



**Antonio Carlos Bruno de Andrade**

**Reservatórios Limitados com e sem  
Manutenção de Pressão no Limite Externo:  
Comportamento da Pressão durante Testes de  
Injeção**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Sinésio Pesco  
Co-orientador: Prof. Abelardo Borges Barreto Junior

Rio de Janeiro  
Julho de 2024



**Antonio Carlos Bruno de Andrade**

**Reservatórios Limitados com e sem  
Manutenção de Pressão no Limite Externo:  
Comportamento da Pressão durante Testes de  
Injeção**

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio . Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

**Prof. Sinésio Pesco**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Abelardo Borges Barreto Junior**

Co-orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Renan Vieira Bela**

Petróleo Brasileiro S/A – Petrobras

**Prof. Tahyz Gomes Pinto**

DeepSoft – DS

**Prof. Eduardo da Silva Castro**

Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC

Rio de Janeiro, 05 de Julho de 2024

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Antonio Carlos Bruno de Andrade**

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe em 2022.

Ficha Catalográfica

Andrade, Antonio Carlos Bruno de

Reservatórios Limitados com e sem Manutenção de Pressão no Limite Externo: Comportamento da Pressão durante Testes de Injeção / Antonio Carlos Bruno de Andrade; orientador: Sinésio Pesco; co-orientador: Abelardo Borges Barreto Junior. – Rio de Janeiro: PUC-Rio , Departamento de Matemática, 2024.

v., 61 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Teste de Injetividade;. 3. Regimes de Fluxo Permanente;. 4. Regimes de Fluxo Pseudopermanente;. 5. Reservatório Homogêneo com Única Camada.. I. Pesco, Sinésio. II. Barreto Junior, Abelardo Borges. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Aos meus pais, irmãos, sobrinhos e amigos.

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus, pois me ensinaste que nada é impossível e que perante a qualquer dificuldade, quem acredita no teu amor encontrará o caminho da superação.

Ao meu orientador, Professor Sinésio Pesco, e ao meu co-orientador, Professor Abelardo Barreto, por sua orientação, estímulo, paciência e fé.

A minha família, em especial aos meus pais, pois sempre me ensinaram a ter esperanças e incentivo nesta trajetória.

Ao apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e da Petrobras.

Aos meus amigos e colegas da PUC-Rio, tanto pelos momentos de estudos quanto de distrações.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A todos os professores e funcionários do Departamento pelos ensinamentos e pela ajuda.

## Resumo

Andrade, Antonio Carlos Bruno de; Pesco, Sinésio; Barreto Junior, Abelardo Borges. **Reservatórios Limitados com e sem Manutenção de Pressão no Limite Externo: Comportamento da Pressão durante Testes de Injeção**. Rio de Janeiro, 2024. 61p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O teste de injetividade é um procedimento que tem como objetivo otimizar a produção e maximizar a recuperação de óleo dos reservatórios de petróleo. Esse teste consiste em injetar um fluido (comumente água ou gás), em um poço injetor para coletar informações sobre ele. Com base no comportamento da pressão medida durante o período de injeção, é possível identificar uma série de características relacionadas ao reservatório, incluindo volume de óleo recuperável, parâmetros do reservatório, zonas de *skin*, permeabilidade e condição de fronteira de reservatório. Atualmente, são encontrados poucos estudos relativos a testes de injetividade em reservatórios homogêneos em regimes de fluxo permanente e pseudopermanente. Por esse motivo, este trabalho tem como objetivo propor uma solução analítica aproximada para o comportamento de pressão em reservatórios homogêneos em regimes de fluxo permanente e pseudopermanente. Os resultados calculados apresentaram uma aproximação satisfatória em todos os casos.

## Palavras-chave

Teste de Injetividade; Regimes de Fluxo Permanente; Regimes de Fluxo Pseudopermanente; Reservatório Homogêneo com Única Camada.

## Abstract

Andrade, Antonio Carlos Bruno de; Pesco, Sinésio (Advisor); Barreto Junior, Abelardo Borges (Co-Advisor). **Limited Reservoirs with and without Pressure Maintenance at the External Limit: Pressure Behavior during Injection**. Rio de Janeiro, 2024. 61p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Injectivity testing is a procedure that aims to optimize production and maximize oil recovery from oil reservoirs. This test consists of injecting a fluid (usually water or gas) into an injection well to collect information about it. Based on the pressure behavior measured during the injection period, it is possible to identify a series of reservoir-related characteristics, including recoverable oil volume, reservoir parameters, skin zones, permeability and reservoir boundary condition. Currently, there are few studies on injectivity tests in homogeneous reservoirs in permanent and pseudo-permanent flow regimes. For this reason, this work aims to propose an approximate analytical solution for the pressure behavior in homogeneous reservoirs in permanent and pseudopermanent flow regimes. The calculated results showed a satisfactory approximation in all cases.

## Keywords

Injectivity Test; Steady flow regimes; Pseudo-Steady flow regimes; Homogeneous Reservoir with Single Layer.

## Sumário

1	Introdução	14
2	Revisão Bibliográfica	16
2.1	Testes de Injetividade em Reservatórios de Óleo	16
2.2	Reservatórios de Óleo sujeitos aos Regimes de Fluxo Permanente e Pseudopermanente	19
3	Escoamento Monofásico em Reservatório com Duas Regiões	21
3.1	Regime Permanente	21
3.2	Regime Pseudopermanente	27
4	Proposta de Solução para Escoamento Bifásico em Regimes de Fluxo Permanente e PseudoPermanente	32
4.1	Regime Permanente	32
4.2	Regime Pseudopermanente	37
5	Resultados	40
5.1	Parâmetros Utilizados	40
5.2	Análise de Casos	41
6	Conclusão e trabalhos futuros	48
7	Referências bibliográficas	49
A	Conceitos Básicos de Fluxo Fracionário e a Teoria de Buckley-Leverett para um Escoamento Radial	53
B	Pontos das Curvas de Permeabilidade Relativa, Fluxo Fracionário e Mobilidades	60

## Lista de figuras

Figura 3.1	Modelo de Reservatório Monofásico para Duas regiões em Regime Permanente.	21
Figura 3.2	Curvas de Pressão para um Reservatório Monofásico com Duas Regiões em Regime Permanente.	26
Figura 3.3	Modelo de Reservatório Monofásico para Duas regiões em Regime PseudoPermanente.	27
Figura 3.4	Curvas de Pressão para um Reservatório Monofásico com Duas Regiões em Regime Pseudopermanente.	30
Figura 4.1	Modelo de Reservatório Bifásico em Regime de Estado Permanente.	33
Figura 4.2	Modelo de Reservatório Bifásico em Regime de Estado PseudoPermanente.	37
Figura 5.1	Curvas de $\Delta p(t)$ e $\frac{d\Delta p(t)}{d\ln(t)}$ em Regime de Estado Pseudopermanente $\mu_o = 0.2 \text{ cP}$ .	41
Figura 5.2	Curvas de $\Delta p(t)$ e $\frac{d\Delta p(t)}{d\ln(t)}$ em Regime de Estado PseudoPermanente com $\mu_o = 0.8 \text{ cP}$ .	42
Figura 5.3	Curva de $p_{wf}$ vs $t$ em Regime de Fluxo Pseudopermanente.	43
Figura 5.4	Curva de $p_{wf}$ vs $t$ em Regime de Fluxo Pseudopermanente.	44
Figura 5.5	Curvas de $\Delta P$ e $\frac{d\Delta p(t)}{d\ln(t)}$ em Regime de Estado Permanente com $\mu_o = 0.8 \text{ cP}$ .	45
Figura 5.6	Curvas de $\Delta P$ e $\frac{d\Delta p(t)}{d\ln(t)}$ em Regime de Estado Permanente com $\mu_o = 0.2 \text{ cP}$ .	46
Figura 5.7	Curvas de $\Delta P$ e $\Delta P'$ em Regime de Estado Permanente.	47
Figura A.1	Fluxo linear inclinado com formato de paralelepípedo de dois fluidos imiscíveis. Fonte: (30)	53
Figura A.2	Curvas de Permeabilidade Relativa Água-Óleo.	55
Figura A.3	Curva de Fluxo Fracionário de Água.	56
Figura A.4	Mobilidades da água, óleo e total em relação a saturação de água.	57
Figura A.5	Modelo de Escoamento Radial.	58

## Lista de tabelas

Tabela 3.1	Tabela de propriedades das regiões.	26
Tabela 5.1	Valores de propriedades dos regimes de fluxo da água e do óleo.	40
Tabela B.1	Pontos das permeabilidades relativas de cada fase e saturação de água.	60
Tabela B.2	Pontos de fluxo fracionário e saturação de água.	61

## Lista de símbolos

- $\hat{\eta}_i$  – Coeficiente de difusividade hidráulica da fase i
- $\eta_j$  – Coeficiente de difusividade hidráulica da região j
- $\lambda_j$  – Coeficiente de mobilidade da região j
- $c_t$  – Compressibilidade total
- $\alpha_p = 19.03$  – Constante de adequação de medidas do sistema brasileiro
- $\alpha_t = 0.0003484$  – Constante de adequação de medidas do sistema brasileiro
- $\rho_i$  – Densidade da fase i
- $h$  – Espessura da camada
- $f_i$  – Fluxo fracionário da fase i
- $m_i$  – Massa da fase i
- $\hat{\lambda}_w$  – Mobilidade da água na saturação residual de óleo
- $\hat{\lambda}_o$  – Mobilidade do óleo na saturação inicial de água
- $k_i$  – Permeabilidade absoluta da fase i
- $k_j$  – Permeabilidade absoluta da região j
- $k_{rf_i}$  – Permeabilidade relativa da fase i
- $\phi_j$  – Porosidade da região j
- $p$  – Pressão
- $p_c$  – Pressão capilar
- $p_i$  – Pressão inicial
- $\bar{p}$  – Pressão no domínio laplace
- $p_{wf}$  – Pressão no poço
- $r$  – Raio
- $r_F$  – Raio da frente de avanço de água
- $r_e$  – Raio da região externa
- $r_1$  – Raio da região interna
- $r_w$  – Raio do poço
- $\hat{M}$  – Razão de mobilidade

$S_{wi}$  – Saturação de água irreduzível

$S_f$  – Saturação do fluido f

$S_{or}$  – Saturação residual de óleo

$v_i$  – Taxa de fluxo da fase i

$t$  – Tempo

$\Delta p_c$  – Variação da pressão capilar

$\Delta m_i$  – Variação de massa da fase i

$\Delta p_j$  – Variação de pressão da região j

$\Delta p_i$  – Variação de pressão da fase i

$u$  – Variável de Laplace

$\Delta p_{wf}$  – Variação de pressão no poço

$q_j$  – Vazão da região j

$q_{inj}$  – Vazão de injeção

$\mu_i$  – Viscosidade da fase i

*A esperança é a luz que nos guia mesmo nos  
momentos mais sombrios.*

**Desmond Tutu, .**

# 1

## Introdução

A análise no comportamento de pressão é fundamental na Engenharia de Reservatórios, pois fornece estimativas de propriedades físicas do reservatório. Durante um teste de injetividade, é possível avaliar parâmetros como permeabilidade ou verificar se há dano de formação próxima ao poço. Um teste de injetividade consiste em injetar um fluido, geralmente água, no processo de recuperação de petróleo. Além de manter a pressão no reservatório, uma das principais características é manter o estado de tensão do reservatório. Com base nos resultados obtidos durante um teste de injetividade, as operações de injeções podem ser controladas para evitar que uma pressão ultrapasse os limites do reservatório, o que pode causar fraturas na rocha do reservatório. Podemos citar o caso Pinheiro/Braskem, em que, após os dados liberados pela SGB/CPRM alegando 35 poços de extração em áreas urbanas, a falta de manutenção acarretou danos ao solo.

Os testes de injetividade podem fornecer informações significativas sobre o reservatório, que podem melhorar a eficácia de produção de petróleo. Durante os testes é possível medir a permeabilidade permitindo uma melhor visão de como o fluido se comporta dentro do reservatório. Além disso, para as indústrias, identificar e corrigir problemas relacionados à dano de formação ajudam a reduzir os custos operacionais. Além de garantir riscos relacionados a acidentes e vazamentos em áreas urbanas.

A partir do perfil de pressão e a sua derivada em relação ao logaritmo do tempo nesse processo, é possível estimar parâmetros tais como permeabilidade, volume de óleo recuperável, entre outros. Atualmente, há diversos estudos que formulam modelos analíticos para o período de injeção em reservatórios de camada única. Vários cenários podem ser observados partindo de diferentes suposições com relação à geometria e às características físicas do reservatório.

O regime de fluxo está ligado a produtividade do poço. Com isso, compreender o regime de fluxo ajuda nas técnicas e tecnologias mais adequadas para maximizar a produção de petróleo. Sendo assim, um regime de fluxo permanente ocorre quando há manutenção de pressão na fronteira externa. Além disso, as condições de produção no reservatório são constantes ao longo do tempo. Já um regime de fluxo pseudopermanente a fronteira externa é selada, ou seja, não existe fluxo de fluido através da fronteira externa  $r_e$ . A pressão na fronteira externa cai uniforme a um comportamento linear.

Seguindo esse contexto, já estão disponíveis soluções para testes de poços

sujeitos aos regimes de fluxo permanente e pseudopermanente. Entretanto, até onde sabemos, testes de injetividade em regimes de fluxo permanente e pseudopermanente ainda não foram aplicados para avaliar o comportamento da pressão em reservatórios sob fluxo bifásico. Neste contexto, o principal objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo analítico para o período de teste de injetividade em reservatórios sob fluxo bifásico, com duas regiões - uma contendo água e outra contendo óleo - sujeitos ao regime de fluxo permanente e pseudopermanente.

Com base na solução analítica desenvolvida neste estudo, foi possível criar um algoritmo capaz de simular diferentes curvas de pressão e derivada de pressão logarítmica a partir de parâmetros de rocha e fluido. Os resultados foram avaliados através da comparação de estudos já desenvolvidos na literatura. Uma abordagem sobre reservatórios radialmente compostos é empregado em toda solução desenvolvida. Em seguida a esta introdução, o Capítulo 2 aborda uma visão geral de trabalhos já apresentados. Este capítulo é desenvolvido em duas vertentes: a primeira aborda estudos analíticos já desenvolvidos sobre testes de injetividade em reservatórios de óleo de camada única e multicamadas. Já a segunda vertente aborda estudos analíticos desenvolvidos sobre reservatórios de óleo em regimes de fluxo permanente e pseudopermanente. No capítulo 3 e 4 são apresentadas as soluções para um escoamento monofásico em bifásico, com duas regiões em regimes de fluxo permanente e pseudopermanente, respectivamente. Além disso, no capítulo 3 é mostrado uma estimativa para calcular o volume poroso no caso do escoamento monofásico, com duas regiões sujeito ao regime de fluxo pseudopermanente cujo objetivo foi aplicar esse método para o modelo do escoamento bifásico, com duas regiões sob regime de fluxo pseudopermanente. A formulação matemática sugerida neste trabalho é feita no espaço de Laplace, onde a solução é conhecida em termos das funções de Bessel. Em seguida, a solução no espaço real é calculada utilizando o algoritmo de Stehfest. Os resultados são apresentados no capítulo 5. Por fim, no capítulo 6 é fornecido as conclusões e sugestões para trabalhos futuros. Formulações são mostradas no Apêndice que auxiliaram no desenvolvimento dos capítulos 3 e 4.

## 2

### Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será realizada uma revisão bibliográfica com os principais assuntos abordados neste trabalho. Primeiramente serão apresentados estudos referentes a Testes de Injetividade feitos em reservatórios sujeitos a escoamentos monofásicos e bifásicos. Em seguida, serão abordados tópicos sobre o estado de regimes de fluxos permanente e pseudopermanente relacionados a esses tipos de escoamento.

