Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Raylane Leite Menezes

Análise da dinâmica do pêndulo de Wilberforce

Orientadora: Roberta Lima

Rio de Janeiro
Dezembro de 2024

Resumo

Análise da dinâmica do pêndulo de Wilberforce

O projeto analisa a dinâmica do pêndulo de Wilberforce, um sistema discreto com dois graus de liberdade, sendo um deles vibração torcional e outro axial. Após a construção das equações da dinâmica do sistema, a ferramenta de análise modal será utilizada para o cálculo das frequências naturais e modos de vibração do pendulo. A partir do conhecimento desses parâmetros modais, o acoplamento torcional-axial presente na resposta do sistema será caracterizado. Uma análise energética também será desenvolvida para mostrar a tranferência de energia entre os dois tipos de movimento no acoplamento torcional-axial. O trabalho terá uma parte analítica e outra numérica. Programas Matlab serão desenvolvidos e gráficos de resposta temporal e no domínio da frequência serão traçados.

Palavras chaves: Pêndulo de Wilberforce; Sistema discreto; Dois graus de liberdade; Análise modal; Análise energética; Matlab; Domínio da frequência.

Abstract

Analysis of the Dynamics of the Wilberforce Pendulum

This project analyzes the dynamics of the Wilberforce pendulum, a discrete system with two degrees of freedom, one being torsional vibration and the other axial. After formulating the system's dynamic equations, the modal analysis tool will be used to calculate the natural frequencies and vibration modes of the pendulum. Based on the knowledge of these modal parameters, the torsional-axial coupling present in the system's response will be characterized. An energy analysis will also be developed to show the energy transfer between the two types of motion in the torsional-axial coupling. The project will have both an analytical and a numerical part. Matlab programs will be developed, and temporal response and frequency domain graphs will be plotted.

Keywords: Wilberforce pendulum; Discrete system; Two degrees of freedom; Modal analysis; Energy analysis; Matlab; Frequency domain.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

Neste trabalho de conclusão de curso é realizado uma análise detalhada do pêndulo de Wilberforce focada no acoplamento entre as vibrações torcional e axial. [1] Este estudo se insere no contexto da engenharia mecânica em um campo voltado no desenvolvimento e aprimoramento de sistemas dinâmicos. O pêndulo de Wilberforce é conhecido por demonstrar o intercâmbio de energia entre diferentes modos de vibração, e recebeu o nome de seu inventor, Lionel Robert Wilberforce. [13] [7]

Em 1938, Sutton discutiu o uso deste dispositivo, do ponto de vista educacional, para demonstrar a transferência de energia entre os movimentos longitudinais e torcionais. [11] Williams e Keil (1983) explicaram como um pêndulo de Wilberforce pode ser fabricado a partir de um simples arame de mola e apresentaram algumas observações a respeito do modelo que eles próprios construíram. Esses e outros trabalhos contribuíram para que o experimento pudesse ser confeccionado a partir de certas ferramentas e materiais alternativos, com a intenção de proporcionar ao professor interessado a possibilidade de demonstrá-lo em classe. [9]

Berg e Marshall calcularam em 1991 os modos normais e coordenadas normais para um pêndulo de Wilberforce. Foi apresentado um metodolgia pela qual as coordenadas pudessem ser reproduzidas experimentalmente, permitindo que a frequências dos modos fossem obtidas teoricamente e experimentalmente. [2]

O principal enfoque deste estudo está na análise modal e energética, a fim de identificar as frequências naturais, modos de vibração e a dinâmica de transferência entre a energia cinética, a energia pontecial gravitacional e a energia potencial elástica. Este tipo de estudo é de extrema importância não apenas na compreensão teórica dos fenômenos, mas também de relevância prática em setores como na idustria de Óleo e Gás, especialmente na perfuração de possos, outros setores como na engenharia aeroespacial nos projetos de componentes estruturais e mecânicos de aeronaves e foguetes, na indústria automotiva para o desenvolvimento de motores e transmissões, na construção civil e engenharia estrutural nos projetos de pontes e edíficios esbeltos, é também de alta relevância também na fabricação e operação de máquinas rotativas como turbinas, geradores e compressores. Esses e diversos outros setores se beneficiam da compreensão detalhada da dinâmica do sistema que auxilia na prevenção de falhas, otimiza o desempenho e no aumento da durabilidade dos sistemas.

1.1 Motivação

Colunas de perfuração são estruturas esbeltas usadas para fazer perfuração de poços de petróleo e gás. Durante o processo de perfuração, a coluna é submetida a diversas ações dinâmicas, o que pode gerar vibrações axiais, torcionais e laterais.

Tais vibrações podem ter amplitudes elevadas e, se não controladas, podem ocasionar uma fadiga precoce do material, danos em brocas ou mesmo a quebra das colunas.

Em geral, as vibrações axiais, torcionais e laterais que aparecem em uma coluna de perfuração são acopladas. Nesse trabalho, será estudado acoplamento existente entre vibrações axiais e torcionais. A motivação é analisar os movimentos torcionais e axiais similares aos observados em uma coluna de perfuração.

