_{MHSE}} + \sum_{i=k-N_{mhse}}^{k} \|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i|k})\|^2_{\boldsymbol{R}_{MHSE}} \tag{5-2}$$

onde $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-N_{mhse}|k}$ são os $(k - N_{mhse})$-ésimos estados estimados no instante k, $\bar{\boldsymbol{x}}_{k-N_{mhse}|k}$ são os estados medidos no início do horizonte. As matrizes $\boldsymbol{Q}_{MHSE}$ e $\boldsymbol{R}_{MHSE}$ são, respectivamente, os pesos dados à importância relativa das previsões do modelo e os pesos dados à importância relativa dos valores medidos.

Transcrevendo o OCP para NLP como no NMPC, o problema consiste em encontrar o conjunto de estados que minimize a função custo (equação (5-3)), estando sujeita a restrições de limites superior e inferior das variáveis estados (Equação (5-3d)), à equação dinâmica do sistema (Equação (5-3b)) e equações de medições (Equação (5-3c)). Esse conjunto de equações é descrito por:

$$\min_{\hat{\boldsymbol{x}}} \quad J(\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}) \tag{5-3a}$$

$$\text{s.t.} \quad \hat{\boldsymbol{x}}_{i+1|k} = \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i|k}, \boldsymbol{u}_i) \quad , \tag{5-3b}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{i+1|k} = \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{i+1|k}, \boldsymbol{u}_{i=k}), \tag{5-3c}$$

$$|\hat{\boldsymbol{x}}_{i|k}| \leq \boldsymbol{x}_{lim} \tag{5-3d}$$

5.2
Parâmetros e Referências Utilizados no MHSE, EKF e Rede Neural

Como dito na Seção 3.5, o modelo 3 será utilizado como modelo de estimativa para a apresentação destes resultados, com a modificação de que não se considerou a posição em x e y, pois não são observáveis. Seus parâmetros físicos podem ser observados na Tabela 2.1.

As simulações foram realizadas no MATLAB, utilizando a ferramenta de otimização CasADi [76] e o solucionador numérico IPOPT [116], em um notebook com um processador Intel Core i7-9750H @ 2,60 GHz, 8 GB de RAM com velocidade de 2667 MHz, com sistema operacional Windows 10.

As matrizes de pesos dos estados previstos, as matrizes de pesos dos estados medidos, o horizonte de estimativa e o tempo de amostragem do MHSE são mostrados na Tabela 5.1, e a matriz de covariância estimada, a covariância do ruído de processo e a covariância das matrizes de ruído de observação do EKF são mostradas na Tabela 5.2.

Para este projeto, foram criadas duas redes neurais utilizando o algoritmo de Levenberg-Marquardt: uma para a orientação do chassi e outra para a sua velocidade. A rede para o controle da orientação do chassi possui 20 camadas e 15 neurônios, treinada por 100 épocas. A rede que controla a velocidade do

Tabela 5.1: Parâmetros do MHSE.

parâmetro	descrição	valor
$\boldsymbol{Q}_{MHSE}$	peso dos estados previstos	$[0\ 0\ 10^5\ 10^5\ 10^5]$
$\boldsymbol{R}_{MHSE}$	peso dos estados medidoss	$[10^7\ 10^7\ 10^7]$
N_{MHSE}	horizonte de estimação	15
T_{MHSE}	amostra de tempo	$10^{-2}\ s$

Tabela 5.2: Parâmetros do EKF.

parâmetro	descrição	valor
$\boldsymbol{P}_{EKF}$	matriz de covariância estimada	$[10^3\ 10^3\ 10^3\ 10^3\ 10^3]$
$\boldsymbol{Q}_{EKF}$	covariância do ruído de processo	$[10^2\ 10^2\ 10^2\ 10^2\ 10^2]$
$\boldsymbol{R}_{EKF}$	covariância do ruído de observação noise	$[10^2\ 10^2\ 10^2]$

chassi é mais compacta, com 10 camadas e 4 neurônios, treinada por 50 épocas.

Sabendo que o MHSE necessita de dados medidos, estes serão tomados como os dados simulados com NMPC do modelo 3 percorrendo uma trajetória com formato de um quadrilátero de lado 10 metros, vista na Fig. 5.2. O estado inicial é dado pelos valores abaixo:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \pi/2\ rad \\ 1.5\ m/s \\ 0\ rad/s \\ 15.78\ rad/s \\ 15.78\ rad/s \end{bmatrix} \tag{5-4}$$

Os estados estimados foram a orientação e a velocidade linear do chassi, utilizando a velocidade angular do chassi e das rodas como medições. Para ambos os métodos, foi adicionado ruído às medições de referência, simulando as imprecisões encontradas em sensores. O ruído inserido foi construído a partir de uma matriz de covariância multiplicada por uma variável aleatória com distribuição normal, média 0.0 e desvio padrão 1.0.

Serão apresentados os resultados comparando o EKF com o MHSE para a orientação e a velocidade linear do chassi e os deslizamentos das rodas, bem como as métricas numéricas para a média do $RMSE$ e R^2 para cada estado medido.

5.3 Resultados do MHSE Comparados com EKF

A Fig. 5.3 apresenta a estimativa da orientação do chassi com EKF e MHSE e a comparação em relação à medição real, obtida a partir da simulação. Observa-se inicialmente que as curvas de estimativa seguem de perto a medição

Figura 5.2: Trajetória de referência para simular os dados medidos de entrada no MHSE.

real. Entre os segundos 6 e 8, ocorre um erro maior tanto para o EKF quanto para o MHSE, mas isso não leva à instabilidade do sistema. A precisão de ambos os métodos é alta.

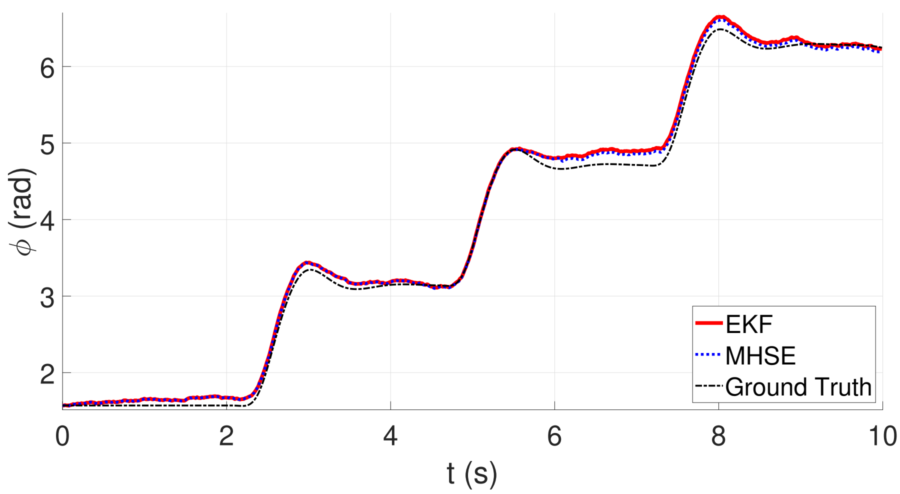

Figura 5.3: Estimativa da orientação do chassi. Em linha tracejada e vermelho o método EKF, em linha pontilhada e azul o método MHSE, e em linha traço-ponto-traço e preto a medida real.

Essa semelhança entre as estimativas e a medição real também é observada na Tabela 5.3. Além das avaliações numéricas para o horizonte $N = 5$, são apresentadas métricas para outros valores de horizonte de estimativa. A tabela de erros mostra que o MHSE possui valores de R^2 mais altos do que o EKF na maioria dos horizontes de estimativa, indicando uma melhor capacidade de explicar variações na orientação. Além disso, o RMSE para o MHSE é menor na maioria dos horizontes, sugerindo maior precisão do MHSE na estimativa da orientação.

Tabela 5.3: Comparativo das métricas para estimação de estados com dados simulados.

Variável	Horizonte de Estimação (N)	R^2		RMSE	
		EKF	MHSE	EKF	MHSE
ϕ	5	0.9920	0.9976	0.1265	0.0730
	10		0.9986		0.0448
	15		0.9911		0.1262
	20		0.9540		0.3293
	25		0.9963		0.0913
v_x	5	0.9523	0.9855	0.0660	0.0439
	10		0.9858		0.0448
	15		0.9842		0.0479
	20		0.9835		0.0476
	25		0.9866		0.0436

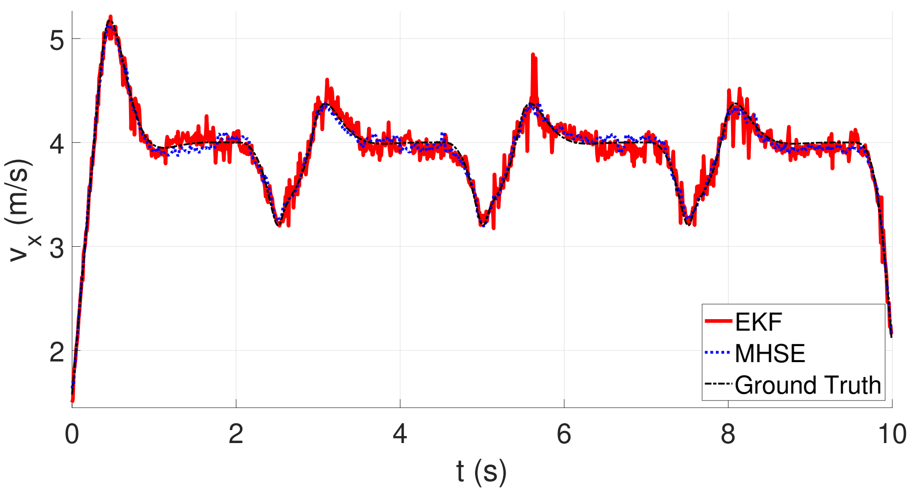

Figura 5.4: Estimativa da velocidade linear do chassi.

A estimativa da velocidade linear do chassi pode ser vista na Fig. 5.4, com o EKF apresentando variações mais abruptas. Durante mudanças rápidas de

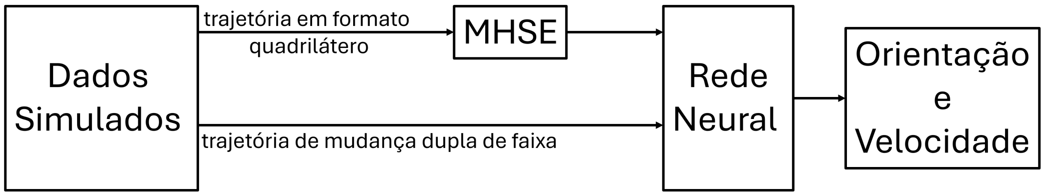

Figura 5.5: Diagrama de fluxo mostrando o processo de treinamento e validação de uma rede neural para substituir o MHSE na estimativa da orientação e velocidade de um robô.

velocidade, especialmente entre os segundos 6 e 8, ambos os métodos mostram um aumento no erro de estimativa. No entanto, essas discrepâncias não levam à instabilidade do sistema. Os valores das métricas na Tabela 5.3 revelam que o MHSE tem valores de R^2 mais altos do que o EKF em todos os horizontes de estimativa, sugerindo uma melhor correspondência entre as estimativas do MHSE e os valores reais de velocidade. Além disso, o RMSE para o MHSE é consistentemente menor do que para o EKF, indicando maior precisão do MHSE na estimativa da velocidade linear. E como o tempo de avaliação da função de custo de otimização do MHSE está diretamente relacionado ao tamanho do horizonte, apenas os gráficos para $N = 5$ foram apresentados.

