Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Paulo Ricardo de França Silva

A equação de Laplace e o método de Perron

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Boyan Slavchev Sirakov

Rio de Janeiro
Setembro de 2024

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Paulo Ricardo de França Silva

A equação de Laplace e o método de Perron

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Boyan Slavchev Sirakov
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Gabrielle Saller Nornberg
Universidad de Chile

Prof. Silvius Klein
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 25 de Setembro de 2024

Paulo Ricardo de França Silva

Graduou-se em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF) em 2022.

Ficha Catalográfica

Silva, Paulo Ricardo de França

A equação de Laplace e o método de Perron / Paulo Ricardo de França Silva; orientador: Boyan Slavchev Sirakov. – 2024.

66 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2024.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Equação de Laplace. 3. Problema de Dirichlet. 4. Método de Perron. 5. Princípio do máximo. I. Sirakov, Boyan Slavchev. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A minha mãe Sueli. Obrigado por ser um exemplo de perseverança e fé.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela sua Graça manifesta através de Jesus Cristo, o salvador.

Aos meus pais e avós, por sempre me apoiarem e me incentivarem a estudar.

Aos meus amigos do ES e irmão, pelo amor depositado em mim, companheirismo e paciência. Obrigado por acreditarem no meu potencial e por não me deixarem esmorecer nos momentos adversos da vida.

Aos amigos da UFF. Em especial a Bruno, Camila, Gabriel, Giovanna, Guilherme, Gustavo, Isabela, Luana, Matheus, Odylo, Raphael e Rodrigo. Obrigado por todo carinho que sempre tiveram comigo e por me ajudarem a chegar até aqui.

Aos meus amigos da PUC-Rio. Em especial a Adailton, Aline, Anselmo, Antônio, Átila, Claudemir, Fabrício, Gabriel Dias, Gabriel Gomes, Joel Marcelo, Maria Clara, Ortenilton, Raul, Rony e Victor. Obrigado por tornarem melhores os meus dias de mestrado e por me ajudarem a chegar até aqui.

Ao meu orientador, Boyan, por me aceitar como seu aluno e me orientar da melhor forma possível. Obrigado por todos os ensinamentos.

Aos professores do DMat, por todos os ensinamentos ao longo desses dois anos, especialmente a Boyan Sirakov, Graham Smith, Lorenzo Díaz, Silvius Klein e Simon Griffiths.

Aos funcionários do departamento de Matemática, por todo apoio e empenho para nos oferecer um excelente ambiente de estudo. Agradeço em especial a Creuza e Carlos.

Aos membros da banca, por aceitarem avaliar o meu trabalho e darem suas contribuições para a melhora do mesmo.

Aos meus ex-professores da UFF. Em especial a Abramo Hefez, Bruno Santiago, Luiz Viana, Nivaldo Medeiros e Thiago Fassarela. Vocês foram muito especiais tanto na minha vida pessoal quanto acadêmica. O exemplo de vocês me deu muita força para prosseguir na carreira.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço à PUC, pela bolsa de isenção recebida VRAC-I.

Resumo

Silva, Paulo Ricardo de França; Sirakov, Boyan Slavchev. **A equação de Laplace e o método de Perron**. Rio de Janeiro, 2024. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta dissertação versa sobre a equação de Laplace e dos resultados que obtemos tentando resolve-la. Nosso principal objetivo é resolver o problema clássico de Dirichlet utilizando o método de Perron.

Palavras-chave

Equação de Laplace; Problema de Dirichlet; Método de Perron; Princípio do máximo.

Abstract

Silva, Paulo Ricardo de França; Sirakov, Boyan Slavchev (Advisor). **The Laplace equation and the Perron method**. Rio de Janeiro, 2024. 66p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This dissertation addresses the Laplace's equation and the results that arise when attempting to solve it. Our main objective is to solve the classical Dirichlet problem using Perron's method.

Keywords

Laplace equation; Dirichlet's problem; Perron's method; Maximum Principl.

Sumário

Tudo que vem de mal, você transforma em bem

Nova Igreja Music, *Maior Ato de Amor.*

1 Introdução

Esta dissertação aborda a Equação de Laplace com o objetivo central de resolver o problema de Dirichlet utilizando o método de Perron. No texto, aspiramos fazer uma contribuição didática, ao estudo dos resultados que surgem ao tentar resolver a equação de Laplace. O foco é que o leitor compreenda o texto com fluidez.

No segundo capítulo, procuramos apresentar resultados de álgebra linear e de análise para ajudar o leitor a revisitar algumas ferramentas básicas necessárias para o texto.

No terceiro capítulo, apresentamos definições básicas e a equação de Laplace de forma intrínseca, mostrando que ela aparece de forma natural enquanto tentamos entender as definições de uma equação diferencial parcial (EDP) linear de segunda ordem. Primariamente, abordamos as EDP's lineares de segunda ordem por meio de uma mudança de variáveis e investigamos profundamente as implicações dessa abordagem, que nos capacita a categorizar EDPs em três tipos: elípticas, hiperbólicas e parabólicas. Finalizamos o capítulo apresentando o conceito de problema bem posto e damos exemplos dos problemas de dados iniciais relevantes da literatura.

No quarto capítulo, discutimos a solução fundamental e a função de Green em uma bola genérica no $\mathbb{R}^n$. Desenvolvemos, a fórmula de Poisson, crucial para o método de Perron, que permite estender funções contínuas na fronteira de uma bola para uma função harmônica dentro da bola. Começamos examinando a invariância das soluções da equação de Laplace sob rotações para definir a solução fundamental. Em seguida, aplicamos a identidade de Green à solução fundamental em conjunto com uma função C^2 qualquer, resultando na fórmula da representação de Green, que motiva a definição da função de Green. Com essas ferramentas, construímos a função de Green para uma bola qualquer centrada na origem, a fórmula de Poisson e encerramos o capítulo mostrando como estender uma função que é contínua na fronteira de uma bola dada para uma função harmônica no interior da bola.

No quinto capítulo, apresentamos as definições de propriedade da média, de função harmônica e de funções C^2 sub-harmônicas e super-harmônicas. O resultado principal deste capítulo é mostrar que para uma função C^2 ter a propriedade da média é necessário e suficiente que ela seja harmônica.

No sexto capítulo, o alvo é mostrar o princípio do máximo e o princípio do máximo forte, fundamentais para a teoria. Discutimos suas implicações, como o princípio da comparação e a unicidade no problema de Dirichlet. Exploramos um exemplo para ressaltar que o princípio do máximo não vale para domínios não limitados. Investigamos também resultados análogos para domínios mais gerais sob certas hipóteses, como o lema de Hopf, e concluímos com o princípio do máximo forte.

O sétimo capítulo aborda a desigualdade de Harnack, estimativas fundamentais e resultados de convergência relevantes na literatura. A desigualdade de Harnack permite comparar num aberto sob condições específicas que o máximo e o mínimo de uma função harmônica não negativa com uma constante que depende apenas do aberto e da distância entre o aberto e a fronteira do domínio. Também mostramos estimativas fundamentais sobre funções harmônicas e finalizamos o capítulo com resultados de convergência de sequências de funções harmônicas.

No último capítulo, mostramos o resultado principal. Introduzimos o conceito de funções contínuas sub-harmônicas e super-harmônicas e demonstramos uma espécie de princípio do máximo forte quando comparamos funções sub-harmônicas e super-harmônicas na fronteira de um domínio. Esse resultado corrobora o princípio do máximo para funções sub-harmônicas. Desenvolvemos o vocabulário necessário para definir a solução de Perron e demonstrar sua propriedade como função harmônica. Por fim, estudamos o comportamento das soluções do problema de Dirichlet na fronteira para entender as condições de existência de solução e mostrar para quais tipos de domínios a solução de Perron é de fato solução do problema de Dirichlet.

2
Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar definições e resultados que vão nos ajudar ao longo do texto.

2.1
Álgebra Linear

Definição 2.1 (Traço de uma matriz) *Seja* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$*. O traço de uma matriz quadrada* A *é definido por* $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Observação 2.1 *Dadas* $A = (a_{ij}), D = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *vale que* $\operatorname{tr}(AD) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{ki}$.

Para facilitar a verificação deste fato defina $M := AD$*, daí os termos de* M *são da forma* $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj}$ *para* $i, j = 1, \ldots, n$*. Com efeito,*

$$\operatorname{tr}(AD) = \operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}d_{ki} \text{ verificando assim o fato.}$$

Observação 2.2 *Dadas* $P = (p_{ij}), Q = (q_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *tal que* P *é simétrica e* $Q^t = (q^t_{ij})$ *é a matriz transposta de* Q*, vale que*

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} p_{\ell k}q_{\ell j}q_{ki} = \sum_{k,\ell=1}^{n} p_{k\ell}q_{\ell j}q^t_{ik} = \sum_{k,\ell=1}^{n} q^t_{ik}p_{k\ell}q_{\ell j} = \left(Q^tPQ\right)_{ij}.$$

2.2
Análise

Nesta seção $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e conexo.

Definição 2.2 (Limite superior) *Sejam* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* x_0 *ponto de acumulação de* Ω*. Dizemos que* L *é limite superior de* f *em* x_0*, se e somente se para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < L+\varepsilon$ *para todo* $x \in \{B_\delta(x_0) \cap \Omega\} - \{x_0\}$.

Definição 2.3 (Limite inferior) *Sejam* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* x_0 *ponto de acumulação de* Ω*. Dizemos que* L *é limite inferior de* f *em* x_0*, se e somente se para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $L - \varepsilon < f(x)$ *para todo* $x \in \{B_\delta(x_0) \cap \Omega\} - \{x_0\}$.

Definição 2.4 (Gradiente) *Seja* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. *O gradiente de* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *diferenciável em* $x \in \Omega$ *é o vetor*

$$\nabla u(x) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Definição 2.5 (Derivada direcional) *Sejam* v *vetor do* $\mathbb{R}^n$ *e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *diferenciável. A derivada direcional de* u *no ponto* $x \in \Omega$, *na direção de* v *é, por definição,*

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{u(x + tv) - u(x)}{t}.$$

Definição 2.6 (Hessiana) *Seja* $u(x_1, \ldots, x_n) \in C^2(\Omega)$. *Chamamos a matriz*

$$D^2u(x) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \text{ de hessiana de } u.$$

Observação 2.3 *Como* $u \in C^2(\Omega)$, *pelo teorema de Schwarz, as derivadas parciais mistas de segunda ordem são iguais. Logo,* $D^2u(x)$ *é uma matriz simétrica.*

Definição 2.7 (Derivada de multi índices) *Seja* u *função* $k \geq 0$ *vezes diferenciável, usamos a seguinte notação*

$$D^\alpha u = \frac{\partial^k u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

em que $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ *e* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$.

Teorema 2.8 (Fubini) *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensuráveis. Dada f função integrável em $X \times Y$, então*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int_X \int_Y f(x,y)dydx = \int_Y \int_X f(x,y)dxdy.$$

Teorema 2.9 (Gauss-Green) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira C^1. Dado $u \in C^1(\bar{\Omega})$ valem*

i. $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i dS_x$ *para* $i = 1, \ldots, n$;

ii. $\int_\Omega \operatorname{div} u dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot \nu dS_x$,

em que $\nu(x) = (\nu_i(x), \ldots, \nu_n(x))$ é o vetor normal a $\partial\Omega$ no ponto x que aponta para fora de Ω.

Teorema 2.10 (Integração por partes) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira C^1. Se $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, então*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i dS_x$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 2.11 (Identidades de Green) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira C^1. Se $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, então valem as seguintes identidades.*

i. $\int_\Omega \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x$;

ii. $\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u dx = -\int_\Omega u\Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} u dS_x$;

iii. $\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x$.

Observação 2.4 *Seja $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Valem,*

$$|B_R(0)| := \int_{B_R(0)} 1dx = |B_1(0)|\, R^n$$

$$|\partial B_R(0)| := \int_{\partial B_R(0)} 1dS_x = n\,|B_1(0)|\, R^{n-1}$$

em que $|B_1(0)| := \int_{B_1(0)} 1dx$, é o volume da bola unitária.

Definição 2.12 *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Dizemos que V está compactado em U se $V \subset \bar{V} \subset U$ e $\bar{V}$ é compacto. Denotamos por $V \subset\subset U$.*

3
Definições Básicas e Mudanças de Variáveis

A ideia deste capítulo é mostrar como o Laplaciano aparece de forma orgânica na teoria das EDP's lineares de segunda ordem e apresentar as classificações das mesmas.

Vamos começar dando a forma geral das EDP's lineares de primeira e de segunda ordem. Para, através de uma mudança de variáveis, gerar as classificações das EDP's lineares de segunda ordem entre: parabólicas, hiperbólicas e elípticas.

Neste texto sobre EDP's lineares $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f(x)$ será a nossa função real conhecida definida em Ω e $u(x)$ a função real C^2 desconhecida definida em Ω.

Definição 3.1 *Dizemos que* $F\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = f(x)$ *é uma EDP linear de primeira ordem quando F é uma função linear de suas primeiras $n+1$ variáveis. Isto é, existem $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x), c(x)$ funções reais tais que*

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \cdots + b_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + c(x)u(x).$$

Com a definição de gradiente podemos reescrever a forma geral de nossa EDP linear de primeira ordem da seguinte forma,

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) \text{ em que } b(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}.$$

Definição 3.2 *Dizemos que* $F\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = f(x)$ *é uma EDP linear de segunda ordem quando F é uma função linear com n^2+n+1 variáveis. Isto é, existem $a_{11}(x), a_{12}(x), \ldots, a_{nn}(x), b_1(x), \ldots, b_n(x), c(x)$ funções tais que*

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = a_{11}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + a_{12}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$$

$$+ \cdots + a_{nn}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n^2}(x) + b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \cdots + b_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + c(x)u(x).$$

Nosso objetivo agora é escrever F de uma forma sucinta como escrevemos a forma geral da EDP linear de primeira ordem.

Visto isso, escrevendo F com somatórios, a notação de $b = (b_1, \ldots, b_n)$ e com o gradiente de u, temos que

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + b \cdot \nabla u + cu.$$

Como $u \in C^2(\Omega)$, o teorema de Schwartz é aplicável e vale que

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} + b \cdot \nabla u + cu.$$

Se definirmos

$$A(x) := \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

conseguimos reformular F,

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, x\right) = \operatorname{tr}(AD^2 u) + b \cdot \nabla u + cu.$$

Além disso, se $A(x) = I$, $\operatorname{tr}(AD^2u) = \operatorname{tr}(ID^2u) = \operatorname{tr}(D^2u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Definição 3.3 (Laplaciano) *Chamamos* $\operatorname{tr}(D^2u)$ *de Laplaciano de* u *e o denotamos por* $\Delta u := \operatorname{tr}(D^2u)$.