No entanto, devido a grande complexidade da dinâmica de uma coluna de perfuração, optou-se por não estudar um modelo completo de coluna (que é um sistema contínuo). Optou-se por estudar o acoplamento existente entre vibrações axiais e torcionais em um sistema discreto com apenas dois graus de liberdade chamado pêndulo de Wilberforce, ilustrado na figura 1. Ressalta-se que o objetivo nao é modelar diretamente a coluna de perfuração, mas sim utilizar o pêndulo como um meio para explorar esse fenômeno de acoplamento entre os dois tipos de vibração que existe em uma coluna.

1.2 Objetivos

O objetivo deste projeto é analisar a dinâmica do pêndulo de Wilberforce, um sistema discreto com dois graus de liberdade, onde um deles representa vibração torcional e o outro, axial. Após a formulação das equações da dinâmica, a ferramenta de análise modal será aplicada para calcular frequências naturais e modos de vibração. Com base nesses parâmetros modais, busca-se caracterizar o acoplamento torcional-axial na resposta do sistema. Além disso, será realizada uma análise energética para demonstrar a transferência de energia entre os movimentos torcional e axial nesse acoplamento. O projeto será abordado tanto de maneira analítica quanto numérica, utilizando programas Matlab para desenvolver modelos e gerar gráficos representativos da resposta temporal e no domínio da frequência do pêndulo de Wilberforce.

1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está estruturado de forma a apresentar de maneira detalhada as etapas do estudo da análise dinâmica do pêndulo de Wilberforce. A seguir é descrito o conteúdo em cada sessão do trabalho.

Sessão 2 aborda a formulação matemática que descreve o comportamento do pêndulo de Wilberforce, as equações do movimento obtidas pelo método de Lagrande. A análise modal será apresentada para calcular as frequências naturais e modos de vibração.

Na sessão 3 é discutido as simulações numéricas da resposta do sistema. A função `ode45` do Matlab calcula uma aproximação numérica para a solução das equações diferenciais do sistema, e utiliza-se a transformada rápida de Fourier, `fft`, para análise do sistema no domínio da frequência.

Os resultados obtidos das análises numéricas e analíticas são discutidos na sessão 4. A comparação entre as soluções analitícas e aproximações numéricas, os gráficos de respostas temporais e diagramas de fases serão analisados. A sessão também aborda a discussão dos resultados da análise energética, destacando a transferência de energia entre os modos longitudinal e torcional, e a validação das frequências naturais obtidas.

A sessão 5 resume os principais achados do estudo. As implicações para aplicações práticas em engenharia e a importância da análise modal e energética são destacadas.

Na sessão 6 são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas para embasar o trabalho. Por fim, a sessão 7 contém os códigos do Matlab.

2 Formulação das Equações da Dinâmica

A modelagem de sistemas dinâmicos consiste em formular uma equação, ou um sistema de equações, que descreve o comportamento dinâmico de um dispositivo físico. As equações deste modelo podem ser formuladas a partir do balanço de forças ou métodos energéticos. A segunda lei de Newton afirma que a soma das forças que agem sobre um corpo é igual à massa do corpo vezes sua aceleração e a segunda lei de Euler revela que a soma de momentos que atuam sobre uma massa é igual a sua inercia de rotação vezes sua aceleração angular. Essas duas leis exigem a identificação adequada das forças e momentos que atuam em um corpo. [3] [5]

Outra forma de abordagem, é analisar a energia do sistema o que é conhecido como métodos energéticos para determinar as equações de movimento. Esses métodos não requerem a identificação das forças que atuam no sistema, mas sim uma compreensão da energia do sistema. Para sistemas conservativos, tem-se que a soma de energias potencial e cinética do sistema permanece constante ao longo do tempo, ou seja:

$$T + V = constante, \tag{1}$$

onde,

- T é a parcela referente a energia cinética;
- V é a parcela referente a energia potencial.

O métodos energéticos são muito úteis em cenários em que as forças que atuam sobre o corpo não são fáceis de serem determinadas, como por exemplo sistemas com mais de um grau de liberdade. O número de graus de liberdade de um sistema é determinado pelo número de direções em que cada parte do sistema pode se mover. Um sistema com dois graus de liberdade terá duas frenquências naturais e modos de vibração, diferentemente de um sistema de um grau de liberdade. O modo de vibração descreve o movimento relativo entre os dois graus de liberdade. [4]

O método de Lagrange é uma abordagem baseada em energia e pode ser utilizado para modelar sistemas com múltiplos graus de liberdade. Ele oferece uma alternativa à soma de forças e momentos, especialmente em casos em que essas forças e momentos não são facilmente identificáveis. Sua aplicação exige a identificação das energias envolvidas no sistema e a definição de coordenadas generalizadas. A formulação de Lagrange afirma que as equações de movimento de um sistema vibratório podem ser derivadas de:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{2}$$

sendo q_i cada uma das coordenadas generalizadas e definindo a função lagrangeana como:

$$L = T - V. \tag{3}$$

O pêndulo de Wilberforce a ser estudado consiste em uma massa suspensa por uma mola espiral flexível que é livre para oscilar tanto logitudinalmente e torcionalmente, como ilustrado na figura 1. Quando a massa é elevada acima do seu ponto de equilíbrio e libertada do repouso, ela oscila para cima e para baixo ao longo de uma linha vertical, transferindo lentamente a sua energia para uma oscilação torcional.