5.4
Aproximação do MHSE por uma Rede Neural

Como mencionado, para criar a rede neural, foram utilizados os dados de saída do MHSE. Essa abordagem foi apresentada por [90], onde a rede neural é treinada a partir dos dados de saída do MHSE, substituindo-o no processo de estimativa para reduzir o custo computacional. A estratégia proposta é apresentada na Fig. 5.5. Dados simulados de um robô em uma trajetória em formato de quadrado são processados pelo MHSE para estimar a orientação e a velocidade do chassi. Essas estimativas são então usadas para treinar a rede neural. Dados simulados de uma trajetória de mudança de faixa dupla são usados para validar a rede neural criada.

As Fig. 5.6 e Fig. 5.7 mostram a rede neural treinada e a comparação com os dados de saída do MHSE. Note que as curvas tanto para a orientação quanto para a velocidade linear do chassi são semelhantes. Essa semelhança é especialmente evidente durante momentos de mudança significativa na orientação, quando há uma alteração notável nos valores de referência.

Uma vez que a rede neural foi treinada, a validação é realizada com dados de uma trajetória de mudança dupla de faixa. A Fig. 5.8 apresenta a validação da rede neural para a orientação do chassi, mostrando a conformidade entre os dados de saída da rede neural e os dados estimados pelo MHSE. As

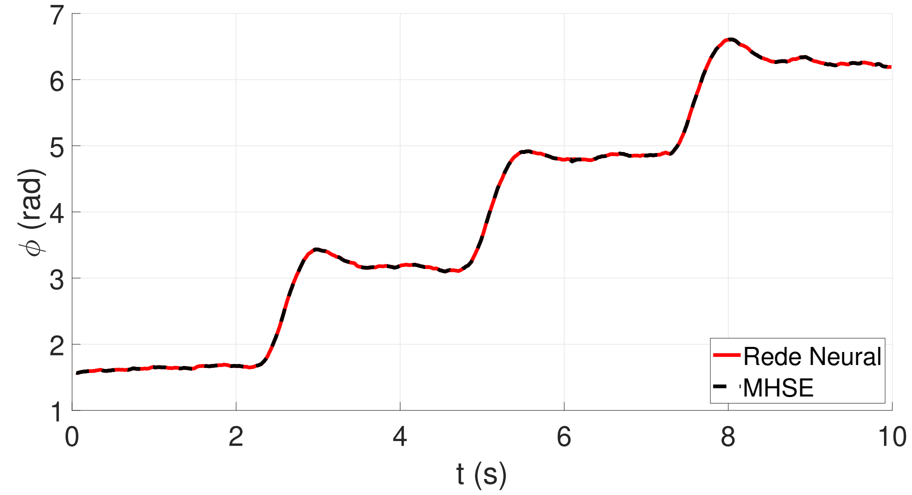

Figura 5.6: Dados de treinamento da rede neural para a orientação do chassi.

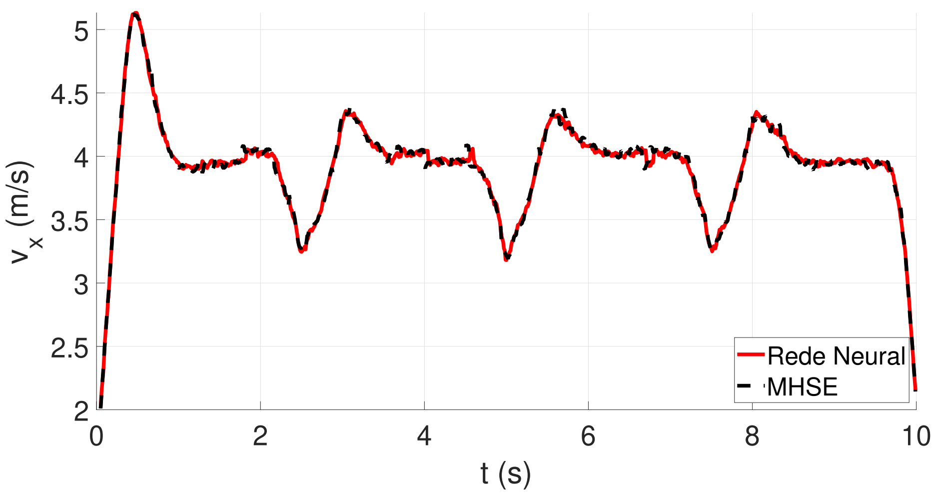

Figura 5.7: Dados de treinamento da rede neural para a velocidade longitudinal do chassi.

diferenças mais significativas ocorrem por volta de 8 segundos, correspondendo aos momentos de mudança de faixa. Esses desvios são esperados devido à natureza dinâmica e rápida dessas mudanças, mas não comprometem a precisão geral da rede neural.

A velocidade longitudinal, como ilustrado na Fig. 5.9, apresenta uma variação mais acentuada em comparação com a referência, especialmente durante as curvas do trajeto.

Os erros entre os resultados de treinamento e validação são refletidos nas métricas, expostas na Tabela 5.4. O treinamento da orientação alcançou R^2 igual a 1 e um RMSE extremamente baixo, demonstrando que a rede neural ajustou os dados de forma altamente precisa para essa variável. Já para a velocidade linear, o R^2 foi um pouco abaixo, mas ainda próximo de 1, com um

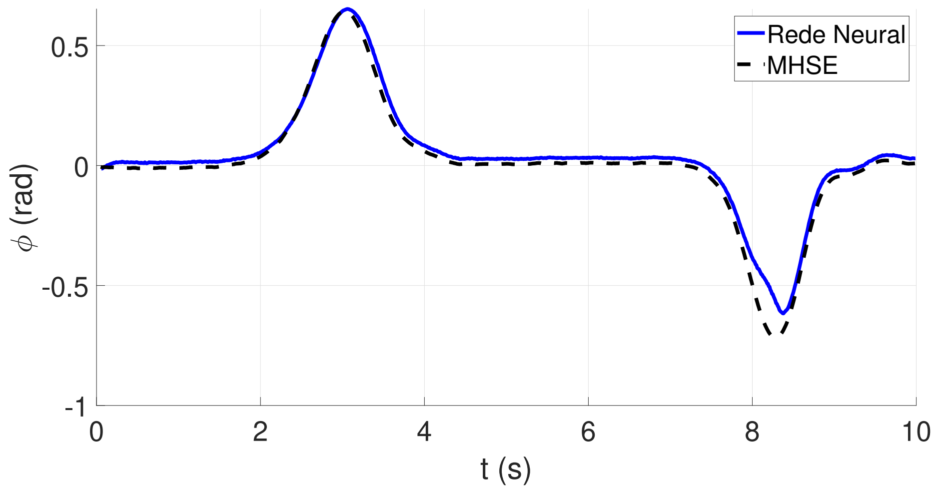

Figura 5.8: Dados de validação da rede neural para a orientação do chassi.

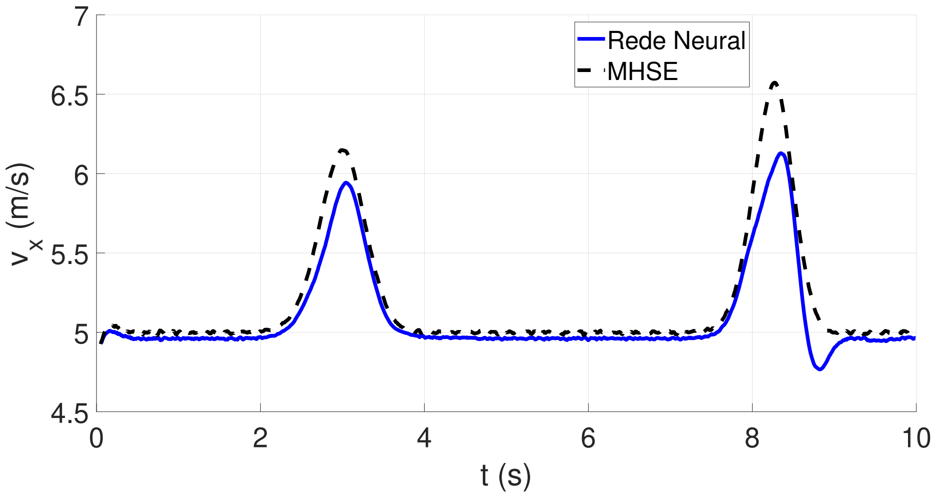

Figura 5.9: Dados de validação da rede neural para a velocidade longitudinal do chassi.

RMSE mais elevado que o da orientação, embora ainda pequeno em relação à velocidade do robô. Nos dados de validação, os valores de R^2 para ambas as variáveis se mantiveram próximos a 1, com o da velocidade linear sendo inferior, e os RMSE continuaram baixos, indicando uma leve queda na precisão em comparação com o treinamento.

A Fig. 5.10 mostra o RMSE ao longo do tempo entre a referência e a saída dos dados de validação da rede neural para a orientação do chassi, com a diferença entre os dados tornando-se evidente, especialmente durante as mudanças de faixa.

Enquanto isso, na Fig. 5.11, observa-se o RMSE ao longo do tempo entre os dados de referência e a saída dos dados de validação da rede neural para a velocidade, com um aumento do erro notável durante a mudança de faixa.

Tabela 5.4: Comparativo das métricas entre dados de treinamento e validação da rede neural.

	Treinamento		Validação	
Variável	R^2	RMSE	R^2	RMSE
ϕ	1	0.0030	0.9689	0.0423
v_x	0.9894	0.0388	0.8605	0.1380

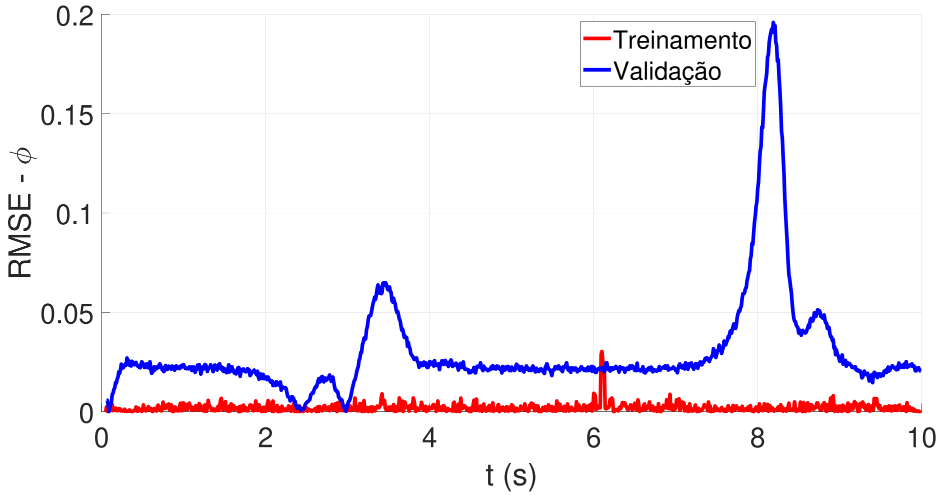

Figura 5.10: Paralelo entre entre o erro dos dados de treinamento e validação da rede neural para a orientação do chassi.

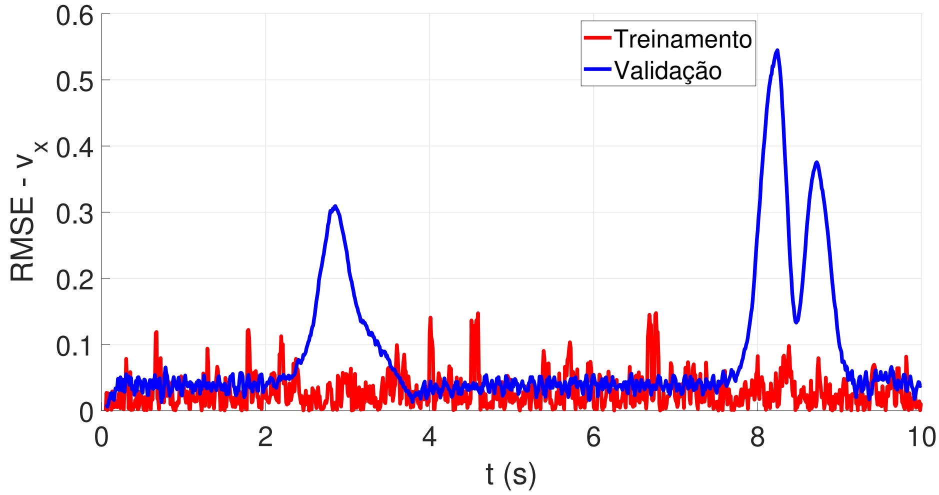

Figura 5.11: Paralelo entre entre o erro dos dados de treinamento e validação da rede neural para a velocidade longitudinal do chassi.