Exemplo 3.1 *Seja* $u(x_1, x_2) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *desconhecida e a seguinte EDP*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x) = 0.$$

Vamos resolver essa equação através da mudança de variáveis

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_1 - x_2, \end{cases}$$

que é uma bijeção $C^2(\mathbb{R}^2)$ *com inversa também* $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Seja $v(y_1, y_2) = u(x_1, x_2)$*, pela regra da cadeia,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= \frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1,y_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1,x_2) + \frac{\partial v}{\partial y_2}(y_1,y_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)\\ &= \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial(x_1+x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial(x_1-x_2)}{\partial x_1}\\ &= \frac{\partial v}{\partial y_1}\cdot 1 + \frac{\partial v}{\partial y_2}\cdot 1\\ &= \left[\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\right](y_1,y_2).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \left[\frac{\partial v}{\partial y_1} - \frac{\partial v}{\partial y_2}\right](y_1,y_2).$$

Agora, derivando pela segunda vez e usando o fato de que $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$*,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1,y_2) + \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial y_2}(y_1,y_2)\\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\cdot 1 + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_1}\cdot 1 + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2}\cdot 1 + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\cdot 1\\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}.\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}.$$

Fazendo a substituição na equação original, ficamos com

$$4\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2}(y_1,y_2) = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y_2}\left[\frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1,y_2)\right] = 0.$$

Defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $g(y_1) := \frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1,y_2)$ *para* y_2 *fixo. Como* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$*, têm-se que* $g \in C^1(\mathbb{R})$*, então* g *é integral e temos que*

$$G(y_1) = \int g(y_1)dy_1 = \int \frac{\partial v}{\partial y_1}(y_1,y_2)dy_1 = v(y_1,y_2) + H(y_2)$$

em que G *é a primitiva de* g *e* H *é uma função que depende apenas de* y_2*.*

Portanto, $v(y_1, y_2) = G(y_1) - H(y_2)$ *para* $G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções arbitrárias* $C^2(\mathbb{R})$. *Logo,* $u(x_1, x_2) = G(x_1 + x_2) + H(x_1 - x_2)$.

No exemplo anterior, vimos como uma mudança de variáveis pode facilitar a resolução de uma EDP. Na literatura, essa estratégia é chamada de "método de mudança de variáveis". Agora, vamos tentar generalizar este processo para uma EDP linear de segunda ordem qualquer.

Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos conexos e $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ bijeção de classe C^2 em que $\psi := \phi^{-1}$. Para $x \in \Omega_1$ considere a EDP linear de segunda ordem,

$$\operatorname{tr}(A(x)D^2u(x)) + b(x)Du(x) + c(x)u(x) = f(x) \tag{E}$$

e suponha que u é solução. Seja $v(y) = u(x) = u(\psi(y))$ com $y \in \Omega_2$. Queremos ver qual equação é satisfeita por v.

Visto isso, sejam

$$\tilde{A}(y) = A(\psi(y)), \tilde{b}(y) = b(\psi(y)), \tilde{c}(y) = c(\psi(y)) \text{ e } \tilde{f}(y) = f(\psi(y)).$$

Para facilitar as contas, vamos explicitar as variáveis e suas dependências,

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u(x) = v(y) = v(\phi(x)) =$$

$$v(\phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_n(x_1, \ldots, x_n)) = v(y_1, \ldots, y_n).$$

Derivando, para cada $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial v}{\partial y_1}(y)\frac{\partial \phi_1}{\partial x_i}(x) + \cdots + \frac{\partial v}{\partial y_n}(y)\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}(y)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x).$$

Como

$$D\phi(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

temos que $Du(x) = ({}^tD\phi(x))Dv(y)$.

Derivando pela segunda vez, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}(y)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x)\right).$$

Pela regra do produto,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v}{\partial y_k}(y)\right)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_k}(y)\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_\ell \partial y_k}(y)\frac{\partial y_\ell}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial v}{\partial y_k}(y).$$

Como $y_\ell = \phi_\ell$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial y_\ell \partial y_k}(y)\frac{\partial \phi_\ell}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial v}{\partial y_k}(y).$$

Então,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = {}^tD\phi(x)D^2v(y)D\phi(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial v}{\partial y_k}(y).$$

Como $x = \psi(y)$, ficamos com

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = {}^tD\phi(\psi(y))D^2v(y)D\phi(\psi(y)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial v}{\partial y_k}(y).$$

Chame $z_{ij} := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial v}{\partial y_k}(y)$. Portanto, v satisfaz a equação abaixo em que $y \in \Omega_2$ e $Z = \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \phi_k(x)}{\partial x_j \partial x_i}\dfrac{\partial v}{\partial y_k}(y)\right)_{ij} = (z_{ij})$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[\tilde{A}(y)^tD\phi(\psi(y))D^2v(y)D\phi(\psi(y))] + \mathrm{tr}[\tilde{A}(y)Z]\\ &+\tilde{b}(y)^tD\phi(\psi(y))Dv(y) + \tilde{c}(y)v(y) = \tilde{f}(y).\end{aligned} \tag{F}$$

Mas, vamos tentar melhorar ainda mais a feição da equação. Como o traço do produto de duas matrizes quadradas não depende da ordem do produto, conseguimos escrever

$$\mathrm{tr}[\tilde{A}(y)^tD\phi(\psi(y))D^2v(y)D\phi(\psi(y))] = \mathrm{tr}[^tD\phi(\psi(y))\tilde{A}(y)D\phi(\psi(y))D^2v(y)].$$

Perceba que se a matriz $\tilde{A}$ fosse simétrica poderíamos tentar achar ϕ bijeção que fizesse com que a matriz

$$\hat{A}(y) := {}^tD\phi(\psi(y))\tilde{A}(y)D\phi(\psi(y)) = {}^tD\phi(\psi(y))A(\psi(y))D\phi(\psi(y))$$

fosse diagonal.

A boa notícia é que sempre podemos supor que A é simétrica, veja para $n = 2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AD^2u) &= a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\
&= a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{a_{12}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{a_{12}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{a_{21}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \\
&\quad + \frac{a_{21}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\
&= a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \\
&\quad + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\ \text{, pois } u \in C^2 \\
&= \operatorname{tr}(\grave{A}D^2u) \text{ em que } \grave{A} := \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, para cada $x_0 \in \Omega_1$, $A(x_0) \in S_n(\mathbb{R})$, existe $Q(x_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $Q^t(x_0) = Q^{-1}(x_0)$ e

$$Q(x_0)A(x_0)Q^t(x_0) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n(x_0) \end{bmatrix}$$

em que $\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)$ são os autovalores de $A(x_0)$.

Então, se $\phi(x) = Q(x_0)x$, temos que $D\phi(x) = Q(x_0)$ e vamos obter

$$\tilde{A}(y_0) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n(x_0) \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\operatorname{tr}[{}^tD\phi(\psi(y_0))\tilde{A}(y_0)D\phi(\psi(y_0))D^2v(y_0)] = \lambda_1(x_0)\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + \cdots + \lambda_n(x_0)\frac{\partial^2 v}{\partial y_n^2}$$

e a equação (F) avaliada em $y_0 = \psi(x_0)$ fica na forma,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_0)\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \operatorname{tr}[\tilde{A}(y_0)Z] + \tilde{b}(y_0)^t D\phi(\psi(y_0))Dv(y_0) + \tilde{c}(y_0)v(y_0) = \tilde{f}(y_0).$$

Conseguimos melhorar ainda mais os termos associados as segundas derivadas com mais uma troca de variáveis. Faça a mudança $w(z) = v(y)$

tal que para cada $i = 1, \dots, n$,

$$z_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(x_0)}} y_i \text{ se } \lambda_i(x_0) > 0, \\ y_i \text{ se } \lambda_i(x_0) = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i(x_0)}} y_i \text{ se } \lambda_i(x_0) < 0. \end{cases}$$

Segue que $w(z)$ satisfaz a equação abaixo

$$\varepsilon_1(z_0)\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2}(z_0) + \cdots + \varepsilon_n(z_0)\frac{\partial^2 w}{\partial z_n^2}(z_0) + \text{“termos de 1}^{\text{a}}\text{ ordem”} + \tilde{\tilde{c}}(z_0)w(z_0) = \tilde{\tilde{f}}(z_0)$$

em que

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 \text{ se } \lambda_i(x_0) > 0, \\ 0 \text{ se } \lambda_i(x_0) = 0, \\ -1 \text{ se } \lambda_i(x_0) < 0, \end{cases}$$

e $\tilde{\tilde{c}}, \tilde{\tilde{f}}$ são o resultado da mudança $z \leftrightarrow y$ em $\tilde{c}$ e $\tilde{f}$, o que motiva a seguinte definição.

Definição 3.4 *Dizemos que uma equação como (E) é elíptica em x_0 se após a mudança, $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1$ (ou-1) e de hiperbólica em x_0 se após a mudança, $\varepsilon_1 = 1$ (ou-1) e $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n = -1$ (ou 1), e elíptica (ou hiperbólica) se é elíptica (ou hiperbólica) em todo ponto de seu domínio.*

Chamamos uma equação como (E) de parabólica em x_0 se após a mudança é da forma

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) - \begin{pmatrix} \textit{eq. elíptica de} \\ x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}(x_0) = f(x_0),$$

e parabólica se é parabólica em todo ponto de seu domínio.

Exemplo 3.2 *A equação*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) = f(x)$$

é parabólica. A equação

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} - \left(x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x)$$

é parabólica em $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$ e hiperbólica em $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 < 0\}$.

Exemplo 3.3 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u = 0$, *com $x \in \mathbb{R}^n$ é elíptica e é chamada de equação de Laplace.*

Exemplo 3.4 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) = 0$ *é hiperbólica em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com* $t \in \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$ *e é chamada de equação da onda.*

Exemplo 3.5 $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(t,x) = 0$ *é parabólica em* $\mathbb{R}^{n+1}$ *com* $t \in \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$ *e é chamada de equação do calor.*

Vamos discutir agora o que é um problema bem posto e apresentar alguns exemplos de problemas com dados iniciais no contexto da equação de Laplace.

Definição 3.5 (Problema bem posto) *Dizemos que um problema de EDPs é bem posto quando o problema tem solução única que depende apenas dos dados iniciais e do domínio.*

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e conexo.

Definição 3.6 (Problema de Dirichlet para a equação de Laplace) *Dada* $g \in C^0(\partial\Omega)$, *o problema de Dirichlet para a equação de Laplace é encontrar* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *que satisfaça*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 3.7 (Problema de Neumann para a equação de Laplace) *Dada* $g \in C^0(\partial\Omega)$, *o problema de Neumann para a equação de Laplace é encontrar* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ *que satisfaça*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 3.8 (Equação de Poisson) *Dada* $f \in C^0(\Omega)$, *chamamos a equação de Laplace não-homogênea de equação de Poisson,* $\Delta u = f$.

Definição 3.9 (Problema de Dirichlet para a equação de Poisson) *Dadas* $f \in C^0(\Omega), g \in C^0(\partial\Omega)$, *o problema de Dirichlet para a equação de Poisson é encontrar* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *que satisfaça*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definição 3.10 (Problema de Neumann para a equação de Poisson) *Dadas $f \in C^0(\Omega), g \in C^0(\partial\Omega)$, o problema de Neumann para a equação de Poisson é encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ que satisfaça*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Apresentamos alguns exemplos de problemas com dados iniciais, mas o foco do nosso texto vai ser apenas no problema de Dirichlet.

4
A solução fundamental

Neste capítulo, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto e conexo.

O objetivo deste capítulo é definir a solução fundamental da equação de Laplace, apresentar a função de Green para $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, mostrar a fórmula da integral de Poisson que nos possibilita estender funções contínuas em soluções da equação de Laplace.

Começaremos, mostrando que as soluções da equação de Laplace são invariantes com respeito a rotações, aproveitar este comportamento para descrever soluções ditas radiais e definir a solução fundamental, estudar suas derivadas e mostrar algumas estimativas que serão úteis ao longo do texto.

Depois, vamos definir a função de Green na bola centrada na origem com raio R para encontrar uma solução do problema de Dirichlet neste domínio para poder finalizar o capítulo com uma forma de estender toda função contínua na fronteira para uma solução da equação de Laplace.

4.1
Solução Fundamental

Vamos mostrar que as soluções da equação de Laplace são invariantes com respeito a rotações. Sejam $u \in C^2(\Omega)$ solução e $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ortogonal, ou seja, $Q^t = Q^{-1}$. Faça a mudança de variáveis $y = Qx$, obtemos $v(y) = u(x)$. Como $\Delta u(x) = \operatorname{tr}(D^2u(x))$, temos que $\Delta u(x) = \operatorname{tr}(Q^tD^2v(y)Q) = \operatorname{tr}(QQ^tD^2v(y)) = \operatorname{tr}(ID^2v(y)) = \operatorname{tr}(D^2v(y)) = \Delta v(y)$. Logo, o conjunto das soluções da equação de Laplace é invariante com respeito a rotações.

Definição 4.1 (Função radial) *Dizemos que uma função u de n variáveis é radial se existem $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $I \subseteq [0,\infty]$ intervalo e $v : I \to \mathbb{R}$ tal que $u(x) = v(|x - x_0|)$. Dizemos que v é a representante radial de u.*

As funções radiais são constantes em cada esfera com centro na origem, ou seja, dada u radial, $u(x) = u(y)$ para todo $x, y \in \Omega$ tal que $|x| = |y|$.

Vamos descobrir como são caracterizadas as funções radiais que satisfazem a equação de Laplace. Seja $u \in C^2(\Omega)$ radial que é solução da equação de Laplace. Ou seja, $u(x) = v(|x|)$ para v real e $\Delta u \equiv 0$.

Precisamos derivar a função u duas vezes e verificar sob quais condições $\Delta u(x) = 0$. Defina $r(x) := |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ para todo $x \in \Omega$ não nulo.

Derivando, r para todo $i = 1, \cdots, n$, temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r(x)}.$$

Derivando, pela segunda vez, para todo $i = 1, \cdots, n$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r(x)}\right) = \frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_i} r(x) - x_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(x)}{r^2(x)} \\
&= \frac{r(x) - x_i \frac{x_i}{r(x)}}{r^2(x)} = \frac{1}{r(x)} - \frac{x_i^2}{r^3(x)}.
\end{aligned}$$

Então, para todo $i = 1, \ldots, n$, a primeira derivada de u fica da forma

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

e a segunda derivada de u,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

Agora, vamos ver como $\Delta u(x)$ é expressado com respeito a v. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= \sum_{i=1}^{n} v''(r)\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \sum_{i=1}^{n} v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
&= \frac{v''(r)}{r^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + v'(r)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
&= \frac{v''(r)}{r^2}\cdot r^2 + v'(r)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{r^3}\right) \\
&= v''(r) + v'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right) \\
&= v''(r) + v'(r)\left(\frac{n-1}{r}\right).
\end{aligned}$$

Como $\Delta u = 0$, nos resta resolver a seguinte equação diferencial ordinária

$$v''(r) + v'(r)\left(\frac{n-1}{r}\right) = 0.$$

Se $v'(r) \equiv 0$, temos $v \equiv$ cte que é uma das soluções da equação. No entanto, se $v'(r) \not\equiv 0$, podemos dividir os dois lados da igualdade por $v'(r)$ e obter $v''(r)/v'(r) = (1-n)/r$. Para resolver a equação, defina $w(r) = v'(r)$ e fazendo a substituição ficamos com $w'(r)/w(r) = (1-n)/r$.