#### 2.1

##### Testes de Injetividade em Reservatórios de Óleo

Segundo Green e Willhite (14) há três fases de recuperação do óleo: recuperação primária, secundária e terciária. Na recuperação primária, o petróleo é extraído de forma natural, ou seja, dentro do reservatório há uma pressão interna ou energia natural presente dos fluidos que é capaz de empurrar o óleo pelos poros do meio poroso. Devido a este fato, a pressão interna dentro do reservatório tende a cair conforme o óleo é impulsionado, levando a segunda fase, conhecida como recuperação secundária. Nesta fase, um fluido é injetado, na maioria das vezes a água, com finalidade aumentar a pressão do reservatório e, logo, manter a vazão esperada. Já na recuperação terciária, os autores citam que é necessário utilizar técnicas mais avançadas e com altos custos para mobilizar e extrair o petróleo remanescente. Atualmente essa recuperação é chamada de recuperação avançada ou EOR (*Enhanced Oil Recovery*). Alguns exemplos de técnicas de recuperação terciária incluem a injeção de CO<sub>2</sub> (dióxido de carbono), injeção de solventes, entre outros.

A água e o óleo são fluidos imiscíveis devido as suas diferentes polaridades moleculares. Willhite (34) cita que às solubilidades do óleo na água e da água no óleo são baixas. Devido a isso, além de aumentar e manter a pressão dentro do reservatório, a água é capaz de deslocar o óleo pelos poros do meio poroso.

No processo de injeção de água, uma frente de avanço é formada no reservatório. Esse modelo foi proposto por Buckley e Leverett (9). À medida em que o óleo é produzido, a frente de água avança, aumentando a saturação de água no reservatório. A saturação de água se desloca pelo meio poroso formando um banco de água que faz a varredura do óleo para poço produtor.

O avanço de estudos de soluções analíticas para teste de injetividade em reservatórios vem sendo desenvolvido ao longo do tempo. Banerjee et al. (3) analisaram o comportamento dos testes de injetividade e *falloff*, período

após a injeção do fluido, em reservatórios com formatos radiais homogêneos e heterogêneos. Já no trabalho de Abbaszadeh e Kamal (1) em 1989, foi proposta uma aproximação da solução analítica para testes de injetividade e *falloff* de um modelo de reservatório de petróleo de camada única que está sendo inundado com água. Para eles, a injeção de água ocorre no estágio inicial do desenvolvimento do reservatório.

Thompson e Reynolds (33) analisaram um modelo de reservatório heterogêneo, radial e infinito sob fluxo multifásico com finalidade de estudar o comportamento de pressão dentro desses modelos de reservatórios. Para eles, o reservatório poderia ser representado por um regime de fluxo permanente, juntamente com uma região transiente circular concêntrica ao poço vertical. Esses autores, observaram que em um teste de injetividade o raio da região de regime de fluxo permanente é suficientemente maior que o raio da frente de avanço.

Em 1999, Prats e Vogiatzis (29) consideraram um estudo analítico para testes de injetividade voltados para reservatórios de multicamadas com fluxo de um único fluido. Peres e Reynolds (27) ampliaram as ideias das soluções analíticas de teste de injetividade de poços verticais para poços horizontais.

Peres et al. (26) estenderam as soluções analíticas para um escoamento de um poço vertical ou horizontal em *falloff*. Eles adicionaram um termo multifásico que foi capaz de refletir o desvio da mobilidade total (que ocorre na região conectada pela água injetada) da mobilidade do petróleo (que ocorre na saturação inicial de água).

Em 2019, Bela et al. (5) estudaram uma solução analítica para o período de *falloff* em reservatório de camada única e múltiplas camadas. Para isso, eles aplicaram a Lei de Darcy em cada camada para obter a variação de pressão durante o teste de injetividade e, ainda mais, puderam observar que a variação de pressão é dada em função da em cada camada. A eficiência do modelo pode ser comparada com um simulador comercial *blackoil*. Eles concluíram que de fato após o fechamento do poço, o fluxo vertical entre as camadas é suficientemente pequeno.

Já em 2020, Neto et al. (22) apresentaram uma solução analítica para a pressão de poço em um teste de injetividade em reservatórios de camada única considerando um fluxo bifásico, pistão, em duas ou três regiões em um modelo de reservatório composto radialmente. O principal objetivo desse trabalho foi analisar as curvas de pressão em diferentes casos. Considerando um reservatório infinito, as soluções foram obtidas no campo de Laplace. Com o auxílio do algoritmo de Stehfest (31) foi possível passar as soluções para o campo real. Os resultados foram consideráveis quando comparados a um simulador baseado em

diferenças finitas (10). Além disso, através das curvas de pressão e derivada de pressão, eles puderam estimar a permeabilidade do reservatório tanto no início (usando as propriedades do óleo) quanto no final (usando as propriedades da água).

Em 2021, Mastbaum et al. (21) estenderam os estudos feitos por Neto et al. (22) e apresentaram soluções analíticas para o teste de injetividade para um fluxo de duas fases, com duas regiões em um reservatório multicamadas desenvolvidas no domínio de Laplace. Eles presumem que as propriedades como permeabilidade e porosidade são diferentes em cada camada. Nesse trabalho, os autores consideraram que as camadas do reservatório tem ligação somente pelo poço. Através do simulador numérico (10) foi possível ver a concordância nas curvas comparadas com o modelo analítico proposto por eles. Além disso, os autores concluíram que os diferentes valores de viscosidade e de taxa de injeção de fluxo são parâmetros que alteram o comportamento da curva.

Em 2022, Bela et al. (6) desenvolveram um modelo analítico para obter uma função de impulso (ou função de Green) capaz de prever a mudança de pressão em reservatórios de camada única e múltiplas camadas de poços verticais e horizontais em fluxo bifásico durante testes de injetividade. No caso dos poços verticais de múltiplas camadas, os autores combinam a solução obtida em reservatórios de camada única com um algoritmo desenvolvido por Kuchuk e Wilkson (19). Além disso, eles utilizaram o método Delta Transiente (13), (15) para estimar as permeabilidades de cada camada. No caso dos reservatórios de múltiplas camadas verticais, eles observaram a concordância nos resultados quando comparadas com os resultados obtidos pelos trabalhos desenvolvidos por (4) e (21) e, além disso, um simulador numérico baseado em diferenças finitas (10). Já no caso dos reservatórios de camada única em poços horizontais, os autores puderam ver a concordância nos resultados comparados a Peres & Reynolds (27) e ao simulador (10).

Neto et al. (23), propuseram uma solução analítica aproximada para o comportamento da pressão em poços durante um teste de injeção de água em um reservatório multicamada considerando múltiplos esquemas de vazão. A formulação proposta por eles é combinação de soluções já formuladas por (4), (5) e (7). Os autores utilizaram o simulador numérico (10) para comparação dos resultados obtidos através da solução analítica. Além disso, através dos dados obtidos, foi possível estimar a permeabilidade do reservatório em cada camada.

## 2.2

## Reservatórios de Óleo sujeitos aos Regimes de Fluxo Permanente e Pseudopermanente

Em 1971, Fetkovich (12), desenvolveu soluções sobre o comportamento de reservatórios de óleo sujeitos ao fluxo de água proveniente de aquíferos limitados, sendo o regime de fluxo permanente e pseudopermanente. Para o regime de fluxo permanente, ele observou que a pressão no limite externo se mantém constante e igual a pressão inicial ( $p_i$ ). Já em 1986, Leung (20), também desenvolveu um modelo de reservatório preenchido de óleo proveniente de aquíferos limitados em regime de fluxo pseudopermanente. Ele notou que a pressão dentro do reservatório varia de acordo com o tempo.

Para o campo de poços de petróleo horizontais, o modelo de Joshi (16) destaca-se como um dos modelos mais reconhecidos para a condição de fluxo permanente na fronteira. Esse modelo combina soluções para um escoamento no plano horizontal e um escoamento no plano vertical em um poço horizontal para obter uma solução abrangente de um escoamento de poços horizontais.

Bourdet (8) realizou estudos sobre soluções de reservatórios fechados em regime de estado pseudopermanente. Para ele, um reservatório fechado com óleo entra em regime pseudopermanente quando a derivada de pressão, em um fluxo transiente, diminui rapidamente e, com isso a queda da pressão é proporcional ao tempo, mas a sua forma atinge um valor constante.

Babu e Odeh (2) apresentaram um modelo de um poço horizontal sob a condição de regime de fluxo de estado pseudopermanente. O modelo consiste em girar um poço vertical para representar um poço horizontal, acrescentando um fator de forma para contar a mudança na área de drenagem e um fator de penetração parcial para poços com penetração incompleta.

Kamkom e Zhu (17), apresentaram um estudo sobre o desempenho de fluxo em poços horizontais para diferentes tipos de fluidos em diferentes condições de contorno para a produção de poços de petróleo. Esses autores afirmam que um reservatório atinge um regime de fluxo permanente quando a pressão na fronteira é constante. Já um reservatório atinge o regime de fluxo pseudopermanente quando não há fluxo na fronteira de um domínio de reservatório.

Em 2006, Rosa et al. (30) apresentou soluções para a equação da difusividade para os sistemas lineares e radiais, em meios porosos horizontais, sujeitos aos regimes de fluxo permanente e pseudopermanente. Para o regime de fluxo permanente, o autor considerou um fluido em um meio poroso cilíndrico finito. Além disso, a vazão e a pressão são constantes em todo tempo e espaço. Isso ocorre devido ao meio poroso receber uma alimentação externa contínua e constante. Já no regime de fluxo pseudopermanente, ele considerou

um fluido em um meio poroso cilíndrico finito de altura  $h$  e com a lateral externa selada. Nesse caso não há alimentação externa. Para ele, a pressão em todos os pontos do reservatório reduz continuamente. Além disso, a taxa de queda da pressão média é constante. Isso ocorre devido à retirada de massa de um reservatório finito. O autor cita que para o reservatório atingir um regime pseudopermanente é necessário o conceito de tempo adimensional. Já no caso em que se tem poços injetores é possível alcançar o regime de fluxo permanente apenas em algumas regiões do reservatório se algumas propriedades forem iguais, como por exemplo, as vazões de injeção e produção.

Em 2013, Ghahfarokhi e Kleppe (18) apresentaram estudos sobre injeção de vapor para recuperação de petróleo em poços verticais e horizontais de regime de estado de fluxo pseudopermanente. Eles afirmam que as estimativas de permeabilidades se tornam mais fracas à medida que a qualidade do vapor aumenta, ou seja, a permeabilidade diminui a proporção que o vapor está presente no fluido facilitando a varredura.

Com base na formulação proposta pelos autores citados, propomos uma solução aproximada para reservatórios de camada única de escoamento monofásico e bifásico. No caso bifásico, analisamos o comportamento da pressão baseada na razão de mobilidade água-óleo em dois regimes de fluxo: permanente e pseudopermanente.

### 3

## Escoamento Monofásico em Reservatório com Duas Regiões

Neste capítulo são apresentadas duas formulações de produção em reservatório de escoamento monofásico para duas regiões em regime de estado permanente e pseudopermanente. Com o objetivo de simplificar o problema no campo real, todas as equações são levadas para o espaço de Laplace. O problema modelado passa a ser um sistema linear com quatro equações o qual pode ser resolvido utilizando métodos computacionais. Por fim, o cálculo do volume poroso para o regime de fluxo pseudopermanente é mostrado.

Soluções analíticas para o modelo de escoamento monofásico em reservatórios de óleo foram propostos anteriormente por (33).

### 3.1

#### Regime Permanente

Por hipótese, um reservatório em regime de fluxo permanente ocorre quando a manutenção de pressão nas fronteiras externas se mantém constante. Considere um reservatório com duas regiões homogêneas representado pela figura a seguir:

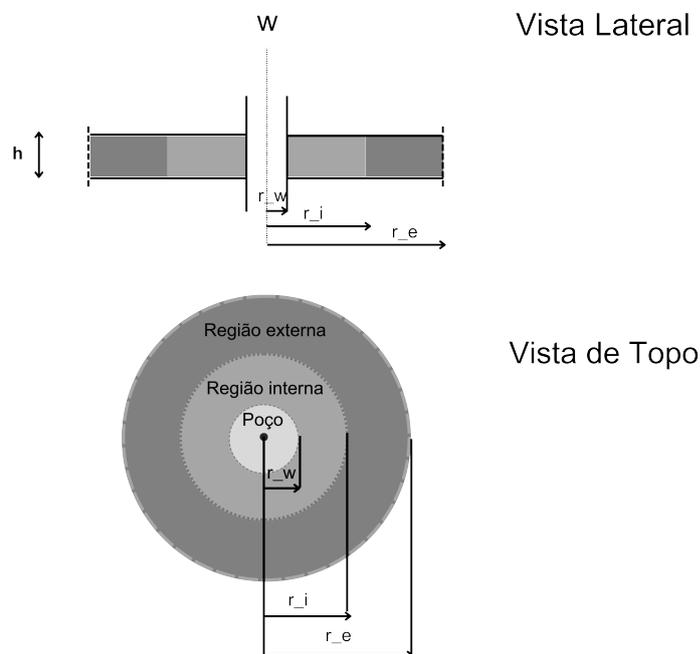


Figura 3.1: Modelo de Reservatório Monofásico para Duas regiões em Regime Permanente.

As seguintes hipóteses são consideradas para a formulação matemática:

1. Fluxo ocorre somente na direção radial;
2. Fluxo monofásico e isotérmico;
3. Fluido com baixa compressibilidade e constante;
4. Viscosidades constantes;
5. Reservatório com formato cilíndrico composto por duas regiões homogêneas;
6. Efeitos de estocagem, dano de formação e gravitacionais são desprezíveis;
7. Manutenção de pressão  $p_e$  na fronteira externa  $r_e$ .

Note que para solucionar o problema é necessário o uso das condições iniciais e de contorno. A Condição Inicial (C.I.) indica que no instante  $t = 0$ , a pressão em todo o reservatório está em equilíbrio. Já a Condição de Contorno Interna (C.C.I.) especifica a vazão do poço em produção. No caso em questão, estamos adotando uma vazão constante. E por fim, a Condição de Contorno Externa (C.C.E.) reflete ao comportamento do fluxo no limite externo do reservatório. Por hipótese, será considerado um reservatório finito. A C.C.E. representa que a partir da fronteira externa no regime de fluxo permanente a variação de pressão está em equilíbrio. Já no caso do regime de fluxo pseudopermanente, não há fluxo de fluido.