Os tempos de processamento entre o MHSE e a rede neural treinada para diferentes horizontes de estimativa também são apresentados na Tabela 5.5.. Nota-se que o tempo da rede neural é consideravelmente menor do que o do MHSE, na ordem de 10^{-2} s.

Tabela 5.5: Comparativo entre o custo computacional da estimação por MHSE e o tempo de inferência da rede neural.

Horizonte de Estimação (N)	Tempo (s)	
	MHSE	Rede Neural
5	6.0100	0.0609
10	6.5951	0.0266
15	7.6987	0.0261

5.5 Discussão

Como observado na Tabela 5.3, a variação no horizonte de estimativa não altera significativamente o cálculo da orientação longitudinal e da velocidade do chassi. O MHSE mostrou-se capaz de estimar com precisão os estados não observáveis (orientação e velocidade longitudinal), obtendo uma precisão na mesma ordem de grandeza que o EKF, amplamente utilizado na literatura.

As avaliações da rede neural demonstraram que os resultados do treinamento estavam bem alinhados com os dados de referência; no entanto, a saída dos dados de validação não apresentou o mesmo nível de correspondência. Essa disparidade pode ser atribuída à escassez de dados disponíveis para treinamento, totalizando 995 pontos, e à discrepância nos padrões entre os conjuntos de dados de treinamento e validação. O número limitado de pontos de treinamento resultou da natureza da simulação, devido aos desafios enfrentados na otimização dos parâmetros do MPC.

Apesar do erro, a eficiência computacional da rede neural treinada a torna uma alternativa viável para substituir o MHSE quando o estimador precisa ser usado em tempo real no robô. Além disso, o erro ainda pode ser considerado baixo, dado que o sistema é altamente dinâmico e a magnitude dos erros é pequena em relação à velocidade alcançada pelo robô, que chega a aproximadamente $5m/s$ durante a trajetória de mudança de faixa.

6
Conclusões e Trabalhos Futuros

Este trabalho teve como objetivo construir modelos, controle e estimativa preditivos de estados para aumentar a performance computacional quando os mesmos aplicados em um RMRSS.

Foram desenvolvidos quatro modelos matemáticos que, diferente da literatura, apresentam estados que podem ser medidos diretamente, além do aumento da complexidade deles com a inclusão do deslizamento e do aumento no número de rodas. Esses modelos foram utilizados como modelos de predição do NMPC. Esse primeiro controle mostrou que os modelos são viáveis, sendo que o modelo 3 mostrou-se mais vantajoso devido ao tempo computacional gasto no NMPC e por possuir o fenômeno do deslizamento, inerente ao sistema. Dessa forma, o modelo 3 pode ser utilizado para simular um RMRSS de duas rodas sem perder a complexidade do sistema e minimizando o tempo de processamento de controle preditivo.

Posteriormente, implementou-se um controle hierárquico para um RMRSS de duas rodas. O controle de alto nível foi composto pelo NMPC com o modelo 1 sendo o modelo de predição. Já o controle de baixo nível foi implementado com um controle proporcional e objetivando a simulação do sistema a partir da saída do controle de alto nível, e tendo o modelo 3 como o modelo de simulação. Configurando-se como um controle hierárquico, o sistema de alto nível foi implementado com uma frequência menor que a do controle de baixo nível.

Os resultados demonstraram que o controle hierárquico, apesar de apresentar um erro ligeiramente maior em comparação com o controle não-hierárquico, oferece uma significativa redução no tempo de processamento computacional. Essa eficiência computacional é crucial para a aplicação em sistemas robóticos móveis, onde a resposta rápida é essencial. Além disso, realça o modelo 3 como um sujeito a ser utilizado para representar o sistema em estudo, conciliando propriedades específicas do sistema com baixo tempo de computação.

Além disso, a pesquisa explorou a integração de redes neurais para a estimativa de estados, substituindo o estimador de horizonte móvel. A utilização de redes neurais mostrou-se promissora, pois eliminou a necessidade de otimização computacionalmente custosa durante a estimativa de estados, mantendo a robustez e a precisão.

Por fim, os testes com manobras complexas, como a mudança dupla de faixa, evidenciaram que o controle hierárquico proposto não só atende às necessidades de desempenho de controle de trajetória, mas também é capaz de operar de forma eficiente em cenários de alta velocidade.

Além disso, a pesquisa explorou a estimativa de estado de um RMRSS usando MHSE e aproximou esse estimador com uma rede neural. Os resultados de estimativa demonstram a eficácia do MHSE em estimar com precisão os estados não observáveis de um robô móvel com direção diferencial. Com métricas de desempenho comparáveis ao EKF, o MHSE se destacou pela capacidade de adaptar continuamente o modelo do sistema com base nas informações mais recentes, mas ainda com um tempo computacional alto.

Para diminuir o tempo de estimativa, uma rede neural foi treinada a partir dos dados do MHSE, substituindo-o como o estimador de estado no sistema. Os resultados obtidos com a rede neural foram promissores em termos de tempo de processamento, mas também revelaram a importância de um conjunto de dados de treinamento representativo e de uma calibração adequada dos parâmetros do modelo para garantir a generalização dos resultados.

6.1 Trabalhos Futuros

O passo seguinte a este trabalho é implementar o controle proposto em um hardware real e analisar o desempenho do controle em condições reais de operação. Essa implementação pode ser feita em C++, já que a ferramenta CasADI é implementado nesta linguagem de programação. Além disso, aplicar o controle em outros tipos de robôs contribui para essa validação do controle. Essa implementação trás desafios como compatibilidade dos hardwares disponíveis, integração dos sensores, atraso na comunicação, dentre outros.

Explorando outra abordagem, a investigação da otimização dos parâmetros do MPC se torna crucial para aprimorar tanto a precisão quanto a estabilidade do sistema de controle hierárquico. Além disso, a integração da rede neural ao MPC pode potencializar ainda mais esses resultados. Conjunto a isso, exploração de técnicas de otimização multiobjetivo para balancear diferentes critérios de desempenho, como eficiência energética, precisão de controle e tempo de resposta, por exemplo.

Tem-se ainda a possibilidade de implementação em ambientes dinâmicos, onde obstáculos e condições do terreno podem mudar rapidamente. A isso, pode-se estudar a integração de sensores adicionais, como LIDAR e câmeras, para melhorar a percepção do ambiente e a precisão do controle em cenários complexos.

Um quarto viés é o desenvolvimento de algoritmos de aprendizado online, investigando o seu uso para permitir que o sistema de controle se adapte em tempo real a mudanças no ambiente ou nas condições do robô.

6.2 Publicações

A partir deste trabalho, foram realizadas as seguintes publicações:

- Pinto, H. B., Ferreira, A. R. S., Meggiolaro, M. A., Ayala, H. V. H. **Controle Preditivo da Frenagem de um Monociclo em Terreno Desconhecido**. Em: Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI (2021).
- Ferreira, A. R., Medeiros, V. S., Ayala, H. V., Meggiolaro, M. A. (2023, June). **Hierarchical control in skid steer mobile robots with nonholonomics constraints**. Em: 31st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED) (2023).
- Ferreira, A. R., Lopes, E. D. R., Medeiros, V. S., Ayala, H. V., Meggiolaro, M. A. (2023, June). **Comparative Study between Neural Network and MHSE in State Estimation for Skid-steer Mobile Robots**. Em: XXV Congresso Brasileiro de Automática (CBA) (2024).

Referências bibliográficas

[1] **International Federation of Robotics**. Disponível em https://ifr.org/service-robots. Acesso em: Junho de 2023.

[2] ARBANAS, B.; IVANOVIC, A.; CAR, M.; HAUS, T.; ORSAG, M.; PETROVIC, T. ; BOGDAN, S.. **Aerial-ground robotic system for autonomous delivery tasks**. In: 2016 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION (ICRA), p. 5463–5468, 2016.

[3] AMATO, C.; KONIDARIS, G.; ANDERS, A.; CRUZ, G.; HOW, J. P. ; KAELBLING, L. P.. **Policy search for multi-robot coordination under uncertainty**. The International Journal of Robotics Research, 35:1760–1778, 2016.

[4] KUKA. **Robert from life science robotics**. https://www.kuka.com/en-us/industries/solutions-database/2019/08/robert-from-life-science-robotics, 2019. Acesso em: Junho de 2023.

[5] INTERNATIONAL FEDERATION OF ROBOTICS. **Cleaning robots reduce infections**. https://ifr.org/case-studies/cleaning-robots-reduce-infections, 2023. Acesso em: Junho de 2023.

[6] PAK, J.; KIM, J.; PARK, Y. ; SON, H. I.. **Field evaluation of path-planning algorithms for autonomous mobile robot in smart farms**. IEEE Access, 10:60253–60266, 2022.

[7] AMER, N. H.; ZAMZURI, H.; HUDHA, K. ; KADIR, Z. A.. **Modelling and control strategies in path tracking control for autonomous ground vehicles: A review of state of the art and challenges**. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 86:225–254, 5 2017.

[8] SIEGWART, R.; NOURBAKHSH, I. R. ; SCARAMUZZA, D.. **Introduction to autonomous mobile robots**. MIT press, 2011.

[9] RUSSO, M.; CECCARELLI, M.. **A survey on mechanical solutions for hybrid mobile robots**. Robotics, 9(2):32, 2020.

[10] BRUZZONE, L.; NODEHI, S. E. ; FANGHELLA, P.. **Tracked locomotion systems for ground mobile robots: A review**. Machines, 10(8), 2022.

[11] BRUZZONE, L.; QUAGLIA, G.. **Review article: locomotion systems for ground mobile robots in unstructured environments, mech. sci., 3, 49–62**, 2012.

[12] PILLAI, B. M.; SUTHAKORN, J.. **Challenges for Novice Developers in Rough Terrain Rescue Robots: A Survey on Motion Control Systems**. Journal of Control Science and Engineering, 2019:1–12, jun 2019.

[13] BABU, M.; THEERTHALA, R. R.; SINGH, A. K.; BALADHURGESH, B. P.; GOPALAKRISHNAN, B.; KRISHNA, K. M. ; MEDASANI, S.. **Model predictive control for autonomous driving considering actuator dynamics**. Proceedings of the American Control Conference, 2019-July:1983–1989, 7 2019.

[14] FISET, J.-S.; EFFATI, M. ; SKONIECZNY, K.. **Effects of Turning Radius on Skid-Steered Wheeled Robot Power Consumption on Loose Soil**. In: Ishigami, G.; Yoshida, K., editors, FIELD AND SERVICE ROBOTICS, p. 115–129. Springer, 2021.

[15] GUEVARA, J.; AREVALO-RAMIREZ, T.; YANDUN, F.; TORRES-TORRITI, M. ; CHEEIN, F. A.. **Point cloud-based estimation of effective payload volume for earthmoving loaders**. Automation in Construction, 117:103207, sep 2020.

[16] CANFIELD, S. L.; HILL, T. W. ; ZUCCARO, S. G.. **Prediction and Experimental Validation of Power Consumption of Skid-Steer Mobile Robots in Manufacturing Environments**. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 94(3-4):825–839, jun 2019.

[17] HA, Q.; YEN, L. ; BALAGUER, C.. **Robotic autonomous systems for earthmoving in military applications**. Automation in Construction, 107:102934, nov 2019.