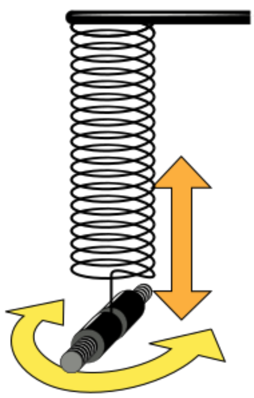

Figura 1: Pêndulo de Wilberforce.

Considera-se que a mola tem massa desprezível com constante elástica longitudinal k e constante elástica torcional γ, fixado nesta mola está uma massa m com momento de inércia I em relação ao seu eixo vertical. As equações da dinâmica que descrevem a dinâmica do sistema serão obtidas a partir de Lagrange. Supõe-se acoplamento linear entre os tipos de movimento de oscilação com constante de acoplamento ε.

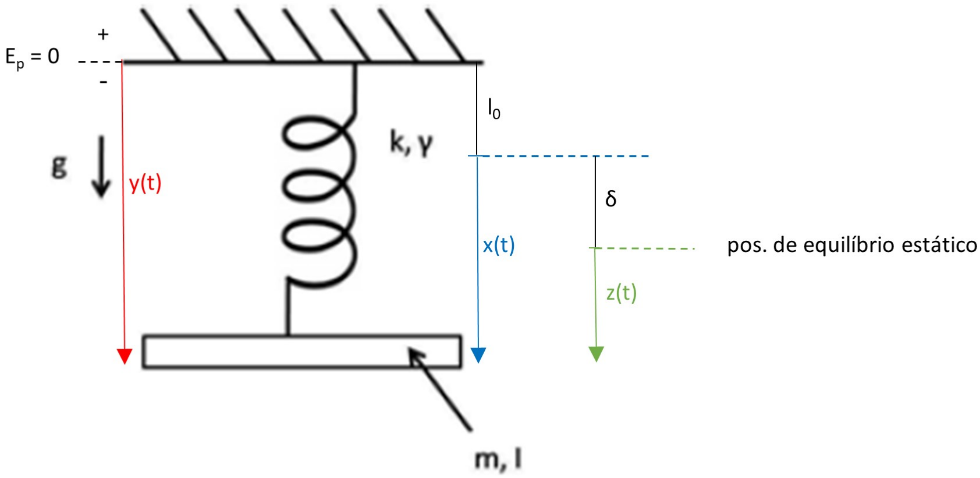

Figura 2: Três possíveis parametrizações para o movimento longitudinal do pêndulo de Wilberforce.

A posição longitudinal da massa pode ser determinada a partir de diferentes parametrizações, conforme ilustrado na figura 2. A posição da massa *y(t)* é medida a partir do ponto ao qual a mola está fixada, em *x(t)* a posição é medida a partir do comprimento natural da mola e *z(t)* é medida a partir da posição de equilíbrio estático do sistema. A depender da parametrização usada, diferentes equações da dinâmica poderão ser encontradas para descrever este mesmo movimento. Sendo g a aceleração da gravidade, a posição de equilíbrio estático pode ser dada por:

$$mg = k\delta, \tag{4}$$

$$\delta = \frac{mg}{k}. \tag{5}$$

Voltando a equação de Lagrange e usando *z(t)* como parametrização para o movimento longitudinal, θ como ângulo de torção, e o referencial para a energia potencial sendo o ponto ao qual está fixado a mola, pode-se escrever:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \tag{6}$$

$$V = \frac{1}{2}k\left(z+\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{1}{2}\gamma\theta^2 + \frac{1}{2}\varepsilon z\theta - mg\left(z+\frac{mg}{k}+l_0\right). \tag{7}$$

Substituindo as equações 6 e 7 na equação 3:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\left(z+\frac{mg}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma\theta^2 - \frac{1}{2}\varepsilon z\theta + mg\left(z+\frac{mg}{k}+l_0\right). \quad (8)$$

As equações de movimento serão dadas por:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (10)$$

Dessa forma, as equações da dinâmica que descrevem o sistema são:

$$m\ddot{z} + kz + \frac{1}{2}\varepsilon\theta = 0, \quad (11)$$

$$I\ddot{\theta} + \gamma\theta + \frac{1}{2}\varepsilon z = 0. \quad (12)$$

Reescrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & \frac{1}{2}\varepsilon \\ \frac{1}{2}\varepsilon & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$M\ddot{Z} + KZ = 0. \quad (13)$$

As condições iniciais para $t = 0$ são:

$$Z(0) = \begin{bmatrix} z_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\dot{Z}(0) = \begin{bmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

2.1 Análise Modal

A análise modal é um processo pelo qual se descreve uma estrutura em termos de suas características naturais que são as frequências, e os modos – suas propriedades dinâmicas. Conceitos importantes de modos e frequências naturais podem ser generalizados ao relacionar o problema de vibração linear a um problema de autovalores. [12] [10]

O problema de autovalores consiste em determinar escalares, denominados autovalores, e vetores não nulos, chamados autovetores, que satisfaçam a equação 16.