### 3.1.1

#### Formulação Matemática

Defina  $\eta_i = \frac{k_i}{\phi_i c_i \mu}$  o coeficiente de difusidade hidráulica,  $\lambda_i = \frac{k_i}{\mu}$  coeficiente de mobilidade e  $M = \frac{k_2}{k_1}$ . Assim, as equações que modelam cada região são dadas por:

Região Interna ( $r_w \leq r \leq r_1$ ):

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial t} \right), \quad (3-1)$$

CI:

$$\Delta p_1(r, t = 0) = 0, \quad (3-2)$$

CCI:

$$q = 2\pi \lambda_1 h \left( r \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_w}. \quad (3-3)$$

Região Externa ( $r_1 \leq r \leq r_e$ )

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_2} \left( r \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial t} \right), \quad (3-4)$$

$$\text{CI:} \quad \Delta p_2(r, t = 0) = 0, \quad (3-5)$$

$$\text{CCE:} \quad \Delta p_2(r = r_e, t) = 0. \quad (3-6)$$

Considerando as Condições de Acoplamento na Fronteira (CAF) dos dois regimes de fluxo temos que:

CAF - Pressão:

$$\Delta p_1(r_1, t) = \Delta p_2(r_1, t) \quad (3-7)$$

CAF - Vazão:

$$q_1(r_1, t) = q_2(r_1, t) \quad (3-8)$$

Aplicando a Lei de Darcy em (3-8), a igualdade passa a ser:

$$\left( r \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_1} = M \left( r \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_1} \quad (3-9)$$

### 3.1.1.1

#### Solução no Espaço de Laplace

Transformando as equações no espaço real para o espaço de Laplace segue que:

Região Interna ( $r_w = 1 \leq r \leq r_1$ ):

EDP:

Aplicando Laplace em ambos os lados da Equação (3-1) temos:

$$\mathcal{L} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right) \right) = \mathcal{L} \left( \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial t} \right) \quad (3-10)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{p}_1(r, u)}{dr} \right) \right) = \frac{1}{\eta_1} [u \Delta \bar{p}_1(r, u) - \Delta p_1(r, 0)],$$

$$\text{CI:} \quad \Delta \bar{p}_1(r, 0) = 0, \quad (3-11)$$

CCI:

$$\left( r \frac{\partial \Delta \bar{p}_1(r, u)}{\partial r} \right)_{r=r_w} = \frac{q}{2\pi \lambda_1 h u}. \quad (3-12)$$

Região Externa ( $r_{D_1} \leq r_D \leq r_{D_e}$ ):

EDP:

Aplicado Laplace em ambos os lados da Equação (3-4) temos:

$$\mathcal{L} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial r} \right) \right) = \mathcal{L} \left( \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial t} \right) \quad (3-13)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\bar{p}_2(r, u)}{dr} \right) \right) = \frac{1}{\eta_2} [u \Delta \bar{p}_2(r, u) - \Delta p_2(r, 0)]$$

$$\text{CI:} \quad \Delta \bar{p}_2(r, 0) = 0, \quad (3-14)$$

$$\text{CCE:} \quad \Delta \bar{p}_2(r_e, u) = 0. \quad (3-15)$$

As condições de acoplamento na fronteira:

CAF - Pressão:

$$\Delta \bar{p}_1(r_1, u) = \Delta \bar{p}_2(r_1, u), \quad (3-16)$$

CAF - Vazão:

$$\left( r \frac{\partial \Delta \bar{p}_1(r, u)}{\partial r} \right)_{r=r_1} = M \left( r \frac{\partial \Delta \bar{p}_2(r, u)}{\partial r} \right)_{r=r_1}. \quad (3-17)$$

Aplicando a CI (3-11) na Equação (3-10) e simplificando:

$$\frac{1}{r} \frac{d \Delta \bar{p}_1(r, u)}{dr} + \frac{d^2 \Delta \bar{p}_1(r, u)}{dr^2} - \frac{1}{\eta_1} u \Delta \bar{p}_1(r, u) = 0. \quad (3-18)$$

Denote  $\eta_{k_1} = \frac{1}{\eta_1}$  e multiplique a Equação (3-18) por  $\frac{1}{u\eta_{k_1}}$ :

$$\frac{1}{r} \frac{1}{u\eta_{k_1}} \frac{d \Delta \bar{p}_1(r, u)}{dr} + \frac{1}{u\eta_{k_1}} \frac{d^2 \Delta \bar{p}_1(r, u)}{dr^2} - \Delta \bar{p}_1(r, u) = 0, \quad (3-19)$$

Substituindo  $\frac{1}{u\eta_{k_1}} = \frac{1}{(\sqrt{u\eta_{k_1}})^2}$  na Equação (3-19) temos:

$$\frac{1}{r(\sqrt{u\eta_{k_1}})} \frac{d \Delta \bar{p}_1(r, u)}{dr(\sqrt{u\eta_{k_1}})} + \frac{d^2 \Delta \bar{p}_1(r, u)}{d(r\sqrt{u\eta_{k_1}})^2} - \Delta \bar{p}_1(r, u) = 0, \quad (3-20)$$

Denote  $z = r\sqrt{u\eta_{k_1}}$  e  $y = \Delta \bar{p}_1(r, u)$ . Substituindo na Equação (3-20):

$$\frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{d^2 y}{dz^2} - y = 0, \quad (3-21)$$

A Equação (3-21) é chamada de Equação de Bessel Modificada de Ordem Zero e sua solução é conhecida por:

$$y = AI_0(z) + BK_0(z). \quad (3-22)$$

Aplicando ao nosso problema, a solução para a região interna resulta em:

$$\Delta \bar{p}_1(r, u) = A_1 I_0(r\sqrt{u\eta_{k_1}}) + B_1 K_0(r\sqrt{u\eta_{k_1}}). \quad (3-23)$$

Analogamente, fazendo para a região externa temos que:

$$\Delta \bar{p}_2(r, u) = A_2 I_0(r\sqrt{u\eta_{k_2}}) + B_2 K_0(r\sqrt{u\eta_{k_2}}), \quad (3-24)$$

onde  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , são constantes a serem determinadas e  $I_0, K_0$  são funções modificadas de Bessel de primeira espécie e ordem 0.

Usando a CCI (3-12) na Equação (3-23) e simplificando temos:

$$[A_1 I_1(r_w \sqrt{u\eta_{k_1}})] - B_1 K_1(r_w \sqrt{u\eta_{k_1}})] = \frac{q}{2\pi \lambda_1 h u r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}}. \quad (3-25)$$

Usando a CCE (3-15) na Equação (3-24) e simplificando temos:

$$A_2 I_0(r_e \sqrt{u\eta_{k_2}}) + B_2 K_0(r_e \sqrt{u\eta_{k_2}}) = 0. \quad (3-26)$$

Aplicando a CAF (3-16) nas Equações (3-23) e (3-24) temos:

$$A_1 I_0(r_1 \sqrt{u\eta_{k_1}}) + B_1 K_0(r_1 \sqrt{u\eta_{k_1}}) - A_2 I_0(r_1 \sqrt{u\eta_{k_2}}) + B_2 K_0(r_1 \sqrt{u\eta_{k_2}}) = 0. \quad (3-27)$$

Aplicando a CAF (3-17) nas Equações (3-23) e (3-24) e multiplicando por  $\frac{1}{r_1 \sqrt{u}}$  temos:

$$A_1 I_1(r_1 \sqrt{u\eta_{k_1}}) \sqrt{\eta_{k_1}} - B_1 K_1(r_1 \sqrt{u\eta_{k_1}}) \sqrt{\eta_{k_1}} - A_2 I_1(r_1 \sqrt{u\eta_{k_2}}) M \sqrt{\eta_{k_2}} + B_2 K_1(r_1 \sqrt{u\eta_{k_2}}) M \sqrt{\eta_{k_2}} = 0. \quad (3-28)$$

As equações obtidas (3-25), (3-26), (3-27) e (3-28) formam um sistema linear que representado em sua forma matricial temos:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{2\pi \lambda_1 h u r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

onde  $\mathbf{A}$  é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} I_1(r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}) & -K_1(r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0(r_e \sqrt{u\eta_{k_2}}) & K_0(r_e \sqrt{u\eta_{k_2}}) \\ I_0(r_1 \sqrt{u\eta_{k_1}}) & K_0(r_1 \sqrt{u\eta_{k_1}}) & -I_0(r_1 \sqrt{u\eta_{k_2}}) & -K_0(r_1 \sqrt{u\eta_{k_2}}) \\ I_1(r_1 \sqrt{u\eta_{k_1}}) \sqrt{\eta_{k_1}} & -K_1(r_1 \sqrt{u\eta_{k_1}}) \sqrt{\eta_{k_1}} & -I_1(r_1 \sqrt{u\eta_{k_2}}) M \sqrt{\eta_{k_2}} & K_1(r_1 \sqrt{u\eta_{k_2}}) M \sqrt{\eta_{k_2}} \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

Os coeficientes  $A_1, B_1, A_2$  e  $B_2$  podem ser encontrados resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{q}{2\pi \lambda_1 h u r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-31)$$

Uma vez calculados os coeficientes, a pressão no poço pode ser calculada a partir da solução geral dada por:

$$\Delta \bar{p}_{wf} = A_1 I_0(r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}) + B_1 K_0(r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}) \quad (3-32)$$

### 3.1.2

#### Resultados do Modelo de Escoamento Monofásico com Duas Regiões em Regime de Fluxo Permanente

A solução numérica no campo real pode ser obtida utilizando o Algoritmo de Stehfest (31). A Tabela (3.1) a seguir mostra os dados que foram utilizados para traçar as curvas da pressão e da derivada da pressão para as duas regiões.

	Região 1	Região 2
Permeabilidade K (mD)	500	5000
Porosidade $\phi$	0.27	0.27
Compressibilidade Total $c_P a^{-1}$	120e-6	120e-6
Viscosidade $\mu$ (cP)	0.5	0.5
Raio r (m)	10	1000

Tabela 3.1: Tabela de propriedades das regiões.

Além disso, as constantes de adequação de medidas do sistema brasileiro ( $\alpha_t$ ) e ( $\alpha_p$ ) foram definidas, respectivamente, como 0.0003484 e 19.03. A vazão total utilizada foi de  $q = 1000 \text{ m}^3/\text{dia}$ . O raio no poço e a espessura de cada região, respectivamente, é dado por  $r_w = 0.1 \text{ m}$  e  $h = 50 \text{ m}$ .

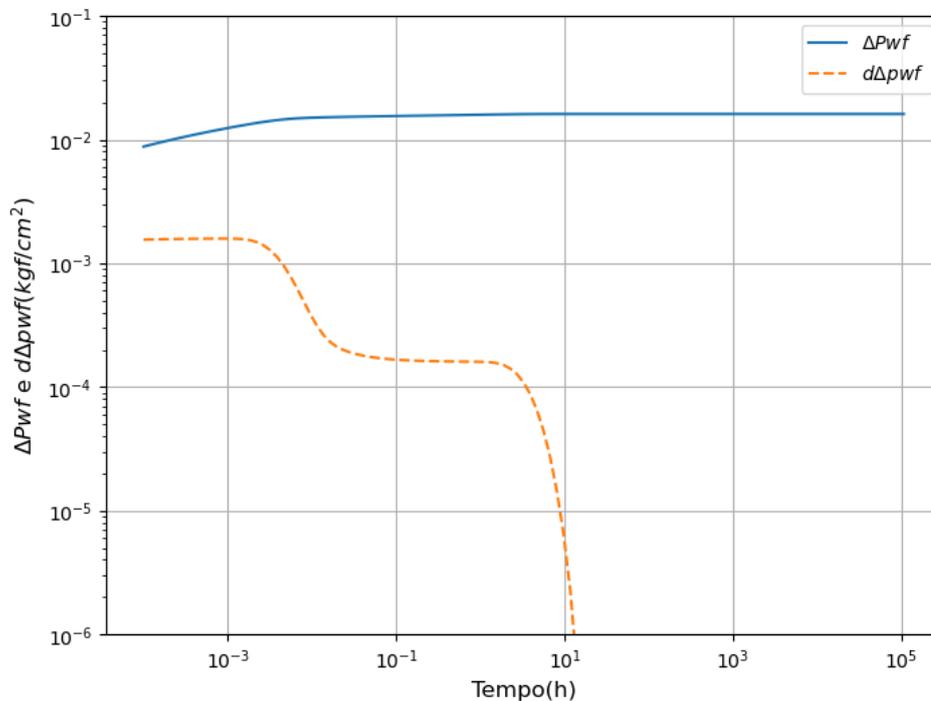


Figura 3.2: Curvas de Pressão para um Reservatório Monofásico com Duas Regiões em Regime Permanente.

O gráfico (3.2) apresenta curvas de pressão e derivada de pressão de três regimes de fluxo. A primeira região tem um valor de permeabilidade

de  $500\text{ mD}$  e segunda região tem um valor de permeabilidade de  $5000\text{ mD}$ . Note que essa mudança de permeabilidade afeta diretamente na visualização do gráfico da curva de pressão e derivada de pressão. Nos tempos iniciais é possível notar na curva da derivada de pressão somente da primeira região de permeabilidade. Nos tempos mais tardios, a curva reflete a segunda região com uma permeabilidade dez vezes maior que a primeira. Por fim, no terceiro regime temos que o reservatório entra em estado permanente o qual é caracterizado pela derivada da pressão tender a zero.

### 3.2 Regime Pseudopermanente

Por hipótese, um reservatório em estado de regime pseudopermanente ocorre quando não existe influxo de fluidos nos limites do reservatório. Considere um reservatório com duas regiões homogêneas representado pela figura a seguir:

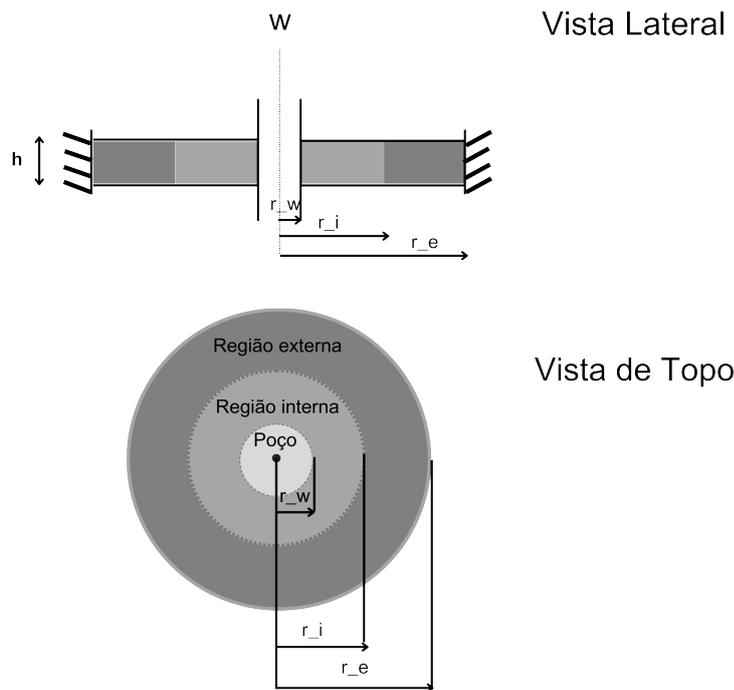


Figura 3.3: Modelo de Reservatório Monofásico para Duas regiões em Regime PseudoPermanente.

As seguintes hipóteses são consideradas para a formulação matemática:

1. Fluxo ocorre somente na direção radial;
2. Fluxo monofásico e isotérmico;
3. Fluido com baixa compressibilidade e constante;

4. Viscosidades constantes;
5. Reservatório com formato cilíndrico composto por duas regiões homogêneas;
6. Efeitos de estocagem, dano de formação e gravitacionais são desprezíveis;
7. Não há fluxo na fronteira externa ( $r_e$ ).

### 3.2.1

#### Formulação Matemática

Defina  $\eta_i = \frac{k_i}{\phi_i c_i \mu}$  o coeficiente de difusidade hidráulica e  $\lambda_i = \frac{k_i}{\mu}$  coeficiente de mobilidade. Assim, as equações que modelam cada região são dadas por:

Região Interna ( $r_w \leq r \leq r_1$ ):

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_1} \left( \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial t} \right), \quad (3-33)$$

CI:

$$\Delta p_1(r, t = 0) = 0, \quad (3-34)$$

CCI:

$$q = 2\pi \lambda_1 h \left( r \frac{\partial \Delta p_1(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_w} \quad (3-35)$$

Região Externa ( $r_1 \leq r \leq r_e$ )

EDP:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial t}, \quad (3-36)$$

CI:

$$\Delta p_2(r, t = 0) = 0, \quad (3-37)$$

CCE:

$$\left( r \frac{\partial \Delta p_2(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_e} = 0. \quad (3-38)$$

Considerando as Condições de Acoplamento na Fronteira(CAF) das duas regiões temos que:

CAF - Pressão:

$$\Delta p_1(r_1, t) = \Delta p_2(r_1, t), \quad (3-39)$$

CAF - Vazão:

$$q_1(r_1, t) = q_2(r_1, t). \quad (3-40)$$

De maneira análoga ao regime permanente, passamos as equações do campo real para o espaço de Laplace. Assim, as soluções da região interna e externa desse regime são dadas por:

$$\Delta \bar{p}_1(r, u) = A_1 I_0(r\sqrt{u\eta_{k_1}}) + B_1 K_0(r_D\sqrt{u\eta_{k_1}}). \quad (3-41)$$

$$\Delta \bar{p}_2(r, u) = A_1 I_0(r\sqrt{u\eta_{k_2}}) + B_1 K_0(r_D\sqrt{u\eta_{k_2}}). \quad (3-42)$$

Usando a CCI (3-35) no espaço de Laplace na Equação (3-41) e simplificando temos:

$$[A_1 I_1(r_w\sqrt{u\eta_{k_1}})] - B_1 K_1(r_w\sqrt{u\eta_{k_1}})] = \frac{q}{2\pi\lambda_1 h u r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}}. \quad (3-43)$$

Usando a CCE (3-38) no espaço de Laplace na Equação (3-42) e multiplicando por  $\frac{1}{r_e\sqrt{u\eta_{k_2}}}$  temos:

$$A_2 I_1(r_e\sqrt{u\eta_{k_2}}) - B_2 K_1(r_e\sqrt{u\eta_{k_2}}) = 0. \quad (3-44)$$

Aplicando a CAF (3-39) na Equações (3-41) e (3-42) temos:

$$A_1 I_0(r_1\sqrt{u\eta_{k_1}}) + B_1 K_0(r_1\sqrt{u\eta_{k_1}}) - A_2 I_0(r_1\sqrt{u\eta_{k_2}}) + B_2 K_0(r_1\sqrt{u\eta_{k_2}}) = 0 \quad (3-45)$$