[18] VINEET, S.; DESHMUKH, D.; PRATIHAR, D. K.; DEB, A. K.; RAY, H. ; BHATTACHARYYA, N.. **Dynamic Analysis of Tracked Mobile Manipulator Used in Agriculture**. In: 2021 IEEE 18TH INDIA COUNCIL INTERNATIONAL CONFERENCE (INDICON), p. 1–6, dec 2021.

[19] DOGRU, S.; MARQUES, L.. **Power Characterization of a Skid-Steered Mobile Field Robot with an Application to Headland**

Turn Optimization. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 93(3-4):601–615, mar 2019.

[20] KHAN, R.; MALIK, F. M.; RAZA, A. ; MAZHAR, N.. **Comprehensive study of skid-steer wheeled mobile robots: development and challenges**. Industrial Robot: the international journal of robotics research and application, 48(1):142–156, mar 2021.

[21] DOGRU, S.; MARQUES, L.. **Power Characterization of a Skid-Steered Mobile Field Robot**. In: 2016 INTERNATIONAL CONFERENCE ON AUTONOMOUS ROBOT SYSTEMS AND COMPETITIONS (ICARSC), p. 15–20, may 2016.

[22] HA, X. V.; HA, C. ; LEE, J.. **Fuzzy Vector Field Orientation feedback control-based slip compensation for trajectory tracking control of a four track wheel skid-steered mobile robot**. International Journal of Advanced Robotic Systems, 10, 2013.

[23] LOSCH, R.; GREHL, S.; DONNER, M.; BUHL, C. ; JUNG, B.. **Design of an Autonomous Robot for Mapping, Navigation, and Manipulation in Underground Mines**. In: 2018 IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS (IROS), p. 1407–1412. IEEE, oct 2018.

[24] RABIEE, S.; BISWAS, J.. **A Friction-Based Kinematic Model for Skid-Steer Wheeled Mobile Robots**. In: 2019 INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION (ICRA), p. 8563–8569. IEEE, may 2019.

[25] HUSKIĆ, G.; BUCK, S.; HERRB, M.; LACROIX, S. ; ZELL, A.. **High-speed path following control of skid-steered vehicles**. The International Journal of Robotics Research, 38(9):1124–1148, aug 2019.

[26] HUSKIC, G.; BUCK, S.; GONZALEZ, L. A. I. ; ZELL, A.. **Outdoor person following at higher speeds using a skid-steered mobile robot**. In: 2017 IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS (IROS), p. 3433–3438. IEEE, sep 2017.

[27] KAYACAN, E.; CHOWDHARY, G.. **Tracking Error Learning Control for Precise Mobile Robot Path Tracking in Outdoor Environment**. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 95(3-4):975–986, sep 2019.

[28] ZENG, R.; KANG, Y.; YANG, J.; ZHANG, W. ; WU, Q.. **Terrain Parameters Identification of Kinematic and Dynamic Models for a Tracked Mobile Robot**. In: 2018 2ND IEEE ADVANCED INFORMATION MANAGEMENT,COMMUNICATES,ELECTRONIC AND AUTOMATION CONTROL CONFERENCE (IMCEC), p. 575–582. IEEE, may 2018.

[29] REINA, G.; GALATI, R.. **Slip-based terrain estimation with a skid-steer vehicle**. Vehicle System Dynamics, 54(10):1384–1404, oct 2016.

[30] LIAO, J.; CHEN, Z. ; YAO, B.. **Model-based coordinated control of four-wheel independently driven skid steer mobile robot with wheel-ground interaction and wheel dynamics**. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 15:1742–1752, 3 2019.

[31] BAI, G.; LIU, L.; MENG, Y.; LUO, W.; GU, Q. ; WANG, J.. **Path tracking of wheeled mobile robots based on dynamic prediction model**. IEEE Access, 7, 2019.

[32] SANTOS, H. B.; TEIXEIRA, M. A. S.; DALMEDICO, N.; DE OLIVEIRA, A. S.; NEVES-JR, F.; RAMOS, J. E. ; DE ARRUDA, L. V. R.. **Model predictive torque control for velocity tracking of a four-wheeled climbing robot**. Sensors (Switzerland), 20:1–28, 12 2020.

[33] ZHU, C. W.; HILL, E.; BIGLARBEGIAN, M.; GADSDEN, S. A. ; CLINE, J. A.. **Smart agriculture: Development of a skid-steer autonomous robot with advanced model predictive controllers**. Robotics and Autonomous Systems, 162:104364, 8 2023.

[34] ÁLVARO JAVIER PRADO; TORRES-TORRITI, M.; YUZ, J. ; CHEEIN, F. A.. **Tube-based nonlinear model predictive control for autonomous skid-steer mobile robots with tire–terrain interactions**. Control Engineering Practice, 101, 8 2020.

[35] IAGNEMMA, K.; GOLDA, D.; SPENKO, M. ; DUBOWSKY, S.. **Experimental study of high-speed rough-terrain mobile robot models for reactive behaviors**. In: EXPERIMENTAL ROBOTICS VIII, p. 654–663. Springer, 2003.

[36] SHEKHAR, S.. **Wheel rolling constraints and slip in mobile robots**. In: PROCEEDINGS OF INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, volumen 3, p. 2601–2607. IEEE, 1997.

[37] MACIEJOWSKI, J. M.. **Predictive Control with Constraints**. Pearson education, 2002.

[38] ZEILINGER, M. N.. **Real-time Model Predictive Control**. PhD thesis, ETH Zurich, Zürich, 2011.

[39] NASCIMENTO, T. P.; DÓREA, C. E. T. ; GONÇALVES, L. M. G.. **Nonholonomic mobile robots' trajectory tracking model predictive control: a survey**. Robotica, 36(5):676–696, may 2018.

[40] LAFMEJANI, A. S.; BERMAN, S.. **Nonlinear mpc for collision-free and deadlock-free navigation of multiple nonholonomic mobile robots**. Robotics and Autonomous Systems, 141:103774, 7 2021.

[41] JING, N.; BU, M.; NI, Q.; PAN, H.; QIN, X. ; MA, X.. **A Hierarchical Structure Control Strategy Based on MPC for a Six-DOF Flexible Joint Manipulator**. Mathematical Problems in Engineering, 2021:1–19, dec 2021.

[42] IACOBUCCI, R.; BRUNO, R.. **Cascaded Model Predictive Control for Shared Autonomous Electric Vehicles Systems with V2G Capabilities**. In: 2019 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMMUNICATIONS, CONTROL, AND COMPUTING TECHNOLOGIES FOR SMART GRIDS (SMARTGRIDCOMM), p. 1–7, oct 2019.

[43] ABOUDONIA, A.; RASHAD, R. ; EL-BADAWY, A.. **Composite Hierarchical Anti-Disturbance Control of a Quadrotor UAV in the Presence of Matched and Mismatched Disturbances**. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 90(1-2):201–216, may 2018.

[44] PRASAD, R.; MA, Y.. **Hierarchical Control Coordination Strategy of Six Wheeled Independent Drive (6WID) Skid Steering Vehicle**. IFAC-PapersOnLine, 52(5):60–65, 2019.

[45] MONDAL, K.; RODRIGUEZ, A. A.; MANNE, S. S.; DAS, N. ; WALLACE, B.. **Comparison of Kinematic and Dynamic Model Based Linear Model Predictive Control of Non-Holonomic Robot for Trajectory Tracking: Critical Trade-offs Addressed**. In: CONTROL AND OPTIMIZATION OF RENEWABLE ENERGY SYSTEMS / 860: MECHATRONICS AND CONTROL, Calgary,AB,Canada, 2019. ACTAPRESS.

[46] WU, H.-M.; KARKOUB, M.. **Hierarchical Variable Structure Control for the Path Following and Formation Maintenance of Multi-agent Systems**. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 95(2):267–277, aug 2019.

[47] TIAN, Y.; SIDEK, N. ; SARKAR, N.. **Modeling and control of a nonholonomic wheeled mobile robot with wheel slip dynamics**. In: 2009 IEEE SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE IN CONTROL AND AUTOMATION, p. 7–14, 2009.

[48] HARASIM, P.; TROJNACKI, M.. **State of the Art in Predictive Control of Wheeled Mobile Robots**. Journal of Automation, Mobile Robotics & Intelligent Systems, 10(1):34–42, feb 2016.

[49] NAHIDI, A.; KASAIEZADEH, A.; KHOSRAVANI, S.; KHAJEPOUR, A.; CHEN, S.-K. ; LITKOUHI, B.. **Modular integrated longitudinal and lateral vehicle stability control for electric vehicles**. Mechatronics, 44:60–70, jun 2017.

[50] NANDY, S.; SHOME, S. N.; SOMANI, R.; TANMAY, T.; CHAKRABORTY, G. ; KUMAR, C. S.. **Detailed slip dynamics for nonholonomic mobile robotic system**. In: 2011 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHATRONICS AND AUTOMATION, p. 519–524, aug 2011.

[51] REN, Y.; ZHENG, L. ; KHAJEPOUR, A.. **Integrated model predictive and torque vectoring control for path tracking of 4-wheel-driven autonomous vehicles**. IET Intelligent Transport Systems, 13(1):98–107, jan 2019.

[52] WANG, D.; WEI, W.; YEBOAH, Y.; LI, Y. ; GAO, Y.. **A Robust Model Predictive Control Strategy for Trajectory Tracking of Omni-directional Mobile Robots**. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 98(2):439–453, may 2020.

[53] ALIPOUR, K.; ROBAT, A. B. ; TARVIRDIZADEH, B.. **Dynamics modeling and sliding mode control of tractor-trailer wheeled mobile robots subject to wheels slip**. Mechanism and Machine Theory, 138:16–37, 8 2019.

[54] MARQUES, F.; FLORES, P.; CLARO, J. C. P. ; LANKARANI, H. M.. **A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems**, 11 2016.

[55] KHALEGHIAN, S.; EMAMI, A. ; TAHERI, S.. **A technical survey on tire-road friction estimation**, 6 2017.

[56] TAHERI, S.; SANDU, C.; TAHERI, S.; PINTO, E. ; GORSICH, D.. **A technical survey on terramechanics models for tire–terrain interaction used in modeling and simulation of wheeled vehicles**. Journal of Terramechanics, 57:1–22, 2015.

[57] PACEJKA, H.. **Tire and vehicle dynamics**. Elsevier, 2005.

[58] SAVARESI, S. M.; TANELLI, M.. **Active Braking Control Systems Design for Vehicles**. Springer London, 2010.

[59] BAKKER, E.; NYBORG, L. ; PACEJKA, H. B.. **Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies**. SAE transactions, p. 190–204, 1987.

[60] CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L.. **Dynamic matrix control??A computer control algorithm**. Joint Automatic Control Conference, 17:72, 1980.

[61] RAWLINGS, J. B.; MAYNE, D. Q. ; DIEHL, M.. **Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design**. Nob Hill Publishing, 2017.

[62] CAMACHO, E. F.; ALBA, C. B.. **Model Predictive Control**. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2013.

[63] ZHANG, Y.; ZHAO, X.; TAO, B. ; DING, H.. **Point Stabilization of Nonholonomic Mobile Robot by Bézier Smooth Subline Constraint Nonlinear Model Predictive Control**. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 26(2):990–1001, apr 2021.

[64] WANG, G.; BAI, G.; MENG, Y.; LIU, L.; GU, Q. ; MA, Z.. **A hierarchical estimation method for road friction coefficient combining single-step moving horizon estimation and inverse tire model**. Electronics, 12:525, 1 2023.

[65] RAKOVIĆ, S. V.; LEVINE, W. S.. **Handbook of Model Predictive Control**. Control Engineering. Springer International Publishing, 2018.

[66] SIDEK, S. N.. **Dynamic modeling and control of nonholonomic wheeled mobile robot subjected to wheel slip**. Vanderbilt University, 2013.