Nessa equação, A representa uma matriz quadrada $n \times n$, para qual existem n autovalores λ e n autovetores correspondentes, representados pelo vetor v, de dimensão $n \times 1$:

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \tag{16}$$

Para determinar a relação entre a solução da equação da dinâmica na forma matricial e um problema de autovalores, primeiro multiplica-se a equação 13 por $M^{-1/2}$, conforme abaixo:

$$M^{-1/2}M\ddot{Z} + M^{-1/2}KZ \; = \; 0,$$

$$M^{1/2}\ddot{Z} + M^{-1/2}KZ \; = \; 0. \tag{17}$$

Considerando uma mudança de variável onde, $Z = M^{-1/2}Y$. Reescrevendo a equação 17:

$$M^{1/2}\left(M^{-1/2}\ddot{Y}\right) + M^{-1/2}K\left(M^{-1/2}Y\right) \; = \; 0,$$

onde, $M^{1/2}M^{-1/2}$ resulta na matriz identidade I. Supondo $\tilde{K} = M^{-1/2}KM^{-1/2}$, constrói-se uma matriz simétrica:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \frac{k}{m} & \frac{\varepsilon}{2\sqrt{m}\sqrt{I}} \\ \frac{\varepsilon}{2\sqrt{m}\sqrt{I}} & \frac{\gamma}{I} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\ddot{Y} + \tilde{K}Y \; = \; 0. \tag{19}$$

Propondo uma solução para equação 19 na forma:

$$Y \; = \; e^{i\omega t}U, \tag{20}$$

sendo ω e U (vetor constante e não nulo) as incógnitas a serem determinadas. A primeira e segunda derivada são:

$$\dot{Y} \; = \; (i\omega)e^{i\omega t}U, \tag{21}$$

$$\ddot{Y} \; = \; -\omega^2 e^{i\omega t}U. \tag{22}$$

Substituindo as equações 20 e 22 na equação 19:

$$(-\omega^2 e^{i\omega t}U) + \tilde{K}(e^{i\omega t}U) \; = \; 0. \tag{23}$$

Reorganizando a equação 23 e considerando que o valor de $e^{i\omega t}$ não pode ser igual a zero, tem-se:

$$-\omega^2 U + \tilde{K}U \; = \; 0,$$

$$\tilde{K}U \; = \; \omega^2 U. \tag{24}$$

Observa-se na equação 24 um problema de autovalores similar ao da equação 16. O quadrado das frequências naturais ω^2 são os autovalores e os modos de vibração U são os autovetores. Resolvendo esse problema de autovalores, tem-se:

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_z^2 + \omega_\theta^2 + \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\varepsilon^2}{mI}}}{2} \tag{25}$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_z^2 + \omega_\theta^2 - \sqrt{(\omega_z^2 - \omega_\theta^2)^2 + \frac{\varepsilon^2}{mI}}}{2} \tag{26}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} \frac{Ik+\gamma m-\sqrt{I\varepsilon^2 m+I^2k^2-2I\gamma km+\gamma^2m^2}}{I^{1/2}\varepsilon m^{1/2}} - \frac{2\gamma m^{1/2}}{I^{1/2}\varepsilon} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{Ik+\gamma m+\sqrt{I\varepsilon^2 m+I^2k^2-2I\gamma km+\gamma^2m^2}}{I^{1/2}\varepsilon m^{1/2}} - \frac{2\gamma m^{1/2}}{I^{1/2}\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{28}$$

Definindo duas novas matrizes abaixo, onde P é a matriz composta pelos autovetores ortonormais de $\tilde{K}$, U_1 e U_2, e Λ a matriz diagonal das frequências naturais do sistema.

$$P = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Voltando a equação 19, define-se uma nova mudança de variável $Y = PQ$. Fazendo a substituição na equação e multiplicando por P^{-1}, tem-se:

$$P^{-1}P\ddot{Q} + P^{-1}\tilde{K}PQ \; = \; 0. \tag{31}$$

A equação 31 pode ser escrita como:

$$\ddot{Q} + \Lambda Q \; = \; 0, \tag{32}$$

$$\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0\\ 0 & \omega_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\ddot{q}_1+\omega_1^2 q_1\\ \ddot{q}_2+\omega_2^2 q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

A equação 32 representa um sistema de 2 equações diferenciais desacopladas, com isso as equações podem ser resolvidas independente uma da outra. As condições iniciais também devem passar pelas mesmas transformações para chegar do sistema de coordenadas $Z(0)$ para $Q(0)$.

$$Q_0 = \begin{bmatrix}q_{10}\\ q_{20}\end{bmatrix} = P^{-1}Y(0) = P^{-1}M^{1/2}Z(0), \tag{33}$$

$$\dot{Q}_0 = \begin{bmatrix}\dot{q_{10}}\\ \dot{q_{20}}\end{bmatrix} = P^{-1}\dot{Y(0)} = P^{-1}M^{1/2}\dot{Z(0)}. \tag{34}$$

