



João Felipe Costa Lobato

**Desenvolvimento de uma metodologia para
análises estatísticas de um sistema
massa-mola-amortecedor excitado por um
carregamento estocástico**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof^a. Roberta Lima

Rio de Janeiro
Dezembro de 2024

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família por todo o suporte durante toda a minha vida e por ter acreditado em mim. Ao meu pai João Batista, à minha mãe Maria Denise e à minha irmã Maria Letícia, que sempre estiveram do meu lado.

Não posso deixar de agradecer à minha orientadora Roberta Lima por todos os *feedbacks*, todo o suporte e motivação ao longo deste trabalho, assim como ao técnico Wagner Epifânio, e ao prof. emérito Rubens Sampaio pelo material de apoio.

Agradeço também à PUC-Rio, ao DEM e ao CNPq pelo apoio financeiro por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), que fomentou este trabalho.

Também gostaria de agradecer aos meus amigos e colegas que sempre me deram suporte, em especial ao Marcelo Tavares, ao Jerônimo Augusto, ao Gabriel Ruffatto, e ao Pablo Leite Andrade, com o qual celebramos 20 anos de amizade.

Agradeço aos meus colegas, alunos e supervisores do Pré-Vestibular Comunitário da PUC-Rio, onde tive a oportunidade de exercer a prática docente e expandir minha visão de mundo.

Por fim, gostaria de agradecer a todos os meus professores desde a educação básica que me prepararam para chegar onde cheguei, dando ênfase ao prof. Marlon Faria, que me preparou e me motivou para o vestibular, ao prof. Jan Krueger Siqueira que me motivou e me passou conhecimentos valiosíssimos para a minha trajetória na universidade, e ao prof. Marcos Sebastião de Paula Gomes, que fez eu me encontrar na pesquisa e no mundo acadêmico.

Resumo

Desenvolvimento de uma metodologia para análises estatísticas de um sistema massa-mola-amortecedor excitado por um carregamento estocástico.

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma metodologia de análise probabilística do comportamento de um sistema massa-mola-amortecedor submetido a carregamentos aleatórios, modelados como processos estocásticos estacionários, abordando o problema tanto de forma numérica quanto analítica. Essa abordagem se justifica pela relevância de vibrações aleatórias em diversos problemas de engenharia.

Com o auxílio do MATLAB, foram implementados algoritmos baseados na metodologia de Monte Carlo, envolvendo a geração de valores pseudoaleatórios de variáveis aleatórias, a construção de modelos estatísticos e a análise da convergência entre estatísticas teóricas e amostrais. As ferramentas de análise utilizadas incluem gráficos envelope, histogramas univariados e bivariados, distâncias de Wasserstein, densidades espectrais da resposta e investigações sobre a influência do amortecimento do sistema na convergência da resposta para um processo estocástico estacionário.

Por fim, foram comparados os resultados das abordagens analítica e numérica. A solução analítica foi obtida por meio da derivação da equação da dinâmica, enquanto as aproximações numéricas foram obtidas com o método de Runge-Kutta. A comparação avaliou vantagens como o custo computacional e a aplicabilidade da metodologia para sistemas mais complexos.

Palavras-chave

Processos Estocásticos; Monte Carlo; Vibrações Aleatórias; Métrica de Wasserstein; Geração de Valores Pseudoaleatórios.

Abstract

Development of a methodology for statistical analysis of a mass-spring-damper system excited by a stochastic load.

This work aims to develop a probabilistic analysis methodology for the behavior of a mass-spring-damper system subjected to random loads, modeled as stationary stochastic processes, addressing the problem both numerically and analytically. This approach is justified by the relevance of random vibrations in various engineering problems.

With the aid of MATLAB, algorithms based on the Monte Carlo methodology were implemented, involving the generation of pseudorandom values of random variables, the construction of statistical models, and the analysis of the convergence between theoretical and sample statistics. The analysis tools employed include envelope plots, univariate and bivariate histograms, Wasserstein distances, spectral densities of the response, and investigations into the influence of the system's damping on the convergence of the response to a stationary stochastic process.

Finally, the results of the analytical and numerical approaches were compared. The analytical solution was obtained through the derivation of the dynamic equation, while the numerical approximations were calculated using the Runge-Kutta method. The comparison evaluated advantages such as computational cost and the applicability of the methodology to more complex systems.

Keywords

Stochastic Processes; Monte Carlo; Random Vibrations; Wasserstein Metric; Pseudorandom Values Generation.

Sumário

1	Introdução	11
2	Fundamentos Teóricos	12
2.1	Objetos Aleatórios	12
2.1.1	Espaços de Probabilidade	12
2.1.2	Variáveis aleatórias	12
2.1.3	Vetores Aleatórios	13
2.2	Geração de Amostras Pseudoaleatórias	14
2.3	Construção de um Modelo Estatístico	14
2.3.1	Construção de um Histograma	15
2.4	Método de Monte Carlo	16
2.5	Processos Estocásticos	17
2.5.1	Correlação Amostral	17
2.5.2	Vibrações Aleatórias	18
2.6	Métrica de Wasserstein	19
2.6.1	Exemplo com Distribuições Uniformes	19
2.6.2	Exemplo com Distribuições Normais	22
2.6.3	Distância entre dois histogramas normalizados	24
2.7	Densidade Espectral	25
2.7.1	Sinais Discretizados	25
2.7.2	Densidade Espectral de um Processo Estocástico	25
3	Metodologia	26
3.1	Sistema Analisado	26
3.2	Algoritmos Implementados	26
3.2.1	Abordagem Numérica	27
3.2.2	Abordagem Analítica	28
4	Resultados	30
4.1	Abordagem Numérica	30
4.1.1	Gráficos de Convergência	30
4.1.2	Histogramas do Forçamento	31
4.1.3	Gráficos Envelope	32
4.1.4	Histogramas das Posições em Diferentes Instantes	33
4.1.5	Histogramas Conjuntos de Dois Instantes	34
4.1.6	Distâncias de Wasserstein	35
4.1.7	Correlações	36
4.1.8	Densidades Espectrais	37
4.1.9	Análises para Diferentes Amortecedores	38
4.2	Abordagem Analítica	39
4.2.1	Histogramas do Forçamento	39
4.2.2	Gráficos Envelope	40
4.2.3	Histogramas das Posições em Diferentes Instantes	41
4.2.4	Histogramas Conjuntos de Dois Instantes	41

4.2.5	Distâncias de Wasserstein	43
4.2.6	Correlações	43
4.2.7	Densidades Espectrais	44
4.2.8	Análises para Diferentes Amortecedores	46
5	Conclusões	47
5.1	Próximos Trabalhos	47

Lista de figuras

Figura 2.1	Exemplo de histograma.	15
Figura 2.2	Diagrama do método de Monte Carlo.	16
Figura 2.3	Parametrização do sistema massa-mola-amortecedor analisado.	18
Figura 2.4	Comparação da PDF de uma distribuição uniforme e um histograma de suas realizações para diferente quantidades de amostras.	20
Figura 2.5	Comparação da CDF de uma distribuição uniforme e um histograma de suas realizações para diferente quantidades de amostras.	21
Figura 2.6	Distâncias de Wasserstein entre valores teóricos e empíricos de uma distribuição uniforme para diferentes tamanhos de amostra.	21
Figura 2.7	Comparação da PDF de uma distribuição normal e um histograma de suas realizações para diferente quantidades de amostras.	22
Figura 2.8	Comparação da CDF de uma distribuição normal e um histograma de suas realizações para diferente quantidades de amostras.	23
Figura 2.9	Distâncias de Wasserstein entre valores teóricos e empíricos de uma distribuição normal para diferentes tamanhos de amostra.	24
Figura 3.1	Diagrama do algoritmo implementado.	27
Figura 4.1	Gráficos com as diferenças absolutas das médias das amplitudes das forças (à esquerda) e de seus desvios-padrões (à direita) com seus valores teóricos e o limiar de convergência (reta tracejada) em função do tamanho da amostra.	31
Figura 4.2	Gráficos com as diferenças absolutas das médias das frequências das forças (à esquerda) e de seus desvios-padrões (à direita) com seus valores teóricos e o limiar de convergência (reta tracejada) em função do tamanho da amostra.	31
Figura 4.3	Distribuições empíricas (em azul) das amplitudes das forças (à esquerda) e suas frequências (à direita) e suas respectivas distribuições teóricas (em laranja).	32
Figura 4.4	Em azul escuro mostra-se a média amostral em função do tempo e em azul claro a região compreendida entre a média mais um desvio padrão e a média menos um desvio padrão.	32
Figura 4.5	Histogramas com as distribuições das posições ao longo do tempo.	33
Figura 4.6	Histograma com as distribuições das posições ao longo do tempo.	33
Figura 4.7	Histogramas conjuntos com as distribuições das posições ao longo do tempo.	34

Figura 4.8	Produtos cartesianos dos histogramas de dois instantes.	35
Figura 4.9	Variação das distâncias de Wasserstein entre as distribuições das posições ao longo do tempo.	35
Figura 4.10	À esquerda as correlações dos forçamentos para os instantes t_1 e t_2 . À direita as correlações das respostas para os instantes t_1 e t_2 .	36
Figura 4.11	À esquerda as correlações dos forçamentos para os instantes t e $t + \tau$. À direita as correlações das respostas para os instantes t e $t + \tau$.	36
Figura 4.12	À esquerda a diagonal secundária da correlação dos forçamentos. À direita a diagonal secundária da correlação das respostas.	37
Figura 4.13	No canto superior esquerdo a densidade espectral da resposta ao impulso unitário. No canto superior direito a densidade espectral do forçamento. No canto inferior, a densidade espectral das respostas.	38
Figura 4.14	À esquerda as médias normalizadas das respostas para cada fator de amortecimento. À direita os desvios-padrões normalizados das respostas para cada fator de amortecimento.	39
Figura 4.15	Distribuições empíricas (em azul) das amplitudes das forças (à esquerda) e suas frequências angulares (à direita) e suas respectivas distribuições teóricas (em laranja).	40
Figura 4.16	Em azul escuro mostra-se a média amostral em função do tempo e em azul claro a região compreendida entre a média mais um desvio padrão e a média menos um desvio padrão.	40
Figura 4.17	Histogramas com as distribuições das posições ao longo do tempo.	41
Figura 4.18	Histogramas conjuntos com as distribuições das posições ao longo do tempo.	42
Figura 4.19	Produtos cartesianos dos histogramas de dois instantes.	42
Figura 4.20	Variação das distâncias de Wasserstein entre as distribuições das posições para diferentes passos e tamanho de amostra.	43
Figura 4.21	À esquerda as correlações dos forçamentos para os instantes t_1 e t_2 . À direita as correlações das respostas para os instantes t_1 e t_2 .	44
Figura 4.22	À esquerda as correlações dos forçamentos para os instantes t e $t + \tau$. À direita as correlações das respostas para os instantes t e $t + \tau$.	44
Figura 4.23	À esquerda a diagonal secundária da correlação dos forçamentos. À direita a diagonal secundária da correlação das respostas.	45
Figura 4.24	No canto superior esquerdo a densidade espectral da resposta ao impulso unitário. No canto superior direito a densidade espectral do forçamento. No canto inferior, a densidade espectral das respostas.	45
Figura 4.25	À esquerda as médias normalizadas das respostas para cada fator de amortecimento. À direita os desvios-padrões normalizados das respostas para cada fator de amortecimento.	46

Lista de Abreviaturas

CDF – *Cumulative Distribution Function* - Função de Densidade Acumulada/Distribuição de Probabilidade Cumulativa

DFT – *Discrete Fourier Transform* - Transformada Discreta de Fourier

FFT – *Fast Fourier Transform* - Transformada Rápida de Fourier

PDF – *Probability Distribution Function* - Função de Densidade de Probabilidade

PVI – Problema de Valor Inicial

SDoF – *Single Degree of Freedom* - Único Grau de Liberdade

v.a. – Variável Aleatória

Lista de Símbolos

F_a	Variável aleatória da amplitude do carregamento (N)	k	Rigidez da mola (N/m)
F_f	Variável aleatória da frequência do carregamento (Hz)	m	Massa (kg)
F_ω	Variável aleatória da frequência angular do carregamento (rad/s)	n	Quantidade de realizações
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	Distribuição normal de média μ e variância σ^2	p	Quantidade de passos discretos
P_X	CDF da variável aleatória	p_X	PDF da variável aleatória
\hat{P}_X	Histograma acumulado normalizado	\hat{p}_X	Histograma normalizado
$\mathcal{U}(a, b)$	Distribuição uniforme de suporte igual a $[a, b]$	x	Posição determinística da massa (m)
\mathcal{W}_q	Distância de Wasserstein de ordem q	$x^{(i)}$	i -ésima realização de um objeto aleatório
\mathcal{X}	Posição estocástica da massa (m)	\mathbf{x}	Vetor de realizações
var	Variância teórica	Δt	Passo de integração numérica (s)
X	Variável aleatória	ζ	Fator de amortecimento
\mathbf{X}	Vetor aleatório	μ	Média teórica
c	Constante de amortecimento (Ns/m)	$\hat{\mu}$	Média amostral
		σ	Desvio padrão teórico
		$\hat{\sigma}$	Desvio padrão amostral
		ω_d	Frequência angular amortecida (rad/s)
		ω_n	Frequência angular natural (rad/s)

1

Introdução

Sistemas mecânicos sob carregamentos aleatórios são frequentes em diversas aplicações e isso motiva o trabalho. Existem várias situações onde aparece esse tipo de problema. Por exemplo, uma ponte sujeita à ação do vento, às ondas do mar sobre os pilares que a sustentam e ao tráfego de veículos é um exemplo de um sistema sujeito a carregamentos estocásticos. Outros exemplos incluem as pás de uma turbina eólica sujeita ao vento e um prédio durante um terremoto.

Este trabalho tem como objetivo construir uma metodologia de análise com uma abordagem probabilística do comportamento de um sistema massa-mola-amortecedor sob carregamentos aleatórios modelados como processos estocásticos estacionários. Como o carregamento atuante no sistema é aleatório, a resposta do sistema é também modelada como um processo estocástico.

O trabalho busca dar continuidade a trabalhos de autoria própria [1, 2] e de Somazz [3] sobre as simulações computacionais de sistemas mecânicos, bem como reproduzir e verificar algumas das formulações teóricas descritas por Benaroya e Han [4] e a parte numérica descrita por Sampaio e Lima [5, 6, 7] sobre processos estocásticos. Também pretende-se aplicar a teoria acerca de processamento de sinais descrita por Sampaio, Cataldo e Brandão [8] necessária para análise das respostas do sistema mecânico no domínio da frequência e da densidade espectral.