[67] SARKAR, N.; YUN, X. ; KUMAR, V.. **Control of mechanical systems with rolling constraints: Application to dynamic control of mobile robots**. The International Journal of Robotics Research, 13:55–69, 1994.

[68] MAZUR, A.; CHOLEWIŃSKI, M.. **Virtual force concept in steering mobile manipulators with skid-steering platform moving in unknown environment**. Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications, 77:433–443, 3 2015.

[69] BISWAS, K.; KAR, I.. **Validating observer based on-line slip estimation for improved navigation by a mobile robot**. International Journal of Intelligent Robotics and Applications, 6:564–575, 9 2022.

[70] CLARK, K. D.; PETZOLD, L. R.. **Numerical solution of boundary value problems in differential-algebraic systems**. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 10:915–936, 9 1989.

[71] BOCK, H. G.; PLITT, K. J.. **A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems***. IFAC Proceedings Volumes, 17:1603–1608, 1984. 9th IFAC World Congress: A Bridge Between Control Science and Technology, Budapest, Hungary, 2-6 July 1984.

[72] JAZAR, R. N.. **Advanced vehicle dynamics**. Springer, 2019.

[73] DE LUCA, A.; ORIOLO, G. ; SAMSON, C.. **Feedback control of a nonholonomic car-like robot**. Robot motion planning and control, p. 171–253, 2005.

[74] AGUIAR, A. P.; HESPANHA, J. P.. **Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty**. IEEE Transactions on Automatic Control, 52:1362–1379, 8 2007.

[75] WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T.. **On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming**. Mathematical programming, 106:25–57, 2006.

[76] ANDERSSON, J. A. E.; GILLIS, J.; HORN, G.; RAWLINGS, J. B. ; DIEHL, M.. **Casadi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control**. Mathematical Programming Computation, 11, 2019.

[77] SCATTOLINI, R.. **Architectures for distributed and hierarchical model predictive control – a review**. Journal of Process Control, 19:723–731, 8 2009.

[78] LAGES, W. F.; ALVES, J. A. V.. **Real-time control of a mobile robot using linearized model predictive control**. IFAC Proceedings Volumes, 39(16):968–973, 2006.

[79] ALLGÖWER, F.; BADGWELL, T. A.; QIN, J. S.; RAWLINGS, J. B. ; WRIGHT, S. J.. **Nonlinear predictive control and moving horizon estimation — an introductory overview**. In: Frank, P. M., editor, ADVANCES IN CONTROL, p. 391–449, London, 1999. Springer London.

[80] TEJI, M. D.; ZOU, T. ; ZELEKE, D. S.. **A survey of off-road mobile robots: Slippage estimation, robot control, and sensing technology**. Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications, 109, 10 2023.

[81] SINGH, K. B.; ARAT, M. A. ; TAHERI, S.. **Literature review and fundamental approaches for vehicle and tire state estimation***. Vehicle System Dynamics, 57:1643–1665, 11 2019.

[82] LIU, F.; LI, X.; YUAN, S. ; LAN, W.. **Slip-aware motion estimation for off-road mobile robots via multi-innovation unscented kalman filter**. IEEE Access, 8:43482–43496, 2020.

[83] RODRÍGUEZ, A. J.; SANJURJO, E.; PASTORINO, R. ; ÁNGEL NAYA, M.. **State, parameter and input observers based on multibody models and kalman filters for vehicle dynamics**. Mechanical Systems and Signal Processing, 155, 6 2021.

[84] JAVIER PRADO, A.; CHÁVEZ, D.; CAMACHO, O.; TORRES-TORRITI, M. ; AUAT CHEEIN, F.. **Adaptive nonlinear mpc for efficient trajectory tracking applied to autonomous mining skid-steer mobile robots**. In: 2020 IEEE ANDESCON, p. 1–6, 2020.

[85] LIU, A.; ZHANG, W.-A.; CHEN, M. Z. Q. ; YU, L.. **Moving horizon estimation for mobile robots with multirate sampling**. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 64:1457–1467, 2 2017.

[86] GU, Y.; CHOU, Y.; LIU, J. ; JI, Y.. **Moving horizon estimation for multirate systems with time-varying time-delays**. Journal of the Franklin Institute, 356:2325–2345, 3 2019.

[87] PRADO, A. J.; TORRES-TORRITI, M. ; CHEEIN, F. A.. **Distributed tube-based nonlinear mpc for motion control of skid-steer robots with terra-mechanical constraints**. IEEE Robotics and Automation Letters, 6:8045–8052, 10 2021.

[88] WANG, Y.; HU, J.; AN WANG; DONG, H.; YAN, Y.; REN, Y.; ZHOU, C. ; YIN, G.. **Tire road friction coefficient estimation: Review and research perspectives**. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 35:6, 2022.

[89] SONG, R.; FANG, Y. ; HUANG, H.. **Reliable estimation of automotive states based on optimized neural networks and moving horizon estimator**. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 28:3238–3249, 12 2023.

[90] LOPES, E. D. R.; SOUDRE, M. M.; LLANOS, C. H. ; AYALA, H. V. H.. **Nonlinear receding-horizon filter approximation with neural networks for fast state of charge estimation of lithium-ion batteries**. Journal of Energy Storage, 68, 9 2023.

[91] VIEIRA., F. C.; MEDEIROS., A. A. D.; ALSINA., P. J. ; ARAÚJO JR.., A. P.. **Position and orientation control of a two-wheeled differentially driven nonholonomic mobile robot**. In: PROCEEDINGS OF THE FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATICS IN CONTROL, AUTOMATION AND ROBOTICS - VOLUME 2: ICINCO,, p. 256–262. INSTICC, SciTePress, 2004.

[92] SIMIONESCU, P. A.; BEALE, D.. **Optimum synthesis of the four-bar function generator in its symmetric embodiment: the ackermann steering linkage**. Mechanism and Machine Theory, 37:1487–1504, 2002.

[93] ZHAO, J.-S.; LIU, X.; FENG, Z.-J. ; DAI, J. S.. **Design of an ackermann-type steering mechanism**. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 227:2549–2562, 2013.

[94] GARDNER, D. J.; REYNOLDS, D. R.; WOODWARD, C. S. ; BALOS, C. J.. **Enabling new flexibility in the SUNDIALS suite of nonlinear and differential/algebraic equation solvers**. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 2022.

[95] FERNANDEZ, B.; HERRERA, P. J. ; CERRADA, J. A.. **Robust digital control for autonomous skid-steered agricultural robots**. Computers and Electronics in Agriculture, 153:94–101, 10 2018.

[96] SHTESSEL, Y.; EDWARDS, C.; FRIDMAN, L.; LEVANT, A. ; OTHERS. **Sliding mode control and observation**, volumen 10. Springer, 2014.

[97] OGATA, K.. **Engenharia de controle moderno. 5ª**. São Paulo: Pearson, 2011.

[98] GIBBS, B. P.. **Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling: a practical handbook**. John Wiley & Sons, 2011.

[99] JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K.. **New extension of the kalman filter to nonlinear systems**. In: SIGNAL PROCESSING, SENSOR FUSION, AND TARGET RECOGNITION VI, volumen 3068, p. 182–193. Spie, 1997.

[100] SU, C.-Y.; STEPANENKO, Y.. **Robust motion/force control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints**. IEEE Transactions on Automatic Control, 39:609–614, 3 1994.

[101] BLOCH, A.; MCCLAMROCH, N.. **Control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints**. In: PROCEEDINGS OF THE 28TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL,, p. 201–205 vol.1, 1989.

[102] D'ANDREA NOVEL, B.; BASTIN, G. ; CAMPION, G.. **Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots**. In: PROCEEDINGS 1992 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, p. 2527–2532 vol.3, 1992.

[103] WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T.. **On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming**. Mathematical Programming, 106:25–57, 3 2006.

[104] MEDEIROS, V. S.. **Trajectory Optimization for Hybrid Wheeled-Legged Robots in Challenging Terrain**. Phd thesis, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, BR, July 2020. Available at `https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=50271@2`.

[107] ST-PIERRE, M.; GINGRAS, D.. **Comparison between the unscented kalman filter and the extended kalman filter for the position estimation module of an integrated navigation information system**. In: IEEE INTELLIGENT VEHICLES SYMPOSIUM, 2004, p. 831–835, 2004.

[108] SHABALINA, K.; SAGITOV, A. ; MAGID, E.. **Comparative analysis of mobile robot wheels design**. In: 2018 11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON DEVELOPMENTS IN ESYSTEMS ENGINEERING (DESE), p. 175–179. IEEE, 2018.

[109] SHAMAH, B.. **Experimental comparison of skid steering vs. explicit steering for a wheeled mobile robot**. MSc Thesis, The Robotics Institute of Carnegie Mellon University, 1999.

[110] MASON, M. T.. **Mechanics of robotic manipulation**. MIT press, 2001.

[111] BALAKRISHNA, R.; GHOSAL, A.. **Modeling of slip for wheeled mobile robots**. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 11(1):126–132, 1995.

[112] WILLIAMS, R.; CARTER, B.; GALLINA, P. ; ROSATI, G.. **Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots**. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 18:285–293, 6 2002.

[113] SONG, T.; XI, F. J.; GUO, S.; TU, X. ; LI, X.. **Slip analysis for a wheeled mobile manipulator**. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 140, 2 2018.

[114] GRACIA, L.; TORNERO, J.. **Kinematic modeling of wheeled mobile robots with slip**. Advanced Robotics, 21:1253–1279, 1 2007.

[115] SIDEK, N.; SARKAR, N.. **Exploiting wheel slips of mobile robots to improve navigation performance**. Advanced Robotics, 27:627–639, 6 2013.

[116] WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T.. **On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming**. Mathematical Programming, 106:25–57, 3 2006.

[117] BLOCH, A.. **Nonholonomic Mechanics and Control**, volumen 24. Springer New York, 2015.

[118] SOUZA, L. C.. **Nonlinear Identification and Predictive Control of Vehicle Dynamics**. PhD thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2023.

A
Apêndice A

A.1
Modelo de predição 2

Desenvolvendo a Equação de Euler-Lagrange a partir das Equação (2-27), Equação (2-28) e Equação 2-29.