As equações do sistema 32 são chamadas de equações modais. Aplicando as transformações das equações 33 e 34 nas condições iniciais dadas em 38, a solução para cada equação é dada abaixo:

$$q_1(t) = \frac{\sqrt{\omega_1^2 q_{10}^2 + \dot{q_{10}}^2}}{\omega_1}\sin\left(\omega_1 t + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_1 q_{10}}{\dot{q_{10}}}\right)\right) \tag{35}$$

$$q_2(t) = \frac{\sqrt{\omega_2^2 q_{20}^2 + \dot{q_{20}}^2}}{\omega_2}\sin\left(\omega_2 t + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_2 q_{20}}{\dot{q_{20}}}\right)\right) \tag{36}$$

A fim de recuperar a solução na coordenada Z(t):

$$Z(t) = \begin{bmatrix}z(t)\\ \theta(t)\end{bmatrix} = M^{-1/2}Y(t) = M^{-1/2}PQ(t) = M^{-1/2}P\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\end{bmatrix} \tag{37}$$

3 Simulaçoes Numéricas

Nesta seção, será apresentada a implementação numérica do modelo dinâmico do pêndulo de Wilberforce utilizando o software MATLAB. A solução foi abordada sob duas perspectivas:

1. Solução analítica: análise modal foi utilizada para determinar as frequências naturais e os modos de vibração do sistema. Essa abordagem fornece uma descrição exata do comportamento dinâmico do pêndulo com base nas propriedades físicas e parâmetros do sistema.

2. Aproximação por simulação numérica: o método de Runge-Kutta foi utilizado para obter-se uma aproximação para a solução das equações diferenciais que governam o sistema. Essa técnica permite simular o comportamento do pêndulo ao longo do tempo, mesmo em casos onde a solução analítica é menos prática.

Uma vez definido as condições inicias e os parâmetros do sistema, a função `ode45` foi utilizada para obter-se uma aproximação para a solução das equações diferenciais do sistema. A função ode45 é baseada no método Runge-Kutta de quarta e quinta ordens e é programada para resolver problemas de valor inicial com equações diferenciais de primeira ordem, como por exemplo $\dot{x}+x=0$. Como o sistema de equações diferenciais que governam o movimento do pendulo de wilberforce são de segunda ordem, foi criada a função `edo_pendulowilberforce`, que é chamada a cada passo de tempo pelo `ode45`. [8]

A função `edo_pendulowilberforce` transforma as equações de segunda ordem para z e θ em um sistema de primeira ordem. O vetor de saída DX, contém as derivadas das variáveis de estados que são utilizadas pelo ode45 para integração temporal da seguinte forma:

function DX = edo$_pendulowilberforce(t,X)$

global m k gamma epsilon I

z = X(1); theta = X(2); vz = X(3); ztheta = X(4);

dzdt = vz; dthetadt = ztheta; dz2dt = (-k*z - (epsilon/2)*theta)/m; dtheta2dt = (-gamma*theta - (epsilon/2)*z)/I;

DX = [dzdt; dthetadt; dz2dt; dtheta2dt]; end

O comando para obter-se uma aproximação numérica para a solução das equações foi estruturado da seguinte forma:

[t,Z] = ode45(@edo$_pendulowilberforce, tspan, X0_1)$;

onde:

- t: vetor de tempo [s];
- Z: matriz de solução do sistema (deslocamento longitudinal e torsional);
- tspan: intervalo de tempo da simulação;
- X0: condições iniciais.

3.1 Análise no domínio da frequência

Após obtenção da aproximação numérica temporal para a solução das equações da dinâmica do sistema, a análise no domínio da frequência foi realizada utilizando a função `fft`, chamada de Transformada Rápida de Fourier, essa ferramenta permite analisar a composição espectral de um sinal. [6] A função `fft` foi aplicada para obter os espectros de frequência dos deslocamentos longitudinais e trosionais, a sintaxe utilizada foi:

$\mathrm{z}_f ft = fft(\mathrm{Z}(:,1)); theta_f ft = fft(\mathrm{Z}(:,2));$

A partir das transformadas foram calculadas as densidades espectrais de potência P1_z e P1_θ para o deslocamento e o ângulo de troção, respectivamente. Na sequência foram plotados os gráficos para visualizar a amplitude da resposta do sistema em função da frequência. Os gráficos resultantes mostram as frequências dominantes no sistema.

4 Resultados e discussões

Nesta sessão é apresentado os resultados obtidos da análide do pêndulo de Wilberforce utilizando a solução analítica e a aproximação numérica. Os parâmetros do sitema foram definidos da seguinte forma:

- Massa $m = 0,43kg$;
- Momento de Inércia $I = 0,000136kg.m^2$;
- Constante elástica longitudinal $k = 10Nm$;
- Constante elástica torcional $\gamma = 0,1Nm$;
- Constante de acoplamento $\varepsilon = 0,03$.

Condições iniciais:

$$Z(0) = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\dot{Z}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

As frequências naturais e modos de vibração do sistema encontradas foram:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 4,8219 rad/s, \\ \omega_2 &= 27,1164 rad/s, \\ U_1 &= \begin{bmatrix} -1,0000 \\ 0,0028 \end{bmatrix}, \\ U_2 &= \begin{bmatrix} 0,0028 \\ 1,0000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

As figuras 3 e 4 mostram os gráficos de deslocamento longitudinal e torsional em função do tempo.

Além disso, há uma comparação entre a solução analítica e a aproximação numérica. O comportamento semelhante e as trajetórias muito próximas entre as duas curvas evideciam a qualidade e a precisão da aproximação numérica.