O trabalho é dividido em 5 capítulos. O capítulo 2 explica de forma sucinta os conceitos teóricos utilizados para o desenvolvimento das simulações. O capítulo 3 aborda a metodologia usada para elaborar as rotinas computacionais, a modelagem do sistema mecânico e os parâmetros utilizados. O capítulo 4 apresenta os resultados das simulações e seus gráficos. A subseção 4.1 descreve um algoritmo baseado no método numérico de Runge-Kutta, enquanto a subseção 4.2 descreve um algoritmo baseado em uma expressão analítica para a resposta do sistema analisado. Por fim, o capítulo 5 aborda as conclusões obtidas após a realização das simulações e a comparação com os resultados previstos na literatura, assim a descrição dos próximos passos do trabalho.

2 Fundamentos Teóricos

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos teóricos sobre os quais o trabalho foi desenvolvido.

2.1 Objetos Aleatórios

2.1.1 Espaços de Probabilidade

Seja (Ω, \mathbb{F}, Pr) um espaço de probabilidade tal que Ω é um conjunto não vazio chamado de espaço amostral, \mathbb{F} é uma σ -álgebra em Ω , ou seja, um conjunto de subconjuntos de Ω aos quais se associam uma probabilidade, e Pr é uma medida de probabilidade em \mathbb{F} com valores em $[0, 1]$ tal que [9, 10]:

$$Pr(\Omega) = 1.$$

Dados eventos disjuntos A_1, A_2, \dots em \mathbb{F} , então:

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr(A_i).$$

2.1.2 Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória (v.a.) contínua X definida no espaço de probabilidade (Ω, \mathbb{F}, Pr) é uma função real tal que:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega), \end{aligned}$$

onde $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathbb{F}$, garantindo a mensurabilidade da função.

Para variáveis aleatórias contínuas, p_X e P_X são a função de densidade de probabilidade (PDF) e a função de densidade acumulada (CDF) respectivamente tais que:

$$P_X : \quad \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

$$P_X = Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(u) du.$$

O objetivo da v.a. é simplificar problemas de probabilidade, pois permite o transporte da medida de probabilidade que era definida para os elementos da σ -álgebra para a reta. Assim, é possível construir gráficos com a PDF e a CDF.

Estatísticas de uma v.a., como por exemplo média e variância, são valores reais que representam valores de tendência central ou de dispersão. O valor esperado, ou média, μ_X de uma variável aleatória contínua X e PDF p_X com suporte em \mathbb{R} é dado pela equação 2-1, sempre que a integral converge absolutamente.

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X dx. \quad (2-1)$$

Sabendo o valor de μ_X , é possível calcular a variância $\text{var}(X)$ da v.a. , que é dada pela equação 2-2, quando a integral converge absolutamente.

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 p_X dx, \quad (2-2)$$

onde o seu desvio padrão σ_X é definido como $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$.

Algumas variáveis aleatórias, como a de Cauchy, não possuem estatísticas como média e variância devido à não convergência das integrais.

2.1.3

Vetores Aleatórios

Um vetor aleatório \mathbf{X} é uma função em \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{X} : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\omega \mapsto \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{x},$$

tal que $\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x}) \in \mathbb{F}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, onde cada componente de $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ é uma variável aleatória real. De forma análoga, as componentes de $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ são amostras de cada componente de \mathbf{X} .

Dado um vetor aleatório \mathbf{X} com componentes X_1, X_2, \dots, X_n , suas componentes são variáveis aleatórias independentes se [9, 10]

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = p_{X_1}(x_1) \times p_{X_2}(x_2) \times \dots \times p_{X_n}(x_n),$$

onde $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ é a PDF do vetor aleatório \mathbf{X} e $p_{X_1}, p_{X_2}, \dots, p_{X_n}$ são as distribuições marginais para as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n respectivamente.

A correlação $r_{\mathbf{X}}$ é uma estatística de 2ª ordem de \mathbf{X} que é calculada por uma matriz $n \times n$ tal que:

$$r_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_1^2] & \mathbb{E}[X_1X_2] & \cdots & \mathbb{E}[X_1X_n] \\ \mathbb{E}[X_2X_1] & \mathbb{E}[X_2^2] & \cdots & \mathbb{E}[X_2X_n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}[X_nX_1] & \mathbb{E}[X_nX_2] & \cdots & \mathbb{E}[X_n^2] \end{pmatrix}.$$

2.2

Geração de Amostras Pseudoaleatórias

Realizações de variáveis aleatórias costumavam ser geradas por meio de técnicas manuais, como lançar dados ou moedas. Porém, tais técnicas foram abandonadas com o tempo por serem lentas, gerarem sequências irreprodutíveis e enviesadas [10, 11].

Computacionalmente, essas realizações são geradas por meio da combinação de uma semente (valor inicial), a qual é proveniente de um valor desconhecido ao observador, com uma sequência determinística como um gerador congruencial linear [10, 11]. A equação 2-3 mostra os termos de uma dessas sequências, onde a_1, a_2 e a_3 são inteiros positivos.

$$x^{(i+1)} = a_1x^{(i)} + a_2 \pmod{a_3}. \quad (2-3)$$

Para que os valores gerados sejam amostras de uma v.a. uniforme no intervalo $[0, 1]$, precisa fazer uma normalização. Desta maneira, é possível gerar valores pseudoaleatórios seguindo uma distribuição uniforme por meio de uma semente aleatória, ou então determinar uma semente padrão para garantir a reprodutibilidade de cada simulação.

Por meio de métodos como a transformada inversa, a aceitação-rejeição e a regra da cadeia [10, 12], é possível gerar amostras segundo uma determinada função de densidade de um objeto aleatório.

2.3

Construção de um Modelo Estatístico

Sejam $x^{(1)}, x^{(2)} \dots, x^{(n)}$ realizações de uma v.a. X com média e variância. É possível estimar as estatísticas de X através das estatísticas amostrais das realizações $x^{(1)}, x^{(2)} \dots, x^{(n)}$. Sua média amostral é dada pela equação 2-4.

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(i)}. \quad (2-4)$$

Por meio da média amostral, calcula-se o desvio padrão amostral $\hat{\sigma}_X$, representado pela equação 2-5, para valores muito grandes de n .

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - \hat{\mu}_X)^2}. \quad (2-5)$$

Um modelo estatístico pode ser construído por meio da comparação entre as estatísticas teóricas de uma v.a. (se houver) e das estatísticas amostrais de suas realizações. A quantidade de amostras é considerada adequada quando essas estatísticas convergem dentro de uma tolerância estipulada conforme a Lei dos Grandes Números [9, 10].

2.3.1 Construção de um Histograma

A partir de uma quantidade suficientemente grande de realizações, é possível gerar um histograma das amostras. O histograma é um gráfico de barras no qual cada barra representa a quantidade de realizações pertencentes a um determinado intervalo. Um exemplo é mostrado na figura 2.1.

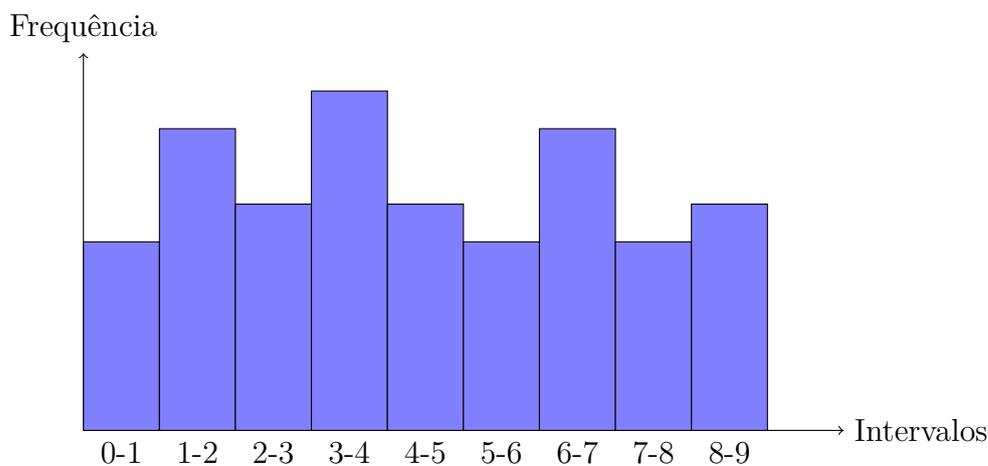


Figura 2.1: Exemplo de histograma.

O histograma pode trabalhar com frequências absolutas (contagens) ou relativas (contagens normalizadas). No último caso, os valores do histograma pode ser comparado com os da curva da PDF da variável aleatória da qual vieram as realizações. A quantidade de amostras é considerada suficiente quando os valores convergem.

2.4

Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é uma técnica para analisar fenômenos por meio de algoritmos computacionais que empregam a geração de números aleatórios [10, 13]. O método consiste em gerar múltiplas amostras de um objeto aleatório. Em seguida, é construído um modelo estatístico dessas amostras. As amostras são geradas até que suas estatísticas amostrais convirjam para as estatísticas teóricas dentro de uma tolerância estipulada. A figura 2.2 mostra um diagrama de um algoritmo típico.

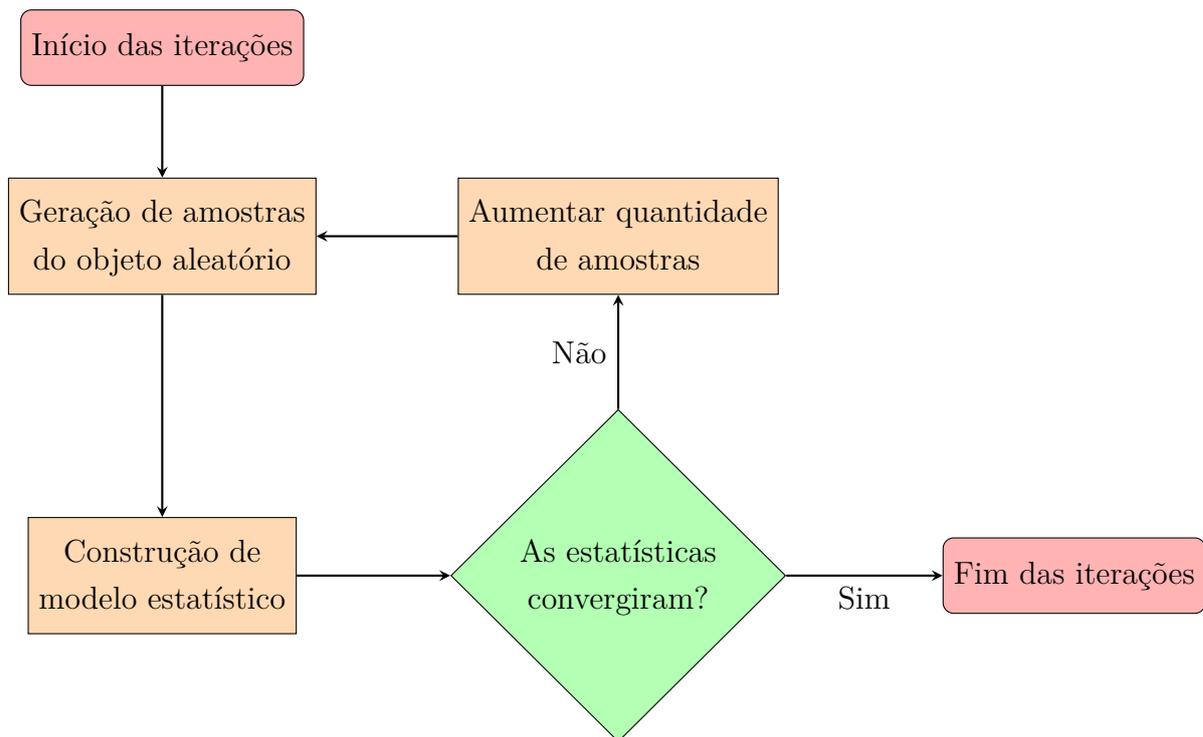


Figura 2.2: Diagrama do método de Monte Carlo.

Pela lei de grandes números [9, 10], as estatísticas referentes às amostras deverão convergir para os valores teóricos (caso existam) para quantidades suficientemente grandes de amostras. Desta maneira, é possível aplicar o método de Monte Carlo para aproximar numericamente a solução de problemas envolvendo objetos aleatórios.

Métodos de Monte Carlo são frequentemente aplicados na matemática, ciências, indústria, comércio e entretenimento para realizar previsões. Também podem ser aplicados na computação científica para resolver problemas envolvendo objetos aleatórios, ou então aproximar de forma eficiente a solução de problemas com grande volume de dados.

2.5

Processos Estocásticos

Seja $VA(\Omega, \mathbb{F}, Pr)$ o conjunto de todas as variáveis aleatórias, o processo estocástico \mathcal{X} é uma função tal que [6, 9, 10]:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : T &\longrightarrow VA(\Omega, \mathbb{F}, Pr) \\ t &\mapsto \mathcal{X}(t) , \end{aligned}$$

onde T pode ser interpretado com um intervalo de análise. Para todo $t \in T$, existe uma variável aleatória $\mathcal{X}(t)$ definida em (Ω, \mathbb{F}, Pr) .

Algumas das estatísticas teóricas de um processo estocástico $\mathcal{X}(t)$ são a média $\mu_{\mathcal{X}}(t)$ e a variância $\text{var}_{\mathcal{X}}(t)$, mostradas equações 2-6 e 2-7 respectivamente.

$$\mu_{\mathcal{X}}(t) = \mathbb{E}[\mathcal{X}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_{\mathcal{X}}(t)dx. \quad (2-6)$$

$$\text{var}(\mathcal{X}(t)) = \mathbb{E}[(\mathcal{X}(t) - \mu_{\mathcal{X}}(t))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{\mathcal{X}}(t))^2 p_{\mathcal{X}}(t)dx, \quad (2-7)$$

Processos estocásticos podem ser classificados como fracamente estacionários, estritamente estacionários e não estacionários. Um processo é dito fracamente estacionário se para $m = \{1, 2\}$ e todo $(t_1, t_m) \in T^m$, a PDF conjunta de $(\mathcal{X}(t_1), \mathcal{X}(t_m))$ é idêntica à PDF conjunta de $(\mathcal{X}(t_1 + \Delta t), \mathcal{X}(t_m + \Delta t))$ $\forall \Delta t \in \mathbb{R}$.

Quando se deseja trabalhar em um domínio contínuo computacionalmente, é necessário fazer uma discretização, pois o computador é um dispositivo capaz de fazer contas somente em domínios discretos. Por isso, quando se trabalha com realizações numéricas de um processo estocástico \mathcal{X} , primeiramente é feita uma discretização do parâmetro t (geralmente associado ao tempo). Dividindo o intervalo T em p valores $t_1, t_2, \dots, t_l, \dots, t_p, \forall t_l \in T$ e $\forall l \in \mathbb{N}$. Fixados esses p instantes, pode-se então associar a cada instante t_l uma variável aleatória $X(t_l)$. No total, ficam definidas p variáveis $\mathcal{X}(t_1), \mathcal{X}(t_2), \dots, \mathcal{X}(t_l), \dots, \mathcal{X}(t_p)$ [5].