Integrando os dois lados da igualdade,

$$\begin{aligned}\int w'(r)/w(r)dr &= \int (1-n)/rdr\\ \ln|w(r)|+c &= (n-1)\ln r + c\\ \ln|w(r)| &= \ln r^{1-n}+c\\ w(r) &= cr^{1-n}.\end{aligned}$$

Logo, $v'(r) = cr^{1-n}$ e concluímos que

$$v(r) = \begin{cases}\frac{c}{2-n}r^{2-n}+c' \text{ se } n\neq 2,\\ c\ln r + c' \text{ se } n=2.\end{cases}$$

Como $u(x) = v(|x|)$ e $r(x) = |x|$, temos que

$$u(x) = \begin{cases}\frac{c}{2-n}|x|^{2-n}+c' \text{ se } n>2,\\ c\ln|x| + c' \text{ se } n=2,\end{cases} \tag{4-1}$$

para $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ e $c, c' \in \mathbb{R}$. A função acima é solução radial da equação de Laplace em $R^n - \{0\}$ e motiva a seguinte definição.

Definição 4.2 (Solução fundamental) *A função a baixo é chamada de solução fundamental (da equação de Laplace).*

$$\Phi(x) = \begin{cases}\frac{1}{n(n-2)|B_1(0)|}|x|^{2-n} & \textit{se } n>2\\ -\frac{1}{2\pi}\ln|x| & \textit{se } n=2\end{cases}, x\in\mathbb{R}^n-\{0\}.$$

Observação 4.1 *Escolhemos* $c'=0$ *e* $c = \begin{cases}-\frac{1}{n|B_1(0)|} & n>2,\\ -\frac{1}{2\pi} & n=2,\end{cases}$ *em 4.1 para a definição acima.*

Observação 4.2 *A solução fundamental foi construída como fruto do objetivo de caracterizar funções radiais que são soluções da equação de Laplace em* $R^n - \{0\}$. *Assim,* $\Delta\Phi = 0$ *em* $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Agora que definimos a solução fundamental, vamos estudar suas derivadas e calcular algumas estimativas que serão importantes para o texto.

Proposição 4.3 (Derivadas da solução fundamental) *As primeiras e segundas derivas parciais de* Φ *para todo* $i,j = 1,\cdots,n$ *em* $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ *são*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{n|B_1(0)|}\frac{x_i}{|x|^n} \quad e \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}(x) = -\frac{1}{n|B_1(0)|}\frac{\left(\delta_{ij}|x|^2 - nx_ix_j\right)}{|x|^{n+2}}.$$

Prova. Basta calcular as derivadas de Φ. Primeiro, vamos fazer as contas para $i, j = 1, \ldots, n$ e para $n = 2$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{1}{2\pi}\ln|x|\right) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\frac{x_i}{|x|} = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x_i}{|x|^2},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x_i}{|x|^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}|x|^2 - x_i\frac{\partial |x|^2}{\partial x_j}}{|x|^4}\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi|x|^4}\left(\delta_{ij}|x|^2 - x_i 2|x|\frac{x_j}{|x|}\right)\\
&= -\frac{1}{2\pi|x|^4}\left(\delta_{ij}|x|^2 - 2x_i x_j\right).
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular as derivadas para $i, j = 1, \ldots, n$ e $n > 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{n(n-2)|B_1(0)|}|x|^{2-n}\right)\\
&= \frac{1}{n(n-2)|B_1(0)|}(2-n)|x|^{1-n}\frac{x_i}{|x|}\\
&= -\frac{1}{n|B_1(0)|}\frac{x_i}{|x|^n},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{1}{n|B_1(0)|}\frac{x_i}{|x|^n}\right)\\
&= -\frac{1}{n|B_1(0)|}\left(\frac{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}|x|^n - x_i\frac{\partial |x|^n}{\partial x_j}}{|x|^{2n}}\right)\\
&= -\frac{1}{n|B_1(0)||x|^{2n}}\left(\delta_{ij}|x|^n - x_i n|x|^{n-1}\frac{x_j}{|x|}\right)\\
&= -\frac{1}{n|B_1(0)||x|^{2n}}\left(\delta_{ij}|x|^n - x_i n|x|^{n-2}x_j\right)\\
&= -\frac{1}{n|B_1(0)||x|^{n}}\left(\delta_{ij} - x_i n|x|^{-2}x_j\right)\\
&= -\frac{1}{n|B_1(0)|}\frac{\left(\delta_{ij}|x|^2 - n x_i x_j\right)}{|x|^{n+2}}.
\end{aligned}$$

■

O corolário abaixo é apenas uma verificação de um fato que já sabíamos pela própria construção da solução fundamental.

Corolário 4.3 $\Delta\Phi = 0$ *em* $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Prova. Pelo resultado anterior, temos que para cada $i = 1, \ldots, n$ e $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ vale

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2}(x) = -\frac{1}{n\,|B_1(0)|}\frac{\left(\delta_{ii}\,|x|^2 - nx_i^2\right)}{|x|^{n+2}} = -\frac{1}{n\,|B_1(0)|}\frac{\left(|x|^2 - nx_i^2\right)}{|x|^{n+2}}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(x) &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{n\,|B_1(0)|}\frac{|x|^2 - nx_i^2}{|x|^{n+2}} \\
&= -\frac{1}{n\,|B_1(0)|\,|x|^{n+2}}\sum_{i=1}^{n}|x|^2 - nx_i^2 \\
&= -\frac{1}{n\,|B_1(0)|\,|x|^{n+2}}\left(n\,|x|^2 - n\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right) \\
&= -\frac{1}{n\,|B_1(0)|\,|x|^{n+2}}\left(n\,|x|^2 - n\,|x|^2\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Corolário 4.4 *Seja* Φ *a solução fundamental, para cada* $i, j = 1, \ldots, n$ *e* $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ *valem as seguintes estimativas:*

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x)\right| \leq \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\,|x|^{1-n};$$

$$\left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| \leq \frac{2}{|B_1(0)|}\,|x|^{-n}.$$

Prova. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo. Pela proposição anterior, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $i, j = 1, \ldots, n$ temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x)\right| &= \left|-\frac{1}{n\,|B_1(0)|}\cdot\frac{x_i}{|x|^n}\right| \\
&\leq \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\cdot\frac{|x|}{|x|^n} \\
&\leq \frac{|x|^{1-n}}{n\,|B_1(0)|},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right| &= \left|-4\frac{1}{n\left|B_1(0)\right|}\cdot\frac{\delta_{ij}\left|x\right|^2 - nx_ix_j}{\left|x\right|^{n+2}}\right| \\
&\leq \frac{\delta_{ij}\left|x\right|^2 + n\left|x_ix_j\right|}{n\left|B_1(0)\right|\left|x\right|^{n+2}} \\
&\leq \frac{\left|x\right|^2 + n\left|x\right|^2}{n\left|B_1(0)\right|\left|x\right|^{n+2}} \\
&\leq \frac{1+n}{n\left|B_1(0)\right|\left|x\right|^{n}} \\
&\leq \frac{n+n}{n\left|B_1(0)\right|\left|x\right|^{n}} \\
&\leq \frac{2}{\left|B_1(0)\right|\left|x\right|^{n}}.
\end{aligned}
$$

■

4.2 Função de Green

O próximo resultado é o motivo pelo qual chamamos a solução fundamental de "fundamental". Vamos mostrar que toda função C^2 em um conjunto que valha Gauss-Green pode ser escrita como uma expressão que depende apenas dos dados da função na fronteira, do Laplaciano da função e de Φ. Construiremos a demonstração tentando aplicar 2.11 [iii.] na função dada e Φ.

Teorema 4.4 (Fórmula da representação de Green) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado com borda C^1 e $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Vale para todo $y \in \Omega$ que*

$$
u(y) = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y) - \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right)dS_x + \int_{\Omega}\left(\Phi(x-y)\Delta u(x)\right)dx
$$

em que Φ é a solução fundamental.

Prova. A solução fundamental Φ não é definida em $x = y$, então a priori não podemos usar 2.11 [iii.] e desenvolver as contas para chegar no resultado que queremos. Então, para contornar esse problema vamos fixar $y \in \Omega$ e trabalhar com o conjunto $\Omega_\varepsilon := \Omega - \bar{B}_\varepsilon(y)$ com $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$ em que a identidade de Green é aplicável a $\Phi^y(x) := \Phi(x-y)$ e a u com o objetivo de calcular o limite com $\varepsilon \to 0$ e concluir a fórmula desejada.

Logo,

$$
\int_{\Omega_\varepsilon}\left(\Phi(x-y)\Delta u(x) - u(x)\Delta\Phi(x-y)\right)dx =
$$

$$
\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x) - u(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y)\right)dS_x.
$$

Como $\Delta\Phi^y = 0$ em Ω_ε, $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\varepsilon(y)$ e $\partial\Omega \cap \partial B_\varepsilon(y) = \emptyset$ ficamos com

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Phi\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) dS_x + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\Phi\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) dS_x.$$

A função Φ é radial, então $\Phi \equiv \Phi(\varepsilon)$ em $\partial B_\varepsilon(y)$ e podemos escrever

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Phi\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) dS_x + \Phi(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial\nu} dS_x - \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} dS_x.$$

Queremos entender como a expressão acima se comporta quando $\varepsilon \to 0$. Primeiro, vamos mostrar que $\Phi(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial\nu} dS_x \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Como $u \in C^2(\Omega_\varepsilon)$ temos que $\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right| \leq \max_\Omega |Du|$ em $\partial B_\varepsilon(0)$.

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\Phi(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial u}{\partial\nu} dS\right| &\leq |\Phi(\varepsilon)| \max_\Omega |Du| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 dS \\
&\leq |\Phi(\varepsilon)| \max_\Omega |Du|\, nB_1(0)\varepsilon^{n-1} \\
&\leq C\varepsilon^{n-1} |\Phi(\varepsilon)| \\
&\leq \begin{cases} \frac{C\varepsilon^{n-1}}{n(n-2)|B_1(0)|} |\varepsilon|^{2-n} & \text{se } n > 2, \\ \frac{C\varepsilon}{2\pi} \ln|\varepsilon| & \text{se } n = 2, \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} C'\varepsilon & \text{se } n > 2, \\ C'\varepsilon \ln|\varepsilon| & \text{se } n = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

em que C, C' são constantes que não dependem de ε. Como $\lim_{\varepsilon\to 0} C\varepsilon = 0$ e $\lim_{\varepsilon\to 0} C'\varepsilon \ln|\varepsilon| = 0$ por l'Hôpital segue que, $\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial u}{\partial\nu} dS = 0$.

Agora, queremos ver que $\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} dS_x \to u(y)$ quando $\varepsilon \to 0$. Sabemos que $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \nabla\Phi \cdot \nu = \frac{-(x-y)}{n|B_1(0)|\varepsilon^n} \cdot \frac{-(x-y)}{\varepsilon} = \frac{1}{n|B_1(0)|\varepsilon^{n-1}}$ em $\partial B_\varepsilon(y)$. Então,

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} dS_x = \frac{1}{n|B_1(0)|\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u dS_x.$$

Pelo teorema do valor médio para integrais, para algum $y_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(y)$, vale

$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u dS_x = u(y_\varepsilon) |\partial B_\varepsilon(y)|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} dS_x &= \frac{1}{n|B_1(0)|\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} u dS_x \\
&= \frac{1}{n|B_1(0)|\varepsilon^{n-1}} u(y_\varepsilon) |\partial B_\varepsilon(y)| \\
&= u(y_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}dS_x = u(y).$$

Portanto, quando fazemos o limite da expressão com $\varepsilon \to 0$, temos

$$\int_\Omega \Phi\Delta u dx = \int_{\partial\Omega}\left(\Phi\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)dS_x - u(y).$$

Ou seja, para todo $y \in \Omega$ vale que

$$u(y) = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(x-y) - \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right)dS_x + \int_\Omega \left(\Phi(x-y)\Delta u(x)\right)dx.$$

■

Agora, sejam Ω limitado com borda C^1, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ e $h \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ que satisfaz $\Delta h = 0$ em Ω. Aplicando a 2.11 [iii.], temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (h\Delta u - u\Delta h)\,dx &= \int_{\partial\Omega}\left(h\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial h}{\partial\nu}\right)dS_x \\
\int_\Omega h\Delta u dx &= \int_{\partial\Omega}\left(h\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial h}{\partial\nu}\right)dS_x \\
0 &= -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial h}{\partial\nu} - h\frac{\partial u}{\partial\nu}dS_x\right) - \int_\Omega h\Delta u dx.
\end{aligned}$$

Defina $G(x, y) := \Phi(x-y) - h^y(x)$ para todo $x, y \in \Omega$ distintos e some a expressão acima com a fórmula da representação de Green, ficamos com

$$u(y) = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y) - G(x,y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right)dS_x + \int_\Omega G(x,y)\Delta u(x)dx.$$

Ainda, se $G(x, y) = 0$ para $x \in \partial\Omega$, ou seja, $h^y(x) = \Phi(x-y)$ para $x \in \partial\Omega$ e para cada $y \in \Omega$ temos

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)dS_x + \int_\Omega G(x,y)\Delta u dx. \tag{4-2}$$

Definição 4.5 (Função de Green) *Chamamos tal função $G(x, y)$ acima de função de Green de Ω se ela existir.*

Assim, provamos que dado o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \Omega, \\ u = g & \partial\Omega, \end{cases}$$

se conseguirmos achar $h^y(x)$ que para cada $y \in \Omega$ fixado satisfaça

$$\begin{cases} \Delta h^y(x) = 0 & x \in \Omega, \\ h^y(x) = \Phi(x-y) & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

podemos usar a fórmula 4-2 para obter como solução

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) dS_x + \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) dS_x + \int_{\Omega} G(x,y)\Delta f dx.$$

O que nos proporciona um candidato a solução para o problema de Dirichlet para a equação de Poisson.

Observação 4.5 *Não podemos pegar $h^y(x) = \Phi(x-y)$ pois Φ não é definida para $x = y$.*

Dado um domínio qualquer, encontrar a função de Green deste domínio não é uma tarefa fácil. Neste texto, vamos apresentar apenas a função de Green para $\Omega = B_R(0)$ pois será um resultado útil para o desenvolvimento do texto.

Definição 4.6 *Dado $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, o ponto $\bar{x}$ cuja fórmula é dada abaixo é definido como a inversão de x com respeito a $B_R(0)$.*

$$\bar{x} := \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

Proposição 4.6 *A função de Green numa bola $B := B_R(0)$ para quaisquer $x, y \in B$ distintos é*

$$G(x,y) = \begin{cases} \Phi(x-y) - \Phi\left(\frac{|y|}{R}(x-\bar{y})\right) & y \neq 0, \\ \Phi(x) - \varphi(R) & y = 0, \end{cases}$$

em que φ é a representante radial de Φ.

Prova. Fixe $y \in B$ não nulo. Queremos achar $h(x)$ que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta h(x) = 0 & x \in B, \\ h(x) = \Phi(x-y) & x \in \partial B. \end{cases}$$

Note que se $x \in \partial B$, temos

$$
\begin{aligned}
|x-\bar{y}|^2 &= |\bar{y}-x|^2 \\
&= |\bar{y}|^2 - 2x\bar{y} + |x|^2 \\
&= \frac{R^4}{|y|^2} - 2x\frac{R^2}{|y|^2}y + R^2 \\
&= \frac{R^2}{|y|^2}\left(R^2 - 2xy + |y|^2\right) \\
&= \frac{R^2}{|y|^2}\left(|x|^2 - 2xy + |y|^2\right) \\
&= \frac{R^2}{|y|^2}|x-y|^2 . \\
\therefore |x-y| &= \frac{|y|}{R}|x-\bar{y}| .
\end{aligned}
$$

Então, $h(x) = \Phi(\frac{|y|}{R}(x-\bar{y}))$ e $G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(\frac{|y|}{R}(x-\bar{y}))$
Se $y = 0$, tome $h(x) = \varphi(R)$ em que φ é a representante radial de Φ.