Sendo $L = T_c + T_{r_R} + T_{r_L}$

$$
\begin{aligned}
L = {} & \frac{I_c \cdot \dot{\phi}^2}{2} + I_{r_z} \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_L^2}{2} + \frac{I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_R^2}{2} + \frac{m_c \cdot \dot{x}_a^2}{2} + m_r \cdot \dot{x}_a^2 + \frac{m_c \cdot \dot{y}_a^2}{2} + m_r \cdot \dot{y}_a^2 \\
& + b^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 + c^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{d^2 \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2}{2} + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \cos\phi \\
& - d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \cos\phi - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \sin\phi
\end{aligned}
\tag{A-1}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix}
m_c \cdot \dot{x}_a + 2 \cdot m_r \cdot \dot{x}_a - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi \\
m_c \cdot \dot{y}_a + 2 \cdot m_r \cdot \dot{y}_a + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi - d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi \\
I_c \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot I_{r_z} \cdot \dot{\phi} + d^2 \cdot m_c \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot b^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot c^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \ldots \\
\ldots + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{y}_a \cdot \cos\phi - d \cdot m_c \cdot \dot{y}_a \cdot \cos\phi \ldots \\
\ldots - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{x}_a \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{x}_a \cdot \sin\phi \\
I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_R \\
I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_L
\end{bmatrix}
\tag{A-2}
$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} m_c \cdot \ddot{x}_a + 2 \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin\phi + \ldots \\ \ldots d \cdot m_c \cdot p\ddot{h}i \cdot \sin\phi - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos\phi + \ldots \\ \ldots d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos\phi \\ \\ m_c \cdot \ddot{y}_a + 2 \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos\phi - \ldots \\ \ldots d \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos\phi - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin\phi + \ldots \\ \ldots d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin\phi \\ \\ I_c \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot I_{r_z} \cdot \ddot{\phi} + d^2 \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot b^2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} + \ldots \\ \ldots 2 \cdot c^2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos\phi - d \cdot m_c \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos\phi - \ldots \\ \ldots 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin\phi - \ldots \\ \ldots 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos\phi - \ldots \\ \ldots - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin\phi \\ \\ I_{r_y} \cdot \ddot{\theta}_R \\ I_{r_y} \cdot \ddot{\theta}_L \end{bmatrix} \tag{A-3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) - \ldots \\ \ldots 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-4}$$

Obtêm-se, então a Equação (2-1):

$$\begin{bmatrix} m_c \cdot \ddot{x}_a + 2 \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a + \lambda_1 \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi) + \dots \\ \dots d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) = 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \cos(\phi) \cdot \dot{\phi}^2 + \dots \\ \dots \lambda_2 \cdot \cos(\phi) + \lambda_3 \cdot \cos(\phi) + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi) \\ \\ d \cdot m_c \cdot \sin(\phi) \cdot \dot{\phi}^2 + m_c \cdot \ddot{y}_a + 2 \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a + \dots \\ \dots 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\phi) = \lambda_1 \cdot \cos(\phi) + \lambda_2 \cdot \sin(\phi) + \dots \\ \dots \lambda_3 \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\phi) + \dots \\ \dots 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) \\ \\ 2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot b^2 + \lambda_3 \cdot b + 2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot c^2 + 2 \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos(\phi) \cdot c + \dots \\ \dots m_c \cdot \ddot{\phi} \cdot d^2 + m_c \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin(\phi) \cdot d + 2 \cdot I_{r_z} \cdot \ddot{\phi} = \dots \\ \dots b \cdot \lambda_2 + c \cdot \lambda_1 + \dots \\ \dots d \cdot m_c \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos(\phi) + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin(\phi) \\ \\ I_{r_y} \cdot \ddot{\theta}_R = \tau_1 - \lambda_2 \cdot r \\ I_{r_y} \cdot \ddot{\theta}_L = \tau_2 - \lambda_3 \cdot r \end{bmatrix} \tag{A-5}$$

Reorganizando para a forma da Eq,2-2:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_\mathrm{c} + 2 \cdot m_\mathrm{r} & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_\mathrm{c} + 2 \cdot m_\mathrm{r} & \sigma_2 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & I_{r_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_y} \end{bmatrix} \tag{A-6}$$

onde

$$\sigma_1 = d \cdot m_c \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \sin(\phi)$$

$$\sigma_2 = 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \cos(\phi) - d \cdot m_c \cdot \cos(\phi)$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) \\ d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-7}$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{A-8}$$

$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q}) \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_2 \cdot \cos(\phi) + \lambda_3 \cdot \cos(\phi) - \lambda_1 \cdot \sin(\phi) \\ \lambda_1 \cdot \cos(\phi) + \lambda_2 \cdot \sin(\phi) + \lambda_3 \cdot \sin(\phi) \\ b \cdot \lambda_2 - b \cdot \lambda_3 + c \cdot \lambda_1 \\ -\lambda_2 \cdot r \\ -\lambda_3 \cdot r \end{bmatrix} \tag{A-9}$$

A.2
Modelo de predição 3

Matriz $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \cos(\phi) & c & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & b & -r & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & -b & 0 & -r \end{bmatrix} \tag{A-10}$$

Matriz $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{b\cdot\cos(\phi)+c\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & \frac{b\cdot\cos(\phi)-c\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & 0 & 0 \\ -\frac{c\cdot\cos(\phi)-b\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & \frac{c\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\cdot b} & -\frac{1}{2\cdot b} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A-11}$$

Vetor de velocidades independentes (Equação (2-5)):

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\phi} \\ \dot{\rho}_R \\ \dot{\rho}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{b\cdot\cos(\phi)+c\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & \frac{b\cdot\cos(\phi)-c\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & 0 & 0 \\ -\frac{c\cdot\cos(\phi)-b\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & \frac{c\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\cdot b} & -\frac{1}{2\cdot b} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \end{bmatrix} \tag{A-12}$$

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\rho}_R \\ \dot{\rho}_L \\ \dot{\theta}_R \\ \dot{\theta}_L \end{bmatrix} \tag{A-13}$$

Posição e velocidades do chassi e das rodas

– Chassi

$$\boldsymbol{p}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - d\cdot\cos\phi \\ y_a - d\cdot\sin\phi \end{bmatrix} \tag{A-14}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a + d\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi \\ \dot{y}_a - d\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi \end{bmatrix} \tag{A-15}$$

– Roda direita

$$\boldsymbol{p}_{r_R} = \begin{bmatrix} x_{r_R} \\ y_{r_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + c \cdot \cos\phi + b \cdot \sin\phi \\ y_a + c \cdot \sin\phi - b \cdot \cos\phi \end{bmatrix} \tag{A-16}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{r_R} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{r_R} \\ \dot{y}_{r_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a - c \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi + b \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi \\ \dot{y}_a + c \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi + b \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi \end{bmatrix} \tag{A-17}$$

– Roda esquerda

$$\boldsymbol{p}_{r_L} = \begin{bmatrix} x_{r_L} \\ y_{r_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + c \cdot \cos\phi - b \cdot \sin\phi \\ y_a + c \cdot \sin\phi + b \cdot \cos\phi \end{bmatrix} \tag{A-18}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{r_L} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{r_L} \\ \dot{y}_{r_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a - c \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi - b \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi \\ \dot{y}_a + c \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi - b \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi \end{bmatrix} \tag{A-19}$$

Energias cinéticas:

$$T_c = \frac{m_c \cdot d^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} + m_c \cdot \sin(\phi) \cdot d \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a - m_c \cdot \cos(\phi) \cdot d \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_c \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{m_c \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_c \cdot \dot{y}_a^2}{2} \tag{A-20}$$

$$T_{r_R} = \frac{m_r \cdot b^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \sin(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{m_r \cdot c^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_{r,z} \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_R^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{y}_a^2}{2} \tag{A-21}$$

$$T_{r_L} = \frac{m_r \cdot b^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} - m_r \cdot \cos(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{m_r \cdot c^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_{r,z} \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_L^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{y}_a^2}{2} \tag{A-22}$$

Desenvolvimento da Equação de Euler-Lagrange.

$$
\begin{aligned}
L = {} & \frac{I_c \cdot \dot{\phi}^2}{2} + I_{r_z} \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_L^2}{2} + \frac{I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_R^2}{2} + \frac{m_c \cdot \dot{x}_a^2}{2} + m_r \cdot \dot{x}_a^2 + \frac{m_c \cdot \dot{y}_a^2}{2} + m_r \cdot \dot{y}_a^2 \\
& + b^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 + c^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{d^2 \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2}{2} + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \cos\phi \\
& - d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \cos\phi - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \sin\phi
\end{aligned}
\tag{A-23}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix}
m_c \cdot \dot{x}_a + 2 \cdot m_r \cdot \dot{x}_a - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi \\
m_c \cdot \dot{y}_a + 2 \cdot m_r \cdot \dot{y}_a + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi - d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi \\
I_c \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot I_{r_z} \cdot \dot{\phi} + d^2 \cdot m_c \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot b^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi} + 2 \cdot c^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \ldots \\
\ldots + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{y}_a \cdot \cos\phi - d \cdot m_c \cdot \dot{y}_a \cdot \cos\phi \ldots \\
\ldots - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{x}_a \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{x}_a \cdot \sin\phi \\
0 \\
0 \\
I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_R \\
I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_L
\end{bmatrix}
\tag{A-24}
$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} m_c \cdot \ddot{x}_a + 2 \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin\phi + \dots \\ \dots d \cdot m_c \cdot p\ddot{h}i \cdot \sin\phi - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos\phi + \dots \\ \dots d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos\phi \\ \\ m_c \cdot \ddot{y}_a + 2 \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos\phi - \dots \\ \dots d \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos\phi - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin\phi + \dots \\ \dots d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin\phi \\ \\ I_c \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot I_{r_z} \cdot \ddot{\phi} + d^2 \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot b^2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} + \dots \\ \dots 2 \cdot c^2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos\phi - d \cdot m_c \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos\phi - \dots \\ \dots 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin\phi - \dots \\ \dots 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos\phi - \dots \\ \dots - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin\phi + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin\phi \\ \\ 0 \\ 0 \\ I_{r_y} \cdot \ddot{\theta}_R \\ I_{r_y} \cdot \ddot{\theta}_L \end{bmatrix} \tag{A-25}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) - \dots \\ \dots 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-26}$$

A partir desse modelo, existe a atuação das forças de tração longitudinal em cada roda. Esse vetor é dado por:

$$\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x_R} \\ F_{x_L} \\ -F_{x_R}\cdot r \\ -F_{x_L}\cdot r \end{bmatrix} \tag{A-27}$$

Calculo da Equação (2-1):

$$\begin{bmatrix} d\cdot m_c\cdot\cos(\phi)\cdot\dot{\phi}^2 + m_c\cdot\ddot{x}_a + 2\cdot m_r\cdot\ddot{x}_a + \lambda_1\cdot\sin(\phi) + d\cdot m_c\cdot\ddot{\phi}\cdot\sin(\phi) = \dots \\ \dots 2\cdot c\cdot m_r\cdot\cos(\phi)\cdot\dot{\phi}^2 + \lambda_2\cdot\cos(\phi) + \lambda_3\cdot\cos(\phi) + 2\cdot c\cdot m_r\cdot\ddot{\phi}\cdot\sin(\phi) \\ \\ d\cdot m_c\cdot\sin(\phi)\cdot\dot{\phi}^2 + m_c\cdot\ddot{y}_a + 2\cdot m_r\cdot\ddot{y}_a + 2\cdot c\cdot m_r\cdot\ddot{\phi}\cdot\cos(\phi) = \dots \\ \dots 2\cdot c\cdot m_r\cdot\sin(\phi)\cdot\dot{\phi}^2 + \lambda_1\cdot\cos(\phi) + \lambda_2\cdot\sin(\phi) + \lambda_3\cdot\sin(\phi) + \dots \\ \dots d\cdot m_c\cdot\ddot{\phi}\cdot\cos(\phi) \\ \\ 2\cdot m_r\cdot\ddot{\phi}\cdot b^2 + \lambda_3\cdot b + 2\cdot m_r\cdot\ddot{\phi}\cdot c^2 + 2\cdot m_r\cdot\ddot{y}_a\cdot\cos(\phi)\cdot c + m_c\cdot\ddot{\phi}\cdot d^2 + \dots \\ \dots m_c\cdot\ddot{x}_a\cdot\sin(\phi)\cdot d + I_c\cdot\ddot{\phi} + 2\cdot I_{r_z}\cdot\ddot{\phi} = \dots \\ \dots b\cdot\lambda_2 + c\cdot\lambda_1 + d\cdot m_c\cdot\ddot{y}_a\cdot\cos(\phi) + 2\cdot c\cdot m_r\cdot\ddot{x}_a\cdot\sin(\phi) \\ \\ F_{x_R} = \lambda_2 \\ F_{x_L} = \lambda_3 \\ I_{r_y}\cdot\ddot{\theta}_R = \tau_1 - F_{x_R}\cdot\text{raio} \\ I_{r_y}\cdot\ddot{\theta}_L = \tau_2 - F_{x_L}\cdot\text{raio} \end{bmatrix} \tag{A-28}$$

Observa-se que $F_{x_R} = \lambda_2$ e $F_{x_L} = \lambda_3$, indicando que as forças de tração, nesse modelo, são forças internas de restrição do sistema, já que o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ faz a conexão entre as restrições cinemáticas e dinâmicas.

Reorganizando como na Equação (2-2).