2.5.1

Correlação Amostral

A partir de um número grande n de realizações numéricas de um processo estocástico \mathcal{X} , estimativas para as estatísticas deste desse processo podem ser calculadas.

Seja \mathbf{m}_X a matriz $p \times n$ com as realizações de um processo estocástico estacionário \mathcal{X} , com n realizações e discretizado em p passos de tempos, a matriz da correlação para os instantes t e $t + \tau$ é dada pela equação 2-8 [5, 6].

$$r_X(t, t + \tau) = \frac{1}{n} \mathbf{m}_X \cdot \mathbf{m}_X^T. \quad (2-8)$$

Através da diagonal τ da matriz, é possível calcular a densidade espectral de processos estocásticos estacionários.

2.5.2 Vibrações Aleatórias

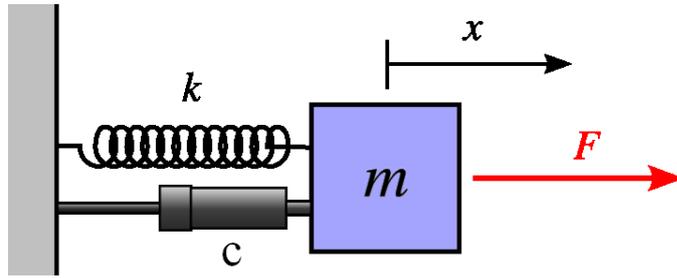


Figura 2.3: Parametrização do sistema massa-mola-amortecedor analisado.

Considerando o sistema massa-mola-amortecedor descrito na figura 2.3, de massa m , constante de amortecimento c , rigidez da mola k e forçamento externo $f_{ext}(t)$, sua posição x pode ser determinada pela equação da dinâmica descrita pela equação 2-9 [14].

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{ext}(t). \quad (2-9)$$

Seu fator de amortecimento ζ é dado pela razão entre o amortecimento do sistema c e o amortecimento crítico $c_c = 2\sqrt{mk}$, como mostra a equação 2-10.

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad (2-10)$$

onde $0 \leq \zeta < 1$ indica um sistema subamortecido, $\zeta = 1$ indica um sistema criticamente amortecido, e $\zeta > 1$, um sistema superamortecido [14].

Um problema de vibrações aleatórias consiste em uma situação na qual pelos menos um dos parâmetros do sistema mecânico ou de seu forçamento não é determinístico. A resposta do sistema será, portanto, um processo estocástico. O fator de amortecimento possui um papel fundamental na convergência do processo estocástico associado à resposta do sistema para um processo estocástico estacionário (quando o forçamento também é um processo estocástico estacionário), devido à sua função na dissipação energética.

2.6

Métrica de Wasserstein

A métrica de Wasserstein é uma das metodologias para calcular distâncias entre duas distribuições de probabilidade.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com distribuições de probabilidade contínuas p_X e p_Y e CDFs P_X e P_Y respectivamente. A distância de Wasserstein de ordem q \mathcal{W}_q entre elas é dada por Deza [15]:

$$\mathcal{W}_q(p_X, p_Y) = (\inf \mathbb{E}[|X - Y|^q])^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}} |P_X(x) - P_Y(x)|^q dx \right)^{1/q}. \quad (2-11)$$

Através de cálculos numéricos, é possível também calcular a distância de Wasserstein entre uma PDF p_X e um histograma normalizado \hat{p}_X com intervalos de tamanho Δx , como mostra a equação 2-12.

$$\mathcal{W}_q(p_X, \hat{p}_X) = \left(\sum |P_X(x) - P_{\hat{X}}(x)|^q \Delta x \right)^{1/q}, \quad (2-12)$$

onde \hat{P}_X representa o histograma acumulado normalizado.

Para demonstrar o influência do quantidade de realizações n no histograma, foram calculadas as distâncias de Wasserstein para distribuições uniformes (subseção 2.6.3) e distribuições normais (subseção 2.6.2) por meio da comparação de suas curvas teóricas com as frequências relativas de cada histograma.

2.6.1

Exemplo com Distribuições Uniformes

A PDF de uma variável aleatória uniforme $\mathcal{U}(a, b)$ é uma função tal que [9, 10]:

$$p_{\mathcal{U}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\mathbf{1}_{[a,b]}(x)}{b - a},$$

onde $\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ é uma função indicatriz é tal que $\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = 1$ se $a \leq x \leq b$ e $\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = 0$ caso contrário.

Dividindo os histogramas em 50 barras para cada caso, foram gerados os gráficos da figura 2.4, para $a = 0$ e $b = 1$.

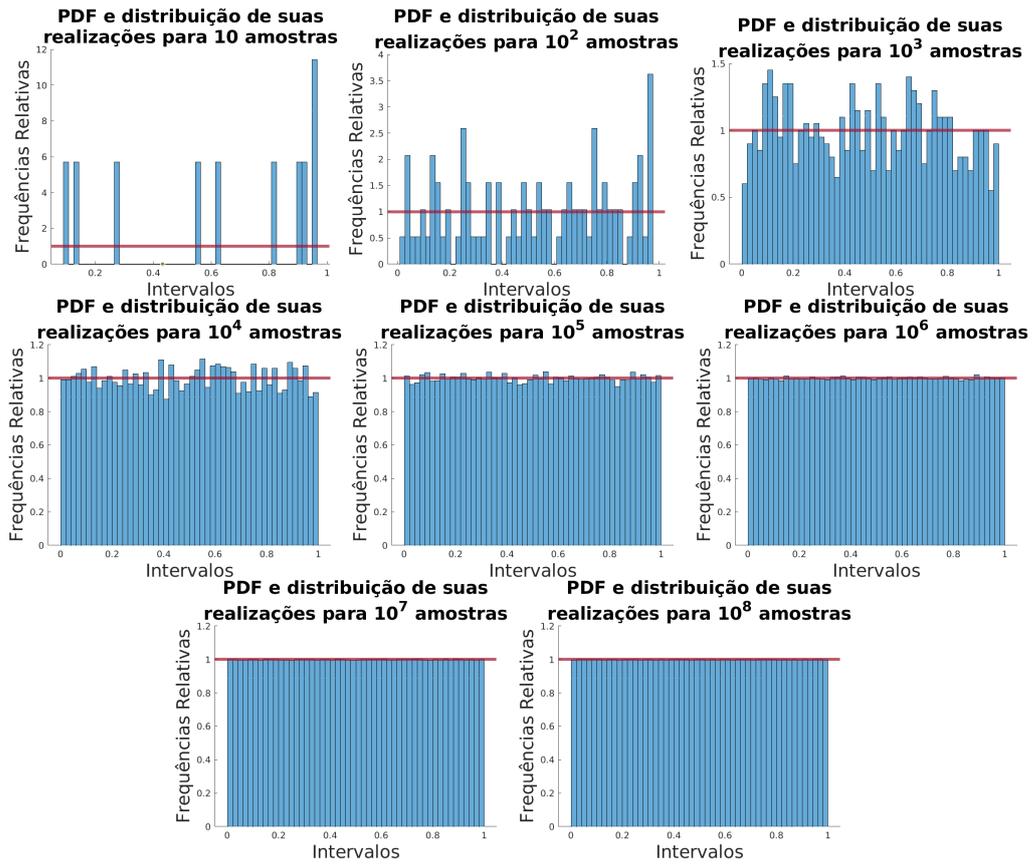


Figura 2.4: Comparação da PDF de uma distribuição uniforme e um histograma de suas realizações para diferente quantidades de amostras.

A CDF de uma variável aleatória uniforme $\mathcal{U}(a, b)$ é uma função tal que [9, 10]:

$$\begin{aligned}
 P_{\mathcal{U}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto 0 \text{ para } x < 0 \\
 x &\mapsto \frac{x - a}{b - a} \text{ para } a \leq x \leq b \\
 x &\mapsto 1 \text{ para } x > b.
 \end{aligned}$$

Dividindo os histogramas em 50 barras para cada caso, foram gerados os gráficos da figura 2.5, para $a = 0$ e $b = 1$.

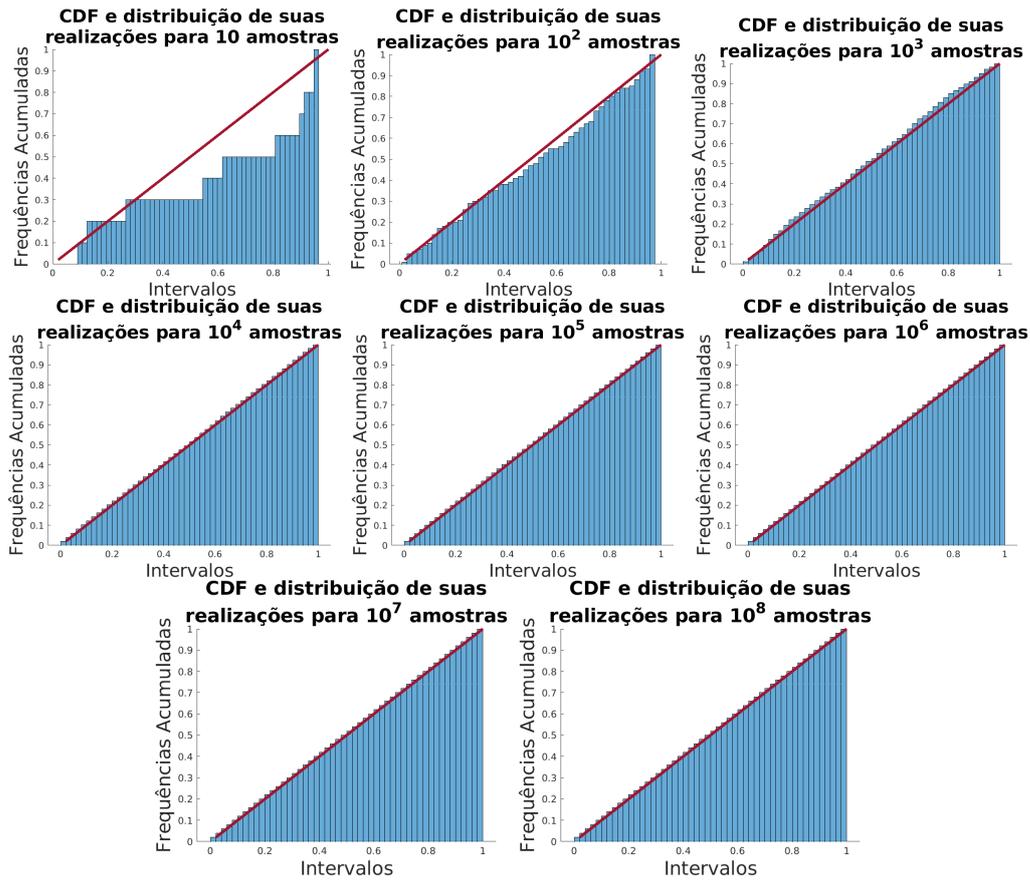


Figura 2.5: Comparação da CDF de uma distribuição uniforme e um histograma de suas realizações para diferentes quantidades de amostras.

Calculando as distâncias de Wasserstein entre a curva teórica e o histograma por meio da equação 2-12, foi gerado o gráfico da figura 2.6.

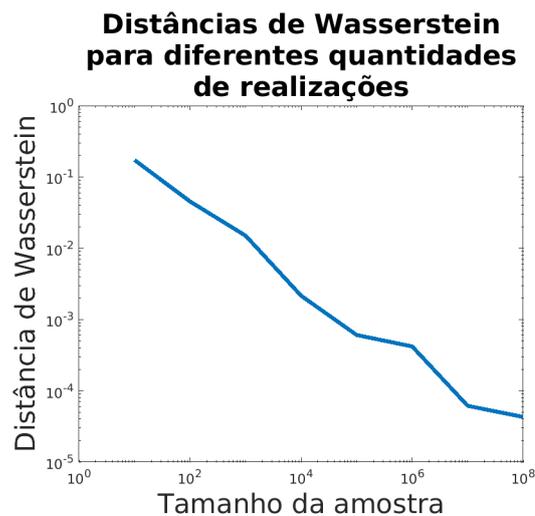


Figura 2.6: Distâncias de Wasserstein entre valores teóricos e empíricos de uma distribuição uniforme para diferentes tamanhos de amostra.

O gráfico mostra um decrescimento monotônico das distâncias de Wasserstein a medida que é aumentada a quantidade de realizações da v.a., o que demonstra a convergência em lei do histograma para a sua PDF.

2.6.2 Exemplo com Distribuições Normais

A PDF de uma variável aleatória normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ é uma função tal que [9]:

$$p_{\mathcal{N}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Dividindo os histogramas em 50 barras para cada caso, foram gerados os gráficos da figura 2.7, para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

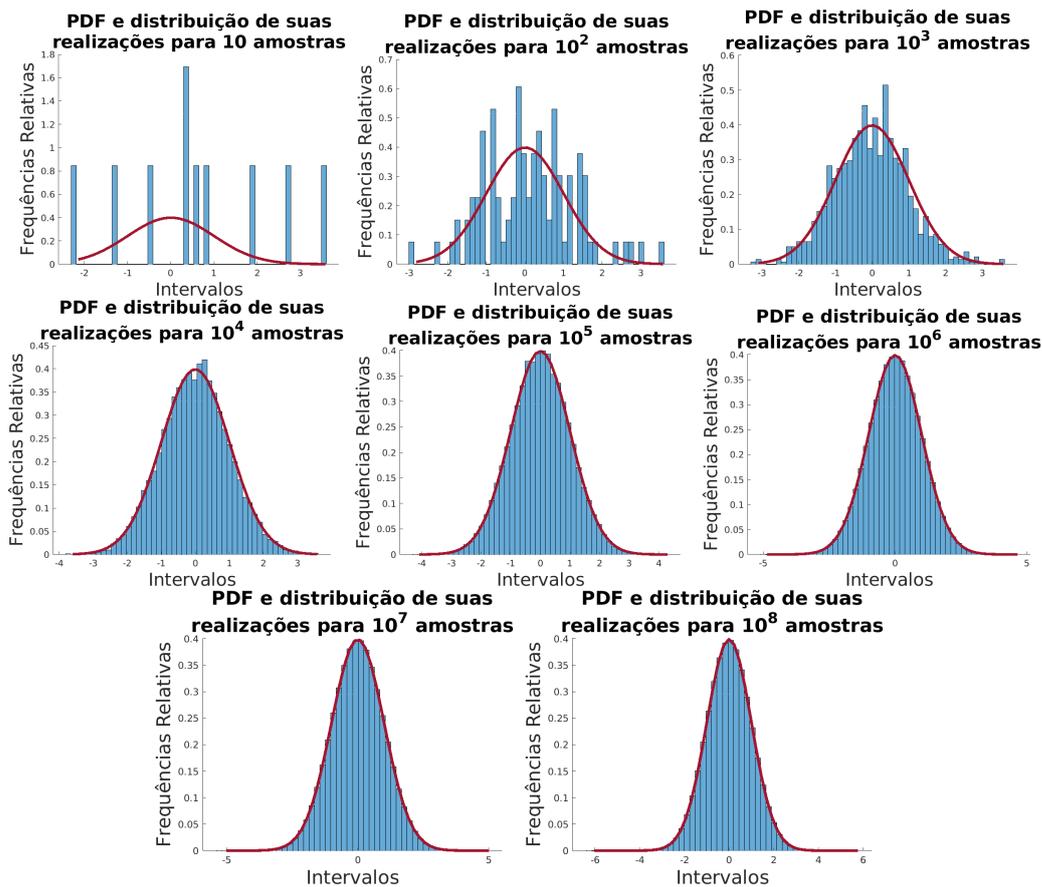


Figura 2.7: Comparação da PDF de uma distribuição normal e um histograma de suas realizações para diferente quantidades de amostras.