■

Observação 4.7 *A função de Green numa bola $B_R(0)$ é simétrica, ou seja, $G(x,y) = G(y,x)$. Por definição, $\Delta_y G = 0$ pois $\Delta_y h = 0$ e $\Delta_y \Phi = 0$. Logo, $\Delta_x G = 0$ também, pois $\Delta_x G(x,y) = \Delta_x G(y,x) = 0$.*

Agora que já calculados a fórmula de Green para uma bola centrada na origem, podemos começar a construir a fórmula da integral de Poisson.

Seja $B := B_R(0)$. Aplicando a fórmula da representação de Green numa $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ harmônica qualquer temos que para todo $y \in B$

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \nu} dS_x.$$

Vamos calcular $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ com G sendo a função de Green em B. Sejam $x \in \partial B$ e $y \in B$ o vetor normal unitário apontado para fora é $\nu = x/R$, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \nabla_x G \cdot \frac{x}{R} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n} x_i \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x-y) - \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}\left(\frac{|y|}{R}(x-\bar{y})\right) & y \neq 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) - 0 & y = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x-y) = \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\frac{x_i - y_i}{|x-y|^n},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\left(\frac{|y|}{R}(x-\bar{y})\right) &= \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}(x_i-\bar{y}_i)}{\left|\frac{|y|}{R}(x-\bar{y})\right|^n} \\
&= \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}(x_i-\frac{R^2 y_i}{|y|^2})}{|x-y|^n} \\
&= \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_i - y_i}{|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \nabla_x G \cdot \frac{x}{R} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{i=1}^n x_i \begin{cases} \frac{1}{n|B_1(0)|}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n} - \frac{1}{n|B_1(0)|}\frac{\frac{|y|^2}{R^2}x_i-y_i}{|x-y|^n} & y \neq 0 \\ \frac{1}{n|B_1(0)|}\frac{x_i}{|x|^n} & y = 0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{n\,|B_1(0)|\,R}\sum_{i=1}^n x_i \begin{cases} \frac{x_i\left(1-\frac{|y|^2}{R^2}\right)}{|x-y|^n} & y \neq 0 \\ \frac{x_i}{|x|^n} & y = 0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{n\,|B_1(0)|\,R}\sum_{i=1}^n x_i^2 \begin{cases} \frac{R^2-|y|^2}{|x-y|^n R^2} & y \neq 0 \\ \frac{1}{|x|^n} & y = 0 \end{cases} \\
&= \frac{R^2}{n\,|B_1(0)|\,R} \begin{cases} \frac{R^2-|y|^2}{|x-y|^n R^2} & y \neq 0 \\ \frac{1}{|x|^n} & y = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{R^2-|y|^2}{n|B_1(0)|R|x-y|^n} & y \neq 0 \\ \frac{R^2}{n|B_1(0)|R|x|^n} & y = 0 \end{cases} \\
&= \frac{R^2-|y|^2}{n\,|B_1(0)|\,R\,|x-y|^n}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{R^2-|y|^2}{n\,|B_1(0)|\,R\,|x-y|^n}dS_x.$$

Nos permitindo fazer a seguinte definição.

Definição 4.7 (Fórmula de Poisson) *Seja $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\bar{B}_R(0))$ tal que $\Delta u = 0$ em $B_R(0)$. A fórmula de Poisson de u é dada por*

$$u(y) = \frac{R^2-|y|^2}{n\,|B_1(0)|\,R}\int_{\partial B_R(0)}\frac{u(x)}{|x-y|^n}dS_x.$$

Definição 4.8 (Núcleo de Poisson) *O núcleo de Poisson K em $B_R(0)$ é definido para todo $x \in B_R(0)$ e $y \in \partial B_R(0)$ por*

$$K(x,y) := \frac{R^2 - |x|^2}{n\,|B_1(0)|\,R\,|x-y|^n}.$$

Observação 4.8 *O núcleo de Poisson em $B_R(0)$ é não negativo.*

Lema 4.9 *Para todo $x \in B_R(0)$, vale*

$$\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)dS_y = 1.$$

Prova. Dada quaisquer $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\bar{B}_R(0))$ tal que $\Delta u = 0$ em $B_R(0)$, a fórmula da integral de Poisson é válida. Logo, tomando $u \equiv 1$ e aplicando na fórmula, o resultado segue.

■

Lema 4.10 *Para todo $x \in B_R(0)$ e $y \in \partial B_R(0)$ vale que $\Delta_x K(x,y) = 0$.*

Prova. Sejam $x \in B_R(0)$ e $y \in \partial B_R(0)$. Vimos que $K(x,y) = \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)$ em que G é a função de Green em $B_R(0)$. Então,

$$\Delta_x K(x,y) = \Delta_x \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \Delta_x \left(\nabla_y G \cdot \frac{y}{R} \right).$$

Pelo teorema de Schwarz, como $G \in C^2(B_R(0))$ quando $x \neq y$, vale que $\Delta_x \nabla_y G = \nabla_y \Delta_x G$. Logo, $\Delta_x K(x,y) = \nabla_y \Delta_x G \cdot \frac{y}{R}$ e como $\Delta_x G = 0$, pela observação 4.7, segue que $\Delta_x K(x,y) = 0$.

■

Teorema 4.9 *Seja $B := B_R(0)$ e f função contínua em ∂B. A função*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|}{n\,|B_1(0)|\,R} \displaystyle\int_{\partial B} \frac{f(y)}{|x-y|^n} dS_y & x \in B, \\ f(x) & x \in \partial B, \end{cases}$$

pertence a $C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ e $\Delta u = 0$ em B.

Prova. Primeiro, vamos mostrar que u é C^2 em B calculando o limite das derivadas. Fixe $x \in B$. Sejam $i = 1, \ldots, n$ e $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sequência tal que $t_m \to 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t_m \to 0} \frac{u(x + t_m e_i) - u(x)}{t_m} \\ &= \lim_{t_m \to 0} \int_{\partial B} \frac{K(x + t_m e_i, y) - K(x,y)}{t_m} f(y) dS_y. \end{aligned}$$

Defina para cada $m \in \mathbb{N}$, para $y \in \partial B$,

$$g_m(y) := \frac{K(x + t_m e_i, y) - K(x, y)}{t_m} f(y).$$

Como $K \in C^2(B)$, suas primeiras derivadas parciais são contínuas, em particular, $\frac{\partial K}{\partial x_i} f$ é contínua em y pois f é contínua em ∂B também. Logo, $g_m(y)$ converge para $\frac{\partial K}{\partial x_i}(x, y) f(y)$ contínua no compacto ∂B, temos pelo teorema da convergência dominada que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\partial B} \frac{\partial K}{\partial x_i}(x, y) f(y) dS_y.$$

Novamente, como $K \in C^2(B)$, suas primeiras derivadas parciais são contínuas, em particular, $\frac{\partial K}{\partial x_i} f$ é contínua em x. Logo, $u \in C^1(B)$ pois $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ existe e é contínua por ser a integral de uma função contínua. Analogamente, $u \in C^2(B)$ implicando que $u \in C^0(B)$ e $\Delta u = 0$ em B, pelo lema 4.10.

Só falta mostrar que $u \in C^0(\partial B)$. Seja $\varepsilon > 0$ e fixe $x_0 \in \partial B$. Como f é contínua em x_0 existe $\delta > 0$ tal que se $x \in B$ e $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Logo, pelo lema 4.9 e a observação 4.8 para $x \in B$ tal que $|x - x_0| < \delta/2$ temos que

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_0)| &= \left| \int_{\partial B} f(y) K(x, y) dS_y - f(x_0) \right| \\
&= \left| \int_{\partial B} f(y) K(x, y) dS_y - f(x_0) \int_{\partial B} K(x, y) dS_y \right| \\
&= \left| \int_{\partial B} (f(y) - f(x_0)) K(x, y) dS_y \right| \\
&\leq \int_{\partial B} |f(y) - f(x_0)| \, K(x, y) dS_y
\end{aligned}$$

Note que podemos escrever ∂B como união disjunta dos conjuntos

$$B_1 := \{x \in \partial B : |x - x_0| < \delta\},$$

$$B_2 := \{x \in \partial B : |x - x_0| \geq \delta\}.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(x_0)| &\leq \int_{\partial B} |f(y)-f(x_0)|\, K(x,y) dS_y \\
&\leq \int_{B_1} |f(y)-f(x_0)|\, K(x,y) dS_y + \int_{B_2} |f(y)-f(x_0)|\, K(x,y) dS_y \\
&\leq \int_{B_1} \frac{\varepsilon}{2} K(x,y) dS_y + \int_{B_2} |f(y)-f(x_0)| \frac{R^2-|x|^2}{n\,|B_1(0)|\, R\, |x-y|^n} dS_y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_1} K(x,y) dS_y + \frac{R^2-|x|^2}{n\,|B_1(0)|\, R} \int_{B_2} \frac{|f(y)-f(x_0)|}{|x-y|^n} dS_y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R^2-|x|^2}{n\,|B_1(0)|\, R} \int_{B_2} \frac{|f(y)-f(x_0)|}{|x-y|^n} dS_y
\end{aligned}
$$

Novamente, pela continuidade de f, temos para todo $y \in B_2$ e para x_0 que $|f(y)-f(x_0)| < |f(y)|+|f(x_0)| \leq 2M$ em que $M := \max_{\partial B} f$. Além disso, como $x \in B$ e $|x-x_0| < \delta$ e $y \in B_2$, temos que

$$|x-y| = |x-x_0+x_0-y| \geq |y-x_0| - |x-x_0| > \delta - \delta/2 = \delta/2.$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(x_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R^2-|x|^2}{n\,|B_1(0)|\, R} \int_{B_2} \frac{|f(y)-f(x_0)|}{|x-y|^n} dS_y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R^2-|x|^2}{n\,|B_1(0)|\, R} \int_{B_2} \frac{2M}{(\delta/2)^n} dS_y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R^2-|x|^2}{n\,|B_1(0)|\, R} \frac{2M}{(\delta/2)^n} \int_{B_2} dS_y.
\end{aligned}
$$

Como $B_2 \subseteq \partial B$, $\displaystyle\int_{B_2} dS_y \leq \int_{\partial B} dS_y$, então

$$
\begin{aligned}
|u(x)-u(x_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R^2-|x|^2}{n\,|B_1(0)|\, R} \frac{2M}{(\delta/2)^n} \int_{\partial B} dS_y \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{R^2-|x|^2}{n\,|B_1(0)|\, R} \frac{2M}{(\delta/2)^n} n\,|B_1(0)|\, R^{n-1} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M\left(R^2-|x|^2\right) R^{n-2}}{(\delta/2)^n}.
\end{aligned}
$$

Note que

$$\frac{2M\left(R^2-|x|^2\right) R^{n-2}}{(\delta/2)^n} \to 0 \text{ quando } \; x \to x_0 \text{ e } x \in B.$$

Então podemos tomar $\delta' > 0$ tal que se $x \in B$ e $|x - x_0| < \delta'$ vale que

$$\left| \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right)R^{n-2}}{(\delta/2)^n} \right| = \frac{2M\left(R^2 - |x|^2\right)R^{n-2}}{(\delta/2)^n} < \varepsilon/2.$$

Logo, para $x \in B$ tal que $|x - x_0| < \min\{\delta, \delta'\}$ temos que $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$ mostrando que u é contínua em ∂B.

■

5
A Propriedade da Média

Neste capítulo, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto e conexo.

O propósito deste capítulo é apresentar a propriedade da média e mostrar que conseguimos caracterizar uma função harmônica pela propriedade da média.

Definição 5.1 *Seja $u \in C^2(\Omega)$. Dizemos que*

1. *u é harmônica em Ω se $\Delta u(x) = 0$;*
2. *u é sub-harmônica em Ω se $\Delta u(x) \geq 0$;*
3. *u é super-harmônica em Ω se $\Delta u(x) \leq 0$.*

Definição 5.2 *Seja $u \in C^0(\Omega)$. Dizemos que u possui a propriedade da média se para qualquer bola $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ vale que*

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial B|}\int_{\partial B} u(x)dS_x = \frac{1}{n\,|B_1(0)|\,R^{n-1}}\int_{\partial B} u(x)dS_x := \fint_{\partial B} u(x)dS_x.$$

Observação 5.1 *Note que se $u \in C^0(\Omega)$ satisfaz a propriedade da média, então para qualquer bola $B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$,*

$$u(x_0) = \frac{1}{|B|}\int_B u(x)dx := \fint_B u(x)dx.$$

Porque pela definição $u(x_0)R^{n-1} = \frac{1}{n|B_1(0)|}\int_{\partial B} u(x)dS_x$ e integrando, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^R u(x_0)s^{n-1}ds &= \int_0^R \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\int_{\partial B} u(x)dS_x ds \\
u(x_0)\int_0^R s^{n-1}ds &= \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\int_0^R\int_{\partial B} u(x)dS_x ds \\
u(x_0)\frac{R^n}{n} &= \frac{1}{n\,|B_1(0)|}\int_B u(x)dx \text{ (por Fubini)} \\
u(x_0) &= \frac{1}{|B_1(0)|\,R^n}\int_B u(x)dx \\
u(x_0) &= \frac{1}{|B|}\int_B u(x)dx \\
u(x_0) &= \fint_B u(x)dx.
\end{aligned}$$

Teorema 5.3 *Se $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em Ω, então u possui a propriedade da média.*

Nossa estratégia será dividida em duas partes, primeiro, vamos mostrar que a média de u numa bola vista como função dependente apenas do raio da bola é uma função constante. Vamos fazer isso derivando a integral e usando Gauss-Green. Depois, vamos ver que essa constante é exatamente a função u avaliada no centro da bola usando a continuidade de u.

Prova. Fixe $x_0 \in \Omega$. Defina a função auxiliar

$$h(r) := \fint_{\partial B_r(x_0)} u(x) dS_x \text{ para toda } \; B_r(x_0) \subseteq \Omega.$$

Como u é contínua, temos que h é diferenciável. Queremos calcular $h'(r)$, mas para facilitar as contas faça a mudança de variável $y = \frac{x-x_0}{r}$. Ficamos com

$$h(r) = \frac{1}{|\partial B_1(0)|\, r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + ry) r^{n-1} dy = \frac{1}{|\partial B_1(0)|} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + ry) dy.$$

Derivando,

$$\begin{aligned}
h'(r) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\fint_{\partial B_1(0)} u(x_0 + ry) dy \right) \\
&= \fint_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial r}(x_0 + ry) dy \\
&= \fint_{\partial B_1(0)} Du(x_0 + ry) \cdot y dy \\
&= \fint_{\partial B_r(x_0)} Du(x) \cdot \frac{x - x_0}{r} dx \\
&= \fint_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dx \\
&= \fint_{B_r(x_0)} \Delta u(x) dx \text{ (por Gauss-Green)} \\
&= \fint_{B_r(x_0)} 0 dx \text{ (pois } u \text{ é harmônica)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $h(r)$ é constante. Então, $\fint_{\partial B_r(x_0)} u(x) dx = \lim_{r \to 0} h(r)$. Agora, vamos mostrar que $h(r) \to u(x_0)$ quando $r \to 0$. Pelo teorema do valor médio para integrais, existe $\xi_r \in \partial B_r(x_0)$ tal que $\int_{\partial B_r(x_0)} = u(\xi_r)\, |\partial B_r(x_0)|$. Então,

$$\lim_{r \to 0} h(r) = \lim_{r \to 0} \fint_{\partial B_r(x_0)} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} u(\xi_r)\, |\partial B_r(x_0)| = \lim_{r \to 0} u(\xi_r) = u(x_0)$$

como queríamos.