Aplicando a CAF(3-40) na Equações(3-41) e (3-42) e multiplicando por  $\frac{1}{r_1\sqrt{u}}$  temos:

$$A_1 I_1(r_1\sqrt{u\eta_{k_1}})\sqrt{\eta_{k_1}} - B_1 K_1(r_1\sqrt{u\eta_{k_1}})\sqrt{\eta_{k_1}} - A_2 I_1(r_1\sqrt{u\eta_{k_2}})M\sqrt{\eta_{k_2}} + B_2 K_1(r_1\sqrt{u\eta_{k_2}})M\sqrt{\eta_{k_2}} = 0. \quad (3-46)$$

As equações obtidas (3-43), (3-44), (3-45) e (3-46) formam um sistema linear que representado em sua forma matricial temos:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{2\pi\lambda_1 h u r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

onde  $\mathbf{A}$  é dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} I_1(r_w\sqrt{u\eta_{k_1}}) & -K_1(r_w\sqrt{u\eta_{k_1}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1(r_e\sqrt{u\eta_{k_2}}) & -K_1(r_e\sqrt{u\eta_{k_2}}) \\ I_0(r_1\sqrt{u\eta_{k_1}}) & K_0(r_1\sqrt{u\eta_{k_1}}) & -I_0(r_1\sqrt{u\eta_{k_2}}) & -K_0(r_1\sqrt{u\eta_{k_2}}) \\ I_1(r_1\sqrt{u\eta_{k_1}})\sqrt{\eta_{k_1}} & -K_1(r_1\sqrt{u\eta_{k_1}})\sqrt{\eta_{k_1}} & -I_1(r_1\sqrt{u\eta_{k_2}})M\sqrt{\eta_{k_2}} & K_1(r_1\sqrt{u\eta_{k_2}})M\sqrt{\eta_{k_2}} \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

Os coeficientes  $A_1, B_1, A_2$  e  $B_2$  podem ser encontrados resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{q}{2\pi\lambda_1 h v r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3-49)$$

Uma vez calculados os coeficientes, a pressão no poço pode ser calculada a partir da solução geral dada por:

$$\Delta\bar{p}_{wf} = A_1 I_0(r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}) + B_1 K_0(r_w \sqrt{u\eta_{k_1}}) \quad (3-50)$$

### 3.2.2

#### Resultados do Modelo de Escoamento Monofásico com Duas Regiões em Regime de Fluxo Pseudopermanente

A solução numérica no campo real pode ser obtida utilizando o Algoritmo de Stehfest. Utilizando os mesmos dados usados do regime permanente, podemos traçar as curvas de  $\Delta p_{wf}$  e  $d\Delta p_{wf}$  para o regime pseudopermanente.

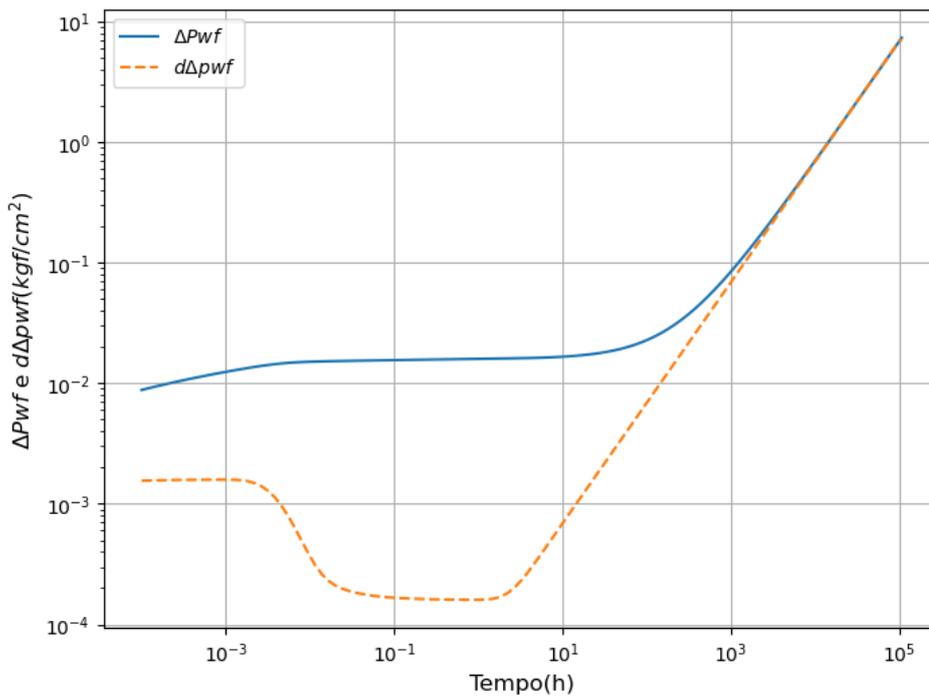


Figura 3.4: Curvas de Pressão para um Reservatório Monofásico com Duas Regiões em Regime Pseudopermanente.

O gráfico (3.4) apresentam curvas de pressão e derivada de pressão de três regimes de fluxo. A primeira região tem um valor de permeabilidade de  $500mD$  e a segunda região tem um valor de permeabilidade de  $5000mD$ . Note que essa mudança de permeabilidade afeta diretamente na visualização gráfica da curva de pressão e derivada de pressão. Nos tempos iniciais é possível notar a curva de pressão somente da primeira região de permeabilidade. Nos tempos mais

tardios, a curva reflete a segunda região com uma permeabilidade dez vezes maior que a primeira. Por fim, no terceiro regime temos que o reservatório entra em estado de regime pseudopermanente, ou seja, a pressão e derivada de pressão ao longo do reservatório diminui de maneira linear com o tempo.

### 3.2.3

#### **Volume Poroso em Reservatórios de Escoamento Monofásico em Regime de Fluxo Pseudopermanente**

Testes de Longa Duração (TLD) são testes em poços com duração superior a 72 horas cuja finalidade é obter dados e informações acerca do reservatório. Conforme Oil e Gas Authority (25), um dos principais objetivos é obter a estimativa do volume de óleo do reservatório. De acordo com Rosa et al. (30), no regime permanente a pressão e a vazão são constantes ao longo do tempo. Isso implica que não há variação de armazenamento de fluidos, dificultando a inferência do cálculo do volume poroso. Já no regime de fluxo pseudopermanente, a pressão ao longo do tempo reduz continuamente. Com isso, a partir da taxa de declínio de pressão e da taxa de injeção, é possível determinar a capacidade de armazenamento do reservatório, ou seja, o volume poroso.

Conforme S&P Global (32), há duas maneiras de calcular o volume poroso:

1. Pela geometria do reservatório:

$$V_p = Ah\phi \quad (3-51)$$

2. Pela reta tangente à curva do gráfico  $p_{wf} \times t$  do regime pseudopermanente:

$$V_p = \frac{q}{24mc_t} \quad (3-52)$$

onde  $m$  é o coeficiente angular da reta tangente.

A partir do volume poroso é possível estimar a quantidade de petróleo disponível no reservatório. Com uma estimativa precisa, é possível planejar as operações de produção de maneira mais eficiente e sustentável.

## 4

### Proposta de Solução para Escoamento Bifásico em Regimes de Fluxo Permanente e PseudoPermanente

Neste capítulo são apresentadas duas formulações de injetividade em reservatório homogêneo de escoamento bifásico em estado permanente e pseudo-permanente. Tratando-se de um modelo de teste de injetividade, no modelo bifásico, após um certo período de tempo é formado um banco de água. A partir disso são formados dois regimes de fluxo (água e óleo). Considere ainda que o fluxo é por efeito de deslocamento pistão. As soluções são levadas para o espaço de Laplace e, por fim, um sistema linear com quatro equações é obtido e que pode ser resolvido utilizando métodos computacionais.

Nos diferentes regimes, as propriedades do fluido contido em cada uma deles são considerados separadamente. Segundo Buckley e Leverett (1941), o raio na frente de avanço (que pode ser visto detalhadamente no (Apêndice A) é dado por

$$r_F^2(t) = (r_w)^2 + \frac{q_{inj}t}{24\pi\phi h} f_w' \quad (4-1)$$

onde a derivada do fluxo fracionário para um descolamento pistão em que  $r_F^2 \leq r_e$  é dada por

$$f_w' = \frac{1}{(1 - S_{or} - S_{wi})} \quad (4-2)$$

Soluções analíticas que modelam o comportamento de pressão durante testes de injeção em reservatórios de óleo com camada única foram propostas anteriormente por (3), (4), (5), (19) e (30).

#### 4.1

##### Regime Permanente

Considere um reservatório homogêneo em regime permanente em que a pressão é constante no limite do reservatório, ou seja, em  $r_e$ . Nota que ainda este é formado por dois regimes de fluxo em que o primeiro é representado pelo banco de água (em azul) e o segundo é a do óleo (em marrom). A figura a seguir ilustra o modelo adotado:

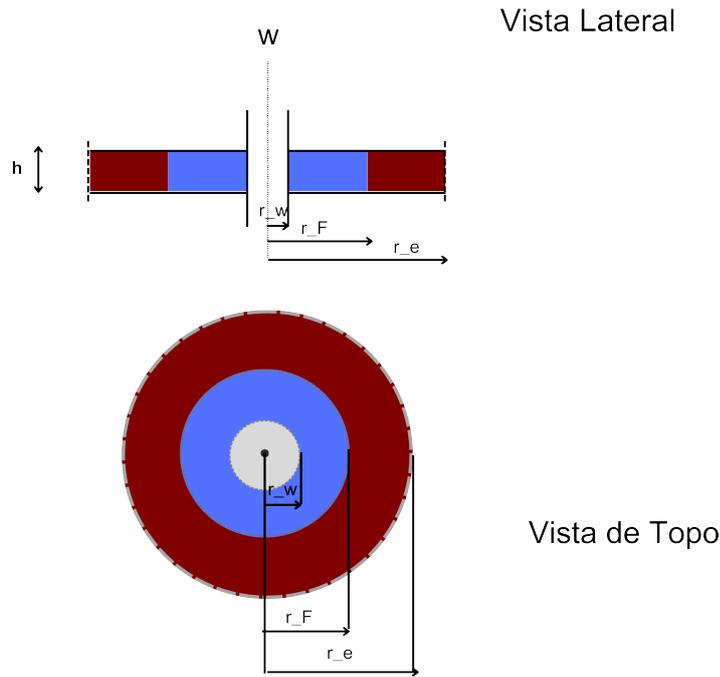


Figura 4.1: Modelo de Reservatório Bifásico em Regime de Estado Permanente.

#### 4.1.1

##### Formulação Matemática

A formulação matemática é dada a partir de um sistema de equações. Para isso, é necessário adotar as hipóteses que descrevem o comportamento desses fluidos. Assim, as seguintes premissas utilizadas:

1. Reservatório homogêneo;
2. Forças gravitacionais desprezíveis;
3. Espessura constante ( $h$ );
4. Compressibilidade constante;
5. Viscosidade constante ( $\mu_{o,w}$ );
6. Permeabilidade constante ( $k_{o,w}$ );
7. Porosidade fixada e avaliada na pressão inicial do reservatório ( $\phi$ );
8. Poço de penetração completa;
9. Não há efeito do fator skin próximo ao poço;
10. Manutenção de pressão ( $p_e$ ) na fronteira externa ( $r_e$ ).

Defina  $\eta_i = \frac{\alpha_i \hat{\lambda}_i}{\phi_i c_{t_i}}$ ,  $\hat{\lambda}_i = \frac{k_i k_{ri}}{\mu_i}$  e  $\hat{M} = \frac{\hat{\lambda}_w}{\hat{\lambda}_o}$ , onde  $i = w, o$ . Tem-se que as seguintes propriedades modelam o problema do primeiro regime(água):

$$\text{EDP:} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_w(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\phi c_t}{\hat{\lambda}_w} \left( \frac{\partial \Delta p_w(r, t)}{\partial t} \right), \quad (4-3)$$

$$\text{CI:} \quad \Delta p_w(r, t = 0) = 0, \quad (4-4)$$

$$\text{CCI:} \quad q = -2\pi \hat{\lambda}_w h \left( r \frac{\partial \Delta p_w(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_w}. \quad (4-5)$$

Para o segundo regime temos que:

$$\text{EDP:} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_o(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\phi c_t}{\hat{\lambda}_o} \left( \frac{\partial \Delta p_o(r, t)}{\partial t} \right), \quad (4-6)$$

$$\text{CI:} \quad \Delta p_o(r, t = 0) = 0, \quad (4-7)$$

$$\text{CCE:} \quad \Delta p_o(r = r_e, t) = 0. \quad (4-8)$$

Considerando as Condições de Acoplamento na Fronteira(CAF) entre os dois regimes de fluxo temos que:

$$1) \quad \Delta p_w(r = r_F, t) = \Delta p_o(r = r_F, t), \quad (4-9)$$

$$2) \quad q_w(r = r_F, t) = q_o(r = r_F, t). \quad (4-10)$$

Aplicando a Lei de Darcy em (4-10), a igualdade passa a ser:

$$-2\pi \hat{\lambda}_w h \left( r \frac{\partial \Delta p_w(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_F} = -2\pi \hat{\lambda}_o h \left( r \frac{\partial \Delta p_o(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_F}. \quad (4-11)$$

Logo,

$$\left( r \frac{\partial \Delta p_w(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_F} = \frac{1}{\hat{M}} \left( r \frac{\partial \Delta p_o(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_F}. \quad (4-12)$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (4-3):

$$\text{EDO:} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d \Delta \bar{p}_w(r, u)}{dr} \right) = \frac{\phi c_t}{\hat{\lambda}_w} (u \Delta \bar{p}_w(r, u) - \Delta p_w(r, 0)). \quad (4-13)$$

Aplicando a CI (4-4) no espaço de Laplace e derivando o lado esquerdo da Equação (4-13), tem se a EDO para o regime de fluxo 1 a qual é conhecida como a Forma Modificada de Bessel.

EDO:

$$\frac{d^2 \Delta \bar{p}_w(r, u)}{\left( dr \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right)^2} + \frac{1}{r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}}} \frac{d \Delta \bar{p}_w(r, u)}{dr \sqrt{\frac{u}{\eta_w}}} - \Delta \bar{p}_w(r, u) = 0. \quad (4-14)$$

Analogamente, para o regime de fluxo 2, a Equação (4-6) reduz a:

EDO:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{d \Delta \bar{p}_o(r, u)}{dr} \right) = \frac{\phi c_t}{\hat{\lambda}_o} (u \Delta \bar{p}_o(r, u) - \Delta p_o(r, 0)). \quad (4-15)$$

Aplicando a CI (4-7) no espaço de Laplace e derivando o lado esquerdo da Equação (4-15):

EDO:

$$\frac{d^2 \Delta \bar{p}_o(r, u)}{\left( dr \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right)^2} + \frac{1}{r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}}} \frac{d \Delta \bar{p}_o(r, u)}{dr \sqrt{\frac{u}{\eta_o}}} - \Delta \bar{p}_o(r, u) = 0, \quad (4-16)$$

onde a solução geral para a EDO da Forma de Bessel Modificada de Ordem Zero é conhecida e dada por

$$\Delta \bar{p} = AK_v(z) + BI_v(z), \quad (4-17)$$

onde:

1. A e B são constantes a serem encontradas;
2.  $I_v(z)$  é a função modificada de Bessel de primeira espécie e de ordem  $v$ ;
3.  $K_v(z)$  é a função modificada de Bessel de segunda espécie e de ordem  $v$ .