A CDF de uma variável aleatória normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ é uma função tal que [9]:

$$P_N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right),$$

onde erf é a função erro de Gauss.

Dividindo os histogramas em 50 barras para cada caso, foram gerados os gráficos da figura 2.8, para $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.

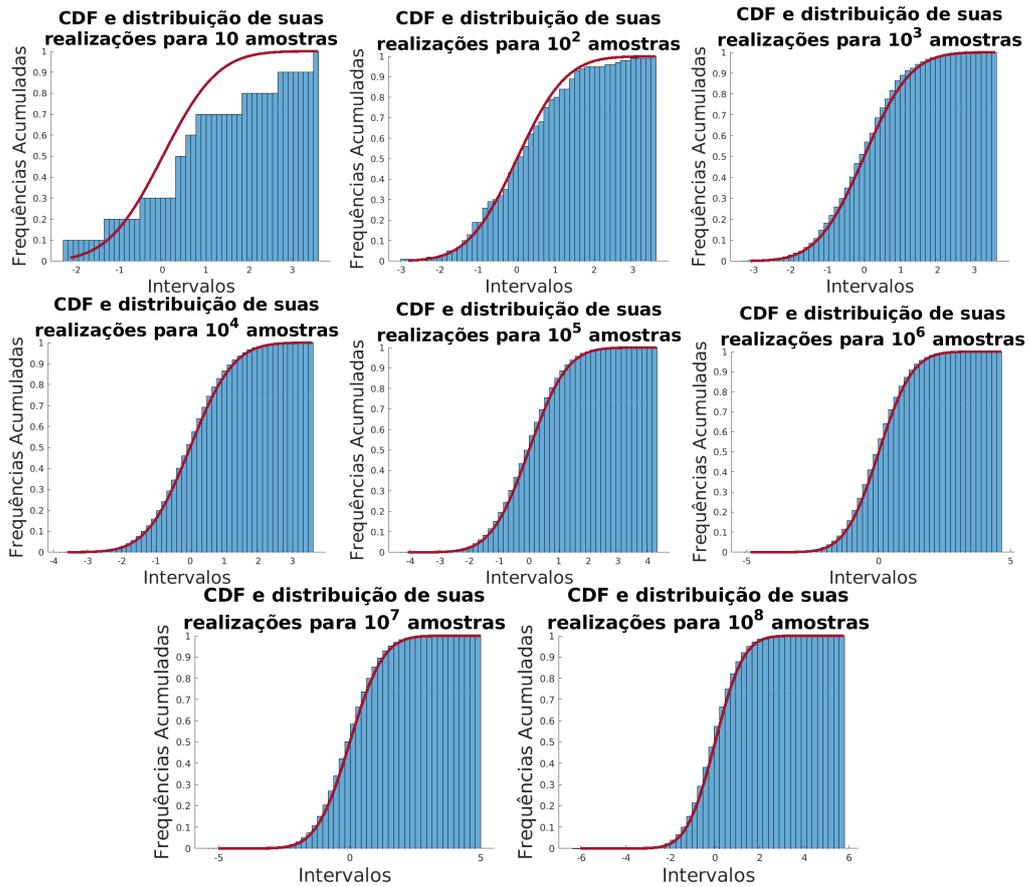


Figura 2.8: Comparação da CDF de uma distribuição normal e um histograma de suas realizações para diferente quantidades de amostras.

Calculando as distâncias de Wasserstein entre a curva teórica e o histograma por meio da equação 2-12, foi gerado o gráfico da figura 2.9.

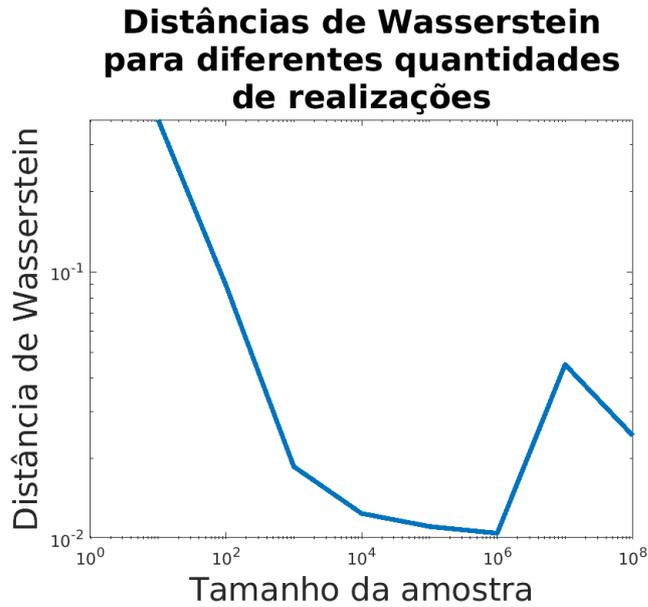


Figura 2.9: Distâncias de Wasserstein entre valores teóricos e empíricos de uma distribuição normal para diferentes tamanhos de amostra.

Neste exemplo, o decréscimo da distância de Wasserstein não é sempre monotônico, apresentando um pequeno aumento com 10^7 realizações. Isso ocorre por causa de flutuações das estatísticas de cada histograma. O aumento ou a redução do número de colunas do histograma pode alterar este comportamento.

2.6.3

Distância entre dois histogramas normalizados

Para casos amostrais, sejam \mathbf{x} e \mathbf{y} vetores com realizações de X e Y respectivamente. Ordenando as realizações em ordem crescente em cada vetor, a distância de Wasserstein de ordem q \mathcal{W}_q entre elas é dada pela equação 2-13

$$\mathcal{W}_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x^{(i)} - y^{(i)}|^q \right)^{1/q}. \quad (2-13)$$

Considerando que as variáveis aleatórias X e Y representam as variáveis aleatórias associadas ao processo estocástico $\mathcal{X}(t)$ em dois instantes, ou seja, $X = \mathcal{X}(t_1)$ e $Y = \mathcal{X}(t_2)$, para $t_1, t_2 \in T$, pode-se calcular a distância de Wasserstein entre $\mathcal{X}(t_1)$ e $\mathcal{X}(t_2)$. Analisando como essa distância varia para diferentes combinações de t_1 e t_2 , pode-se analisar a convergência de \mathcal{X} para um processo estacionário.

2.7

Densidade Espectral

Seja $f(t)$ um sinal contínuo no intervalo T , sua transformada de Fourier $\mathcal{F}(\omega)$ é dada pela equação 2-14 [8].

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_T f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2-14)$$

onde j é um número complexo tal que $j = \sqrt{-1}$.

A transformada de Fourier tem como objetivo determinar a densidade espectral do sinal $f(t)$, isto é, determinar as frequências que o compõe.

2.7.1

Sinais Discretizados

Na engenharia, sinais contínuos são frequentemente representados por um conjunto finito de p intervalos discretos $\Delta t = T/p$. A função contínua f em t_i é representada por f_i e sua transformada de Fourier é a transformada de Fourier discreta (DFT), descrita pela equação 2-15 [16].

$$\mathcal{F}_l = \sum_{i=0}^{p-1} f_i e^{-jl\omega_0 i} \quad \text{para } l = 0 \text{ até } p-1. \quad (2-15)$$

Este método é considerado ineficiente, pois sua complexidade é $\mathcal{O}(n) = n^2$, demandando n^2 operações para n intervalos discretos. A transformada rápida de Fourier (FFT) é um algoritmo criado com o objetivo de realizar DFTs de forma mais eficiente, pois este método utiliza os resultados de operações anteriores para reduzir o número de operações requeridas através de propriedades das funções trigonométricas. Assim, a execução da transformada discreta de Fourier torna-se mais eficiente, com complexidade $\mathcal{O}(n) = n \log_2 n$ [16].

2.7.2

Densidade Espectral de um Processo Estocástico

Através do cálculo da correlação, descrito na subseção 2.5.1, é possível realizar a transformada de Fourier na diagonal τ de $r_{\mathcal{X}}(t, t+\tau)$. A equação 2-16 abaixo descreve a variação da densidade espectral da resposta a um impulso unitário \tilde{h} de um sistema massa-mola-amortecedor em função de sua frequência angular natural ω_n e seu fator de amortecimento ζ [4].

$$|\tilde{h}(\omega)|^2 = \frac{1/\omega_n^4}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} \quad (2-16)$$

Por meio da equação 2-17, calcula-se a densidade espectral da resposta do sistema $s_{\mathcal{X}}$ sob um forçamento de densidade s_F [4, 7].

$$s_{\mathcal{X}}(\omega) = |\tilde{h}(\omega)|^2 s_F(\omega). \quad (2-17)$$

3 Metodologia

A fim de verificar a teoria descrita no capítulo 2, foram realizadas simulações computacionais com o auxílio do MATLAB para simular um sistema mecânico sujeito a um carregamento modelado como um processo estocástico.

3.1 Sistema Analisado

O sistema em análise consiste em um sistema-massa-mola-amortecedor invariante no tempo e com único grau de liberdade (SDoF). O sistema é composto por uma massa, uma mola e um amortecedor, e está parametrizado pela posição da massa. Considera-se que quando a posição é nula, não há forças atuando na mola, como foi descrito na subseção 2.5.2.

A massa vale $m = 1$ kg, a constante de amortecimento $c = 0,1$ Ns/m e a rigidez da mola $k = 1$ N/m. As condições iniciais da massa são determinísticas, com $x = 0$ m e $\dot{x} = 0$ m/s. A amplitude F_a e frequência F_f do carregamento harmônico são modeladas como variáveis aleatórias independentes e seguem as distribuições normais $\mathcal{N}(1, 1/3)$ N e $\mathcal{N}(1/2\pi, 1/6\pi)$ Hz respectivamente. A resposta do sistema será, portanto, um processo estocástico \mathcal{X} , como descreve a equação 3-1.

$$\ddot{\mathcal{X}} + 0,1\dot{\mathcal{X}} + \mathcal{X} = F_a \cos(2\pi F_f t). \quad (3-1)$$

Por fim, foram realizadas simulações para diferentes fatores de amortecimento ζ , com o objetivo de verificar a sua influência na convergência do processo estocástico em questão para um processo estocástico estacionário.

3.2 Algoritmos Implementados

As simulações computacionais foram realizadas de duas maneiras, utilizando métodos numéricos (subseção 3.2.1) e por meio de uma expressão fechada (subseção 3.2.2).

3.2.1 Abordagem Numérica

A resposta de um sistema massa-mola-amortecedor pode ser aproximada por meio de métodos numéricos, que são particularmente úteis para sistemas que não possuem uma solução analítica trivial. Essa estratégia numérica pode ser aplicada no Método de Monte Carlo. Assim, para cada realização das variáveis associadas ao forçamento, uma realização da resposta do sistema é aproximada por meio de métodos numéricos.

No método de Monte Carlo, para cada amostra do forçamento, uma amostra da resposta é calculada através da aproximação numérica da solução de um problema de valor inicial (PVI) através do método de Runge-Kutta [1, 16] no intervalo de 0 a 150 s com passo $\Delta t = 0,02$ s. O número de amostras a serem utilizadas é determinado fazendo-se uma análise de convergência. Aumenta-se o número de amostras geradas até que seja atingida convergência dos valores teóricos e computacionais na média e no desvio padrão das amplitudes e frequências com tolerância de 0,002 unidades. Por fim, os resultados são salvos em um arquivo para que seja realizado o pós-processamento. A figura 3.1 mostra um diagrama da rotina computacional desenvolvida para executar as simulações.

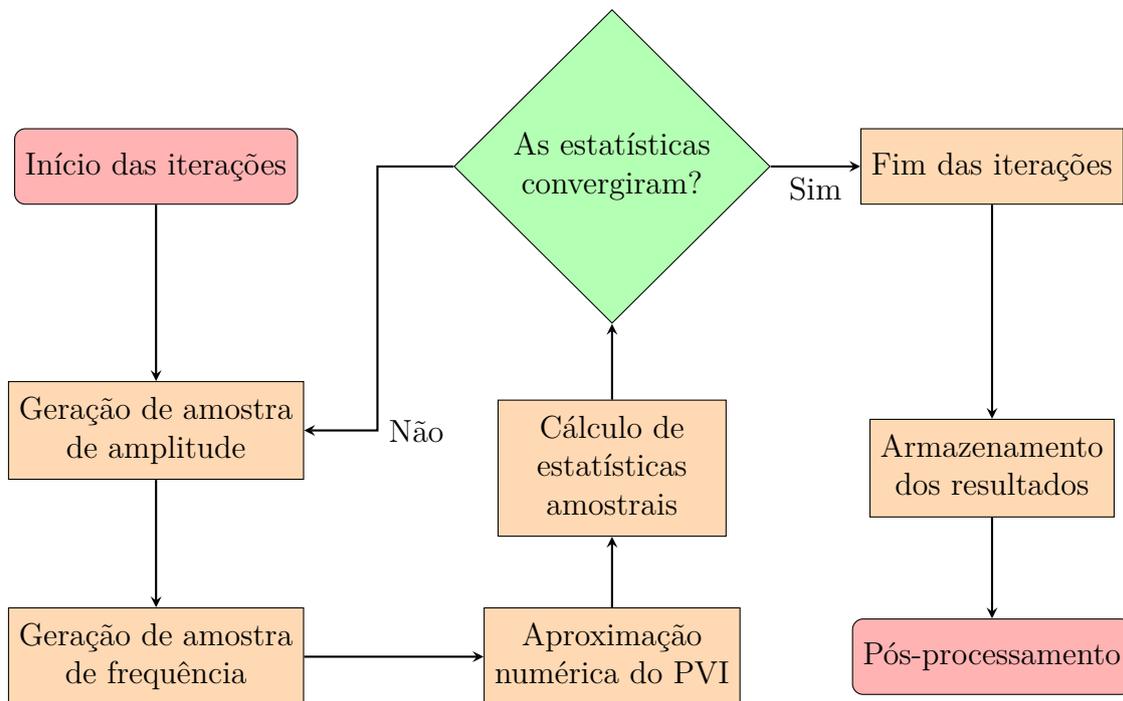


Figura 3.1: Diagrama do algoritmo implementado.