■

Se ao invés de trabalharmos com a hipótese de que a função é harmônica mas com as hipótese de super-harmônica ou sub-harmônica, conseguimos obter um resultado parecido com o teorema anterior.

Teorema 5.4 *Sejam $u \in C^2(\Omega)$ e $B_r(y) \subset\subset \Omega$. Se $\Delta u \geq 0$ em Ω, então*

$$u(y) \leq \fint_{B_r(y)} u(x)dx.$$

Se $\Delta u \leq 0$ em Ω, então

$$u(y) \geq \fint_{B_r(y)} u(x)dx.$$

A demonstração desse teorema é parecida com a anterior, mas ao invés de trabalhar com a igualdade no limite $h(r)$, trabalhamos com as respectivas desigualdades.

Teorema 5.5 *Se $u \in C^2(\Omega)$ possui a propriedade da média, então u é harmônica em Ω.*

A nossa demonstração será por contradição e usando a mesma função auxiliar h da demonstração anterior.

Prova. Suponha para chegarmos a uma contradição que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Delta u(x_0) \neq 0$, digamos sem perda de generalidade que $\Delta u(x_0) > 0$. Então, pela continuidade de Δu, existe $B_R(x_0) \subseteq \Omega$ tal que $\Delta u > 0$ em $B_R(x_0)$.

Agora, usando a mesma função auxiliar h da demonstração anterior, temos para $0 < r < R$ que

$$h'(r) = \fint_{B_r(x_0)} \Delta u(x)dx > 0.$$

Mas isso contradiz a nossa hipótese de que u possui a propriedade da média, pois $h \equiv u(x_0)$ quando $0 < r < R$. Então, $h' \equiv 0$ quando $0 < r < R$.

■

6
Os Princípios do Máximo

Neste capítulo vamos apresentar uma das principais ferramentas para o desenvolvimento de todo o texto que é o princípio do máximo que dá frutos como a unicidade do problema de Dirichlet.

Mas, também salientar a importância da hipótese de um domínio limitado, apresentando um exemplo. Em seguida, mostraremos como contornar "o problema"da limitação provando resultados similares ao princípio do máximo.

Dando mais hipóteses sobre o comportamento da função, teremos, por exemplo, o Lema de Hopf como consequência que vai nos ajudar a provar o Princípio do Máximo Forte.

O subconjunto $\Omega \subseteq R^n$ neste capítulo sempre será aberto e conexo.

6.1
O Princípio do Máximo

Teorema 6.1 (Princípio do Máximo) *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta u \geq 0$ em Ω limitado, então,* $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Como Ω é limitado, então $\bar{\Omega}$ é um conjunto compacto, segue que u por ser contínua em $\bar{\Omega}$, atinge o seu máximo. Porém não sabemos aem que, a priori, o máximo de u pode ser tanto atingido no interior de Ω, quanto na fronteira de Ω. O que o princípio do máximo garante é que se o máximo é atingido no interior de Ω, então é igual ao máximo atingido em $\partial\Omega$.

Prova. Vamos mostrar primeiro o caso em que $\Delta u > 0$ em Ω e usar isso para mostrar o caso geral. Suponha para chegarmos a uma contradição que $\max_{\bar{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$. Então, o máximo de u está no interior de Ω. Tome $x_0 \in \mathrm{Int}(\Omega)$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$. Logo, $D^2u(x_0) \leq 0$ pois x_0 é ponto de máximo. Então, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle D^2u(x_0) \cdot v, v\rangle \leq 0$ e podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\left\langle D^2u(x_0) \cdot v, v \right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) v_i v_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v_i^2 + \sum_{i \neq j}^{n} 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j .
\end{aligned}
$$

Em particular, vale para cada $e_\ell \in \mathbb{R}^n$ com $\ell = 1, \ldots, n$ da base canônica que

$$\left\langle D^2 u(x_0) e_\ell, e_\ell \right\rangle = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\ell^2} \leq 0.$$

Logo, $\Delta u(x_0) \leq 0$ mas $\Delta u > 0$, então o caso particular segue.

Agora, para o caso geral, suponha que $\Delta u \geq 0$ em Ω.

Seja $\varepsilon > 0$ e defina a função auxiliar $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon x_1^2$ para $x \in C^2(\Omega)$. Como $\Delta u \geq 0$, temos que $\Delta u_\varepsilon(x) = \Delta u(x) + 2\varepsilon \geq \varepsilon > 0$. Então, pelo caso particular,

$$\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Note que u_ε converge para u uniformemente em $\bar{\Omega}$ quando $\varepsilon \to 0$, pois como Ω é limitado, existe $R > 0$ tal que $\Omega \subseteq B_R(0)$, então

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| \leq \max_{\bar{\Omega}} |u_\varepsilon - u| < R\varepsilon.$$

Portanto, $\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon \to \max_{\bar{\Omega}} u$ e $\max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max_{\partial\Omega} u$. Pela unicidade do limite, como $\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$, concluímos que $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

■

Corolário 6.2 *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta u \leq 0$ em Ω limitado, então, $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.*

Prova. Basta aplicar o teorema anterior em $v := -u$.

■

Corolário 6.3 *Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ em Ω limitado, então, $\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.*

Prova. Basta aplicar os dois resultados anteriores em u.

■

Corolário 6.4 *Sejam $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ com Ω limitado e $A \in \mathbb{R}$. Valem as afirmações,*

i. se $\Delta u \geq 0$ em Ω e $u \leq A$ em $\partial\Omega$, então $u \leq A$ em Ω;

ii. se $\Delta u \leq 0$ em Ω e $u \geq A$ em $\partial\Omega$, então $u \geq A$ em Ω;

iii. se $\Delta u = 0$ em Ω e $u = A$ em $\partial\Omega$, então $u = A$ em Ω.

Prova. Vamos mostrar a primeira afirmação. O princípio do máximo é aplicável em u, então vale que $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. E como $u \leq A$ em $\partial\Omega$, temos que $\max_{\partial\Omega} u \leq A$. Logo, para todo $x \in \Omega, u(x) \leq \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \leq A$. Para a segunda afirmação, basta definir $v = -u$. O princípio do máximo é aplicável em v pois $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ porque $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $\Delta v = \Delta(-u) \geq 0$. E como $u \geq A$ em $\partial\Omega$, $v = -u \leq -A$ em $\partial\Omega$, então pela primeira afirmação $v \leq -A$ em Ω. Logo, $u \geq A$ em Ω como queríamos. A terceira afirmação segue pelas duas afirmações anteriores pois $\Delta u = 0$ em Ω é equivalente a $\Delta u \leq 0$ e $\Delta u \geq 0$ em Ω. E $u = A$ em $\partial\Omega$ é equivalente a $u \leq A$ e $u \geq A$ em $\partial\Omega$. Então, por i. $u \leq A$ em Ω e por ii. $u \geq A$ em Ω. Equivalentemente, $u = A$ em Ω.

■

Ao longo do texto, vamos nos referir ao corolário precedente como princípio do máximo também.

Teorema 6.5 (Unicidade para o problema de Dirichlet) *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto limitado. Sejam $f \in C(\Omega)$ e $g \in C(\partial\Omega)$. Então, o problema de contorno*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

não tem mais de uma solução, isto é, tem 0 ou 1 solução.

Para provar o teorema, vamos supor que temos duas soluções e mostrar que elas são a mesma solução usando o terceiro item do corolário anterior.

Prova. Suponha que u_1, u_2 são soluções. Ou seja,

$$\begin{cases} \Delta u_1 = \Delta u_2 = f & \text{em } \Omega, \\ u_1 = u_2 = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \Delta(u_1 - u_2) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como Ω é limitado, $u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e $\Delta(u_1 - u_2) = 0$, o princípio do máximo é aplicável em $u_1 - u_2$. Logo, $u_1 - u_2 = 0$ em Ω. Segue que $u_1 = u_2$.

■

Teorema 6.6 (Princípio de Comparação) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Sejam $u, v \in C^2(\Omega)$ tais que*

$$\begin{cases} \Delta u \leq \Delta v & \textit{em } \Omega, \\ u \geq v & \textit{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $u \geq v$ em Ω.

Prova. Como $\begin{cases} \Delta u \leq \Delta v & \text{em } \Omega, \\ u \geq v & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$ temos que $\begin{cases} \Delta(u-v) \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ (u-v) \geq 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$
Logo, o princípio do máximo é aplicável, então, $u - v \geq 0$ em Ω. Daí, $u \geq v$ em Ω.

■

Corolário 6.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tais que*

$$\begin{cases} v \text{ é sub-harmônica} & \text{em } \Omega, \\ u \text{ é super-harmônica} & \text{em } \Omega, \\ v \leq u & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $v \leq u$ em Ω.

Prova. Como, em Ω, v é super-harmônica e u é sub-harmônica, temos que $\Delta u \leq 0 \leq \Delta v$. Daí,

$$\begin{cases} \Delta u \leq \Delta v & \text{em } \Omega, \\ v \leq u & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo teorema anterior, $v \leq u$ em Ω.

■

O exemplo seguinte é importante para mostrar como a hipótese de um domínio limitado é necessária para o princípio do máximo.

Exemplo 6.2 (O princípio do máximo não vale para domínios não limitados) *Seja $\Omega_n = \mathbb{R}^n - B_1(0)$ para $n \geq 3$. O problema de contorno*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem como soluções $v \equiv 0$ e $w(x) = 1 - |x|^{2-n}$.

Se o domínio fosse limitado, teríamos apenas v como solução pelo princípio do máximo, mas como o domínio não é limitado conseguimos construir uma outra solução w usando a solução fundamental.

6.2 Trabalhando com domínios não limitados

Agora, vamos trabalhar com $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ qualquer e mostrar como obter resultados parecidos mas acrescentando mais algumas hipóteses.

Proposição 6.3 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ qualquer. Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \textit{em } \Omega, \\ u \leq A & \textit{em } \partial\Omega, \\ \limsup_{|x|\to\infty} u(x) \leq A. \end{cases}$$

Então, $u \leq A$ em Ω.

Para demonstrar esse resultado, não conseguimos usar o princípio do máximo diretamente, pois o domínio Ω é arbitrário.

Contornaremos essa situação, usando o limite superior de u para definir subconjuntos de Ω limitados e usar o princípio do máximo nesses subconjuntos.

Daí, vamos conseguir que $u \leq A$ nesses subconjuntos e em seguida vamos estender o resultado para Ω.

Prova. Queremos mostrar que $u \leq A$ em Ω. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\limsup_{|x|\to\infty} u \leq A$, existe $R_\varepsilon > 0$ tal que para todo $R > R_\varepsilon$, se $|x| > R$, então $u(x) < A + \varepsilon$. Defina $\Omega_R := \Omega \cap B_R$. Então, para cada $R > R_\varepsilon$, temos

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{em } \Omega_R, \\ u < A + \varepsilon & \text{em } \partial\Omega_R. \end{cases}$$

Para cada $R > R_\varepsilon$, Ω_R é um conjunto limitado e o princípio do máximo é aplicável. Logo, $u \leq A + \varepsilon$ em Ω_R para todo $R > R_\varepsilon$.

Quando, $R \to \infty$, temos que $u \leq A + \varepsilon$ em Ω. Como $\varepsilon > 0$ foi tomado de forma arbitrária, segue que $u \leq A$ em Ω como queríamos mostrar.

$\blacksquare$

Lema 6.4 (Lema de Hopf) *Seja $B = B_R(y_0)$. Seja $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \textit{em } B, \\ u(x_0) = A & \textit{para } x_0 \in \partial B, \\ u < A & \textit{em } \bar{B} - \{x_0\}. \end{cases}$$

Então $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, em que ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Prova. Seja $v = A - u$. Segue que

$$\begin{cases} \Delta v \leq 0 & \text{em } B, \\ v > 0 & \text{em } \partial B - \{x_0\}, \\ v(x_0) = 0. \end{cases}$$

Queremos mostrar que $\frac{\partial v}{\partial(-\nu)}(x_0) > 0$ $\left(\text{i.e. } \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0\right)$ e para fazer isso, vamos construir w que satisfaça

$$\begin{cases} v \geq w \text{ em algum subconjunto aberto de } B, \\ w(x_0) = v(x_0), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0, \end{cases}$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial(-\nu)}(x_0) &= \lim_{t\to 0, t>0} \frac{v(x_0 - t\nu) - v(x_0)}{t} \\ &\geq \lim_{t\to 0, t>0} \frac{w(x_0 - t\nu) - w(x_0)}{t} \\ &= \frac{\partial w}{\partial(-\nu)}(x_0) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Visto isso, considere a solução fundamental

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-2)|B_1(0)|} |x|^{2-n} & \text{se } n > 2, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & \text{se } n = 2, \end{cases}$$

com $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Defina $w_1(x) := \Phi(x - y_0) - \varphi(R)$ em que φ é a representante radial de Φ.

Como w_1 e v são funções contínuas e positivas, em $\partial B_{R/2}(y_0)$, temos que o máximo de w_1 e o mínimo de v são atingidos no compacto $\partial B_{R/2}(y_0)$. Chame o máximo de w_1 em $\partial B_{R/2}(y_0)$ de C_0 e o mínimo de v em $\partial B_{R/2}(y_0)$ de c_0. Repare que $C_0, c_0 > 0$ pois w_1 e v são funções positivas em $\partial B_{R/2}(y_0)$.

Seja $\varepsilon := c_0/C_0$. Note que, em $\partial B_{R/2}(y_0)$, $\varepsilon w_1 = c_0(w_1/C_0) < c_0 \leq v$ pois $0 < w_1/C_0 < 1$ e $c_0 < v$. Também, em ∂B, $\varepsilon w_1 < v$ pois $w_1 = 0$ e $v \geq 0$.