Aplicando essa solução para a Equação (4-14) para o regime 1 é:

$$\Delta \bar{p}_w(r, u) = A_w K_0 \left( r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_w I_0 \left( r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right). \quad (4-18)$$

Analogamente, para o regime 2 temos:

$$\Delta \bar{p}_o(r, u) = A_o K_0 \left( r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) + B_o I_0 \left( r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right). \quad (4-19)$$

Passando a CCI (4-5) para o espaço de Laplace:

CCI:

$$\left( r \frac{d \Delta \bar{p}_w(r, u)}{dr} \right)_{r=r_w} = \frac{-q_w}{2\pi \hat{\lambda}_w h u} \quad (4-20)$$

Aplicando a CCI (4-19), derivando a Equação (4-18) e multiplicando ambos os lados por  $\sqrt{\frac{\eta_w}{u}} \frac{1}{r_w}$ :

$$-A_w K_1 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_w I_1 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) = \frac{-q_w}{2\pi \hat{\lambda}_w h u r_w} \sqrt{\frac{\eta_w}{u}}. \quad (4-21)$$

Passando a CCE (4-8) para o espaço de Laplace:

$$\text{CCE:} \quad \Delta \bar{p}_o(r_e, u) = 0. \quad (4-22)$$

Aplicando a CCE (4-22) na Equação (4-19):

$$A_o K_0 \left( r_e \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) + B_o I_0 \left( r_e \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) = 0 \quad (4-23)$$

Como dito anteriormente, as condições de acoplamento acontecem na frente de avanço, ou seja em  $r = r_F$ . Assim, aplicando as condições (4-9) e (4-10) no espaço de Laplace, temos:

I)

$$A_w K_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_w I_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) - A_o K_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) - B_o I_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) = 0 \quad (4-24)$$

II) Aplicando a CAF e multiplicando ambos os lados por  $\frac{1}{r_F} \sqrt{\frac{\eta_w}{u}}$  temos:

$$\begin{aligned} & -A_w K_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_w I_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) \\ & + \left( \frac{1}{\hat{M}} \sqrt{\frac{\eta_w}{\eta_o}} \right) \left( A_o K_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) - B_o I_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4-25)$$

Escrevendo as Equações (4-21), (4-23), (4-24) e (4-25) na forma matricial:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} A_w \\ B_w \\ A_o \\ B_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-q_w}{2\pi \lambda_w h u r_w} \sqrt{\frac{\eta_w}{u}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4-26)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -K_1 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & I_1 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_0 \left( r_e \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) & I_0 \left( r_e \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \\ K_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & I_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & -K_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) & -I_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \\ -K_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & I_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & \left( \frac{1}{\hat{M}} \sqrt{\frac{\eta_w}{\eta_o}} \right) \left( K_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right) & - \left( \frac{1}{\hat{M}} \sqrt{\frac{\eta_w}{\eta_o}} \right) \left( I_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right) \end{bmatrix}. \quad (4-27)$$

Assim, os coeficientes  $A_w, B_w, A_o$  e  $B_o$  podem ser encontrados a partir da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} A_w \\ B_w \\ A_o \\ B_o \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-q_w \alpha_p}{\lambda_w h u r_w} \sqrt{\frac{\eta_w}{u}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

A solução geral no poço desse problema é dado por:

$$\Delta \bar{p}_{wf} = A_w K_0 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_w I_0 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) \quad (4-29)$$

## 4.2 Regime Pseudopermanente

Considere um reservatório homogêneo formado por dois regimes de fluxo em que o primeiro é representado pelo banco de água (em azul) e o segundo é a do óleo (em marrom). Nota-se ainda que essa fronteira é completamente selada, ou seja, não tem fluxo de fluido nas fronteiras. Por isso, nesse caso iremos abordar um reservatório em regime pseudopermanente.

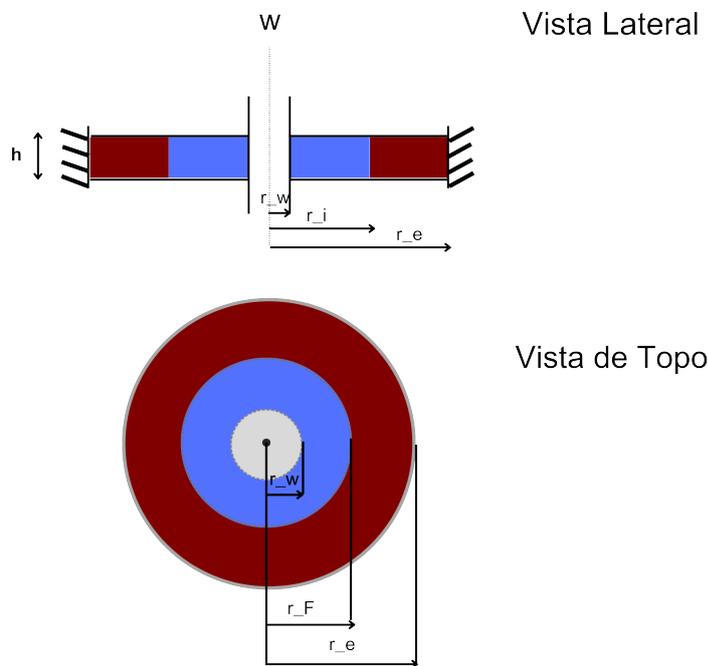


Figura 4.2: Modelo de Reservatório Bifásico em Regime de Estado PseudoPermanente.

### 4.2.1 Formulação Matemática

A formulação matemática é dada a partir de um sistema de equações. Para isso, é necessário adotar as hipóteses que descrevem o comportamento desses fluidos. Assim, as seguintes premissas utilizadas:

1. Reservatório homogêneo;
2. Forças gravitacionais desprezíveis;

3. Espessura constante (h);
4. Compressibilidade pequena e constante;
5. Viscosidade constante ( $\mu_{o,w}$ );
6. Permeabilidade constante ( $k_{o,w}$ );
7. Porosidade fixada e avaliada na pressão inicial do reservatório ( $\phi$ );
8. Poço de penetração completa;
9. Não há efeito do fator skin próximo ao poço;
10. Não fluxo na fronteira externa ( $r_e$ ).

Defina  $\eta_i = \frac{\alpha_t \hat{\lambda}_i}{\phi_i c_{t_i}}$ ,  $\hat{\lambda}_i = \frac{k_i k_{r_i}}{\mu_i}$  e  $\hat{M} = \frac{\hat{\lambda}_w}{\lambda_o}$ , onde  $i = w, o$ . Tem-se que as seguintes propriedades modelam o problema do fluido água:

$$\text{EDP:} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_w(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\phi c_t}{\hat{\lambda}_w} \left( \frac{\partial \Delta p_w(r, t)}{\partial t} \right), \quad (4-30)$$

$$\text{CI:} \quad \Delta p_w(r, t = 0) = 0, \quad (4-31)$$

$$\text{CCI:} \quad q = -2\pi \hat{\lambda}_w h \left( r \frac{\partial \Delta p_w(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_w}. \quad (4-32)$$

Para o segundo regime temos que:

$$\text{EDP:} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta p_o(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\phi c_t}{\hat{\lambda}_o} \left( \frac{\partial \Delta p_o(r, t)}{\partial t} \right), \quad (4-33)$$

$$\text{CI:} \quad \Delta p_o(r, t = 0) = 0, \quad (4-34)$$

$$\text{CCE:} \quad \left( r \frac{\partial \Delta p_o(r, t)}{\partial r} \right)_{r=r_e} = 0. \quad (4-35)$$

As condições de acoplamento que ocorre entre os dois regimes podem ser dadas por:

$$1) \quad \Delta p_w(r = r_F, t) = \Delta p_o(r = r_F, t), \quad (4-36)$$

$$2) \quad q_w(r = r_F, t) = q_o(r = r_F, t). \quad (4-37)$$

Analogamente ao regime permanente, temos que as soluções são dadas por:

$$\Delta \bar{p}_w(r, u) = A_w K_0 \left( r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_w I_0 \left( r \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right). \quad (4-38)$$

$$\Delta\bar{p}_o(r, u) = A_o K_0 \left( r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) + B_o I_0 \left( r \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right). \quad (4-39)$$

Observe que o que difere o regime permanente do pseudopermanente é a região externa, pois uma é selada e a outra não. Assim, iremos mostrar o processo somente da CCE (4-35), pois as demais condições são análogas. Assim, passando a CCE (4-35) para o espaço de Laplace:

CCE:

$$\left( r \frac{d\Delta\bar{p}_o(r, u)}{dr} \right)_{r=r_e} = 0 \quad (4-40)$$

Aplicando a CCE (4-40) na Equação (4-39) e multiplicando ambos os lados por  $\frac{1}{r_e} \sqrt{\frac{\eta_o}{u}}$  temos:

$$-A_o K_1 \left( r_e \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) + B_o I_1 \left( r_e \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) = 0 \quad (4-41)$$

Assim, escrevendo as equações que modelam esse problema na forma matricial temos:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} A_w \\ B_w \\ A_o \\ B_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-q_w \alpha_p}{\lambda_w h u r_w} \sqrt{\frac{\eta_w}{u}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4-42)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -K_1 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & I_1 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_1 \left( r_e \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) & I_1 \left( r_e \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \\ K_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & I_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & -K_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) & -I_0 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \\ -K_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & I_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) & \left( \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\eta_w}{\eta_o}} \right) \left( K_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right) & - \left( \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\eta_w}{\eta_o}} \right) \left( I_1 \left( r_F \sqrt{\frac{u}{\eta_o}} \right) \right) \end{bmatrix}. \quad (4-43)$$

Assim, os coeficientes  $A_w, B_w, A_o$  e  $B_o$  podem ser encontrados a partir da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} A_w \\ B_w \\ A_o \\ B_o \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-q_w}{2\pi \lambda_w h u r_w} \sqrt{\frac{\eta_w}{u}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

A solução geral no poço desse problema é dado por:

$$\Delta\bar{p}_{wf} = A_w K_0 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) + B_w I_0 \left( r_w \sqrt{\frac{u}{\eta_w}} \right) \quad (4-45)$$

Uma vez definida as soluções para um escoamento bifásico com regime permanente e pseudopermanente, as curvas de pressão podem ser traçadas utilizando o Algoritmo de Stehfest. Curvas estas que serão mostradas no próximo capítulo.

## 5 Resultados

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos após a implementação das soluções analíticas propostas no Capítulo 4 através de um programa em python. Diferentes cenários, considerando diferentes propriedades do reservatório, foram utilizados para comparar os resultados. Por fim, a análise da curva da derivada da pressão foi realizada para uma melhor interpretação dos testes de injetividade. Vale salientar que a derivada de pressão foi calculada conforme a abordagem de Bourdet (8). Além disso, foi possível calcular o volume poroso para o caso do regime pseudopermanente sujeito a testes de injetividade utilizando os conceitos abordados no capítulo 3.

### 5.1 Parâmetros Utilizados

Os parâmetros utilizados para a comparação dos gráficos podem ser vistos na tabela a seguir:

	Água e Óleo
Permeabilidade $k$ (mD)	500
Permeabilidade Relativa $k_r$ (mD)	1
Porosidade $\phi$	0.27
Compressibilidade Total $c_t$ ( $Pa^{-1}$ )	$120e^{-6}$

Tabela 5.1: Valores de propriedades dos regimes de fluxo da água e do óleo.

Para o raio externo foi utilizado  $500\text{ m}$ . Além disso, a taxa de mobilidade está relacionada a eficiência de varredura do reservatório e, através dessa taxa é possível saber qual fluido se move com maior facilidade no meio poroso. A taxa de mobilidade pode ser definida através da razão entre dois pontos correspondentes nas curvas de mobilidade vistas no Apêndice A, logo:

$$M(S_w) = \frac{\lambda_w(S_w)}{\lambda_o(S_w)} \quad (5-1)$$

Diante disso, a razão de mobilidade ( $\hat{M}$ ) pode ser definida através da razão entre a mobilidade de água na saturação residual de óleo e a mobilidade do óleo na saturação residual da água, ou seja:

$$\hat{M} = \frac{\lambda_w(S_{or})}{\lambda_o(S_{wi})} = \frac{\hat{\lambda}_w}{\hat{\lambda}_o} \quad (5-2)$$

Por Neto (24), para o caso de índices de mobilidade baixas ( $\hat{M} < 1$ ), o fluxo é desfavorável ao deslocamento da água. Já para índices de mobilidade altas ( $\hat{M} > 1$ ) o fluxo é favorável ao deslocamento da água.

## 5.2 Análise de Casos

As curvas de pressão e derivada logarítmica de pressão serão apresentadas em todos os casos. Além disso, a viscosidade da água sempre será considerada como  $0.5 \text{ cP}$ .

### 5.2.1 Caso A

Nesse caso estamos considerando a viscosidade do óleo sendo  $\mu_o = 0.2 \text{ cP}$ . Assim, as curvas de pressão e de derivada logarítmica de pressão para o caso do regime pseudopermanente podem ser dadas por:

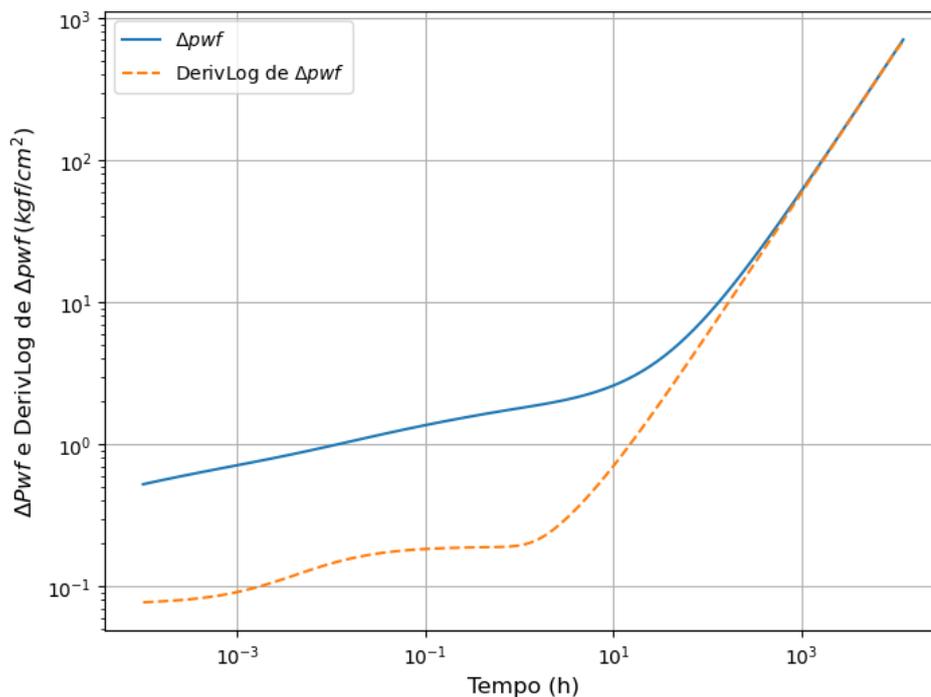


Figura 5.1: Curvas de  $\Delta p(t)$  e  $\frac{d\Delta p(t)}{d \ln(t)}$  em Regime de Estado Pseudopermanente  $\mu_o = 0.2 \text{ cP}$ .

Esse gráfico representa três regimes de fluxo distintos. O primeiro é formado pelas propriedades do óleo, o segundo pelas propriedades da água e o terceiro pelo regime de fluxo pseudopermanente. Podemos notar no

comportamento da derivada logarítmica da pressão valores menores nos tempos iniciais. Isso ocorre devido que a mobilidade da água ser menos favorável a mobilidade do óleo, uma vez que a razão de mobilidade é menor que 1,  $\hat{M} = 0.4$ . Por fim, o reservatório entra em estado de pseudopermanente, ou seja, a mudança na curva da pressão e da derivada de pressão nos tempos finais é suficientemente pequena ao longo do tempo mostrando uma tendência linear. Esse fato ocorre devido a taxa de variação da pressão em relação ao tempo ser constante nesse regime.