Concluídas as simulações, são calculadas as estatísticas de 1ª e 2ª ordem das respostas obtidas. Através da correlação amostral, é possível estimar a

densidade espectral dos forçamentos e respostas, conforme descrito nos itens 2.5.1 e 2.7. Por fim, foram gerados os gráficos apresentados na seção 4.1.

3.2.2

Abordagem Analítica

Por se tratar de um sistema mecânico linear e invariante no tempo, a resposta de um sistema massa-mola-amortecedor pode ser determinada explicitamente ao resolver sua equação da dinâmica.

A equação da resposta permanente de um sistema $\mathcal{X}_p(t)$, sujeito a um carregamento harmônico de frequência angular $F_\omega = \mathcal{N}(1, 1/3)$ rad/s é dada pela equação 3-2 [14].

$$\mathcal{X}_p(t) = K_1((\omega_n^2 - F_\omega^2) \cos(F_\omega t) + 2\zeta\omega_n F_\omega \text{sen}(F_\omega t)), \quad (3-2)$$

onde

$$K_1 = \frac{F_a/m}{(\omega_n^2 - F_\omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n F_\omega)^2},$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n},$$

A equação da resposta transiente para um sistema subamortecido $\mathcal{X}_t(t)$ ($0 < \zeta < 1$), sujeito a um carregamento harmônico, é dada pela equação 3-3 [14].

$$\mathcal{X}_t(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (K_2 \cos(\omega_d t) + K_3 \text{sen}(\omega_d t)), \quad (3-3)$$

onde

$$K_2 = x_0 - (\omega_n^2 - F_\omega^2)K_1,$$

$$K_3 = \frac{\zeta\omega_n(K_2 + 2F_\omega^2 K_1) + \dot{x}_0}{\omega_d},$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Caso o sistema em questão seja criticamente amortecido ($\zeta = 1$), sua resposta transiente $\mathcal{X}_t(t)$ é dada pela equação 3-4 [14].

$$\mathcal{X}(t) = (K_4 + K_5 t)e^{-\omega_n t}, \quad (3-4)$$

onde

$$K_4 = K_2,$$

$$K_5 = \dot{x}_0 + \omega_n(K_4 - 2\zeta F_\omega^2 K_1).$$

Para um sistema superamortecido ($\zeta > 1$), a resposta transiente $\mathcal{X}_t(t)$ é dada pela equação 3-5 [14].

$$\mathcal{X}(t) = K_6 e^{\lambda_1 t} + K_7 e^{\lambda_2 t}, \quad (3-5)$$

onde

$$K_6 = \frac{\dot{x}_0 - 2\zeta\omega_n F_\omega^2 K_1 - \lambda_2 K_4}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$K_7 = K_4 - K_6,$$

$$\lambda_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n,$$

$$\lambda_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n.$$

Combinando as respostas transiente e permanente, é possível chegar na equação completa da resposta $\mathcal{X}(t)$, descrita na equação 3-6.

$$\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}_t(t) + \mathcal{X}_p(t). \quad (3-6)$$

Através do cálculo direto das amostras de $\mathcal{X}(t)$, é possível aplicar o Método de Monte Carlo, detalhado na subseção 3.2.1 com custo computacional reduzido.

Embora não seja aplicável para sistemas mais complexos, a abordagem analítica permite aumentar o tamanho das amostras de F_a e F_ω , o que permite fazer uma análise de convergência mais detalhada e validação dos resultados obtidos de forma numérica para diferentes tamanhos de amostra.

4

Resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos através de uma abordagem numérica (subseção 4.1) e analítica (subseção 4.2). Os resultados são comentados e comparados em seus respectivos tópicos.

4.1

Abordagem Numérica

Aplicando o algoritmo descrito pela subseção 3.2.1, foram realizadas ao todo 3147 iterações de modo que a média e desvio padrão amostrais das amplitudes e frequências geradas convergissem para a média e desvio padrão teórico respectivamente com uma tolerância de 0,002 unidades.

Em virtude da grande quantidade de dados gerados, as iterações foram executadas em cerca de 4 minutos e as variáveis salvas em um arquivo de cerca de 360 MB, fazendo com que seja uma simulação do tipo *big data*.

4.1.1

Gráficos de Convergência

Durante as simulações de Monte Carlo, foram calculadas as diferenças absolutas entre os valores teóricos e amostrais das médias e dos desvios-padrões da amplitude e da frequência do forçamento harmônico. Em seguida, foram montados gráficos dessas diferenças absolutas em função do tamanho da amostra.

A figura 4.1 mostra a convergência da amplitude do forçamento.

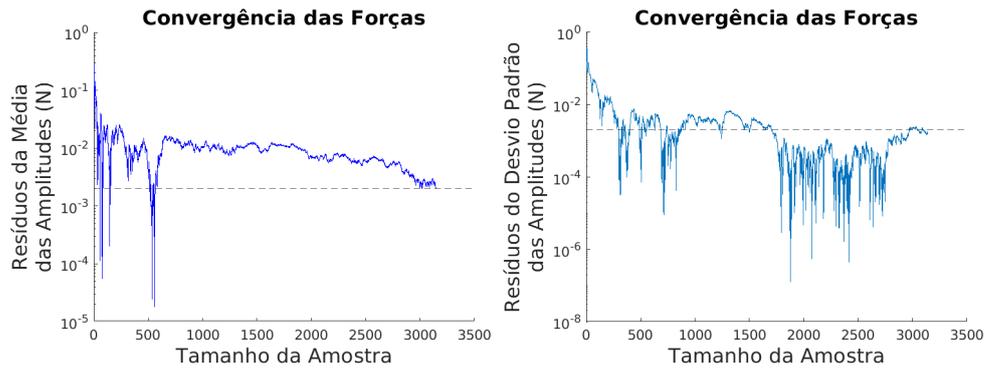


Figura 4.1: Gráficos com as diferenças absolutas das médias das amplitudes das forças (à esquerda) e de seus desvios-padrões (à direita) com seus valores teóricos e o limiar de convergência (reta tracejada) em função do tamanho da amostra.

Repetindo os cálculos, figura 4.2 mostra a convergência da frequência do forçamento.

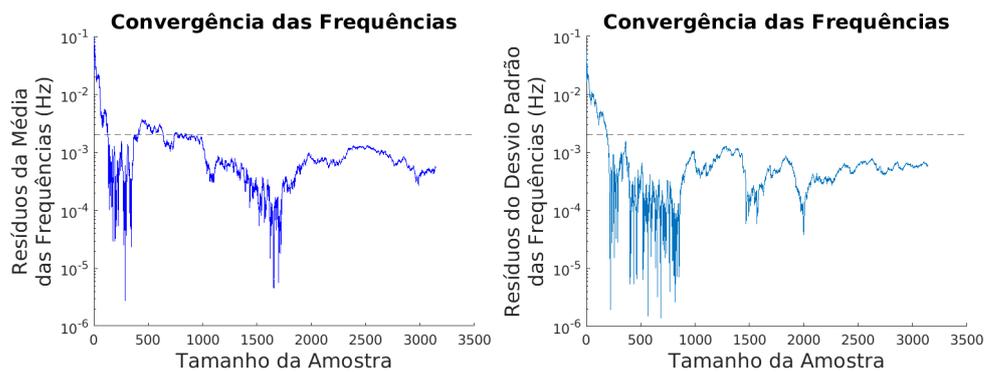


Figura 4.2: Gráficos com as diferenças absolutas das médias das frequências das forças (à esquerda) e de seus desvios-padrões (à direita) com seus valores teóricos e o limiar de convergência (reta tracejada) em função do tamanho da amostra.

Por meio das figuras 4.1 e 4.2, foi possível observar a convergência das estatísticas amostrais do forçamento gerado para as estatísticas teóricas, conforme a lei de grandes números. O aumento do número de amostras reduziu as flutuações das estatísticas, ou seja, fez com que elas permanecessem dentro da tolerância estipulada.

4.1.2 Histogramas do Forçamento

Após o término das simulações, foram gerados os histogramas da figura 4.3 com 56 intervalos (pois é o inteiro mais próximo de $\sqrt{3147}$ que é o número de

realizações utilizadas no Método de Monte Carlo), com o objetivo de comparar as distribuições amostrais com a curva teórica da distribuição normal de mesma média e desvio padrão.

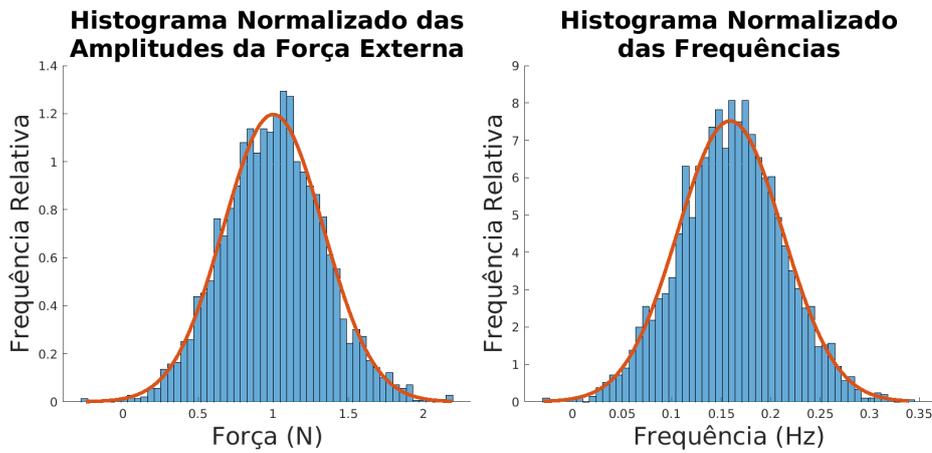


Figura 4.3: Distribuições empíricas (em azul) das amplitudes das forças (à esquerda) e suas frequências (à direita) e suas respectivas distribuições teóricas (em laranja).

Conforme descrito na subseção 2.3.1, a quantidade de amostras foi o suficiente para observar a convergência das distribuições teóricas da v.a. bem como do histograma de suas realizações.

4.1.3 Gráficos Envelope

Calculando a média e o desvio padrão das amostras para cada instante, foram obtidos os gráficos envelope da figura 4.4.

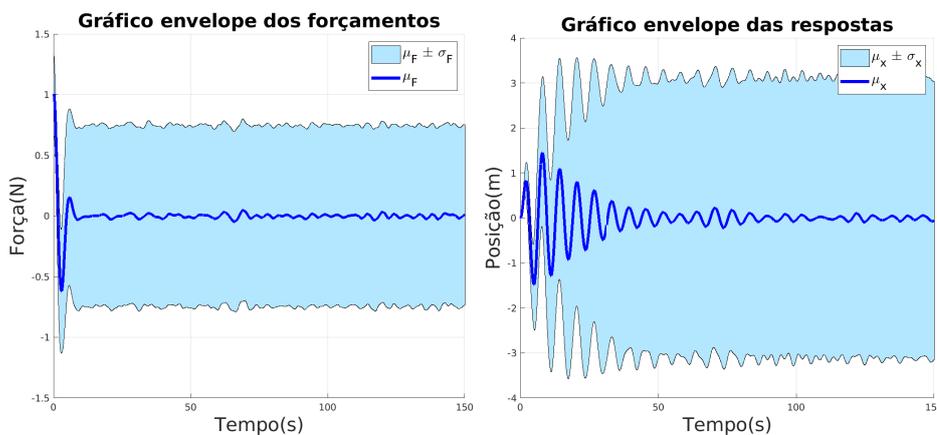


Figura 4.4: Em azul escuro mostra-se a média amostral em função do tempo e em azul claro a região compreendida entre a média mais um desvio padrão e a média menos um desvio padrão.

Ambos os gráficos mostram a convergência das médias e desvios-padrões amostrais ao longo do tempo, o que sugere que existe uma convergência para um processo estocástico fracamente estacionário.

4.1.4 Histogramas das Posições em Diferentes Instantes

Selecionando seis instantes no intervalo de simulação, foram gerados os histogramas das posições da massa para cada instante analisado, como mostra a figura 4.5.

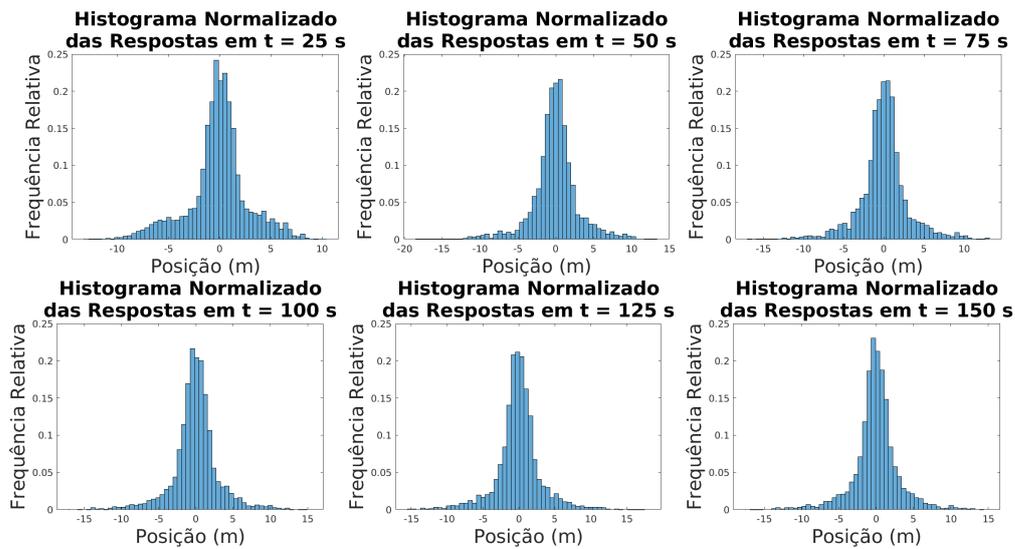


Figura 4.5: Histogramas com as distribuições das posições ao longo do tempo.

Calculando os histogramas para cada instante da simulação, foi gerado o histograma bivariado da figura 4.6.

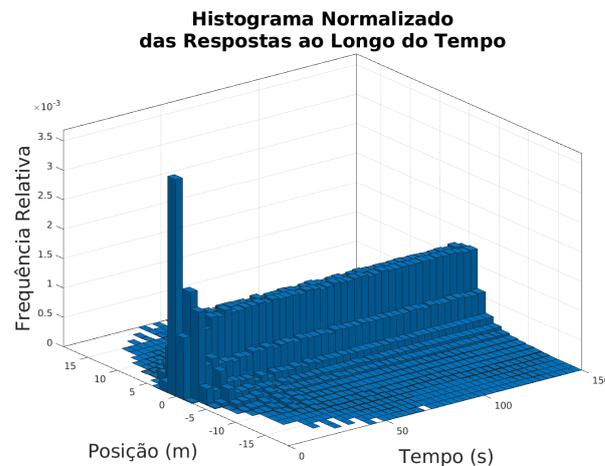


Figura 4.6: Histograma com as distribuições das posições ao longo do tempo.