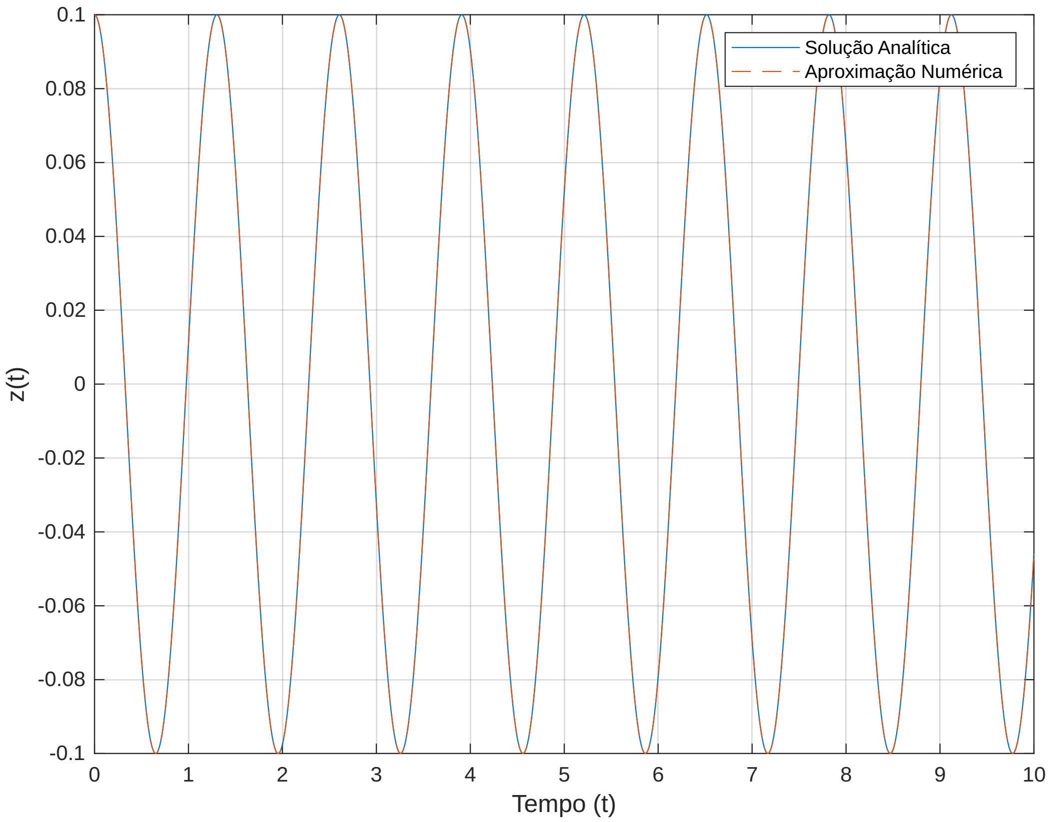

Figura 3: Deslocamento z em função do tempo. Comparação entre a solução analítica e a aproximação numérica.

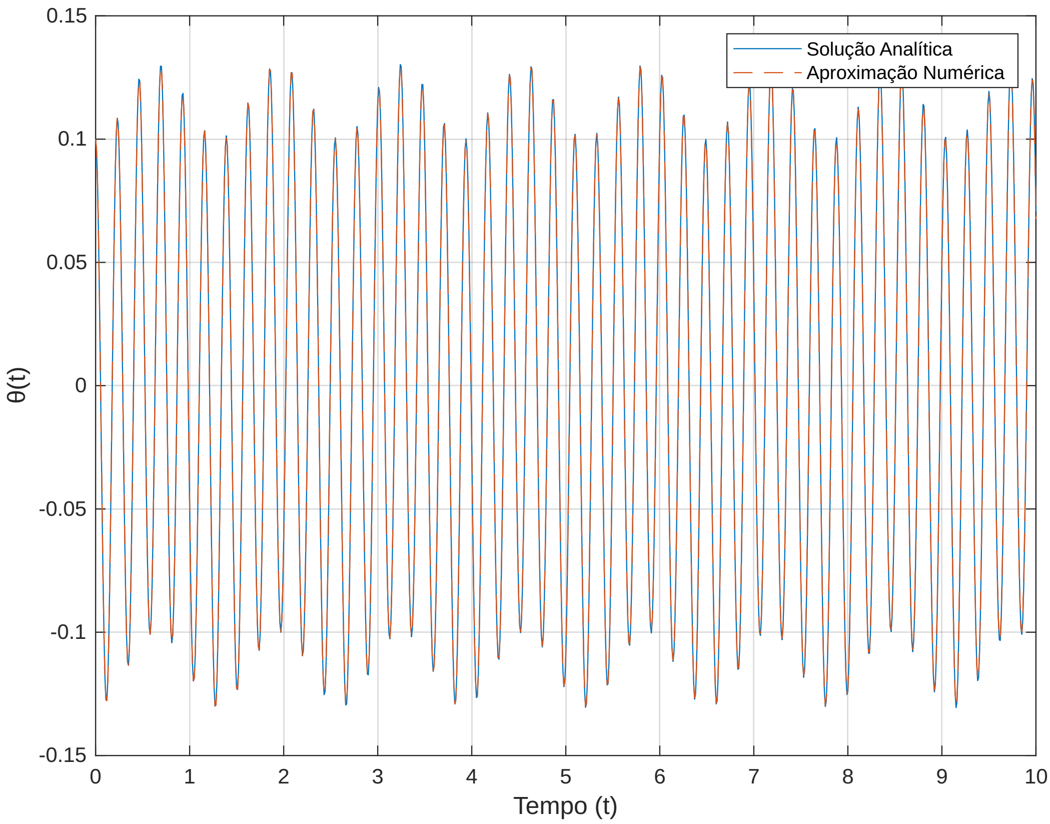

Figura 4: Deslocamento θ em função do tempo. Comparação entre a solução analítica e a aproximação numérica.