Seja $\Omega_R := B - B_{R/2}(y_0)$. Temos,

$$\begin{cases} \Delta v \leq \Delta(\varepsilon w_1) = 0 & \text{em } \Omega_R, \\ v \geq \varepsilon w_1 & \text{em } \partial\Omega_R, \end{cases}$$

segue pelo princípio de comparação que $v \geq \varepsilon w_1$ em Ω.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial(-\nu)}(x_0) &\geq \frac{\partial(\varepsilon w_1)}{\partial(-\nu)}(x_0) \\
&\geq \varepsilon\frac{\partial(\Phi(x_0-y_0)-\varphi(R))}{\partial(-\nu)} \\
&\geq \varepsilon\frac{\partial\Phi(x_0-y_0)}{\partial(-\nu)} \\
&\geq \varepsilon\nabla\Phi(x_0-y_0)\cdot(-\nu) \\
&\geq \varepsilon\left\langle\frac{-(x_0-y_0)}{n\,|B_1(0)|\,|x_0-y_0|^n}, \frac{-(x_0-y_0)}{|x_0-y_0|}\right\rangle \\
&\geq \frac{\varepsilon}{n\,|B_1(0)|\,|x_0-y_0|^{n+1}}\,|x_0-y_0|^2 \\
&\geq \frac{\varepsilon}{n\,|B_1(0)|\,|x_0-y_0|^{n-1}} > 0.
\end{aligned}
$$

Então, $0 < \frac{\partial v}{\partial(-\nu)}(x_0) = \frac{\partial A-u}{\partial(-\nu)}(x_0) = -\frac{\partial u}{\partial(-\nu)}(x_0)$. Segue que $\frac{\partial u}{\partial(-\nu)}(x_0) < 0$. Consequentemente, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.

■

6.3
Princípio do máximo forte

Teorema 6.7 (Princípio do Máximo Forte) *Seja $u \in C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \geq 0$ em Ω. Se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{\bar{\Omega}} u$, então u é constante.*

Vamos apresentar duas provas para o teorema. A primeira usando a propriedade da média e a segunda usando o lema de Hopf.

Prova. A demonstração será por conexidade. Seja $M := \sup_{\bar{\Omega}} u$. Defina $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$. Vamos mostrar que Ω_M é aberto e fechado. Note que Ω_M é não vazio, pois, por hipótese, $x_0 \in \Omega_M$. Também, Ω_M é fechado pois $\Omega_M = u^{-1}(M)$ e u é contínua.

Agora, para mostrar que Ω_M é aberto, tome $z \in \Omega_M$ e $B \subset\subset \Omega$ bola centrada em z. Como $\Delta u \geq 0$ em Ω, a propriedade da média 5.4 é aplicável a $u(z) - M$ sub-harmônica, então

$$0 = u(z) - M \leq \fint_B u(y) - M dy \leq \fint_B M - M = 0.$$

Logo, $u \equiv M$ em B pois se não a segunda desigualdade acima seria estrita. Então, $B \subset \Omega_M$, mostrando que Ω_M é aberto. Portanto, como Ω é conexo e Ω_M é não vazio, temos que $\Omega_M = \Omega$. Concluímos que $u \equiv M$ em Ω.

■

Prova. Seja $M := \sup_{\overline{\Omega}} u$. Defina $v := M - u$. Temos

$$\begin{cases} \Delta v \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ v(x_0) = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ v \geq 0 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Queremos mostrar que $v = 0$ (i.e. $u = M$) em Ω. Para fazer isso, vamos mostrar que o conjunto $\Omega_0 := \{x \in \Omega : v(x) = 0\} \subseteq \Omega$ é aberto, fechado e não vazio. Como $u(x_0) = M$, o conjunto Ω_0 não é vazio. Além disso, o conjunto Ω_0 é fechado pois é pré-imagem do fechado $\{0\}$ pela função v que é contínua.

Falta ver que Ω_0 é aberto. Nesta parte, vamos ver que o conjunto $\Omega - \Omega_0$ é fechado, ou seja, que se $(x_n) \subset \Omega - \Omega_0$ e $(x_n) \to \bar{x} \in \Omega$, então $\bar{x} \in \Omega - \Omega_0$.

Suponha para chegarmos a uma contradição que existe $(x_n) \subset \Omega - \Omega_0$ tal que $(x_n) \to \bar{x} \in \Omega_0$. Defina para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_n := \text{dist}(x_n, \Omega_0)$ e a bola $B_{d_n}(x_n)$. Como $(x_n) \to \bar{x}$ podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, vale que $d_n < \text{dist}(\bar{x}, \partial\Omega)/2$. Então, $B_{d_n}(x_n) \subset \Omega$ para $n \geq n_0$.

Daí, podemos tomar $\tilde{x} \in \Omega_0$ tal que $\tilde{x} \in \partial B_{d_{n_0}}(x_{n_0})$. O lema de hopf é aplicável em $B_{d_{n_0}}(x_{n_0})$, logo, $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}(\tilde{x}) \neq 0$. Mas $\tilde{x}$ é ponto de mínimo em Ω, logo, $\nabla v(\tilde{x}) = 0$ o que é uma contradição.

$\blacksquare$

7
Desigualdade de Harnack, convergências e estimativas

Neste capítulo, exploramos a desigualdade de Harnack, um resultado que permite comparar o comportamento máximo e mínimo de funções harmônicas não negativas em qualquer aberto conexo e limitado compactado no domínio com uma constante que depende apenas do aberto e da fronteira do domínio.

Além disso, discutimos estimativas fundamentais, como a estimativa para a derivada multi-índice de funções harmônicas. Abordamos também teoremas de convergência, incluindo a prova de que o limite uniforme de uma sequência de funções harmônicas continua a ser harmônico.

Neste capítulo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e conexo.

Teorema 7.1 (Desigualdade de Harnack) *Dado $V \subset\subset \Omega$ aberto conexo limitado, existe constante λ que depende apenas de V e $\operatorname{dist}(V, \partial\Omega))$ tal que para toda $u \in C^2(\Omega)$ harmônica e não negativa em Ω, vale que $\max_V u \leq \lambda \min_V u$. Em outras palavras, para todo $x, y \in V$, vale que $u(y)/\lambda \leq u(x) \leq \lambda u(y)$.*

Prova. Seja $V \subset\subset \Omega$ aberto conexo limitado. Defina $d_0 := \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$, repare que $d_0 > 0$ pois $V \subset \bar{V}$, então, $d_0 \geq \operatorname{dist}(\bar{V}, \partial\Omega)$ e como $\bar{V}$ é compacto, $\partial\Omega$ é fechado e $\partial\Omega \cap \bar{V} = \emptyset$ temos que $\operatorname{dist}(\bar{V}, \partial\Omega) > 0$.

Primeiro, vamos mostrar um resultado auxiliar, para todo $x, y \in V$ tal que $|x - y| < d_0/4$ vale que $u(x) \geq u(y)/2^n$. Suponha que $x, y \in V$ tal que $|x - y| < d_0/4 =: r_0$. Como u é harmônica, então u possui a propriedade da média. Daí,

$$u(x) = \fint_{B_{d_0/2}(x)} u(z)dz = \fint_{B_{2r_0}(x)} u(z)dz = \frac{1}{2^n r_0^n \, |B_1(0)|} \int_{B_{2r_0}(x)} u(z)dz.$$

Como $u \geq 0$ e $B_{r_0}(y) \subset B_{2r_0}(x)$, vale

$$\int_{B_{2r_0}(x)} u(z)dz \geq \int_{B_{r_0}(y)} u(z)dz.$$

Então,

$$u(x) \geq \frac{1}{2^n r_0^n \, |B_1(0)|} \int_{B_{r_0}(y)} u(z)dz = \frac{1}{2^n} \fint_{B_{r_0}(y)} u(z)dz = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Portanto, $u(x) \geq u(y)/2^n$ para todo $x, y \in V$ tal que $|x-y| < r_0$. Agora, vamos usar esse resultado auxiliar para mostrar o teorema.

Sejam $x, y \in V$. Queremos construir uma sequência finita de pontos $x_1 = x, x_2, \ldots, x_M = y$ tal que $B_{r_0}(x_i) \cap B_{r_0}(x_{i+1}) \neq \emptyset$ com $i = 1, \ldots, M$.

Como V é aberto e conexo, V é conexo por arcos. Tome $\Gamma \subset V$ arco que liga x e y. Com o intuito de construir a sequência desejada, chame $x_1 = x$, tome $x_2 \in B_{r_0}(x_1) \cap \Gamma$ tal que $\operatorname{dist}(x_2, x_1) > \frac{r_0}{2}$ e defina $x_3 \in B_{r_0}(x_2) \cap \Gamma$ com $\operatorname{dist}(x_3, x_2) > \frac{r_0}{2}$. Façamos esse processo até chegarmos em um termo x_{M-1} tal que $y \in B_{r_0}(x_{M-1}) \cap \Gamma$, por fim, chame $x_M = y$. Sabemos que esse processo é finito pois Γ tem comprimento finito. Assim, obtemos uma sequência finita $x_1 = x, x_2, \ldots, x_M = y$ tal que $B_{r_0}(x_i) \cap B_{r_0}(x_{i+1}) \neq \emptyset$, como queríamos.

Visto isso, aplicando o nosso resultado auxiliar na sequência finita $x_1, x_2, \ldots, x_M$ temos,

$$
\begin{aligned}
u(x) &\leq \max_{\bar{B}_{r_0}(x_1)} u \\
&\leq 2^n \min_{\bar{B}_{r_0}(x_1)} u \text{ pelo resultado auxiliar} \\
&\leq 2^n u(x_2) \leq 2^n \max_{\bar{B}_{r_0}(x_2)} u \leq 2^n 2^n \min_{\bar{B}_{r_0}(x_2)} u \\
&\ldots \\
&\leq (2^n)^M u(y).
\end{aligned}
$$

Concluímos que para cada ponto $x, y \in V$ vale que $u(x) \leq \lambda u(y)$ em que λ é uma constante positiva que só depende V e $\operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$. Como o resultado é para todo $x, y \in V$ vale que $u(y)/\lambda \leq u(x) \leq \lambda u(y)$, isto é, $\max_V u \leq \lambda \min_V u$.

■

7.1 Algumas estimativas

Teorema 7.2 *Seja $u \in C^\infty(\Omega)$ harmônica em Ω. Se fixarmos $x_0 \in \Omega$, então para cada $B_R(x_0) \subset \Omega$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$, vale que*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_{n,k}}{r^{n+k}} \int_{B_R(x_0)} |u(x)|\, dx$$

em que $C_{n,k}$ é uma constante que depende apenas de n e k.

Explicitamente, $C_0 = \frac{1}{|B_1(0)|}$ e $C_{k\geq 1} = \frac{\left(2^{n+1} nk\right)^k}{|B_1(0)|}$.

Prova. A prova será por indução. Para $k = 0$, como u é harmônica vale a propriedade da média para x_0, então

$$
\begin{aligned}
|u(x_0)| &= \left| \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(x)dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{|B_1(0)|\, R^n} \int_{B_R(x_0)} u(x)dx \right| \\
&\leq \frac{1}{|B_1(0)|\, R^n} \int_{B_R(x_0)} |u(x)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Para facilitar a compreensão do último passo da indução, vamos fazer para $k = 1$ antes. Como u é harmônica, por Schwarz, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ também é, pois $\Delta \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u = 0$.

Então, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ tem a propriedade da média, aplicando em $B_{R/2}(x_0)$,

$$
\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \frac{1}{\left|B_{R/2}(x_0)\right|} \int_{B_{R/2}(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx
$$

e por Gauss-Green,

$$
\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \frac{1}{\left|B_{R/2}(x_0)\right|} \int_{\partial B_{R/2}(x_0)} u(x)\nu_i(x)dx.
$$

Passando o módulo,

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| &\leq \frac{1}{\left|B_{R/2}(x_0)\right|} \int_{\partial B_{R/2}(x_0)} |u(x)|\, |\nu_i(x)|\, dx \\
&\leq \frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n} \int_{\partial B_{R/2}(x_0)} |u(x)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Note que se $x \in \partial B_{R/2}(x_0)$, então $B_{R/2}(x) \subset B_R(x_0) \subset \Omega$. Agora, aplicando o caso $k = 0$ em $B_{R/2}(x)$, temos

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &\leq \frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n} \int_{B_{R/2}(x)} |u(y)dy| \\
&\leq \frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n} \int_{B_R(x_0)} |u(y)|\, dy.
\end{aligned}
$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0)\right| &\leq \frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n}\int_{\partial B_{R/2}(x_0)} |u(x)|\, dx \\
&\leq \frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n}\int_{\partial B_{R/2}(x_0)} \left[\frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n}\int_{B_R(x_0)} |u(y)|\, dy\right] dx \\
&\leq \frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n}\int_{\partial B_{R/2}(x_0)} 1dx \left[\frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n}\int_{B_R(x_0)} |u(y)|\, dy\right] \\
&\leq \frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n}\left|\partial B_{R/2}(x_0)\right| \frac{2^n}{|B_1(0)|\, R^n}\int_{B_R(x_0)} |u(y)|\, dy \\
&\leq \frac{2^{2n}}{|B_1(0)|^2\, R^{2n}}\left|\partial B_{R/2}(x_0)\right| \int_{B_R(x_0)} |u(y)|\, dy \\
&\leq \frac{2^{2n}}{|B_1(0)|^2\, R^{2n}}\left(\frac{R}{2}\right)^{n-1} n\, |B_1(0)| \int_{B_R(x_0)} |u(y)|\, dy \\
&\leq \frac{2^{n+1} n}{|B_1(0)|\, R^{n+1}}\int_{B_R(x_0)} |u(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Mostrando o resultado para $k = 1$. Vamos fazer para $k \geq 2$ agora.

Suponha que o resultado valha para algum $k-1 \geq 1$, queremos ver que o resultado vale para k. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$. Temos que para algum $i = 1, \ldots, n$, vale que $D^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u$ em que $\beta \in \mathbb{N}^n$ e $\beta_1 + \cdots + \beta_n = k-1$. De novo, por Schwarz, $D^\alpha u$ é harmônica, então vale a propriedade da média.