A convergência dos histogramas das figuras 4.5 e 4.6 mais uma vez sugere tratar-se de um processo fracamente estacionário.

4.1.5 Histogramas Conjuntos de Dois Instantes

Utilizando os mesmos instantes da subseção 4.1.4, foram gerados histogramas conjuntos para cada par consecutivo de instantes, como mostra a figura 4.7.

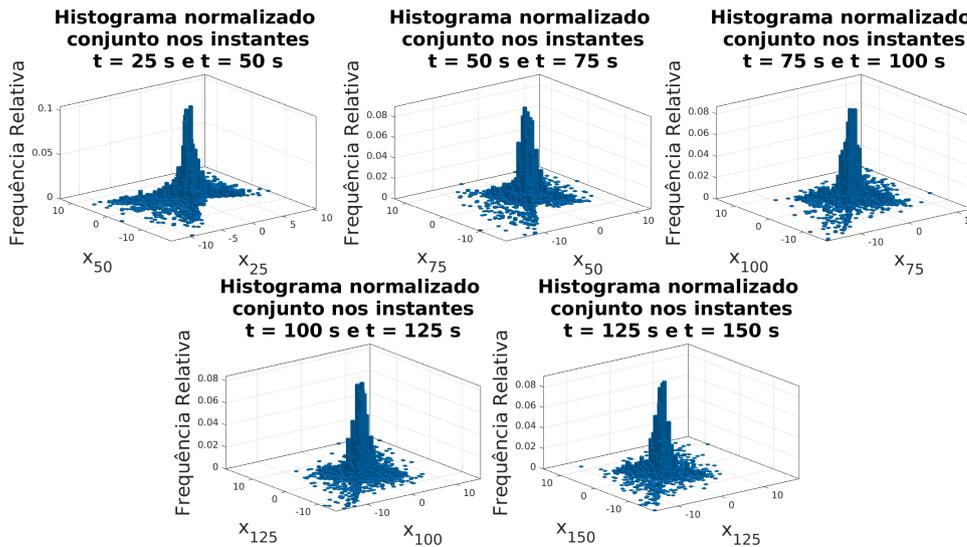


Figura 4.7: Histogramas conjuntos com as distribuições das posições ao longo do tempo.

A convergência dos histogramas conjuntos verifica a condição descrita na subseção 2.5, implicando portanto, que o processo estocástico da resposta do sistema \mathcal{X} converge para um processo fracamente estacionário.

A fim de verificar a dependência das variáveis aleatórias do processo estocástico, foram calculados o produtos cartesianos entre as PDFs de cada par consecutivo da figura 4.5, como mostra a figura 4.8.

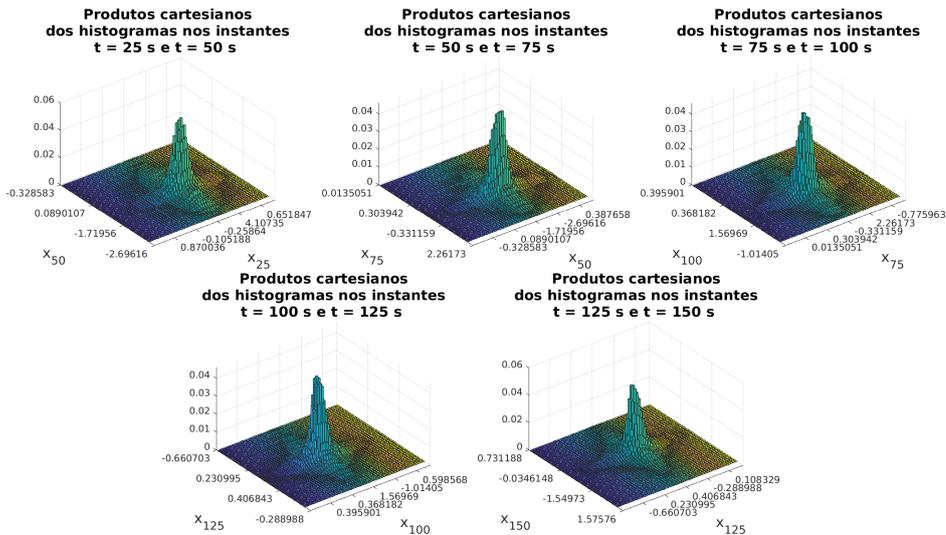


Figura 4.8: Produtos cartesianos dos histogramas de dois instantes.

4.1.6 Distâncias de Wasserstein

Aplicando a equação 2-13, foram calculadas as distâncias de Wasserstein entre as distribuições das posições para cada 10 segundos de simulação. O resultado encontra-se no gráfico da figura 4.9.

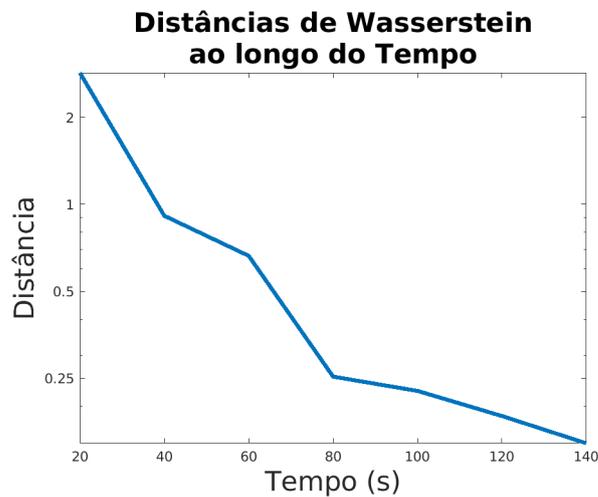


Figura 4.9: Variação das distâncias de Wasserstein entre as distribuições das posições ao longo do tempo.

De acordo com o gráfico, as distâncias de Wasserstein convergem para zero com o passar do tempo, implicando, mais uma vez, a convergência para um processo estocástico fracamente estacionário.

4.1.7 Correlações

Por meio da equação 2-8, foram calculadas as correlações dos forçamentos e das resposta para par de instantes t_1 e t_2 contidos no intervalo de análise. A figura 4.10 mostra os gráficos para cada par ordenado (t_1, t_2) .

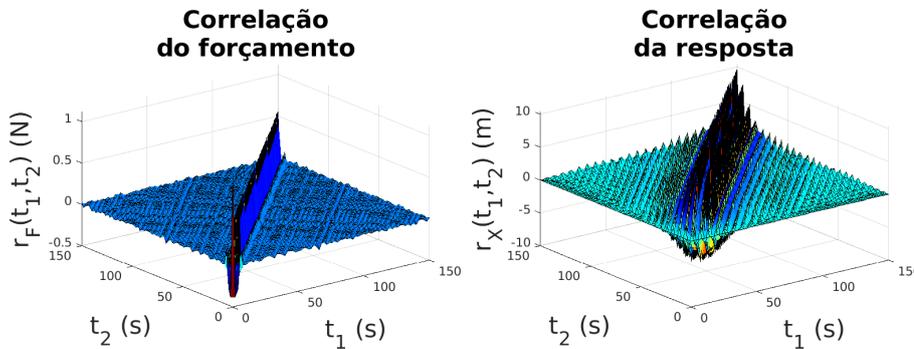


Figura 4.10: À esquerda as correlações dos forçamentos para os instantes t_1 e t_2 . À direita as correlações das respostas para os instantes t_1 e t_2 .

Parametrizando $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$, e projetando os gráficos para o plano $t \times (t + \tau)$, obteve-se a figura 4.11.

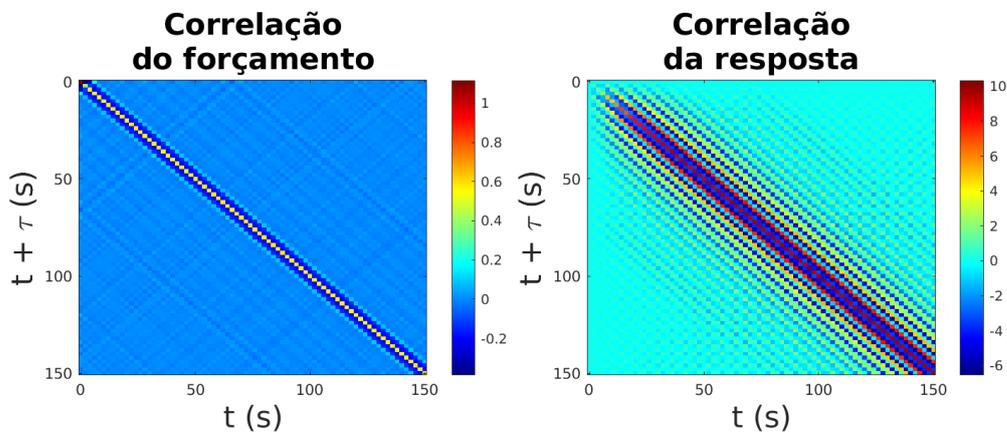


Figura 4.11: À esquerda as correlações dos forçamentos para os instantes t e $t + \tau$. À direita as correlações das respostas para os instantes t e $t + \tau$.

Traçando a diagonal secundária no domínio $T \times T$, é possível determinar as densidades espectrais do forçamento e das respostas em função do parâmetro τ .

4.1.8 Densidades Espectrais

Traçando um plano paralelo a τ e perpendicular ao plano do domínio pela superfície do gráficos da figura 4.10, foram obtidos os gráficos da figura 4.12.

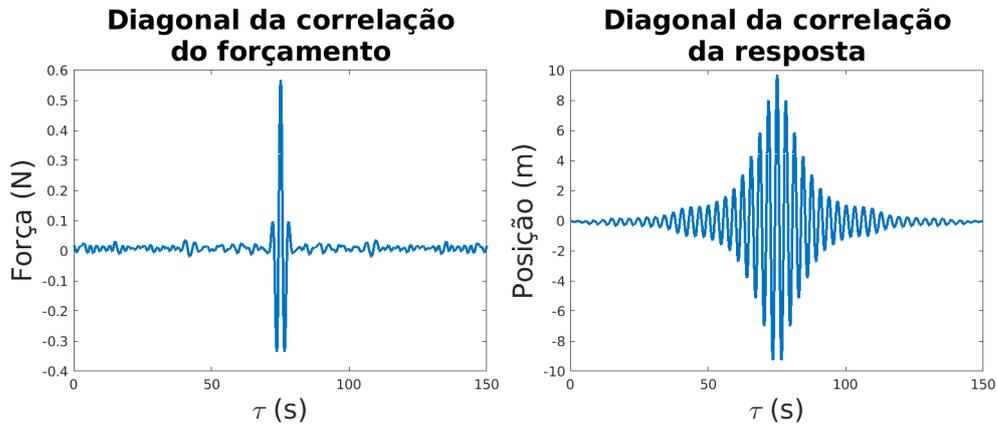


Figura 4.12: À esquerda a diagonal secundária da correlação dos forçamentos. À direita a diagonal secundária da correlação das respostas.

Aplicando a transformada de Fourier rápida (FFT) na resposta ao impulso unitário e nos gráficos da figura 4.12, foram obtidos os gráficos da figura 4.13.

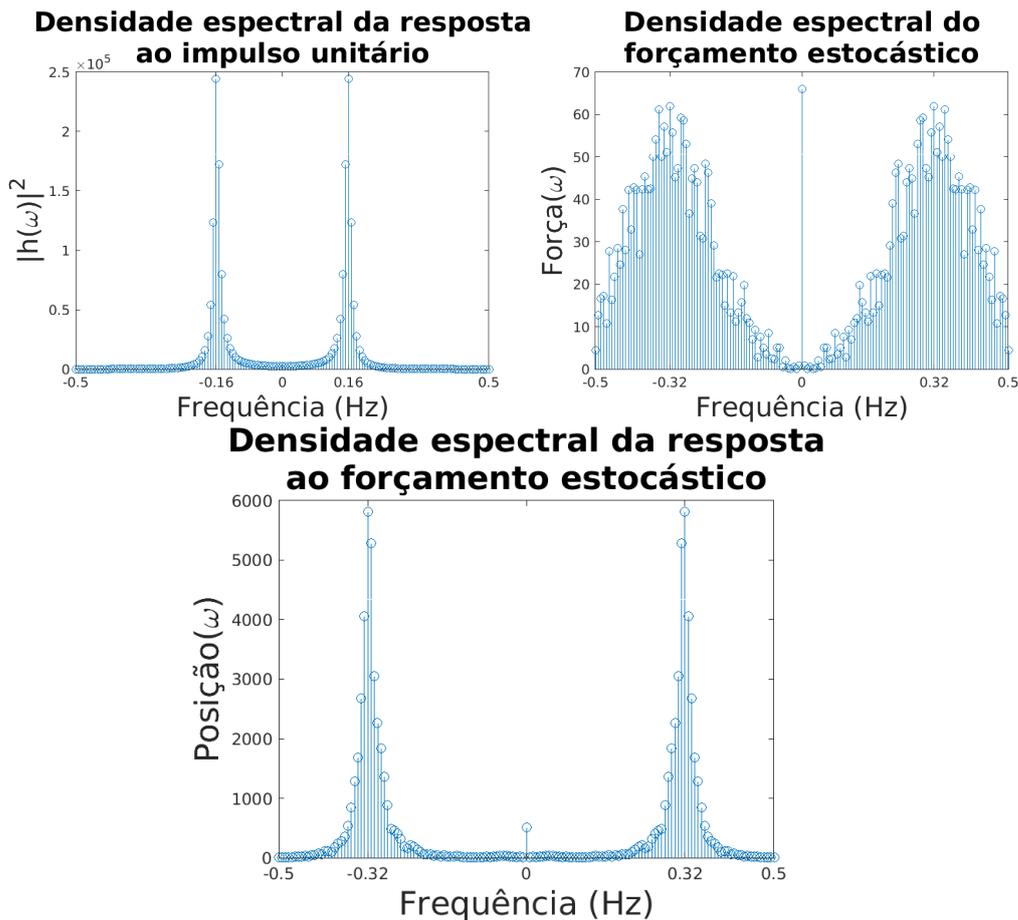


Figura 4.13: No canto superior esquerdo a densidade espectral da resposta ao impulso unitário. No canto superior direito a densidade espectral do forçamento. No canto inferior, a densidade espectral das respostas.