### 5.2.2 Caso B

Para o caso B consideramos a viscosidade do óleo sendo  $\mu_o = 0.8 \text{ cP}$ . Assim, as curvas podem ser visualizadas por:

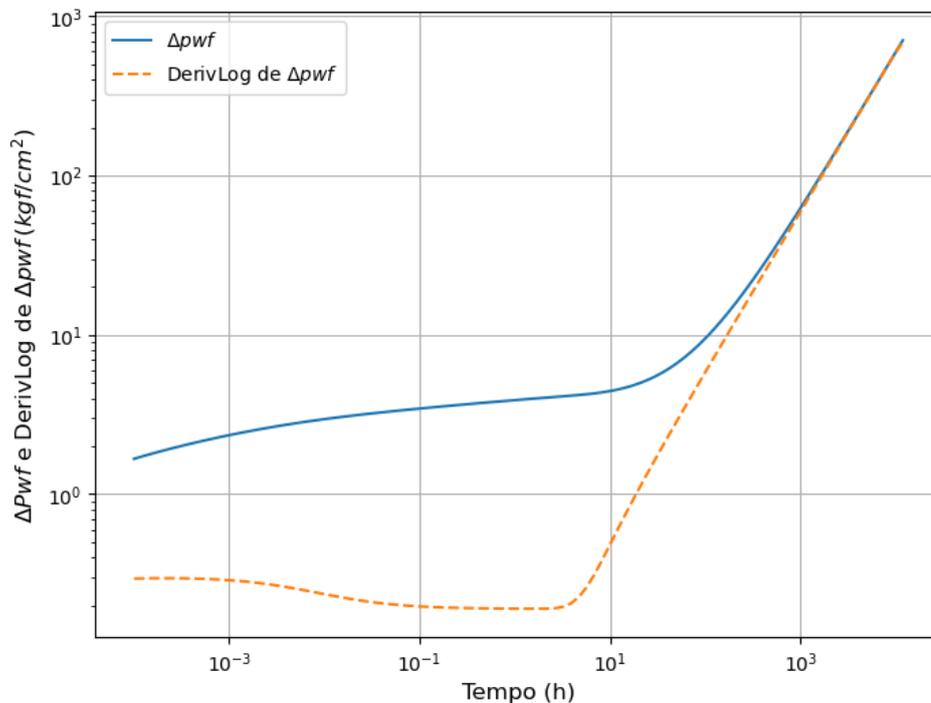


Figura 5.2: Curvas de  $\Delta p(t)$  e  $\frac{d\Delta p(t)}{d\ln(t)}$  em Regime de Estado PseudoPermanente com  $\mu_o = 0.8 \text{ cP}$ .

Nesse caso, o fluxo é favorável a água resultando em valores de derivada da pressão maiores nos tempos iniciais. Isso ocorre devido a razão de mobilidade ser maior que 1,  $\hat{M} = 1.6$ . Após um tempo, a derivada logarítmica da pressão cai e, por fim, o reservatório entra em estado de regime pseudopermanente.

### 5.2.3

#### Volume Poroso a partir de Testes de Injetividade em Regime de Fluxo Pseudopermanente

Por hipótese, estamos considerando que o formato do reservatório é um cilindro. Sabemos que por (32), o volume poroso pela geometria é dado por:

$$V_p = Ah\phi = \pi r_e^2 h \phi. \quad (5-3)$$

Usando  $r_e = 500 \text{ m}$ ,  $h = 50 \text{ m}$  e  $\phi = 0.15$ , obtemos que

$$V_p = \pi * (500)^2 * 50 * 0.15 \approx 5.800.000 \text{ m}^3 \quad (5-4)$$

Como a solução da variação da pressão para o regime de fluxo pseudopermanente é dada pela Equação (4-45), podemos encontrar  $p_{wf}$ . Assim, traçando a curva da Pressão no Poço ( $p_{wf}$ ) vs Tempo do regime de fluxo pseudopermanente, temos o gráfico:

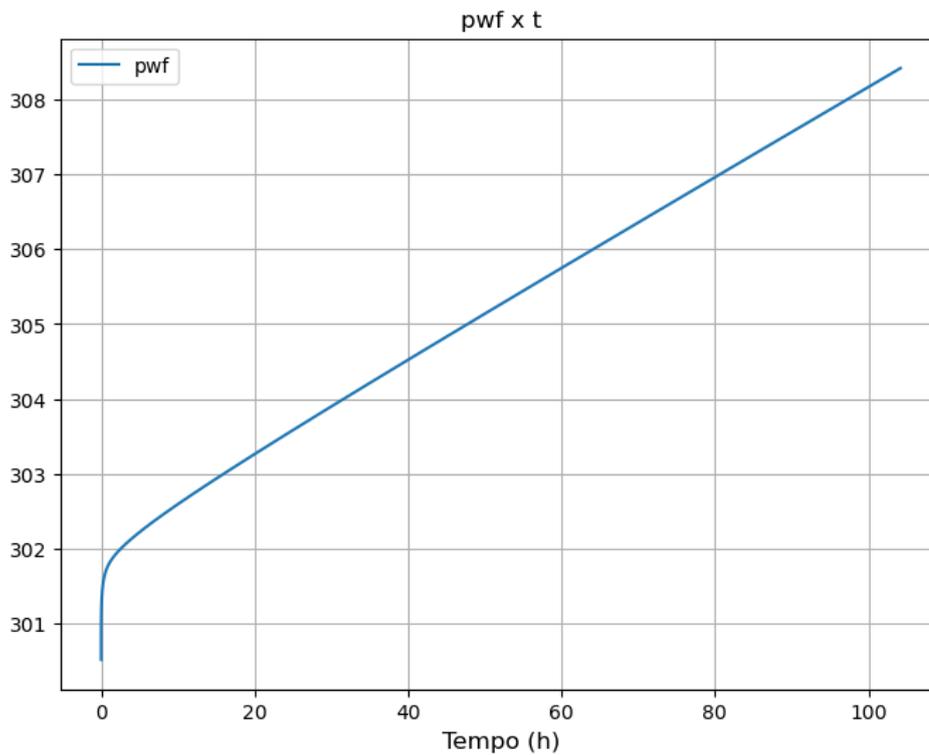


Figura 5.3: Curva de  $p_{wf}$  vs  $t$  em Regime de Fluxo Pseudopermanente.

Observe que a partir dos gráficos (5.1) e (5.2) o reservatório entra em regime de fluxo pseudopermanente a partir do tempo aproximado de  $t = 10 \text{ h}$ . Assim, traçando uma reta tangente a curva do regime pseudopermanente a partir de  $10 \text{ h}$ , obtemos:

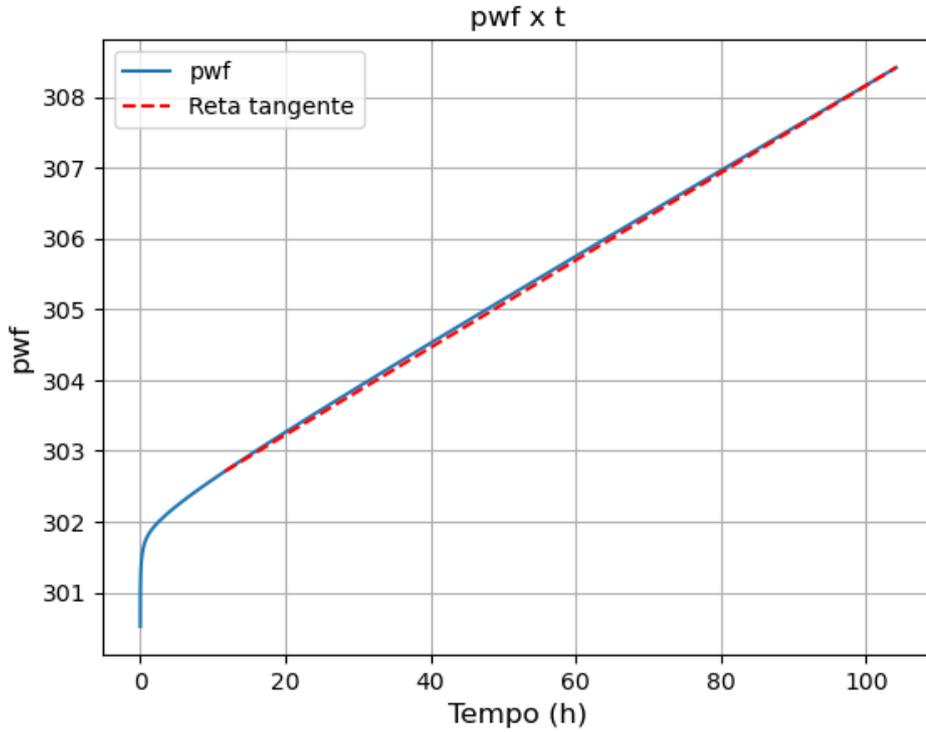


Figura 5.4: Curva de  $p_{wf}$  vs  $t$  em Regime de Fluxo Pseudopermanente.

O coeficiente angular obtido através da curva foi de aproximadamente 0.061. O volume poroso através da curva de  $p_{wf}$  pode ser obtido:

$$V_p = \frac{q}{24mc_t}, \quad (5-5)$$

onde  $m$  é o coeficiente angular da reta tangente. Usando  $c_t = 120e^{-6} Pa^{-1}$  e  $q = 1000 m^3/dia$  o volume poroso através do coeficiente angular da reta tangente é dado por:

$$V_p = \frac{1000}{24 * |-0.061| * 120e^{-6}} \approx 5.600.000. \quad (5-6)$$

O erro relativo percentual pode ser calculado como:

$$erro = \frac{|5.800.000 - 5.600.000|}{5.800.000} \approx 0.034 * 100\% = 3.4\%. \quad (5-7)$$

Nota-se de fato que a partir de um teste de injetividade em um escoamento bifásico em regime de fluxo pseudopermanente é possível calcular o volume poroso de óleo de um reservatório.

### 5.2.4 Caso C

Nesse caso, consideremos a viscosidade do óleo sendo  $\mu_o = 0.8cP$ . Assim, as curvas de pressão e derivada de pressão para o regime de fluxo permanente

são dadas por:

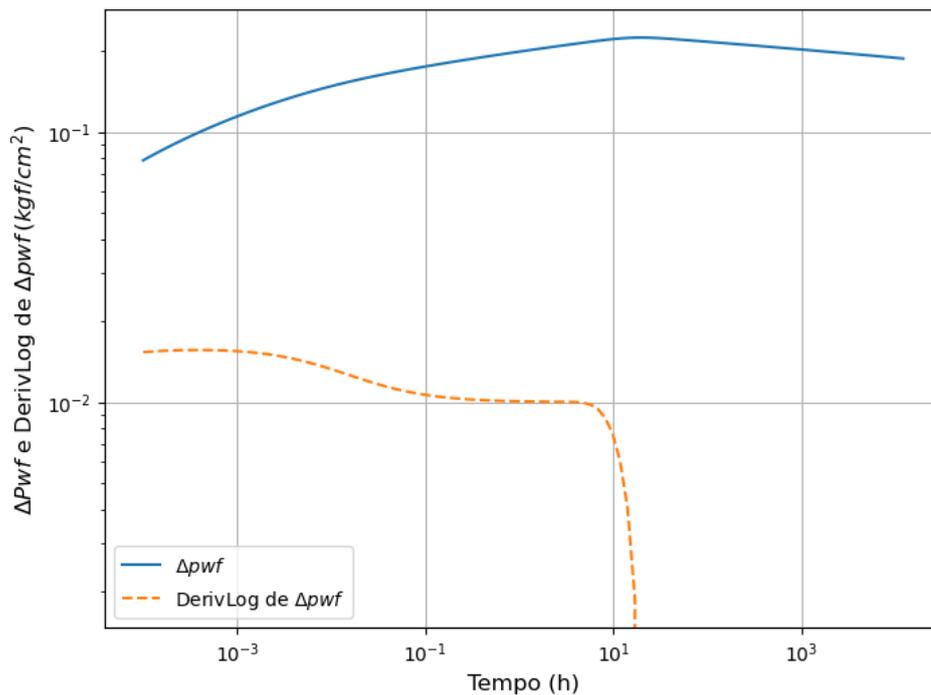


Figura 5.5: Curvas de  $\Delta P$  e  $\frac{d\Delta p(t)}{d\ln(t)}$  em Regime de Estado Permanente com  $\mu_o = 0.8$  cP.

O gráfico da Figura (5.5) representa um reservatório com três regimes de fluxo. A primeira região do gráfico apresenta uma queda na derivada da pressão devido a razão de mobilidade ser maior que 1,  $\hat{M} = 1.6$ . O fluxo é favorável a água, assim nos tempos iniciais temos valores mais altos da derivada da pressão que nos tempos finais. Por fim, o reservatório entra em estado de regime permanente, ou seja, a derivada logarítmica da pressão em relação ao tempo tende a zero.

### 5.2.5 Caso D

Para o caso D, consideremos a viscosidade do óleo sendo  $\mu_o = 0.2$  cP. Com isso, podemos observar as curvas para o regime de fluxo permanente por:

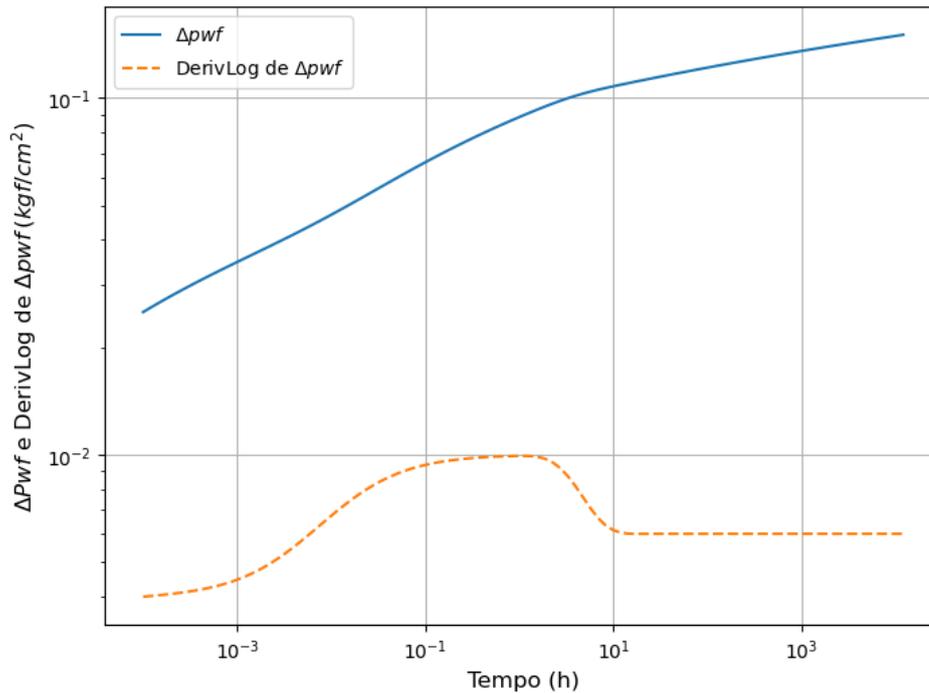


Figura 5.6: Curvas de  $\Delta P$  e  $\frac{d\Delta p(t)}{d\ln(t)}$  em Regime de Estado Permanente com  $\mu_o = 0.2 \text{ cP}$ .

Nos tempos iniciais observamos valores mais baixos da derivada da pressão devido à razão da mobilidade ser menor que 1, em que o fluxo é favorável ao óleo. Na segunda região (da água) notamos um aumento de derivada de pressão. Como a viscosidade da água é maior, ela vai ter mais resistência em se descolar pelo meio poroso levando o aumento de valores da derivada de pressão durante a fase em que a água domina o processo do teste de injeção. Nota-se ainda que ao final do gráfico a derivada logarítmica da pressão se manteve constante tendo um comportamento semelhante a um reservatório de extensão infinita.

### 5.2.6 Estudo de Sensibilidade

Para alguns valores de razão de mobilidade menores que 1, podemos observar que a partir da fronteira externa o modelo de escoamento bifásico em regime de fluxo permanente não tinha um comportamento de estado permanente. Um dos fatores em que isso pode ter ocorrido é que devido ao fato de nesse caso a razão da mobilidade da água ser menos favorável ao fluxo e, como há manutenção de pressão que na maioria dos casos são aquíferos, então possa ser que no final da curva da derivada logarítmica de pressão estejamos observando as propriedades do aquífero. A figura a seguir ilustra alguns casos para razões de mobilidade menores, iguais e maiores que 1.