Fixe $x_0 \in \Omega$. Aplicando a propriedade da média em $B_{\frac{R}{k}}(x_0)$, temos

$$D^\alpha u(x_0) = \frac{1}{\left|B_{\frac{R}{k}}(x_0)\right|}\int_{B_{\frac{R}{k}}(x_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta u(x) dx,$$

novamente, por Gauss-Green,

$$D^\alpha u(x_0) = \frac{1}{\left|B_{\frac{R}{k}}(x_0)\right|}\int_{\partial B_{\frac{R}{k}}(x_0)} D^\beta u(x) \cdot \nu_i dx.$$

Passando o módulo,

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{1}{\left|B_{\frac{R}{k}}(x_0)\right|}\int_{\partial B_{\frac{R}{k}}(x_0)} \left|D^\beta u(x)\right| dx.$$

Como antes, se $x \in \partial B_{\frac{R}{k}}(x_0)$, então $B_{R\frac{k-1}{k}}(x) \subset B_R(x_0) \subset \Omega$. Pela hipótese de indução, o resultado vale para $k-1$ em $B_{R\frac{k-1}{k}}(x)$, então,

$$\begin{aligned}\left|D^\beta u(x)\right| &\leq \frac{\left(2^{n+1}n\,(k-1)\right)^{k-1}}{|B_1(0)|\left(R\frac{k-1}{k}\right)^{n+k-1}}\int_{B_{R\frac{k-1}{k}}(x)}|u(x)|\,dx\\ &\leq \frac{\left(2^{n+1}n\,(k-1)\right)^{k-1}}{|B_1(0)|\left(R\frac{k-1}{k}\right)^{n+k-1}}\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}|D^\alpha u(x_0)| &\leq \frac{1}{\left|B_{\frac{R}{k}}(x_0)\right|}\int_{\partial B_{\frac{R}{k}}(x_0)}\left|D^\beta u(x)\right|dx\\ &\leq \frac{\left|\partial B_{\frac{R}{k}}(x_0)\right|}{\left|B_{\frac{R}{k}}(x_0)\right|}\frac{\left(2^{n+1}n\,(k-1)\right)^{k-1}}{|B_1(0)|\left(R\frac{k-1}{k}\right)^{n+k-1}}\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{n\,|B_1(0)|\left(\frac{R}{k}\right)^{n-1}}{|B_1(0)|\left(\frac{R}{k}\right)^{n}}\frac{\left(2^{n+1}n\,(k-1)\right)^{k-1}}{|B_1(0)|\,R^{n+k-1}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n+k-1}}\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{nk}{R}\frac{\left(2^{n+1}n\right)^{k-1}}{|B_1(0)|\,R^{n+k-1}\,(k-1)^n\,k^{-n-k+1}}\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^{k}}{2^{n+1}\,|B_1(0)|\,R^{n+k}\,(k-1)^n\,k^{-n}}\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^{k}}{2^{n+1}\,|B_1(0)|\,R^{n+k}}\frac{k^n}{(k-1)^n}\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^{k}}{2^{n+1}\,|B_1(0)|\,R^{n+k}}\left(\frac{k}{k-1}\right)^n\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^{k}}{2^{n+1}\,|B_1(0)|\,R^{n+k}}\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^n\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^{k}}{2^{n+1}\,|B_1(0)|\,R^{n+k}}\,(1+1)^n\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^{k}}{2\,|B_1(0)|\,R^{n+k}}\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy\\ &\leq \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^{k}}{|B_1(0)|\,R^{n+k}}\int_{B_R(x_0)}|u(y)|\,dy.\end{aligned}$$

■

7.2 Teoremas de Convergência

Teorema 7.3 *O limite de uma convergência uniforme de uma sequência de funções harmônicas é harmônico.*

Prova. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado. Seja $\{u_m\}$ sequência de funções harmônicas em Ω tal que $\{u_m\} \to u$ uniformemente em Ω. Queremos mostrar que u é harmônica e para fazer isso vamos ver que u tem a propriedade da média.

Seja $B_r(x) \subset\subset \Omega$, pelo teorema 5.3 temos que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale que

$$u_m(x) = \fint_{B_r(x)} u_m(z)dz.$$

Passando o limite para os dois lados,

$$\lim_{n\to+\infty} u_m(x) = \lim_{n\to+\infty} \fint_{B_r(x)} u_m(z)dz.$$

Como $\{u_m\}$ converge uniformemente para u,

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} \lim_{n\to+\infty} u_m(z)dz = \fint_{B_r(x)} u(z)dz.$$

Logo, u tem a propriedade da média e pelo teorema 5.5, u é harmônica.

■

Teorema 7.4 *Seja $\{u_m\}$ sequência crescente de funções harmônicas em Ω. Se para algum $x_0 \in \Omega$ a sequência $\{u_m(x_0)\}$ é limitada, então $\{u_m\}$ converge uniformemente em todo $V \subset\subset \Omega$ aberto conexo limitado para uma função harmônica.*

Prova. Defina $\{v_m\}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, $v_m := u_{m+1} - u_m$. Como $\{u_m\}$ é crescente, então $\{v_m\}$ é não negativa. Também, como $\{u_m\}$ é harmônica, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\Delta v_m = \Delta(u_{m+1} - u_m) = \Delta u_{m+1} - \Delta u_m = 0$. Então, a desigualdade de Harnack é aplicável a $\{v_m\}$ em todo aberto conexo limitado compactado em Ω.

Seja $V \subset\subset \Omega$ aberto conexo limitado. Por Harnack, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\max_V \{v_m\} \leq C \min_V \{v_m\}.$$

Em particular, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\min_V \{v_m\} \leq v_m(x_0) \leq u_{m+1}(x_0) - u_m(x_0)$. Como $\{u_m(x_0)\}$ é limitada e monótona, então converge e é de Cauchy.

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq m_0$ então $u_{m+1}(x_0) - u_m(x_0) < \varepsilon/C$. Logo, se $m \geq m_0$,

$$\max_V \{u_{m+1} - u_m\} \leq C \min_V \{u_{m+1} - u_m\} \leq C\{u_{m+1}(x_0) - u_m(x_0)\} < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Portanto, $\{u_m\}$ converge uniformemente e, pelo teorema 7.3, a função limite é harmônica. Como tomamos $V \subset\subset \Omega$ arbitrário o resultado segue.

■

Proposição 7.5 *Seja $\{u_m\}$ sequência limitada de funções harmônicas em Ω. Dado $K \subset \Omega$ compacto, então existe subsequência de $\{u_m\}$ que converge uniformemente para uma função harmônica.*

Prova. Sejam $x \in \Omega$ e $d := \operatorname{dist}(\Omega, \partial K)$. Pelo resultado 7.2, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$|Du_m(x)| \leq \frac{C_{n,1}}{d^{n+1}} \int_{B_d(x)} |u_m(y)|\, dy = \frac{2^{n+1}n}{|B_1(0)|\, d^{n+1}} \int_{B_d(x)} |u_m(y)|\, dy.$$

Logo, chamando $M := \sup_\Omega |u_m|$ pois $\{u_m\}$ é limitada,

$$|Du_m(x)| \leq \frac{2^{n+1}n}{|B_1(0)|\, d^{n+1}} |B_d(x)|\, M \leq \frac{2^{n+1}nM}{d}.$$

Mostramos que para todo $m \in \mathbb{N}$ as derivadas Du_m são limitadas. Agora, pelo teorema do valor médio, temos que para todo $x, y \in K$ vale

$$|u_m(x) - u_m(y)| \leq \frac{2^{n+1}nM}{d} |x - y|.$$

Note que $\{u_m\}$ é equicontínua, pois dado $\varepsilon > 0$ se tomarmos $x, y \in K$ tal que $|x - y| < \varepsilon \frac{d}{2^{n+1}nM}$, então $|u_m(x) - u_m(y)| < \varepsilon$.

Logo, o teorema de Arzelà-Ascoli é aplicável e existe subsequência que converge uniformemente. Ainda mais, como a subsequência é de funções harmônicas, seu limite é uma função harmônica e o resultado segue.

∎

8
O método das funções sub-harmônicas

Neste capítulo, apresentamos o método de Perron. Começamos definindo o conceito de funções contínuas sub-harmônicas e super-harmônicas, apresentamos uma espécie de princípio do máximo forte quando comparamos uma função sub-harmônica com uma super-harmônica na fronteira de um domínio limitado que nos ajuda com o decorrer da teoria e tem como corolário direto o princípio do máximo forte para funções sub-harmônicas.

Depois usamos o teorema 4.9 que estende uma função contínua no bordo de uma bola para uma função que é harmônica no interior da bola para definir o levantamento harmônico numa bola. Seguimos mostrando que o levantamento harmônico de uma função sub-harmônica é sub-harmônico. Prosseguimos definindo os conceitos de subfunção e super função que nos ajuda a definir a solução de Perron.

Mostramos que a solução de Perron é harmônica e fazemos uma pequena digressão para motivar o estudo da solução de Perron para introduzir os conceitos de barreira, ponto regular e concluir com o contexto no qual a solução de Perron é a solução do problema clássico de Dirichlet.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto aberto e conexo.

8.1
Funções sub-harmônicas e super-harmônicas

Definição 8.1 (Sub-harmônica) *Seja $u \in C^0(\Omega)$. Se para cada $B \subseteq \Omega$ bola e para cada h harmônica em B vale que se $u \leq h$ em ∂B, então $u \leq h$ em B, dizemos que u é sub-harmônica em Ω.*

Definição 8.2 (Super-harmônica) *Seja $u \in C^0(\Omega)$. Se para cada $B \subseteq \Omega$ bola e para cada h harmônica em B vale que se $u \geq h$ em ∂B, então $u \geq h$ em B, dizemos que u é super-harmônica em Ω.*

Até o momento, há duas definições no texto para funções C^2 sub-harmônicas e super-harmônicas, a próxima proposição mostra que as duas definições são equivalentes.

Proposição 8.1 *Seja $u \in C^2(\Omega)$. São equivalentes,*

1. *para todo $x \in \Omega$, $\Delta u(x) \geq 0$;*
2. *para cada $B \subseteq \Omega$ bola e para cada h harmônica em B vale que se $u \leq h$ em ∂B então $u \leq h$ em B.*

Prova. Seja $u \in C^2(\Omega)$. Primeiro, vamos mostrar que 1 implica 2. Sejam $B \subseteq \Omega$ bola e h harmônica em B tal que $u \leq h$ em ∂B. Queremos mostrar que $u \leq h$ em B também. Como h é harmônica em B, temos que $\Delta u \geq \Delta h$ em B, então, pelo princípio do máximo $u \leq h$ em B como queríamos mostrar.

Agora, vamos mostrar que 2 implica 1. Suponha para chegarmos a uma contradição que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Delta u(x_0) < 0$. Como $u \in C^2(\Omega)$, temos que Δu é contínua, logo, existe $B_{r_0}(x_0) \subseteq \Omega$ tal que $\Delta u < 0$ em $B_{r_0}(x_0)$. Seja h função harmônica em $B_{r_0}(x_0)$ tal que $h = u$ em $\partial B_{r_0}(x_0)$ como no teorema 4.9. Temos que

$$\begin{cases} \Delta h = 0 > \Delta u & \text{em } B_{r_0}(x_0), \\ h = u & \text{em } \partial B_{r_0}(x_0), \end{cases}$$

e pelo princípio da comparação segue que $h \leq u$ em $B_{r_0}(x_0)$. Mas por 2, $u \leq h$ em $B_{r_0}(x_0)$, logo, $u = h$ em $B_{r_0}(x_0)$ o que é uma contradição pois h é harmônica e estamos supondo que $\Delta u(x_0) < 0$. ■

Observação 8.2 *A proposição acima mostra o análogo para funções C^2 super-harmônicas, basta repetir a demonstração com $-u$.*

Exemplo 8.3 *Seja $\Omega = (-1, 1)$. Sejam $u(x) = |x|$ tal que $x \in (-1, 1)$ e $B = (a, b) \subset (-1, 1)$ bola. Tome h harmônica em B tal que $u \leq h$ em $\partial B = \{a, b\}$. Em uma dimensão, uma função é harmônica se, e somente se, sua segunda derivada é nula, então, $h'' = 0$ e h é uma função afim cujo gráfico é um segmento de reta. Além disso, $u \leq h$ em $\partial B = \{a, b\}$, logo, temos que o gráfico de h é um segmento de reta que liga os pontos $(a, u(a))$ e $(b, u(b))$. Então, para $t \in [0, 1]$, $h(ta+(1-t)b) = th(a)+(1-t)h(b) = tu(a)+(1-t)u(b)$.*

Dado $x \in B$, existe $t \in (0, 1)$ tal que $x = ta + (1-t)b$, então, como u é convexa temos que $u(x) = u(ta+(1-t)b) \leq tu(a)+(1-t)u(b) = h(x)$. Como $x \in B$ foi tomado de forma arbitrária, temos que $u \leq h$ em B, concluindo que u é sub-harmônica em $(-1, 1)$.

Observação 8.4 *Pelo corolário 6.4, as constantes são sub-harmônicas e super-harmônicas.*

Proposição 8.3 *Se $v \in C^0(\Omega)$ é sub-harmônica em Ω e $k > 0$, então kv é sub-harmônica.*

Prova. Seja $B \subseteq \Omega$ e h harmônica em B tal que $kv \leq h$ em ∂B. Então, $v \leq h/k$ em ∂B. Como h/k é harmônica, temos que $v \leq h/k$ em B pois v é sub-harmônica Ω. Logo, $kv \leq h$ em Ω.

■

Proposição 8.4 *Se $u_1, \ldots, u_m \in C^0(\Omega)$ são funções sub-harmônicas em Ω, então $u(x) := \max\{u_1, \ldots, u_m\}$ é sub-harmônica em Ω.*

Prova. Basta mostrar para $u_1, u_2 \in C^0(\Omega)$ sub-harmônicas. Seja $u(x) := \max\{u_1(x), u_2(x)\}$. Tome $B \subset \Omega$ bola e h harmônica em B tal que $u \leq h$ em ∂B. Queremos ver que $u \leq h$ em B.

Pela definição de u, temos que $u_1 \leq h$ em ∂B e $u_2 \leq h$ em ∂B. Como u_1 e u_2 são sub-harmônicas, $u_1 \leq h$ em B e $u_2 \leq h$ em B. Então, $u(x) := \max\{u_1(x), u_2(x)\} \leq h$ em B.

■

Agora, vamos apresentar uma espécie de princípio do máximo forte para quando comparamos uma função sub-harmônica e uma super-harmônica na fronteira de um domínio limitado. Este resultado vai se mostrar bem útil no decorrer deste capítulo final e vai nos ajudar a mostrar o princípio do máximo forte para funções sub-harmônicas.

Proposição 8.5 *Seja Ω conjunto limitado. Sejam $u \in C^0(\Omega)$ sub-harmônica em Ω e $v \in C^0(\Omega)$ super-harmônica em Ω tal que $v \geq u$ em $\partial\Omega$, então ou $v > u$ em Ω ou $v \equiv u$. Equivalentemente, se $u - v \leq 0$ em $\partial\Omega$, então ou $u - v < 0$ em Ω ou $u - v \equiv 0$ em Ω.*

Prova. Seja $M := \sup_\Omega (u - v)$. Se $M < 0$, temos que $u - v < 0$ e o resultado segue. Suponha que $M \geq 0$ e defina

$$\Omega_M = \{x \in \Omega : (u - v)(x) = M\}.$$

O argumento será por conexidade. Se $M > 0$, como por hipótese $u - v \leq 0$ em $\partial\Omega$ então o máximo positivo é atingido no interior, logo, $\Omega_M \neq \emptyset$. Se $M = 0$, temos que $u - v \leq 0$ em Ω. Daí ou existe $x_0 \in \Omega$ tal que $(u - v)(x_0) = 0$ o que implica que $\Omega_M \neq \emptyset$ ou não existe $x_0 \in \Omega$ tal que $(u - v)(x_0) = 0$, então $u - v < 0$ em Ω e resultado segue. Logo, podemos supor que $\Omega_M \neq \emptyset$. Repare que Ω_M é fechado pois $\Omega_M = (u - v)^{-1}(M)$ e $u - v$ é contínua.

Vamos mostrar que Ω_M é aberto. Seja $x_0 \in \Omega_M$ e tome $B = B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$. Pelo teorema 4.9, podemos tomar $\bar{u}, \bar{v} \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ harmônicas em B tal que $\bar{u} \equiv u$ em ∂B e $\bar{v} \equiv v$ em ∂B. Logo, $\sup_{\partial B}(\bar{u} - \bar{v}) = \sup_{\partial B}(u - v) \leq M$. Também, pela definição de sub-harmônica e super-harmônica, $u \leq \bar{u}$ em B e $v \geq \bar{v}$ em B, então, $M = (u - v)(x_0) \leq (\bar{u} - \bar{v})(x_0)$. Agora, pelo princípio do máximo, como $\bar{u}-\bar{v}$ é harmônica em B, temos que $\sup_{\partial B}(\bar{u}-\bar{v}) = \sup_{\bar{B}}(\bar{u}-\bar{v})$, logo, $(\bar{u}-\bar{v})(x_0) \leq \sup_{\partial B}(\bar{u}-\bar{v})$. Temos a seguinte cadeia,

$$M = (u-v)(x_0) \leq (\bar{u}-\bar{v})(x_0) \leq \sup_{\partial B}(\bar{u}-\bar{v}) \leq M.$$

Então, $(\bar{u}-\bar{v})(x_0) = \sup_{\partial B}(\bar{u}-\bar{v}) = \sup_{\bar{B}}(\bar{u}-\bar{v})$. Pelo princípio do máximo forte temos que $\bar{u}-\bar{v} \equiv M$ em $\bar{B}$. Logo, $u-v \equiv M$ em ∂B.