4.1.9 Análises para Diferentes Amortecedores

Utilizando as mesmas amostras de forçamento estocástico (amplitude e frequência), foram calculadas as respostas para diferentes fatores de amortecimento (0,1;0,25;1;2,5;10) para verificar sua influência na convergência do processo estocástico. De forma análoga à subseção 4.1.3, foram calculadas as médias e desvios-padrões amostrais das respostas para cada instante de simulação para cada fator de amortecimento e normalizadas pelo seus maiores valores absolutos ($|\mu_{x_{max}}|$ e $\sigma_{x_{max}}$). Por fim, foram gerados os gráficos da figura 4.14.

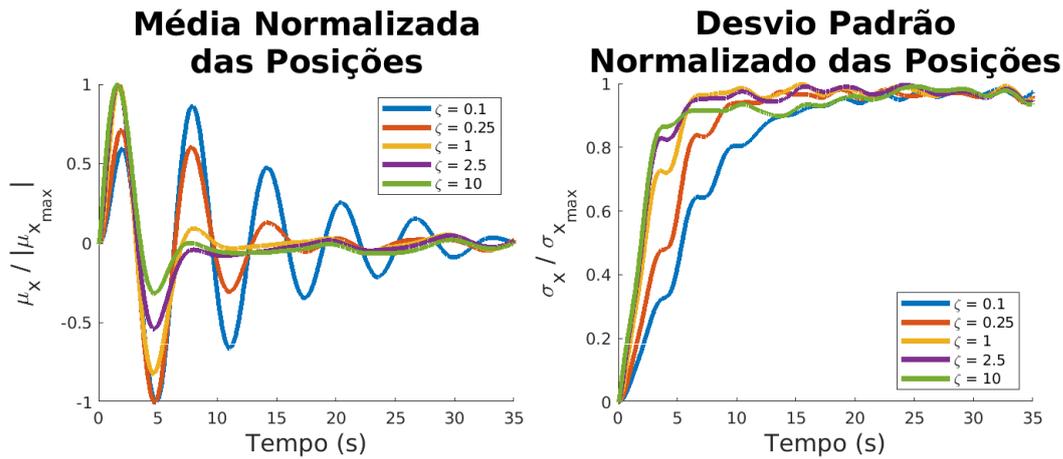


Figura 4.14: À esquerda as médias normalizadas das respostas para cada fator de amortecimento. À direita os desvios-padrões normalizados das respostas para cada fator de amortecimento.

Por meio dos gráficos, é possível observar a influência do fator de amortecimento na convergência das médias e desvios-padrões amostrais. O aumento do fator de amortecimento reduz o tempo de regime transiente, acelerando a convergência das médias amostrais.

4.2

Abordagem Analítica

Baseando-se na metodologia descrita pela subseção 3.2.2, foram usadas, por padrão, 30000 realizações das variáveis aleatórias do carregamento (cerca de $10 \times$ o valor utilizado na subseção 4.1) de modo reproduzir os resultados obtidos numericamente com maior precisão. O custo computacional foi drasticamente reduzido, pois a geração de amostras ocorreu em um intervalo de 1 a 3 segundos.

4.2.1

Histogramas do Forçamento

Os histogramas da figura 4.15 foram gerados com 173 intervalos (valor mais próximo de $\sqrt{30000}$), com o objetivo de comparar as distribuições amostrais com a curva teórica da distribuição normal de mesma média e desvio padrão.

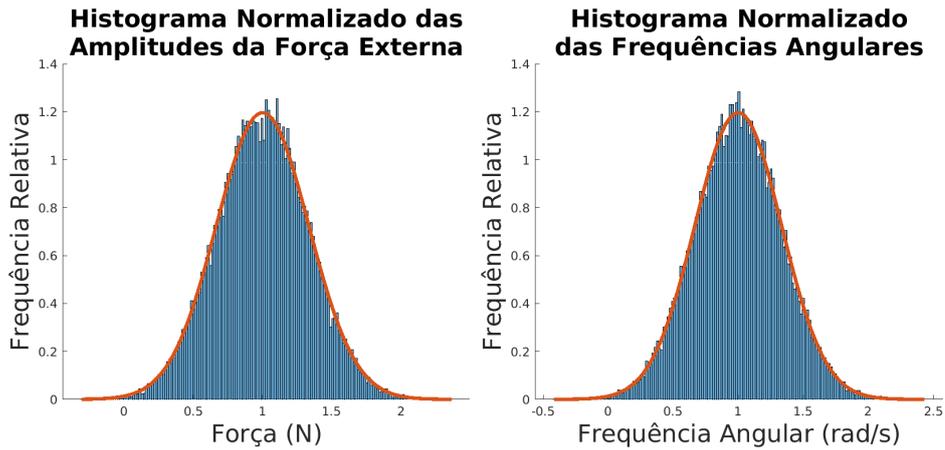


Figura 4.15: Distribuições empíricas (em azul) das amplitudes das forças (à esquerda) e suas frequências angulares (à direita) e suas respectivas distribuições teóricas (em laranja).

Assim como na figura 4.3, a quantidade de amostras foi o suficiente para observar a convergência do histograma de suas realizações para as suas respectivas PDFs. A figura 4.15 apresentou maior convergência em comparação à figura 4.3 devido ao aumento da quantidade de realizações e dos intervalos do histograma.

4.2.2 Gráficos Envelope

Para um intervalo de 0 a 150 s e passo $\Delta t = 0,1$ s, foi calculada a média e o desvio padrão das realizações para cada instante, foram obtidos os gráficos envelope da figura 4.16.

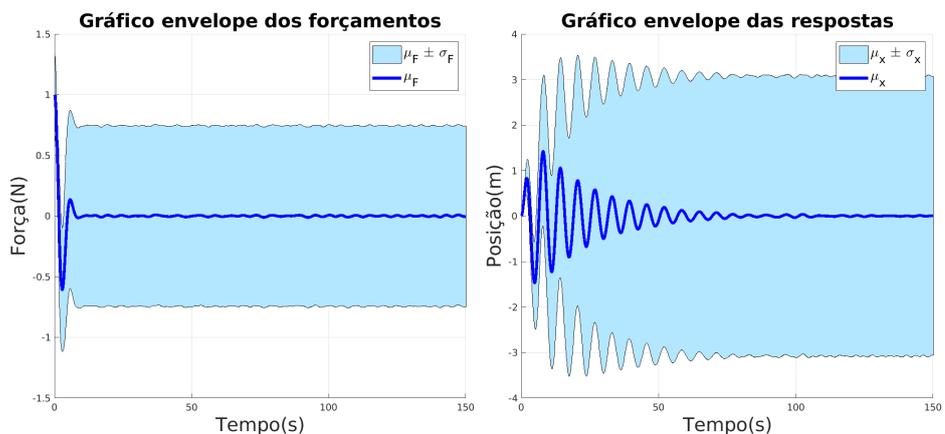


Figura 4.16: Em azul escuro mostra-se a média amostral em função do tempo e em azul claro a região compreendida entre a média mais um desvio padrão e a média menos um desvio padrão.

De forma análoga à figura 4.4, os gráficos da figura 4.16 mostram a convergência das médias e desvios-padrões amostrais ao longo do tempo. É possível notar, no entanto que, mesmo utilizando um passo Δt maior, as medias e desvios-padrões amostrais convergiram mais rápido devido à maior quantidade de realizações.

4.2.3

Histogramas das Posições em Diferentes Instantes

Selecionando os seis instantes $t = 25, 50, 75, 100, 125$ e 150 s , foram gerados os histogramas das posições da massa para cada instante analisado, como mostra a figura 4.17.

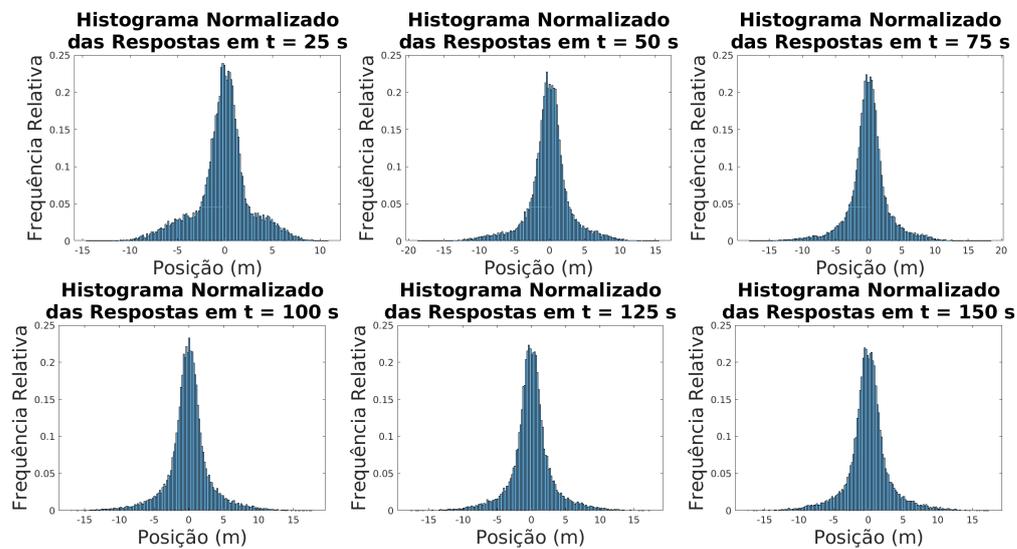


Figura 4.17: Histogramas com as distribuições das posições ao longo do tempo.

Assim como na figura 4.5, foi possível observar a convergência dos histogramas a partir de $t = 50$ s. A forma dos histogramas, entretanto, convergiu mais com o aumento do número de realizações.

4.2.4

Histogramas Conjuntos de Dois Instantes

Utilizando os mesmos instantes da subseção 4.2.3, foram gerados histogramas conjuntos para cada par consecutivo de instantes, como mostra a figura 4.18.

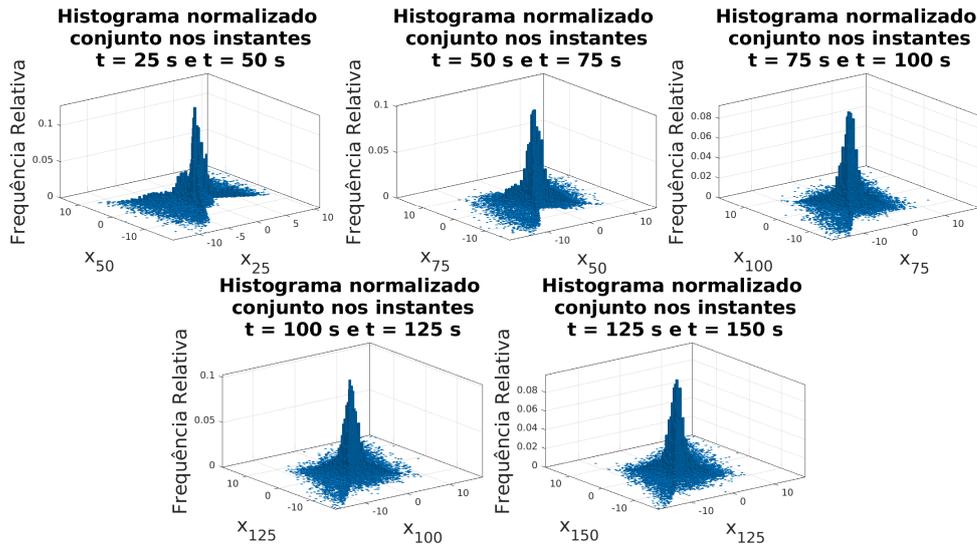


Figura 4.18: Histogramas conjuntos com as distribuições das posições ao longo do tempo.

Graças ao aumento de realizações, é possível afirmar com maior certeza que o processo estocástico $\mathcal{X}(t)$ converge para um processo estocástico estacionário, devido à convergências de suas PDFs de ordem 1 e 2.

Para verificar a dependência das variáveis aleatórias do processo estocástico, foram calculados o produtos cartesianos entre as PDFs de cada par consecutivo da figura 4.17, como mostra a figura 4.19.

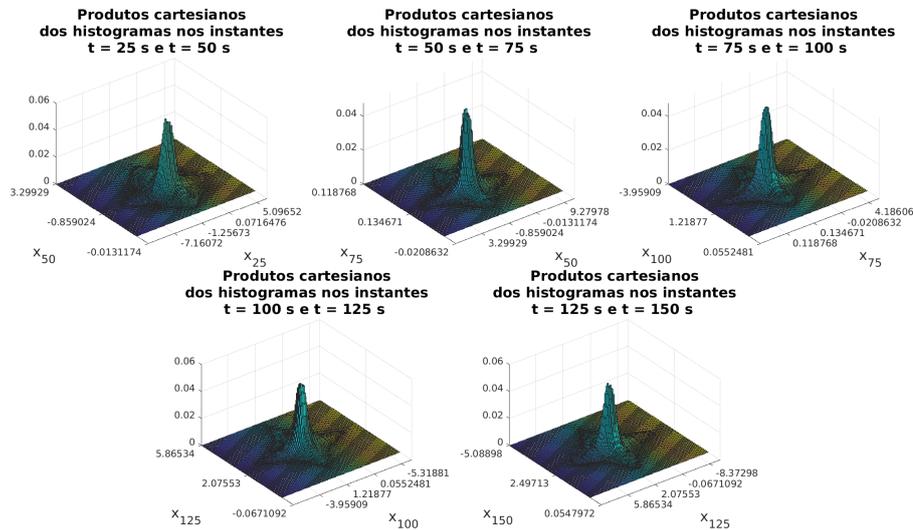


Figura 4.19: Produtos cartesianos dos histogramas de dois instantes.

Através dos gráficos, é possível concluir com maior certeza de que as seções do processo estocástico $\mathcal{X}(t)$ são dependentes.

4.2.5 Distâncias de Wasserstein

Aplicando a equação 2-13, foram calculadas as distâncias de Wasserstein entre as distribuições das posições para diferentes intervalos entre as seções e diferentes tamanhos de amostra. Os resultados encontram-se nos gráficos da figura 4.20.

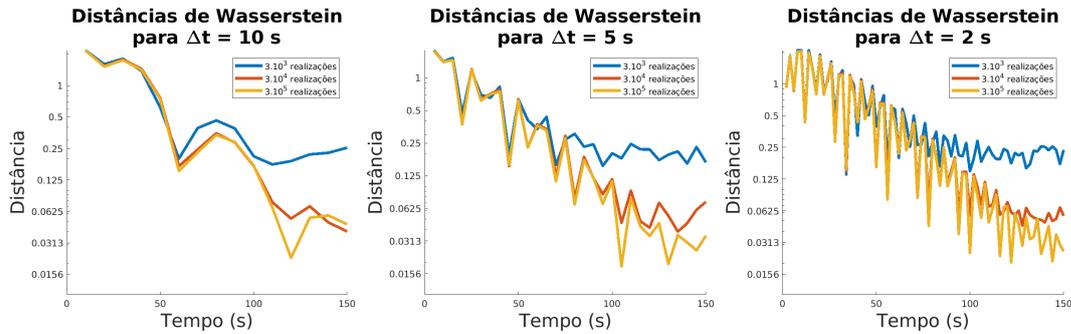


Figura 4.20: Variação das distâncias de Wasserstein entre as distribuições das posições para diferentes passos e tamanho de amostra.