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_c + 2\cdot m_r & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_c + 2\cdot m_r & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_y} \end{bmatrix} \tag{A-29}$$

onde

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= d \cdot m_c \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \sin(\phi) \\ \sigma_2 &= 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \cos(\phi) - d \cdot m_c \cdot \cos(\phi) \\ \sigma_3 &= 2 \cdot m_r \cdot b^2 + 2 \cdot m_r \cdot c^2 + m_c \cdot d^2 + I_c + 2 \cdot I_{r_z}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) \\ d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-30}$$

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{A-31}$$

$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q}) \cdot \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_2 \cdot \cos(\phi) + \lambda_3 \cdot \cos(\phi) - \lambda_1 \cdot \sin(\phi) \\ \lambda_1 \cdot \cos(\phi) + \lambda_2 \cdot \sin(\phi) + \lambda_3 \cdot \sin(\phi) \\ b \cdot \lambda_2 - b \cdot \lambda_3 + c \cdot \lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-32}$$

A.3
Modelo de predição 4

Matriz $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \cos(\phi) & c_F & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & c_F & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & -c_B & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & -c_B & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & b & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) & -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A-33}$$

Matriz $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q})$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \frac{b\cdot\cos(\phi)-c_B\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & \frac{b\cdot\cos(\phi)+c_B\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \frac{c_B\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & -\frac{c_B\cdot\cos(\phi)-b\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\cdot b} & -\frac{1}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{c_B+c_F}{2\cdot b} & -\frac{c_B+c_F}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{c_B+c_F}{2\cdot b} & -\frac{c_B+c_F}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A-34}$$

Vetor de velocidades independentes (Equação (2-5)):

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\phi} \\ \dot{\eta}_{F_R} \\ \dot{\eta}_{F_L} \\ \dot{\eta}_{B_R} \\ \dot{\eta}_{B_L} \\ \dot{\rho}_{F_R} \\ \dot{\rho}_{F_L} \\ \dot{\rho}_{B_R} \\ \dot{\rho}_{B_L} \\ \dot{\theta}_{F_R} \\ \dot{\theta}_{F_L} \\ \dot{\theta}_{B_R} \\ \dot{\theta}_{B_L} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -\sin(\phi) & \frac{b\cdot\cos(\phi)-c_B\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & \frac{b\cdot\cos(\phi)+c_B\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \frac{c_B\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & -\frac{c_B\cdot\cos(\phi)-b\cdot\sin(\phi)}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\cdot b} & -\frac{1}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{c_B+c_F}{2\cdot b} & -\frac{c_B+c_F}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{c_B+c_F}{2\cdot b} & -\frac{c_B+c_F}{2\cdot b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \\ \nu_6 \\ \nu_7 \end{bmatrix} \tag{A-35}$$

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_{B_R} \\ \dot{\rho}_{F_R} \\ \dot{\rho}_{F_L} \\ \dot{\theta}_{F_R} \\ \dot{\theta}_{F_L} \\ \dot{\theta}_{B_R} \\ \dot{\theta}_{B_L} \end{bmatrix} \tag{A-36}$$

Posição e velocidades do chassi e das rodas

– Chassi

$$\boldsymbol{p}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - d\cdot\cos\phi \\ y_a - d\cdot\sin\phi \end{bmatrix} \tag{A-37}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a + d\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi \\ \dot{y}_a - d\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi \end{bmatrix} \tag{A-38}$$

– Roda frontal direita

$$\boldsymbol{p}_{r_{F_R}} = \begin{bmatrix} x_{r_{F_R}} \\ y_{r_{F_R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + c_F\cdot\cos\phi + b\cdot\sin\phi \\ y_a + c_F\cdot\sin\phi - b\cdot\cos\phi \end{bmatrix} \tag{A-39}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{r_{F_R}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{r_{F_R}} \\ \dot{y}_{r_{F_R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a - c_F\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi + b\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi \\ \dot{y}_a + c_F\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi + b\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi \end{bmatrix} \tag{A-40}$$

– Roda frontal esquerda

$$\boldsymbol{p}_{r_{F_L}} = \begin{bmatrix} x_{r_{F_L}} \\ y_{r_{F_L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a + c_F \cdot \cos\phi - b \cdot \sin\phi \\ y_a + c_F \cdot \sin\phi + b \cdot \cos\phi \end{bmatrix} \tag{A-41}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{r_{F_L}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{r_{F_L}} \\ \dot{y}_{r_{F_L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a - c_F \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi - b \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi \\ \dot{y}_a + c_F \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi - b \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi \end{bmatrix} \tag{A-42}$$

– Roda traseira direita

$$\boldsymbol{p}_{r_{B_R}} = \begin{bmatrix} x_{r_{B_R}} \\ y_{r_{B_R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - c_B \cdot \cos\phi + b \cdot \sin\phi \\ y_a - c_B \cdot \sin\phi - b \cdot \cos\phi \end{bmatrix} \tag{A-43}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{r_{B_R}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{r_{B_R}} \\ \dot{y}_{r_{B_R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a - c_B \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi + b \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi \\ \dot{y}_a - c_B \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi + b \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi \end{bmatrix} \tag{A-44}$$

– Roda traseira esquerda

$$\boldsymbol{p}_{r_{B_L}} = \begin{bmatrix} x_{r_{B_L}} \\ y_{r_{B_L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a - c_B \cdot \cos\phi - b \cdot \sin\phi \\ y_a - c_B \cdot \sin\phi + b \cdot \cos\phi \end{bmatrix} \tag{A-45}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{r_{B_L}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{r_{B_L}} \\ \dot{y}_{r_{B_L}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a + c_B \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi - b \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi \\ \dot{y}_a - c_B \cdot \dot{\phi} \cdot \cos\phi - b \cdot \dot{\phi} \cdot \sin\phi \end{bmatrix} \tag{A-46}$$

Energias cinéticas:

$$T_c = \frac{m_c \cdot d^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} + m_c \cdot \sin(\phi) \cdot d \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a - m_c \cdot \cos(\phi) \cdot d \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_c \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{m_c \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_c \cdot \dot{y}_a^2}{2} \tag{A-47}$$

$$T_{r_{F_R}} = \frac{m_r \cdot b^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \sin(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{m_r \cdot {c_F}^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot c_F \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot c_F \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_{r_{zF}} \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_{F_R}^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{y}_a^2}{2} \tag{A-48}$$

$$T_{r_{F_L}} = \frac{m_r \cdot b^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} - m_r \cdot \cos(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{m_r \cdot {c_F}^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot c_F \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot c_F \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_{r_{z_F}} \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{I_{r_y} \cdot \dot{\theta}_{F_L}^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{y}_a^2}{2} \quad \text{(A-49)}$$

$$T_{r_{B_R}} = \frac{m_r \cdot b^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} + m_r \cdot \cos(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a + m_r \cdot \sin(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{m_r \cdot {c_B}^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} + m_r \cdot \sin(\phi) \cdot c_B \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a - m_r \cdot \cos(\phi) \cdot c_B \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_{r_{z_B}} \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_{B_R}^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{y}_a^2}{2} \quad \text{(A-50)}$$

$$T_{r_{B_L}} = \frac{m_r \cdot b^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} - m_r \cdot \cos(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a - m_r \cdot \sin(\phi) \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{m_r \cdot {c_B}^2 \cdot \dot{\phi}^2}{2} + m_r \cdot \sin(\phi) \cdot c_B \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a - m_r \cdot \cos(\phi) \cdot c_B \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a + \frac{I_{r_{z_B}} \cdot \dot{\phi}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_{B_L}^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{x}_a^2}{2} + \frac{m_r \cdot \dot{y}_a^2}{2} \quad \text{(A-51)}$$

Desenvolvimento da Equação de Euler-Lagrange.

$$L = \frac{I_c \cdot \dot{\phi}^2}{2} + I_{r_{z_B}} \cdot \dot{\phi}^2 + I_{r_{z_F}} \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_{B_L}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_{F_L}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_{B_R}^2}{2} + \frac{I_{r,y} \cdot \dot{\theta}_{F_R}^2}{2} + \frac{m_c \cdot \dot{x}_a^2}{2} + 2 \cdot m_r \cdot \dot{x}_a^2 + \frac{m_c \cdot \dot{y}_a^2}{2} + 2 \cdot m_r \cdot \dot{y}_a^2 + 2 \cdot b^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 + {c_B}^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 + {c_F}^2 \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{d^2 \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2}{2} - 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) + 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) - d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \cos(\phi) + 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \sin(\phi) \quad \text{(A-52)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} m_c\,\dot{x}_a + 4\,m_r\,\dot{x}_a + 2\,c_B\,m_r\,\dot{\phi}\,\sin(\phi) - \ldots \\ \ldots 2\,c_F\,m_r\,\dot{\phi}\,\sin(\phi) + d\,m_c\,\dot{\phi}\,\sin(\phi) \\ \\ m_c\,\dot{y}_a + 4\,m_r\,\dot{y}_a - 2\,c_B\,m_r\,\dot{\phi}\,\cos(\phi) + \ldots \\ \ldots 2\,c_F\,m_r\,\dot{\phi}\,\cos(\phi) - d\,m_c\,\dot{\phi}\,\cos(\phi) \\ \\ I_c\,\dot{\phi} + 2\,I_{r_{z_B}}\,\dot{\phi} + 2\,I_{r_{z_F}}\,\dot{\phi} + 2\,{c_B}^2\,m_r\,\dot{\phi} + 2\,{c_F}^2\,m_r\,\dot{\phi} + \ldots \\ \ldots d^2\,m_c\,\dot{\phi} + 4\,b^2\,m_r\,\dot{\phi} - 2\,c_B\,m_r\,\dot{y}_a\,\cos(\phi) + 2\,c_F\,m_r\,\dot{y}_a\,\cos(\phi) - \ldots \\ \ldots d\,m_c\,\dot{y}_a\,\cos(\phi) + 2\,c_B\,m_r\,\dot{x}_a\,\sin(\phi) - 2\,c_F\,m_r\,\dot{x}_a\,\sin(\phi) + d\,m_c\,\dot{x}_a\,\sin(\phi) \\ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{r,y}\,\dot{\theta}_{F_R} \\ I_{r,y}\,\dot{\theta}_{F_L} \\ I_{r,y}\,\dot{\theta}_{B_R} \\ I_{r,y}\,\dot{\theta}_{B_L} \end{bmatrix} \tag{A-53}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) - 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) + \ldots \\ \ldots 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-54}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) - 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{x}_a \cdot \cos(\phi) + \ldots \\ \ldots 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{y}_a \cdot \sin(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-55}$$