Repetindo o argumento para todo $r \in (0, r_0)$ temos que $u - v \equiv M$ em $\partial B_r(x_0)$ para todo $r \in (0, r_0)$, então $u - v \equiv M$ em B, logo, $B \subset \Omega_M$ concluindo que Ω_M é aberto.

Como Ω é conexo, mostramos que se $M \geq 0$, então $\Omega = \Omega_M$. Daí, $u - v = M$ em Ω e como $u - v \leq 0$ em $\partial\Omega$ temos que $M \leq 0$. Portanto, $M = 0$ e $u - v = 0$ em Ω e o resultado segue. ■

Corolário 8.6 (Princípio do máximo forte para sub-harmônicas C^0) *Se $u \in C^0(\Omega)$ é sub-harmônica em Ω, então satisfaz o princípio do máximo forte. Ou seja, se existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \sup_{x\in\Omega} u(x)$, então $u \equiv u(x_0)$.*

Prova. Chame $M := \sup_{x\in\Omega} u(x)$. Como as constantes são super-harmônicas e $u \leq M$ em $\partial\Omega$. Pelo resultado anterior, ou $M > u$ em Ω ou $M \equiv u$ em Ω. Como $u(x_0) = M$, temos que $u \equiv M$ e o resultado segue.

■

8.2 Levantamento harmônico, subfunção e super função

Vamos apresentar alguns conceitos chave que nos ajudam a definir a solução de Perron.

Definição 8.7 (Levantamento Harmônico) *Seja $B \subset \Omega$. Sejam $u \in C^0(\Omega)$ função sub-harmônica em Ω e $\bar{u}$ a função harmônica em B que estende u como no teorema 4.9. O levantamento harmônico de u em B é definido como*

$$U(x) := \begin{cases} \bar{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega - B. \end{cases}$$

Observação 8.5 *Como u é sub-harmônica, $u = \bar{u}$ em ∂B, então $u \leq \bar{u} = U$ em B. Logo, $u \leq U$ em Ω.*

Proposição 8.8 *Se $u \in C^0(\Omega)$ sub-harmônica e $B \subset \Omega$, então o levantamento harmônico de u em B é sub-harmônico em Ω.*

Prova. Seja $B' \subset \Omega$ bola arbitrária. Suponha que h é harmônica em B' tal que $U \leq h$ em $\partial B'$. Queremos mostrar que $U \leq h$ em $\partial B'$ também.

Como $u \leq U$ em $\partial B'$, pela observação anterior, temos que $u \leq h$ em $\partial B'$, logo, como u é sub-harmônica, $u \leq h$ em B'. Então, $U \leq h$ em $B' - B$.

Falta ver que $U \leq h$ em $B' \cap B$. Como U, h são harmônicas em $B' \cap B$ e $U \leq h$ em $\partial(B' \cap B)$, pelo princípio da comparação 6.6, temos que $U \leq h$ em $B \cap B'$. Portanto, $U \leq h$ em B'.

■

Definição 8.9 (Subfunção e super função) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado. Seja φ função limitada em $\partial\Omega$. Dizemos que uma $u \in C^0(\Omega)$ sub-harmônica é uma subfunção relativa a φ se $u \leq \varphi$ em $\partial\Omega$. Analogamente, dizemos que $v \in C^0(\Omega)$ super-harmônica é uma super função relativa a φ se $v \geq \varphi$ em $\partial\Omega$. O conjunto de todas as subfunções relativas a φ é denotado por S_φ.*

Agora que já temos bastante vocabulário, vamos mostrar que o supremo de subfunções relativas a uma mesmma função é uma função harmônica.

Teorema 8.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado. Seja φ função limitada em $\partial\Omega$. A função $u(x) := \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$ é harmônica em Ω.*

A ideia principal da demonstração é construir uma sequência limitada de funções harmônicas para usar a proposição 7.5 mas só temos subfunções para trabalhar. Então, a estratégia, será construir uma sequência de funções sub-harmônicas crescente e limitada. Tomar para cada terno da sequência o seu levantamento harmônico e mostrar que essa nova sequência que provém do levantamento harmônico é limitada e aplicar a proposição 7.5.

No entanto, a priori, a subsequência obtida converge para uma função harmônica que não necessariamente coincide com a função desejada. Para mostrar que o limite é o mesmo, empregamos um argumento por contradição. Seguindo um raciocínio semelhante ao início da demonstração, chegamos a uma contradição, finalizando assim a prova.

Prova. Seja $y \in \Omega$. Pela definição de u, podemos tomar $\{u_m\} \subset S_\varphi$ tal que $\{u_m(y)\} \to u(y)$. Podemos supor que $\{u_m\}$ é uma sequência limitada por cima e por baixo na fronteira, pois se não, basta tomar a sequência $\{v_m\}$ definida da seguinte forma,

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= \max\{u_1, u_2\} \geq u_1 = v_1 \\ v_3 &= \max\{u_1, u_2, u_3\} \geq v_2 \\ &\cdots \\ v_m &= \max\{u_1, \ldots, u_m\} \end{aligned}$$

Cada termo é máximo de funções sub-harmônicas e como para todo $m \in \mathbb{N}$, $u_m \leq \varphi$ em $\partial\Omega$, vale que para todo $m \in \mathbb{N}$, $v_m \leq \varphi \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi$ em $\partial\Omega$. Então, $\{v_m\} \subset S_\varphi$ e pelo teorema 8.5 temos que para todo $m \in \mathbb{N}$, $v_m \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi$ em Ω. Além disso, a sequência $\{v_m\}$ é crescente, logo, limitada por baixo pelo seu primeiro termo. Visto isso, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$v_1 \leq v_m \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi$$

em Ω. Também, $v_m(y) \to u(y)$ pois como $v_m(y) = \max\{u_1(y), \ldots, u_m(y)\}$ e $\{v_m\} \subset S_\varphi$, temos que para todo $m \in \mathbb{N}$, $u_m(y) \leq v_m(y) \leq u(y)$. Logo, $v_m(y) \to u(y)$ pois $u_m(y) \to u(y)$.

Como Ω é aberto, tome $R > 0$ tal que $B := B_R(y) \subset\subset \Omega$. Defina para cada $m \in \mathbb{N}$, V_m como sendo o levantamento harmônico de v_m em B. Note que $V_m \in S_\varphi$ porque o levantamento harmônico de sub-harmônicas é sub-harmônico e por definição $V_m \equiv v_m$ em ∂B. Consequentemente, $V_m(y) \to u(y)$ pois $v_m(y) \leq V_m(y) \leq u(y)$. Como $\{V_m\}$, em B, é limitada e harmônica, pela proposição 7.5, existe $\{V_{n_k}\}$ subsequência que converge uniformemente em qualquer bola $B_r(y)$ com $r < R$ para uma função v harmônica em B.

Queremos mostrar que $u = v$ em B. Já sabemos que $v \leq u$ em B pois para todo $n_k \in \mathbb{N}$, V_{n_k} é harmônica e $V_{n_k} = v_{n_k}$ em ∂B, então pelo princípio do máximo $V_{n_k} \leq u$ em B, logo, fazendo $n_k \to +\infty$, temos que $v \leq u$ em B.

Então, suponha para chegarmos a uma contradição que $v < u$, ou seja, que para algum $z \in B$, $v(z) < u(z)$. Então, pela definição de sup existe $\bar{u} \in S_\varphi$ tal que $v(z) < \bar{u}(z) \leq u(z)$. Defina para todo $k \in \mathbb{N}$, $w_k := \max\{\bar{u}, V_{n_k}\}$. Tome o levantamento harmônico W_k de w_k em B.

Novamente, obtemos uma subsequência de $\{W_k\}$ que converge uniformemente para uma função harmônica w em B mas que satisfaz $v \leq w \leq u$ em B e $v(y) = w(y) = u(y)$. Pelo princípio do máximo forte, $v = w$ em B. Contradizendo a escolha de $\bar{u}$. Logo, $v \equiv u$ em B mostrando que u é harmônica em B. Como B foi tomada de forma arbitrária, o resultado segue.

∎

8.3 Método de Perron

Definição 8.11 (Solução de Perron) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado. Seja φ função limitada em $\partial\Omega$. A função $u(x) := \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$ é chamada de solução de Perron associada a φ.*

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado. Seja φ função limitada em $\partial\Omega$. Dado o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha que w é solução do problema. Como $w = \varphi$ em $\partial\Omega$, então $w \in S_\varphi$. Para todo $v \in S_\varphi$, v é sub-harmônica e $v \leq \varphi = w$ em $\partial\Omega$, logo, $v \leq w$ em Ω pois w é harmônica. Quando o problema de Dirichlet tem solução, esse raciocínio faz a solução de Perron ser promissora.

Agora, vamos estudar o comportamento das soluções do problema de Dirichlet na fronteira para entender as condições de existência de solução.

Definição 8.12 (Barreira) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado. A função $w \in C^0(\bar{\Omega})$ é chamada de barreira de $\xi \in \partial\Omega$ relativa a Ω se satisfaz*

(i) *w é super-harmônica em Ω;*

(ii) *$w > 0$ em $\bar{\Omega} - \{\xi\}$;*

(iii) *$w(\xi) = 0$.*

Definição 8.13 (Ponto regular) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado. Um ponto de $\partial\Omega$ é dito regular quando existe uma barreira neste ponto.*

Teorema 8.14 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, conexo e limitado. Sejam φ função limitada em $\partial\Omega$ e u solução de Perron associada a φ. Se $\xi \in \partial\Omega$ é regular e φ contínua em ξ, então $\lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \Omega}} u(x) = \varphi(\xi)$.*

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Chame $M := \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$. Como ξ é ponto regular, então existe uma barreira $w \in C^0(\bar{\Omega})$ em ξ. Como φ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - \xi| < \delta$ então $|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon$.

Agora, como w é barreira de ξ, w é positiva em $\bar{\Omega} - B_\delta(\xi)$ que é um conjunto compacto, logo, existe $c > 0$ tal que $w(x) > c$ se $|x - \xi| \geq \delta$. Tome $k > 0$ tal que $w(x) > 2M/k > c$ se $|x - \xi| \geq \delta$.

Note que $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$ é super-harmônica pois kw é super-harmônica em Ω e $\varphi(\xi), \varepsilon$ são constantes. Analogamente, $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ é sub-harmônica.

Além disso, $\varphi(\xi)+\varepsilon+kw \geq \varphi$ em $\partial\Omega$. Porque para $x \in \partial\Omega$, se $|x-\xi| \geq \delta$

$$\varphi < 2M \leq kw(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$$

e se $|x-\xi| < \delta$, $kw(x) \geq 0$, então

$$\varphi(x) < \varepsilon + \varphi(\xi) \leq \varepsilon + \varphi(\xi) + kw(x).$$

Semelhantemente, $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw \leq \varphi$ em $\partial\Omega$.

Portanto, $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$ é super função relativa a φ e $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ é sub função relativa a φ. Pela definição de u, em $\partial\Omega$,

$$u \leq \varphi \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw;$$

$$\varphi \geq u \geq \varphi(\xi) - \varepsilon - kw.$$

Como u é harmônica e $\varphi(\xi) + \varepsilon + kw$ é super-harmônica e $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw$ é sub-harmônica, vale que, em Ω,

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw \leq u \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw.$$

Equivalentemente,

$$|u(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon + kw(x) \text{ para } x \in \Omega.$$

Como w é barreira, $w(x) \to 0$ quando $x \to \xi$ pois w é contínua em ξ e $w(\xi) = 0$. Então, $u(x) \to \varphi(\xi)$ quando $x \to \xi$.

■

Teorema 8.15 *Seja Ω limitado. Sejam $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. O problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem solução se e somente se os pontos da fronteira são todos regulares.

Prova. $(\Leftarrow)$: Suponha que todos os pontos da fronteira são regulares. Então, pelo teorema anterior, a solução de Perron é solução do problema de Dirichlet pois $u = \sup_{v \in S_\varphi} v$ é contínua em $\bar{\Omega}$ e $\lim_{x\to\xi} u(x) = \varphi(\xi)$.

$(\Rightarrow)$: Suponha que o Problema de Dirichlet dado tem solução para qualquer $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Seja $\xi \in \partial\Omega$. Defina $f(x) := |x - \xi|$. A função f é contínua em $\partial\Omega$. Tome a função h harmônica que resolve

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Em particular, h, pelo princípio do máximo, é super-harmônica e positiva. Além disso, é nula em ξ. Logo, h é barreira de ξ. Então, ξ é regular.

■

Por fim, vamos dar uma condição geométrica necessária para que um domínio tenha fronteira regular.

Definição 8.16 (Condição da esfera exterior) *Seja Ω limitado. Dizemos que $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera exterior se para todo ponto $\xi \in \partial\Omega$ existe $B = B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n - \Omega$ que satisfaz $\bar{B} \cap \bar{\Omega} = \{\xi\}$, ou seja, $\xi \in \partial B \cap \partial\Omega$.*

Proposição 8.17 *Seja Ω limitado satisfazendo a condição da esfera exterior. Ou seja, dado $\xi \in \partial\Omega$ existe $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n - \Omega$. A função*

$$w(x) = \begin{cases} \ln \frac{|x-x_0|}{R} & n = 2, \\ \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} & n \geq 3, \end{cases}$$

definida em $\bar{\Omega}$ é uma barreira de ξ.

Prova. A função w é contínua em $\bar{\Omega}$, positiva em $\bar{\Omega} - \{\xi\}$ e $w(\xi) = 0$ por definição. Falta mostrar que w é super-harmônica em Ω.

Seja $B \subseteq \Omega$ bola. Tome h harmônica em B tal que $h \leq w$ em ∂B. Queremos ver que $h \leq w$ em B também. Repare que w é harmônica, pois é uma função radial que é solução da equação de Laplace como vimos em 4.1.

Então, pelo princípio da comparação, $h \leq w$, logo, w é super-harmônica.

■

Referências bibliográficas

1 BIEZUNER, R. J. **Notas de aula: Equações diferenciais parciais i/ii**. UFMG, 2010.

2 EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**, volume 19 de Graduated studies in mathematics. American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.

3 GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Class. Math. Berlin: Springer, reprint of the 1998 ed. edition, 2001.

4 LIMA, E. L. **Algebra linear**. IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

5 LIMA, E. L. **Curso de análise vol. 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 15 edition, 2019.

6 LIMA, E. L. **Curso de análise vol. 2**. Rio de Janeiro: IMPA, 12 edition, 2020.

7 MUNKRES, J. R. **Topology**. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2nd edition, 2000.

8 SIRAKOV, Boyan Slavchev. **Modern theory of nonlinear elliptic PDE**. IMPA, 2015.