As figuras 5 e 6 representam os diagramas de fase que mostram o comportamento dinâmico dos modos longitudinal e trosional.

Embora ambos os diagramas demosntrem trajetórias elípticas, o comportamento das trajetórias no diagrama de fase pode ser diferente devido a como o acoplamento interfere entre os dois modos e suas respectivas características dinâmicas, a energia transferida entre de um modo para o outro pode afetar o comportamento das trajetórias.

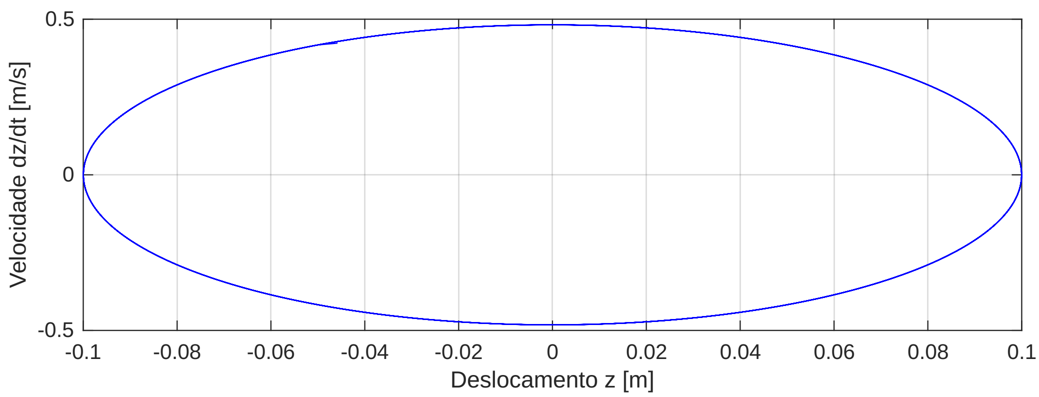

Figura 5: Diagrama de fase - modo longitudinal

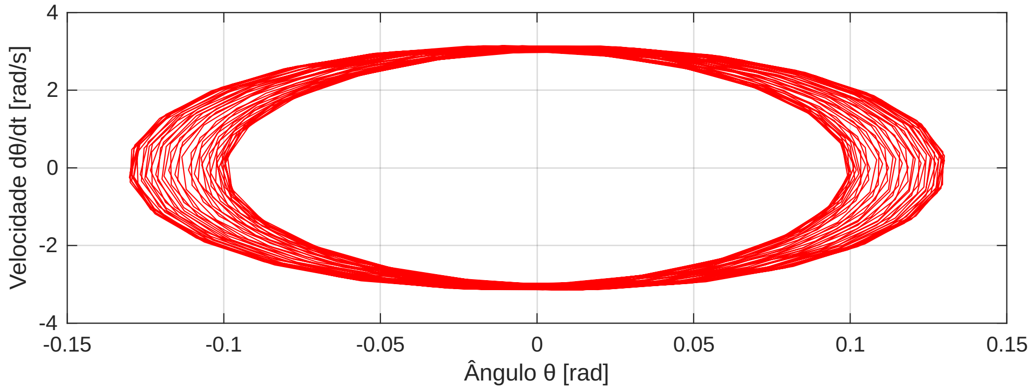

Figura 6: Diagrama de fase - modo torsional

A energia total do sistema é a soma da energia potencial e energia cinética de ambos os modos de vibração, e esta se mantém constante conforme o princípio de conservação de energia. Na figura 7 pode-se observar como a energia total do sistema é distribuida ao longo do tempo, a forma de energia oscila entre energia cinética, que está ligada às velocidades, e a energia potencial, que está ligada à deformação da mola e à gravidade.

Na figura 8 é possível ver separadamente a energia do movimento longitudinal e torcional. A energia do modo torsional é significativamente baixa em comparação a energia do modo longitudinal e isto está relacionado aos parâmetros físicos envolvidos. A constante elástica torsional é relativamente baixa e isso significa que o sistema tem menor resistência à deformação angular e terá menor armazenamento de energia quando comparado a um mesmo deslocamento logitudinal. Outro parâmetro importante é o momento de inércia que é uma medida do quão díficil é para um sistema iniciar o parar um movimento, quanto menor for o momento de inércia, maior será a velocidade angular para uma pequena quantidade de energia, também menor será a quantidade denergia armazenada.