Em todos os casos, é possível observar a diminuição das Wasserstein com o passar do tempo, o que é mais um indicador de que o processo estocástico $\mathcal{X}(t)$ converge para um processo estacionário. A redução do intervalo entre as seções induz um comportamento oscilatório das distâncias, que por sua vez também é afetado pela quantidade de realizações.

4.2.6 Correlações

Devido ao grande volume de dados deste problema, o tamanho da amostra foi reduzido para 10000. O passo Δt utilizado é de 0,1 s. Por meio da equação 2-8, foram calculadas as correlações dos forçamentos e das resposta para par de instantes t_1 e t_2 contidos no intervalo de análise. A figura 4.21 mostra os gráficos para cada par ordenado (t_1, t_2) .

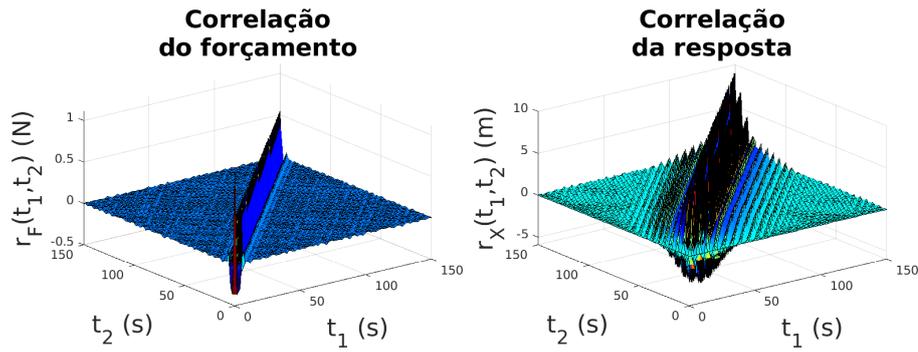


Figura 4.21: À esquerda as correlações dos forçamentos para os instantes t_1 e t_2 . À direita as correlações das respostas para os instantes t_1 e t_2 .

Parametrizando $t_1 = t$, $t_2 = t + \tau$, e projetando os gráficos para o plano $t \times (t + \tau)$, obteve-se a figura 4.22.

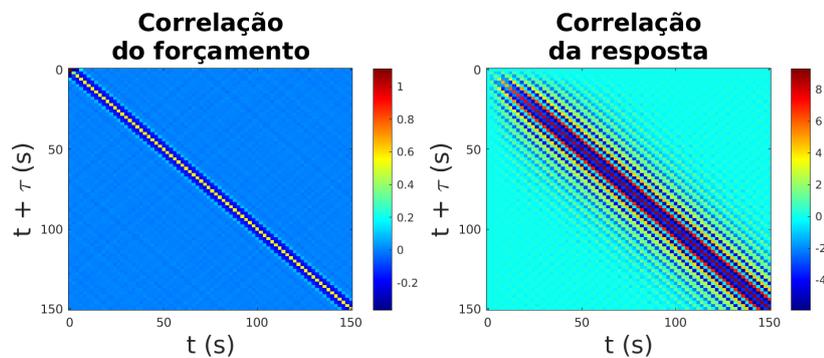


Figura 4.22: À esquerda as correlações dos forçamentos para os instantes t e $t + \tau$. À direita as correlações das respostas para os instantes t e $t + \tau$.

4.2.7

Densidades Espectrais

Traçando um plano paralelo a τ e perpendicular ao plano do domínio pela superfície do gráficos da figura 4.21, foram obtidos os gráficos da figura 4.23.

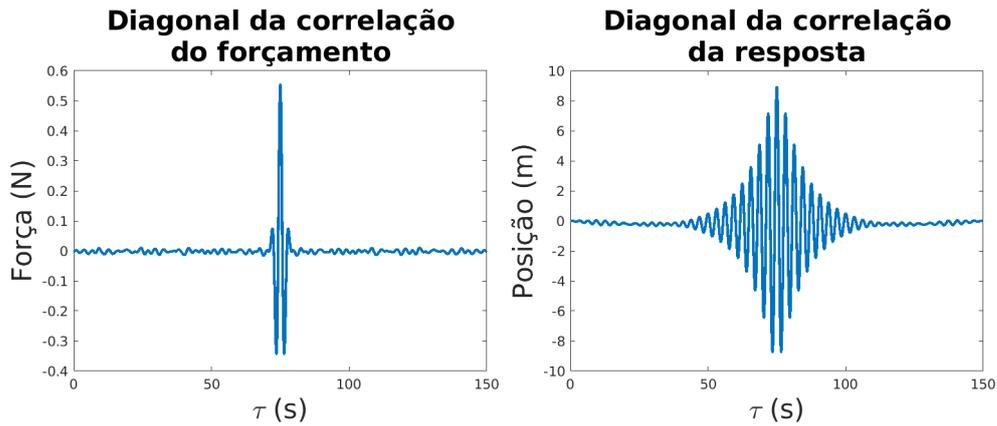


Figura 4.23: À esquerda a diagonal secundária da correlação dos forçamentos. À direita a diagonal secundária da correlação das respostas.

Aplicando a transformada de Fourier rápida (FFT) nos gráficos da figura 4.23 e aplicando a equação 2-16 na resposta ao impulso unitário, foram obtidos os gráficos da figura 4.24.

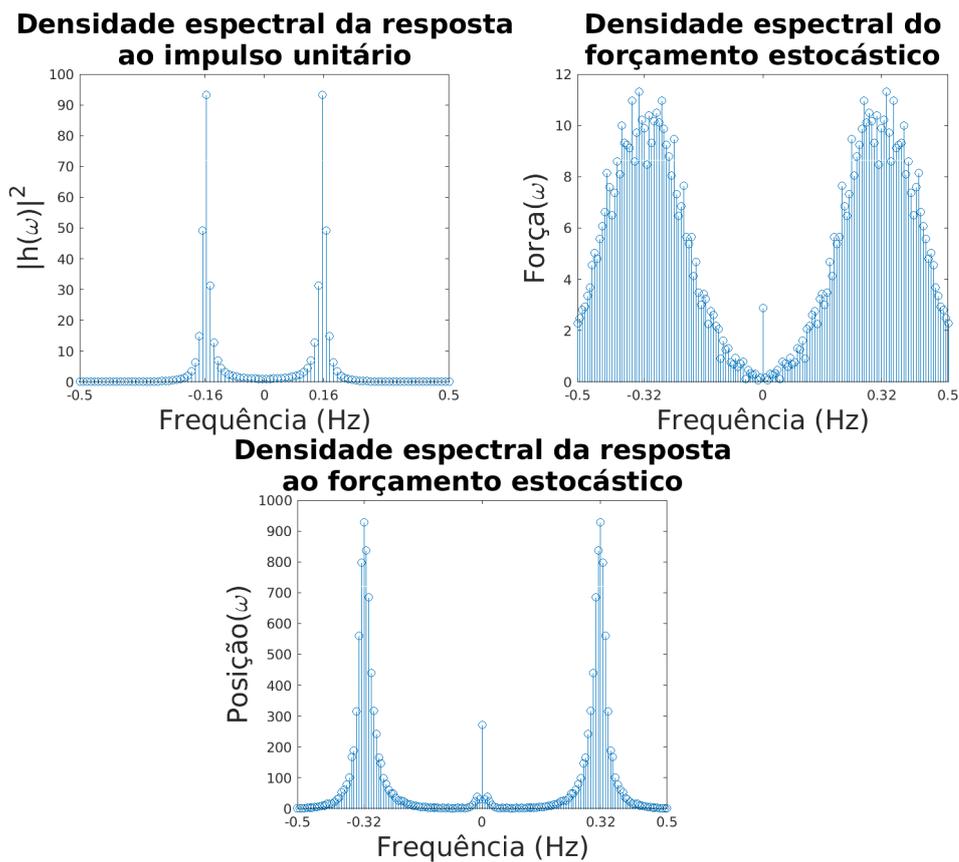


Figura 4.24: No canto superior esquerdo a densidade espectral da resposta ao impulso unitário. No canto superior direito a densidade espectral do forçamento. No canto inferior, a densidade espectral das respostas.

4.2.8 Análises para Diferentes Amortecedores

Mais uma vez trabalhando com 30000 realizações, foram calculadas as respostas para diferentes fatores de amortecimento (0,1;0,25;1;2,5;10) para verificar sua influência na convergência do processo estocástico. Assim como na subseção 4.2.2, foram calculadas as médias e desvios-padrões amostrais das respostas para cada instante de simulação para cada fator de amortecimento e normalizadas pelo seus maiores valores absolutos ($|\mu_{x_{max}}|$ e $\sigma_{x_{max}}$). Por fim, foram gerados os gráficos da figura 4.25.

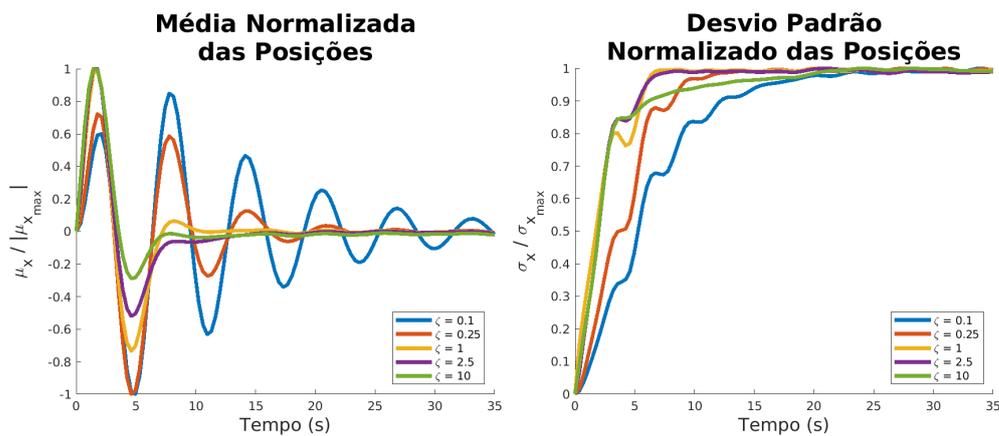


Figura 4.25: À esquerda as médias normalizadas das respostas para cada fator de amortecimento. À direita os desvios-padrões normalizadas das respostas para cada fator de amortecimento.

Os gráficos mais uma vez mostram a influência do fator de amortecimento na convergência das médias e desvios-padrões amostrais. O aumento do fator de amortecimento reduz o tempo de regime transiente, acelerando a convergência das médias amostrais.

5 Conclusões

Com base nos resultados obtidos, conclui-se que a resposta do sistema massa-mola-amortecedor analisado converge para um processo estocástico estacionário.

Através da abordagem numérica e do método de Monte Carlo, foi possível observar a convergência das estatísticas amostrais e teóricas referentes ao forçamento no sistema dentro da tolerância estipulada, o que significa que a quantidade de amostras utilizada foi suficiente. Os gráficos de envelope, bem como os histogramas uni e bivariados construídos verificam que o processo referente às respostas do sistema convergiu para um processo fracamente estacionário.

Por meio da abordagem analítica, foi possível aprofundar as análises dos resultados obtidos numericamente, uma vez que é computacionalmente menos custoso trabalhar com amostras de maior tamanho. Dessa forma, foi possível uma análise mais detalhada das distâncias de Wasserstein e seu comportamento conforme é alterado o intervalo e a quantidade de realizações.

Por fim, as simulações para diferentes fatores de amortecimento explicitou a que a convergência do processo estocástico ocorre mais rapidamente para maiores amortecimentos, dada a maior dissipação energética.

Este trabalho foi desenvolvido com base nos conteúdos de Introdução à Análise, Álgebra Linear Computacional e Mecânica Estocástica Computacional.

5.1 Próximos Trabalhos

Os próximos passos para a continuação deste trabalho consistem em aprofundamentos das análises usando a métrica de Wasserstein, dado que esta métrica é pouco presente na literatura relativa a vibrações aleatórias.

Referências bibliográficas

- [1] Lobato, J.F.C.: *Cálculo de aproximações para respostas de sistemas mecânicos pelo método de runge-kutta*. XXXI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da PUC-Rio, 2023.
- [2] Lobato, J.F.C.: *Análise estatística de um sistema massa-mola-amortecedor excitado por um carregamento estocástico*. XXXII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da PUC-Rio, 2024.
- [3] Somazz, B.: *Simulação numérica de sistemas mecânicos sujeitos a carregamentos estocásticos*. XXX Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da PUC-Rio, 2022.
- [4] Benaroya, H. and Han M.S.: *Probability Models in Engineering and Science*. Taylor Francis Group, LLC, Boca Raton FL, Estados Unidos, 2005.
- [5] Sampaio, R. and Lima R.: *Modelagem estocástica e geração de amostras de variáveis e vetores aleatórios*, volume 70 of *Notas em Matemática Aplicada*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos - SP, Brasil, 2012.
- [6] Sampaio, R. and Lima R.: *Analysis of random signals: First part of a course on random vibrations*. DINAME, Maresias-SP, Brasil, 2017.
- [7] Sampaio, R. and Lima R.: *Analysis of random signals: Second part of a course on random vibrations*. DINAME, Maresias-SP, Brasil, 2017.
- [8] Sampaio, R., Cataldo Ferreira E.L., and Brandão A.S.: *Análise e Processamento de Sinais*, volume 20 of *Notas em Matemática Aplicada*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos - SP, Brasil, 2006.
- [9] Grimmett, G. and Welsh D.: *Probability an Introduction*. Oxford, Reino Unido, 2nd edition, 2014.
- [10] Lima, R.: *Notas de aula do curso de mecânica estocástica computacional*. PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 2024.

- [11] Rubinstein, R.Y. and Kroese D.P.: *Simulation and the Monte Carlo Method*. Wiley, Estados Unidos, 2nd edition, 2008.
- [12] Dunn, W.L. and Shultis J.K.: *Exploring Monte Carlo Methods*. Elsevier, Estados Unidos, 2010.
- [13] Shonkwiler, R.W. and Mendivil F.: *Explorations in Monte Carlo Methods*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Estados Unidos, Canadá, 2009.
- [14] Inman, D.J.: *Engineering vibrations*. Pearson Education, Estados Unidos, 4th edition, 2014.
- [15] Deza, M.M. and Deza E.: *Encyclopedia of Distances*. Springer, Rússia, França, 4th edition, 2016.
- [16] Chapra, C.S. and Canale R.P.: *Numerical methods for engineers*. Mcgraw-hill, Estados Unidos, 6th edition, 2010.