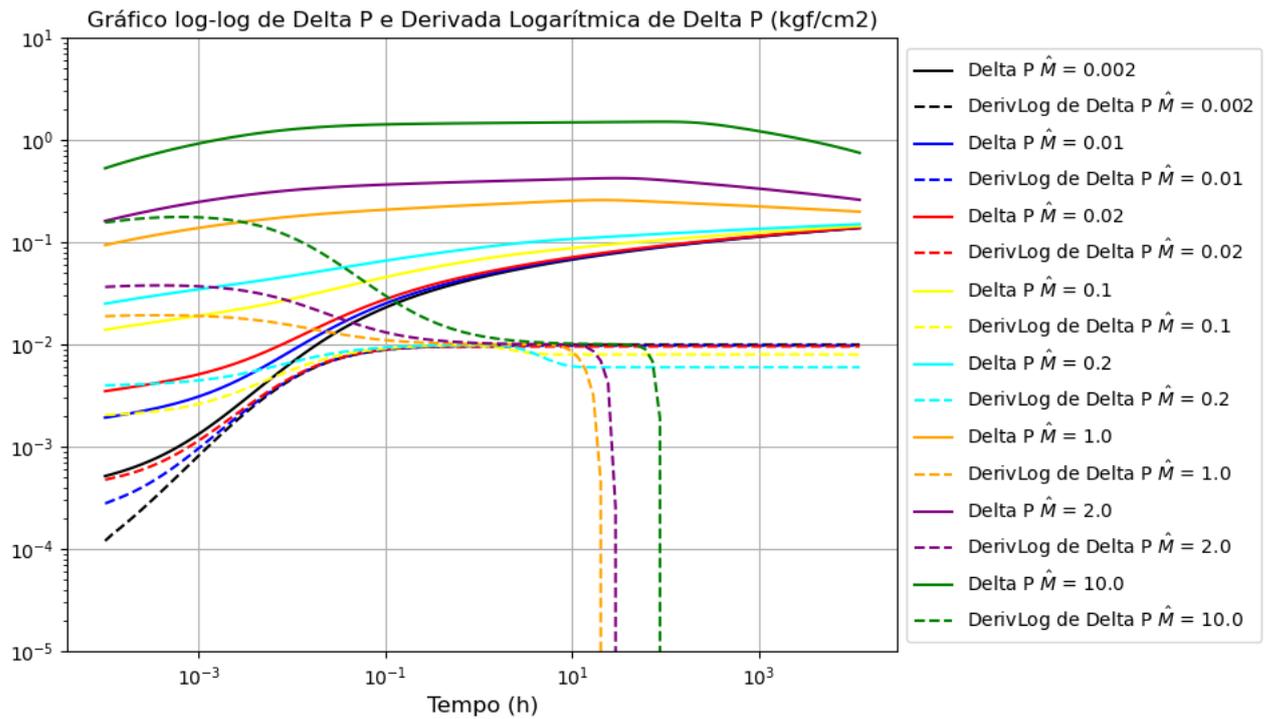


Figura 5.7: Curvas de  $\Delta P$  e  $\Delta P'$  em Regime de Estado Permanente.

Para a análise de sensibilidade da solução para regime permanente, foram assumidos diferentes valores para a viscosidade do óleo. Com isso, é possível avaliar os resultados para diversos valores de mobilidades, conforme mostrado no gráfico (5.7). É possível observar os três casos de razão de mobilidade e, conseqüentemente o comportamento das curvas de derivada de pressão. Para valores em que a razão de mobilidade é menor que 1, percebemos que o reservatório se comporta com um reservatório de extensão infinita e observamos que a taxa de crescimento da derivada de variação de pressão se mantém constante. Já para o caso em que a razão de mobilidade é maior ou igual a 1, percebemos a curva da derivada de pressão constante até atingir o regime permanente em que a derivada da pressão tende a 0.

## 6

### Conclusão e trabalhos futuros

Com base na solução analítica proposta por Neto et al. (22) e Rosa et al. (30), este trabalho propôs uma formulação para um modelo analítico de testes de injetividade em reservatórios de escoamento bifásico em regimes de fluxo permanente e pseudopermanente.

A abordagem sugerida aqui foi aplicada para diferentes cenários. Casos com permeabilidades diferentes, mas com viscosidades iguais no caso monofásico e permeabilidades iguais, mas com viscosidades diferentes no caso bifásico. Os resultados apresentaram um comportamento esperado na literatura. Além disso, o trabalho mostrou-se eficiente para estimar o volume poroso do regime de fluxo pseudopermanente a partir de testes de injetividade, com um erro relativo de 3.4%.

O modelo analítico desenvolvido neste trabalho pode ser utilizado como base para estudos futuros. A título de exemplo, pode-se estender a solução encontrada nos capítulos 3 e 4 para um modelo de reservatório multicamadas. Além disso, efeitos de skin podem ser considerados como base para formulações futuras. Dessa maneira, este trabalho serve também para ampliar os estudos sobre o principal ponto do capítulo 5, na curva do caso D em que podemos observar que as propriedades são possivelmente de um aquífero.

## 7

### Referências bibliográficas

- [1] ABBASZADEH, M.; KAMAL, M.. **Pressure-transient testing of water-injection wells**. SPE Reservoir Engineering., p. 115–124, February 1989. 2.1
- [2] BABU, D. K.; ODEH, A. S.. **Productivity of a horizontal well**. SPE, p. 417–421, November 1989. 2.2
- [3] BANERJEE, R.; THOMPSON, L. G., R. A. C.. **Injection/falloff testing in heterogeneous reservoirs**. SPE Formation Evaluation & Engineering, p. 519–527, December 1998. 2.1, 4
- [4] BARRETO, A. JR. PERES, A. M. M.; PIRES, A. P.. **Water injectivity tests on multilayered oil reservoirs**. SPE, p. 1–11, Junho 2011. 2.1, 4
- [5] BELA, R. V.; PESCO, S.; BARRETO JR, A. B.. **Modeling falloff tests in multilayer reservoirs**. Journal of Petroleum Exploration and Production Technology, p. 161–168, 2019. 2.1, 4
- [6] BELA, R. V.; PESCO, S.; BARRETO JR, A. B.. **Impulse functions applied to compute pressure change during injectivity tests**. FUEL, 2022. 2.1
- [7] BONAFÉ, M. F.; BRAGA, A.; BARRETO JR, A. B.. **Approximate solution for pressure behavior during a multiple rate injectivity test**. Journal of Petroleum Exploration and Production Technology, 10:2373–2386, March 2020. 2.1
- [8] BOURDET, D.; AYOUB, J. A. ; PLRARD, Y. M.. **Use of pressure derivative in well-test interpretation**. SPE Formation Evaluation, p. 293–302, June 1989. 2.2, 5
- [9] BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C.. **Mechanism of fluid displacement in sands**. Petroleum Technology, p. 107–116, May 1942. 2.1, A
- [10] CMG, M. A.. **Imex user’s guide**. computer modeling group ltd. 2012. 2.1

- [12] FEKTOVICH, M. J.. **A simplified approach to water influx calculations finite aquifer systems.** J. Pet Tech., p. 814–828, July 1971. 2.2
- [13] GALVAO, M. S.; GUIMARAES, C. S.. **A new method for calculating individual layer permeability and skin in a multilayered reservoir using production logging data: The delta transient method.** SPE Formation Evaluation, p. 1–30, March 2017. 2.1
- [14] GREEN, D.; WILLHITE, G. P.. **Enhanced oil recovery.** SPE: Richardson, TX, USA, 1998. 2.1
- [15] GUIMARAES, C.; S.GALVAO, M. S.. **Application of the delta transient method to multi-rate tests: A method for calculating individual layer permeability and skin in a multilayered reservoir using production logging data.** SPE Formation Evaluation, p. 1–22, October 2017. 2.1
- [16] JOSHI, S. D.. **Augmentation of well productivity with slant and horizontal wells.** JPT, p. 729–739, June 1988. 2.2
- [17] KAMKOM, R.; ZHU, D.. **Generalized horizontal well inflow relationships for liquid, gas, or two-phase flow.** SPE, p. 22–26, April 2006. 2.2
- [18] GHAFHAROKHI, A. J.; KLEPPE, J.. **Study of thermal well test analysis for vertical and horizontal steam injection wells with application to athabasca heavy oil.** SPE, July 2013. 2.2
- [19] KUCHUK, F. J.; HABASHY, T.. **Pressure behavior of horizontal wells in multilayer reservoirs with crossflow.** SPE Formation Evaluation, p. 55–64, March 1996. 2.1
- [19] PERES, A. M. M.; BOUGHARA, A. A.; CHEN, S.; MACHADO, A. A. V. ; REYNOLDS, A. C.. **Approximate analytical solutions for the pressure response at a water injection well.** SPE Annual Technical Conference and Exhibition, p. 1–17, September 2004. 4
- [20] LEUNG, W. F.. **A fast convolution method for implementing single-porosity finite/infinite aquifer models for water-influx calculations.** SPE, p. 490–510, September 1986. 2.2

- [21] MASTBAUM, A. L.; SOUZA, A. B.; NETO, J. L. F. B.; BELA, R. V. ; BARRETO JR., A. B.. **Dual-phase flow in two-layer porous media: a radial composite laplace domain approximation**. Journal of Petroleum Exploration and Production Technology, 11:4295–4304, September 2021. 2.1
- [22] NETO, J. L. F. B.; BELO, R. V.; PESCO, S. ; BARRETO JR, A. B.. **Pressure behavior during injectivity tests - a composite reservoir approach**. SPE, July 2020. 2.1, 6
- [23] NETO, J. L. F. B.; PESCO, S. ; BARRETO JR, A. B.. **Modeling water injectivity tests under multiple rate schedule: An approximate solution**. SPE, p. 918–937, 2023. 2.1
- [24] NETO, J. L. F. B.. **Testes de injetividade em reservatório multicamadas: Solução aproximada para um esquema de múltiplas vazões**. Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2020. 5.1
- [25] **Extended Well Tests (EWTs)**, 2019. 3.2.3
- [26] PERES, A. M. M.; BOUGHARA, A. A. ; REYNOLDS, A. C.. **Rate superposition for generating pressure falloff**. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, p. 364–374, September 2006. 2.1
- [27] PERES, A. M. M.; REYNOLDS, A. C.. **Theory and analysis of injectivity tests on horizontal wells**. SPE Journal, p. 148–159, June 2003. 2.1
- [29] PRATS, M., V. K.. **Calculation of wellbore pressures and rate distribution in multilayer reservoirs**. Society of Petroleum Engineers, p. 307–314, 1999. 2.1
- [30] ROSA, A. J.; CARVALHO, R. D. S. ; XAVIER, J. A. D.. **Engenharia de reservatórios de petróleo**. Interciência, 2006. (document), 2.2, 3.2.3, 4, 6, A.1
- [31] STEHFEST, H.. **Numerical inversion of laplace transform**. Communications of the ACM, 13(10):47–49, January 1970. 2.1, 3.1.2
- [32] **Pseudo-Steady State Flow Analysis**, 2024. 3.2.3, 5.2.3
- [33] THOMPSON, L. G.; REYNOLDS, A. C.. **Well testing for radially heterogeneous reservoirs under single and multiphase flow conditions**. SPE Formation Evaluation, p. 57–64, March 1997. 2.1, 3

- [34] WILLHITE, P. G.. **Waterflooding, spe text book series**. Society of Petroleum Engineers, 3, 1986. 2.1

## A

### Conceitos Básicos de Fluxo Fracionário e a Teoria de Buckley-Leverett para um Escoamento Radial

A equação da taxa de avanço total de Buckley e Leverett (9) é uma expressão matemática que descreve a variação da saturação de fluidos em um sistema de deslocamento de fluidos imiscíveis. Esse modelo matemático proposto por Buckley-Leverett é utilizado para modelar o deslocamento de um fluido para outro em um meio poroso, com a movimentação de água por óleo em um reservatório preenchido de petróleo.

Para a dedução da Equação do Fluxo Fracionário considere as seguintes hipóteses:

1. Meio poroso linear, homogêneo e isotrópico;
2. Fluidos incompressíveis;
3. Não há mudança de fase.

A figura A.1 representa a circulação de fluidos através de um meio poroso em formato de paralelepípedo, apresentando uma seção transversal A e um ângulo de inclinação em relação ao eixo horizontal, indicado por  $\alpha$ .

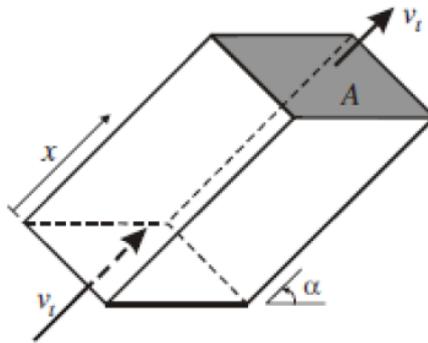


Figura A.1: Fluxo linear inclinado com formato de paralelepípedo de dois fluidos imiscíveis. Fonte: (30)

Utilizando a lei de Darcy, a velocidade em cada fluido pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} v_w &= \frac{q_w}{A} \\ &= -\frac{k_w}{\mu_w} \left( \frac{\partial p_w}{\partial x} + \rho_w g \sin(\alpha) \right) \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

$$\begin{aligned} v_o &= \frac{q_o}{A} \\ &= -\frac{k_o}{\mu_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} + \rho_o g \sin(\alpha) \right) \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

onde  $v_w$  e  $v_o$  são, respectivamente, a taxa de fluxo da água e óleo por unidade de área aberta ao fluxo. As derivadas parciais das pressões  $\frac{\partial p_w}{\partial x}$  e  $\frac{\partial p_o}{\partial x}$  indicam os gradientes de pressão na direção do fluxo para as fases água e óleo, enquanto  $\rho_w$  e  $\rho_o$  denotam as massas específicas da água e do óleo.

Observe que as Equações (A-1) e (A-2) podem ser reformuladas da seguinte forma:

$$\frac{q_w \mu_w}{A k_w} = - \left( \frac{\partial p_w}{\partial x} + g \rho_w \sin(\alpha) \right) \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{q_o \mu_o}{A k_o} = - \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} + g \rho_o \sin(\alpha) \right) \quad (\text{A-4})$$

Subtraindo a Equação (A-4) da (A-3), temos:

$$\frac{q_o \mu_o}{A k_o} - \frac{q_w \mu_w}{A k_w} = - \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \frac{\partial p_w}{\partial x} \right) - (\rho_o - \rho_w) g \sin(\alpha) \quad (\text{A-5})$$

Por definição, tem-se que a diferença das pressões na fase água e óleo é igual a pressão capilar. Conseqüentemente, a diferença entre os gradientes de pressão também será igual ao gradiente da pressão capilar. Ou seja,

$$\frac{\partial p_c}{\partial x} = \frac{\partial p_o}{\partial x} - \frac{\partial p_w}{\partial x} \quad (\text{A-6})$$

Da mesma forma sabemos que

$$\Delta \rho = \rho_w - \rho_o \quad (\text{A-7})$$

Substituindo as Equações (A-6) e (A-7) na Equação (A-5), temos:

$$\frac{q_o \mu_o}{A k_o} - \frac{q_w \mu_w}{A k_w} = - \left( \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) + \Delta \rho g \sin(\alpha) \quad (\text{A-8})$$

ou ainda:

$$\frac{q_o}{q_T} - \frac{q_w \mu_w k_o}{q_T k_w \mu_o} = - \frac{k_o A}{\mu_o q_T} \left( \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin(\alpha) \right) \quad (\text{A-9})$$

O fluxo fracionário na fase da água pode ser definido pela razão entre a vazão da água da vazão total do reservatório. De maneira análoga temos o mesmo para o fluxo fracionário na fase do óleo. Denotaremos, respectivamente,  $f_w$  e  $f_o$ . Assim,

$$f_w = \frac{q_w}{q_T} \quad (\text{A-10})$$

$$f_o = \frac{q_o}{q_T} \quad (\text{A-11})$$

Note ainda que:

$$\begin{aligned} f_w + f_o &= 1 \\ \Rightarrow f_o & \\ &= 1 - f_w \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

Substituindo as Equações (A-10), (A-11) e (A-12) na Equação (A-9) temos:

$$f_w = \frac{1 + \frac{k_o}{\mu_o} \frac{A}{q_T} \left( \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin(\alpha) \right)}{1 + \frac{\mu_w k_o}{k_w \mu_o}} \quad (\text{A-13})$$

No caso em que o escoamento se dá somente na direção horizontal, consequentemente,  $\sin(\alpha) = 0$  e desprezando os efeitos gravitacionais e o gradiente da pressão capilar, a equação do fluxo fracionária da água passa a ser:

$$\begin{aligned} f_w &= \frac{1}{1 + \frac{\mu_w k_o}{k_w \mu_o}} \\ &= \frac{k_{rw}}{k_{rw} + \frac{k_{ro}}{\mu_o} \mu_w} \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

A figura a seguir representa as curvas de permeabilidade relativa da fase do óleo e da água, respectivamente,  $k_{ro}$  e  $k_{rw}$  em função da saturação da água.