Calculo da Equação (2-1):

$$\begin{bmatrix}
m_c \cdot \ddot{x}_a + 4 \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a + 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi) - \ldots \\
\ldots 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\phi) + 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) - \ldots \\
\ldots 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) = \lambda_5 \cdot \cos(\phi) + \lambda_6 \cdot \cos(\phi) + \ldots \\
\ldots \lambda_7 \cdot \cos(\phi) + \lambda_8 \cdot \cos(\phi) - \lambda_1 \cdot \sin(\phi) - \lambda_2 \cdot \sin(\phi) - \lambda_3 \cdot \sin(\phi) - \lambda_4 \cdot \sin(\phi) \\
\\
m_c \cdot \ddot{y}_a + 4 \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a - 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\phi) + \ldots \\
\ldots 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\phi) - d \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\phi) + 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) - \ldots \\
\ldots 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) = \lambda_1 \cdot \cos(\phi) + \lambda_2 \cdot \cos(\phi) + \lambda_3 \cdot \cos(\phi) + \ldots \\
\ldots \lambda_4 \cdot \cos(\phi) + \lambda_5 \cdot \sin(\phi) + \lambda_6 \cdot \sin(\phi) + \lambda_7 \cdot \sin(\phi) + \lambda_8 \cdot \sin(\phi) \\
\\
I_c \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot I_{r_{z_B}} \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot I_{r_{z_F}} \cdot \ddot{\phi} + b \cdot \lambda_6 + b \cdot \lambda_8 + \ldots \\
\ldots c_B \cdot \lambda_3 + c_B \cdot \lambda_4 + 2 \cdot {c_B}^2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} + 2 \cdot {c_F}^2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} + d^2 \cdot m_c \cdot \ddot{\phi} + 4 \cdot b^2 \cdot m_r \cdot \ddot{\phi} + \ldots \\
\ldots 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos(\phi) + 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin(\phi) = b \cdot \lambda_5 + b \cdot \lambda_7 + \ldots \\
\ldots c_F \cdot \lambda_1 + c_F \cdot \lambda_2 + 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos(\phi) + d \cdot m_c \cdot \ddot{y}_a \cdot \cos(\phi) + \ldots \\
\ldots 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \ddot{x}_a \cdot \sin(\phi) \\
\\
F_{y_{F_R}} = \lambda_1 \\
F_{y_{F_L}} = \lambda_2 \\
F_{y_{B_R}} = \lambda_3 \\
F_{y_{B_L}} = \lambda_4 \\
F_{x_{F_R}} = \lambda_5 \\
F_{x_{F_L}} = \lambda_6 \\
F_{x_{B_R}} = \lambda_7 \\
F_{x_{B_L}} = \lambda_8 \\
I_{r,y} \cdot \ddot{\theta}_{F_R} = \tau_1 - F_{x_{F_R}} \cdot r \\
I_{r,y} \cdot \ddot{\theta}_{F_L} = \tau_2 - F_{x_{F_L}} \cdot r \\
I_{r,y} \cdot \ddot{\theta}_{B_R} = \tau_3 - F_{x_{B_R}} \cdot r \\
I_{r,y} \cdot \ddot{\theta}_{B_L} = \tau_4 - F_{x_{B_L}} \cdot r
\end{bmatrix} \tag{A-56}$$

Observa-se que as forças longitudinais e laterais são iguais aos multiplicadores de Lagrange, também indicando que essas forças, nesse modelo, são forças internas de restrição do sistema, já que o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ faz a conexão entre as restrições cinemáticas e dinâmicas.

Reorganizando como na Equação (2-2).

$$
\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}
{}_c + 4 \cdot m_r & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m_c + 4 \cdot m_r & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r,y} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r,y} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r,y} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r,y}
\end{bmatrix} \tag{A-57}
$$

onde

$$\sigma_1 = 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \sin(\phi) \tag{A-58}$$

$$\sigma_2 = 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \cos(\phi) - 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \cos(\phi) - d \cdot m_c \cdot \cos(\phi) \tag{A-59}$$

$$\sigma_3 = 4 \cdot m_r \cdot b^2 + 2 \cdot m_r \cdot {c_B}^2 + 2 \cdot m_r \cdot {c_F}^2 + m_c \cdot d^2 + I_c + 2 \cdot I_{r_{z_B}} + 2 \cdot I_{r_{z_F}} \tag{A-60}$$

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) - 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos(\phi) \\ 2 \cdot c_B \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) - 2 \cdot c_F \cdot m_r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) + d \cdot m_c \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-61}
$$

$$
\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \tau_1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ \tau_2\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ \tau_3\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ \tau_4 \end{bmatrix} \tag{A-62}
$$

$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{q})\cdot\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_5\cdot\cos(\phi)+\lambda_6\cdot\cos(\phi)+\lambda_7\cdot\cos(\phi)+\lambda_8\cdot\cos(\phi)-\ldots \\ \ldots\lambda_1\cdot\sin(\phi)-\lambda_2\cdot\sin(\phi)-\lambda_3\cdot\sin(\phi)-\lambda_4\cdot\sin(\phi) \\ \\ \lambda_1\cdot\cos(\phi)+\lambda_2\cdot\cos(\phi)+\lambda_3\cdot\cos(\phi)+\lambda_4\cdot\cos(\phi)+\ldots \\ \ldots\lambda_5\cdot\sin(\phi)+\lambda_6\cdot\sin(\phi)+\lambda_7\cdot\sin(\phi)+\lambda_8\cdot\sin(\phi) \\ \\ b\cdot\lambda_5-b\cdot\lambda_6+b\cdot\lambda_7-b\cdot\lambda_8-c_B\cdot\lambda_3-c_B\cdot\lambda_4+c_F\cdot\lambda_1+c_F\cdot\lambda_2 \\ \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_3 \\ -\lambda_4 \\ -\lambda_5 \\ -\lambda_6 \\ -\lambda_7 \\ -\lambda_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A-63}$$

Por fim, a equação final de movimento do Modelo 4.

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{y}_a \\ \dot{\phi} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta}_{F_R} \\ \dot{\theta}_{F_L} \\ \dot{\theta}_{B_R} \\ \dot{\theta}_{B_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cdot \cos(\phi) - v_y \cdot \sin(\phi) \\ v_y \cdot \cos(\phi) + v_x \cdot \sin(\phi) \\ \omega \\ \frac{Fx_{B_L}+Fx_{F_L}+Fx_{B_R}+Fx_{F_R}+m_c\cdot\omega\cdot vy+4\cdot m_r\cdot\omega\cdot vy-2\cdot c_B\cdot m_r\cdot\omega^2+2\cdot c_F\cdot m_r\cdot\omega^2-d\cdot m_c\cdot\omega^2}{m_c+4\cdot m_r} \\ \\ \frac{Fy_{B_L}\cdot I_c+Fy_{F_L}\cdot I_c+Fy_{B_R}\cdot I_c+Fy_{F_R}\cdot I_c+2\cdot Fy_{B_L}\cdot I_{r_{z_B}}+2\cdot Fy_{B_L}\cdot I_{r_{z_F}}}{\sigma_1} + \dots \\ \dots \frac{2\cdot Fy_{F_L}\cdot I_{r_{z_B}}+2\cdot Fy_{B_R}\cdot I_{r_{z_B}}+2\cdot Fy_{F_L}\cdot I_{r_{z_F}}+2\cdot Fy_{B_R}\cdot I_{r_{z_F}}+2\cdot Fy_{F_R}\cdot I_{r_{z_B}}}{\sigma_1} + \dots \\ \dots \frac{2\cdot Fy_{F_R}\cdot I_{r_{z_F}}+4\cdot Fy_{B_L}\cdot b^2\cdot m_r+4\cdot Fy_{F_L}\cdot b^2\cdot m_r+4\cdot Fy_{B_R}\cdot b^2\cdot m_r}{\sigma+1} + \dots \\ \dots \frac{4\cdot Fy_{F_R}\cdot b^2\cdot m_r+2\cdot Fy_{F_L}\cdot c_B^2\cdot m_r+2\cdot Fy_{F_R}\cdot c_B^2\cdot m_r+2\cdot Fy_{B_L}\cdot c_F^2\cdot m_r+2\cdot Fy_{B_R}\cdot c_F^2\cdot m_r}{\sigma_1} + \dots \\ \dots \frac{Fy_{B_L}\cdot d^2\cdot m_c+Fy_{F_L}\cdot d^2\cdot m_c+Fy_{B_R}\cdot d^2\cdot m_c+Fy_{F_R}\cdot d^2\cdot m_c-16\cdot b^2\cdot m_r^2\cdot\omega\cdot vx-4\cdot c_B^2\cdot m_r^2\cdot\omega\cdot vx}{\sigma_1} - \dots \\ \dots \frac{4\cdot c_F^2\cdot m_r^2\cdot\omega\cdot vx-2\cdot Fx_{B_L}\cdot b\cdot c_B\cdot m_r-2\cdot Fx_{F_L}\cdot b\cdot c_B\cdot m_r+2\cdot Fx_{B_R}\cdot b\cdot c_B\cdot m_r+2\cdot Fx_{F_R}\cdot b\cdot c_B\cdot m_r}{\sigma_1} + \dots \\ \dots \frac{2\cdot Fx_{B_L}\cdot b\cdot c_F\cdot m_r+2\cdot Fx_{F_L}\cdot b\cdot c_F\cdot m_r-2\cdot Fx_{B_R}\cdot b\cdot c_F\cdot m_r-2\cdot Fx_{F_R}\cdot b\cdot c_F\cdot m_r}{\sigma_1} - \dots \\ \dots \frac{Fx_{B_L}\cdot b\cdot d\cdot m_c-Fx_{F_L}\cdot b\cdot d\cdot m_c+Fx_{B_R}\cdot b\cdot d\cdot m_c+Fx_{F_R}\cdot b\cdot d\cdot m_c}{\sigma_1} + \dots \\ \dots \frac{2\cdot Fy_{B_L}\cdot c_B\cdot c_F\cdot m_r+2\cdot Fy_{F_L}\cdot c_B\cdot c_F\cdot m_r+2\cdot Fy_{B_R}\cdot c_B\cdot c_F\cdot m_r}{\sigma_1} + \dots \\ \dots \frac{2\cdot Fy_{F_R}\cdot c_B\cdot c_F\cdot m_r-Fy_{B_L}\cdot c_B\cdot d\cdot m_c-Fy_{B_R}\cdot c_B\cdot d\cdot m_c+Fy_{F_L}\cdot c_F\cdot d\cdot m_c}{\sigma_1} + \dots \\ \dots \frac{Fy_{F_R}\cdot c_F\cdot d\cdot m_c-I_c\cdot m_c\cdot\omega\cdot vx-4\cdot I_c\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx-2\cdot I_{r_{z_B}}\cdot m_c\cdot\omega\cdot vx-2\cdot I_{r_{z_F}}\cdot m_c\cdot\omega\cdot vx}{\sigma_1} - \dots \\ \dots \frac{8\cdot I_{r_{z_B}}\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx-8\cdot I_{r_{z_F}}\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx-8\cdot c_B\cdot c_F\cdot m_r^2\cdot\omega\cdot vx}{\sigma_1} - \dots \\ \dots \frac{4\cdot b^2\cdot m_c\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx-2\cdot c_B^2\cdot m_c\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx-2\cdot c_F^2\cdot m_c\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx}{\sigma_1} - \dots \\ \dots \frac{4\cdot d^2\cdot m_c\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx+4\cdot c_B\cdot d\cdot m_c\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx-4\cdot c_F\cdot d\cdot m_c\cdot m_r\cdot\omega\cdot vx}{\sigma_1} \\ \\ \frac{\tau_1-Fx_{FR}\cdot r}{I_{r,y}} \\ \frac{\tau_2-Fx_{FL}\cdot r}{I_{r,y}} \\ \frac{\tau_3-Fx_{BR}\cdot r}{I_{r,y}} \\ \frac{\tau_4-Fx_{BL}\cdot r}{I_{r,y}} \end{bmatrix} \tag{A-64}
$$

onde

$$
\begin{aligned} \sigma_1 = I_c \cdot m_c + 4 \cdot I_c \cdot m_r + 2 \cdot I_{r_{z_B}} \cdot m_c + 2 \cdot I_{r_{z_F}} \cdot m_c + 8 \cdot I_{r_{z_B}} \cdot m_r + \dots \\ \dots 8 \cdot I_{r_{z_F}} \cdot m_r + 16 \cdot b^2 \cdot m_r^2 + 4 \cdot c_B^2 \cdot m_r^2 + 4 \cdot c_F^2 \cdot m_r^2 + 8 \cdot c_B \cdot c_F \cdot m_r^2 + \dots \\ \dots 4\cdot b^2\cdot m_c\cdot m_r+2\cdot c_B^2\cdot m_c\cdot m_r+2\cdot c_F^2\cdot m_c\cdot m_r+4\cdot d^2\cdot m_c\cdot m_r-4\cdot c_B\cdot d\cdot m_c\cdot m_r+\dots \\ \dots 4 \cdot c_F \cdot d \cdot m_c \cdot m_r \end{aligned} \tag{A-65}
$$