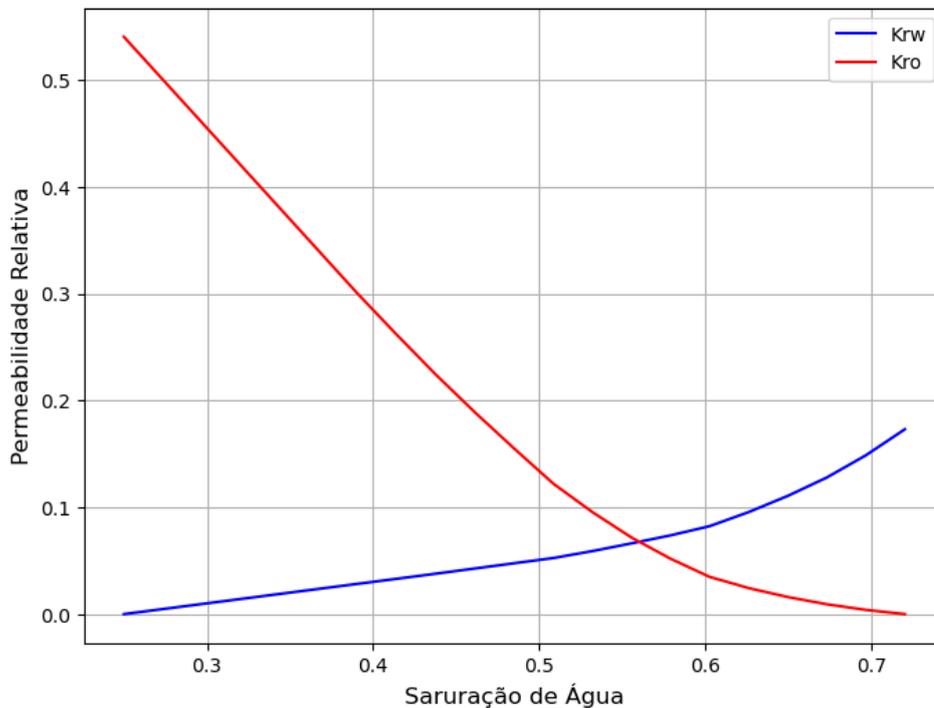


Figura A.2: Curvas de Permeabilidade Relativa Água-Óleo.

Além disso, à medida em que a permeabilidade relativa da água é crescente com o aumento da saturação do fluido, a permeabilidade do óleo é decrescente. Nesse caso, conforme a saturação da água aumenta, a do óleo diminui, ou seja, um fluido dificulta a presença do outro fluido no reservatório.

A figura (A.3) representa uma curva de comportamento do fluxo fracionário de água em relação a saturação da água.

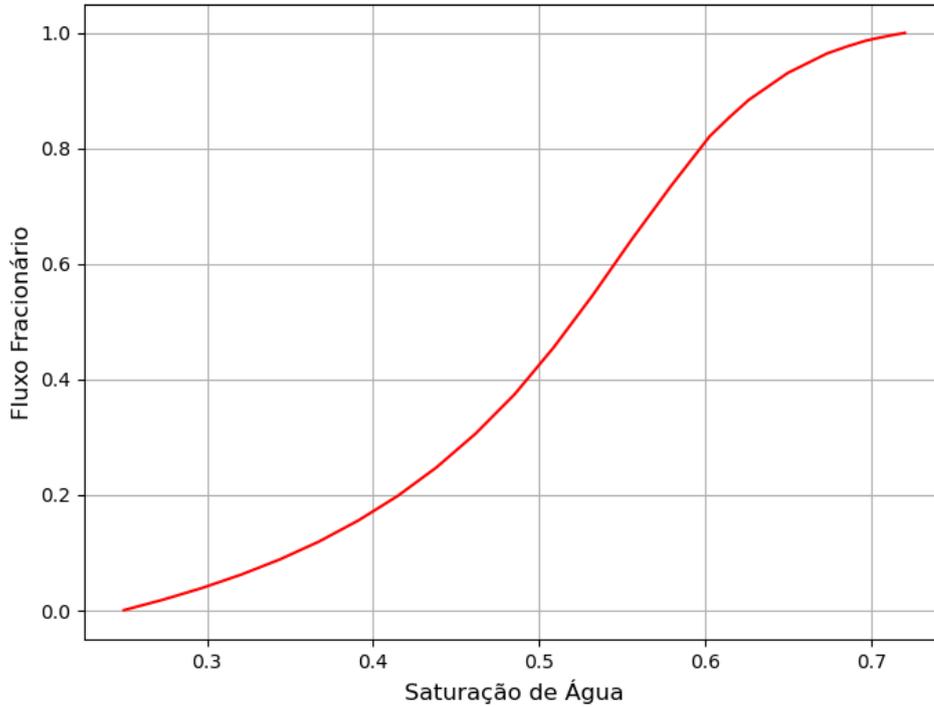


Figura A.3: Curva de Fluxo Fracionário de Água.

A mobilidade de um fluido pode ser definida como a razão entre a permeabilidade efetiva a esse fluido da sua viscosidade. Denote  $\lambda_f$  a mobilidade na fase do fluido. Assim,

$$\lambda_w = \frac{k_w}{\mu_w} \quad (\text{A-15})$$

$$\lambda_o = \frac{k_o}{\mu_o} \quad (\text{A-16})$$

$$\lambda_t = \lambda_w + \lambda_o \quad (\text{A-17})$$

onde  $\lambda_t$  é a mobilidade total no reservatório. A figura a seguir representa essas mobilidades:

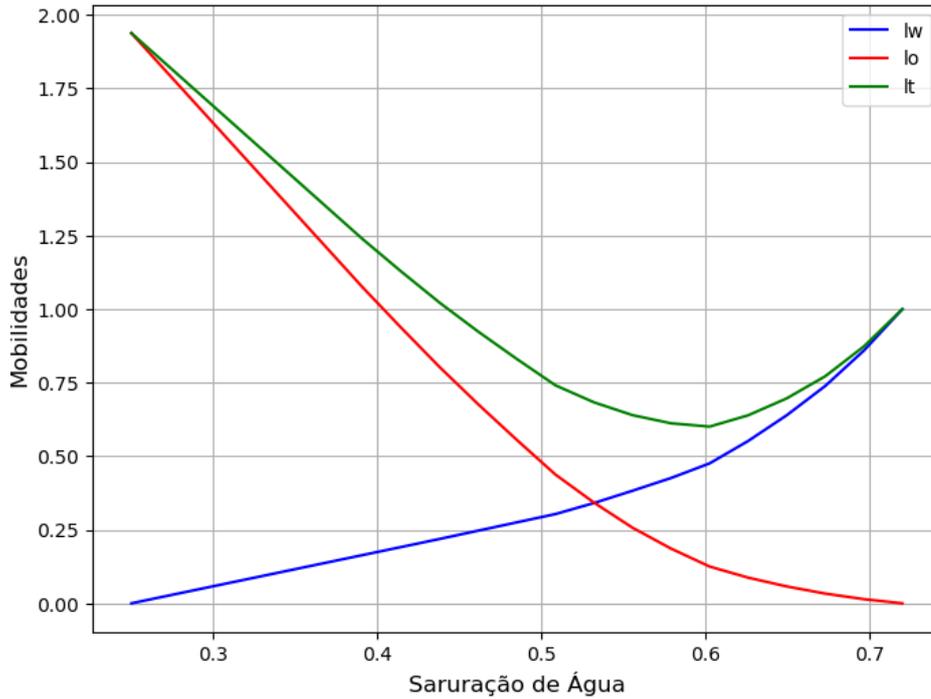


Figura A.4: Mobilidades da água, óleo e total em relação a saturação de água.

A razão de mobilidades ( $M$ ) é uma relação entre a mobilidade do fluido deslocante sobre a mobilidade do fluido descolado, no nosso caso, água e óleo, respectivamente. Assim, a razão de mobilidades é dada por:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\lambda_w}{\lambda_o} \\
 &= \frac{k_w/\mu_w}{k_o/\mu_o}
 \end{aligned}
 \tag{A-18}$$

Para a Equação da Frente de Avanço considere as seguintes hipóteses:

1. Reservatório homogêneo, radial e isotrópico;
2. Fluidos homogêneos, imiscíveis e incompressíveis;
3. Fluidos escorrem na direção horizontal.

A figura a seguir representa o modelo em questão:

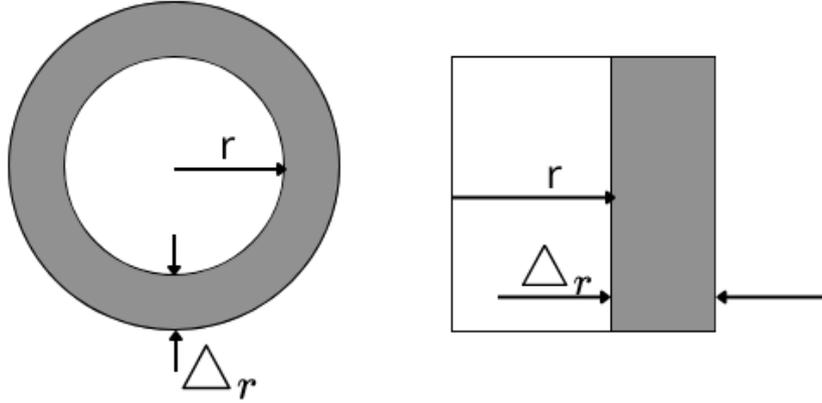


Figura A.5: Modelo de Escoamento Radial.

Aplicando a Lei de Conservação de Massa, temos:

$$\Delta m_w = [(u_w \rho_w 2\pi r h)_r - (u_w \rho_w 2\pi r h)_{r+\Delta r}]. \quad (\text{A-19})$$

A Lei de Conservação de Massa também pode ser aplicada para obter a diferença de massa no instante  $t$  e  $t + \Delta t$ , ou seja:

$$\Delta m_w = (\pi h([r + \Delta r]^2 - r^2) \phi S_w \rho_w)_{t+\Delta t} - (\pi h([r + \Delta r]^2 - r^2) \phi S_w \rho_w)_t. \quad (\text{A-20})$$

Igualando as Equações (A-19) e (A-20), temos:

$$2\pi \rho_w h \Delta t [(u_w r)_r - (u_w r)_{r+\Delta r}] = \pi h([r + \Delta r]^2 - r^2) \phi \rho_w [(S_w)_{t+\Delta t} - (S_w)_t]. \quad (\text{A-21})$$

Note que

$$\begin{aligned} [r + \Delta r]^2 - r^2 &= r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2 \\ &= 2r\Delta r + \Delta r^2 \\ &\approx 2r\Delta r. \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

Substituindo (A-22) em (A-21), temos:

$$2\pi \rho_w \Delta t [(u_w h r)_r - (u_w h r)_{r+\Delta r}] = 2\pi r \Delta r \phi \rho_w h ([r + \Delta r]^2 - r^2) [(S_w)_{t+\Delta t} - (S_w)_t]. \quad (\text{A-23})$$

Multiplicando a Equação (A-23) por  $\frac{1}{2\pi r \Delta r \Delta t}$ , temos:

$$\rho_w \frac{[(u_w h r)_r - (u_w h r)_{r+\Delta r}]}{r \Delta r} = \phi \rho_w h \frac{[(S_w)_{t+\Delta t} - (S_w)_t]}{\Delta t}. \quad (\text{A-24})$$

Usando a definição de derivada, a Equação (A-24) pode ser escrita por:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \rho_w \frac{[(u_w h r)_r - (u_w h r)_{r+\Delta r}]}{r \Delta r} &= \phi \rho_w h \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[(S_w)_{t+\Delta t} - (S_w)_t]}{\Delta t}, \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial (u_w r h)}{\partial r} &= \phi h \frac{\partial S_w}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A-25})$$

A vazão de injeção total do escoamento radial é definida como:

$$q_t = 2\pi r h u_w. \quad (\text{A-26})$$

Substituindo as Equações (A-26) e (A-10) na Equação (A-25), temos:

$$-\frac{1}{2\pi r} q_t \frac{\partial f_w}{\partial r} = \phi h \frac{\partial S_w}{\partial t}. \quad (\text{A-27})$$

Sabemos que o fluxo fracionário  $f_w$  é uma função que depende da saturação de água  $S_w$ , uma vez que, fluxo fracionário expressa como a contribuição relativa de cada fase varia com a saturação de água no meio poroso. Assim,

$$\begin{aligned} f_w &= f_w(S_w), \\ \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial r} &= \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial r}. \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

Da mesma forma, a saturação de água é uma função que depende do espaço e tempo, ou seja,  $S_w = S_w(r, t)$ . Derivando essa expressão, temos:

$$dS_w = \frac{\partial S_w}{\partial r} dr + \frac{\partial S_w}{\partial t} dt. \quad (\text{A-29})$$

Como a saturação da água é constante em pequenas mudanças na posição radial ( $dr$ ) e no tempo ( $dt$ ), segue que  $dS_w = 0$ . Substituindo na Equação (A-29), multiplicando por  $\frac{1}{dt}$  e reformulando, temos:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S_w}{\partial r} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial S_w}{\partial t}, \\ -\left(\frac{dr}{dt}\right)_{S_w} &= \frac{\partial S_w}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A-30})$$

Igualando as equações (A-30) e (A-27), temos:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{S_w} = \frac{1}{2\pi\phi hr} q_t \frac{\partial f_w}{\partial S_w}. \quad (\text{A-31})$$

Integrando ambos os lados, temos:

$$\int_{r_w}^{r_F} 2\pi\phi hr dr = \int_0^t q_t \frac{\partial f_w}{\partial S_w} dt. \quad (\text{A-32})$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em (A-32), temos:

$$r_F^2 = r_w^2 + \frac{q_t}{\pi\phi h} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \quad (\text{A-33})$$

A Equação (A-33) é conhecida como Equação da Taxa de Avanço Frontal e  $r_F$  como o Raio da Frente de Avanço.

## B

### Pontos das Curvas de Permeabilidade Relativa, Fluxo Fracionário e Mobilidades

Sw	Krw	Kro	Krt
0.25	0	0.5403	0.5403
0.2735	0.00473	0.500145	0.509311667
0.297	0.009458	0.45999	0.478319457
0.3205	0.014188	0.419835	0.447331124
0.344	0.018916	0.379685	0.416343915
0.3675	0.023646	0.33953	0.385355581
0.391	0.028374	0.299375	0.354363372
0.4145	0.03311	0.261046	0.325212667
0.438	0.037873	0.223727	0.297124287
0.4615	0.042757	0.188473	0.271335403
0.485	0.047613	0.154791	0.247064256
0.5085	0.052476	0.122027	0.223724674
0.532	0.058981	0.095422	0.209726264
0.5555	0.066197	0.071638	0.19992676
0.579	0.0737	0.051815	0.194644457
0.6025	0.082294	0.034833	0.194317496
0.61425	0.088878	0.029584	0.201828186
0.626	0.095461	0.024335	0.209336938
0.6495	0.110594	0.015993	0.230322457
0.673	0.127831	0.099207	0.346941496
0.68475	0.138214	0.00657	0.274426589
0.6965	0.148597	0.003933	0.291911682
0.7012	0.153477	0.003147	0.300583047
0.7059	0.158358	0.00236	0.309255349
0.7106	0.163239	0.001573	0.317927651
0.7153	0.168119	0.000787	0.326599016
0.71765	0.17056	0.000393	0.330935636
0.72	0.173	0	0.335271318

Tabela B.1: Pontos das permeabilidades relativas de cada fase e saturação de água.

Sw	fw
0.25	0
0.2735	0.017997
0.297	0.03832
0.3205	0.067466
0.344	0.088049
0.3675	0.118916
0.391	0.155174
0.4145	0.197309
0.438	0.247026
0.4615	0.305387
0.485	0.37348
0.5085	0.454567
0.532	0.545015
0.5555	0.641677
0.579	0.733797
0.6025	0.820742
0.61425	0.853419
0.626	0.883752
0.6495	0.930563
0.673	0.964168
0.68475	0.974168
0.6965	0.986525
0.7012	0.989531
0.7059	0.992369
0.7106	0.995051
0.7153	0.997591
0.71765	0.99811
0.72	1

Tabela B.2: Pontos de fluxo fracionário e saturação de água.