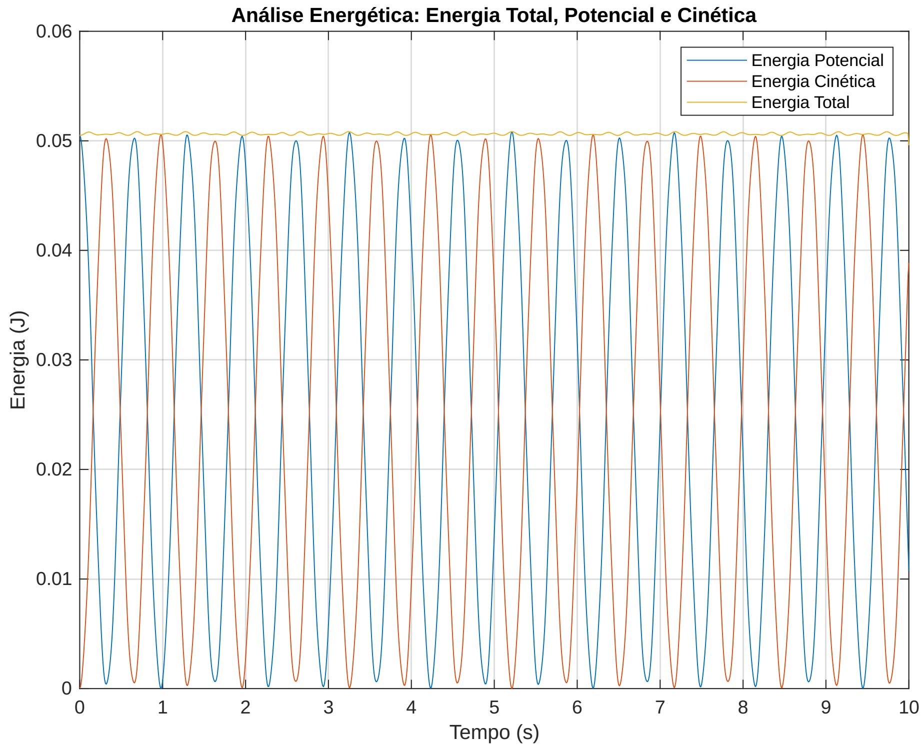

Figura 7: Distribuição da energia total ao longo do tempo. Componentes energia potencial e cinética.

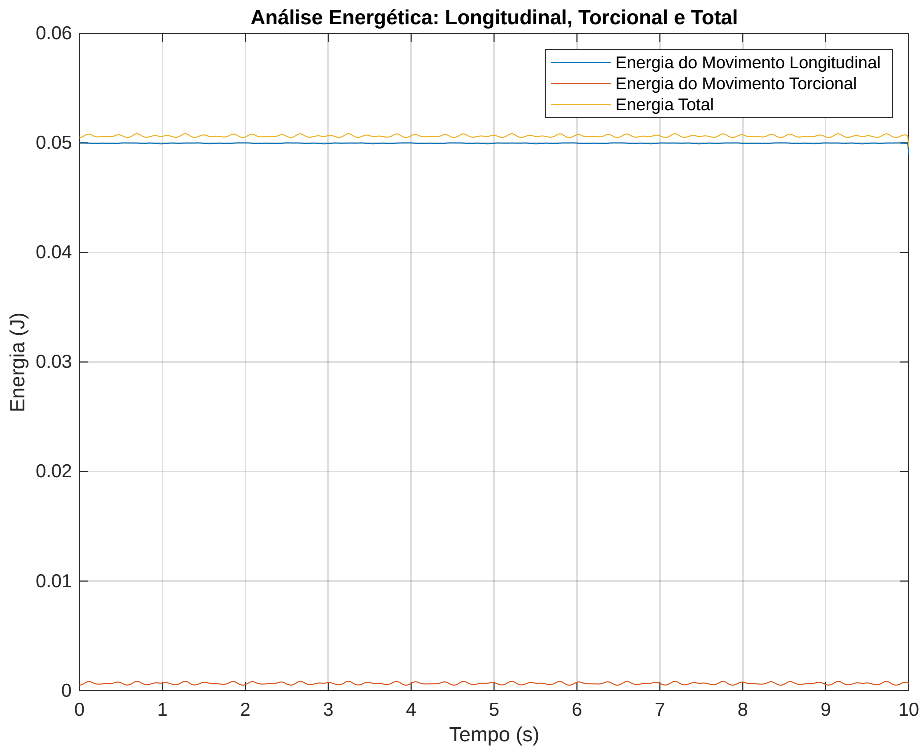

Figura 8: Distribuição da energia total ao longo do tempo. Componentes dos modos de vibração.

O gráfico da oscilação entre a energia potencial e cinética do modo logitudinal, representado na figura 9, mostra um comportamento semelhante ao gráfico da figura 7. Quando o deslocamento $z(t)$ é máximo, a energia potencial atinge seu pico, e a energia cinética é zero e nesse momento a velocidade é zero. Enquanto a energia cinética aumenta o deslocamento diminui até que atinge zero.

O gráfico para o modo trosional representado na figura 10 mostra um comportamento semelhante, no entanto, é mais influênciado pelo acoplamento com o movimento longituinal, e troca de energia do modo torsional é também influênciada pelas oscilações logitudinais.

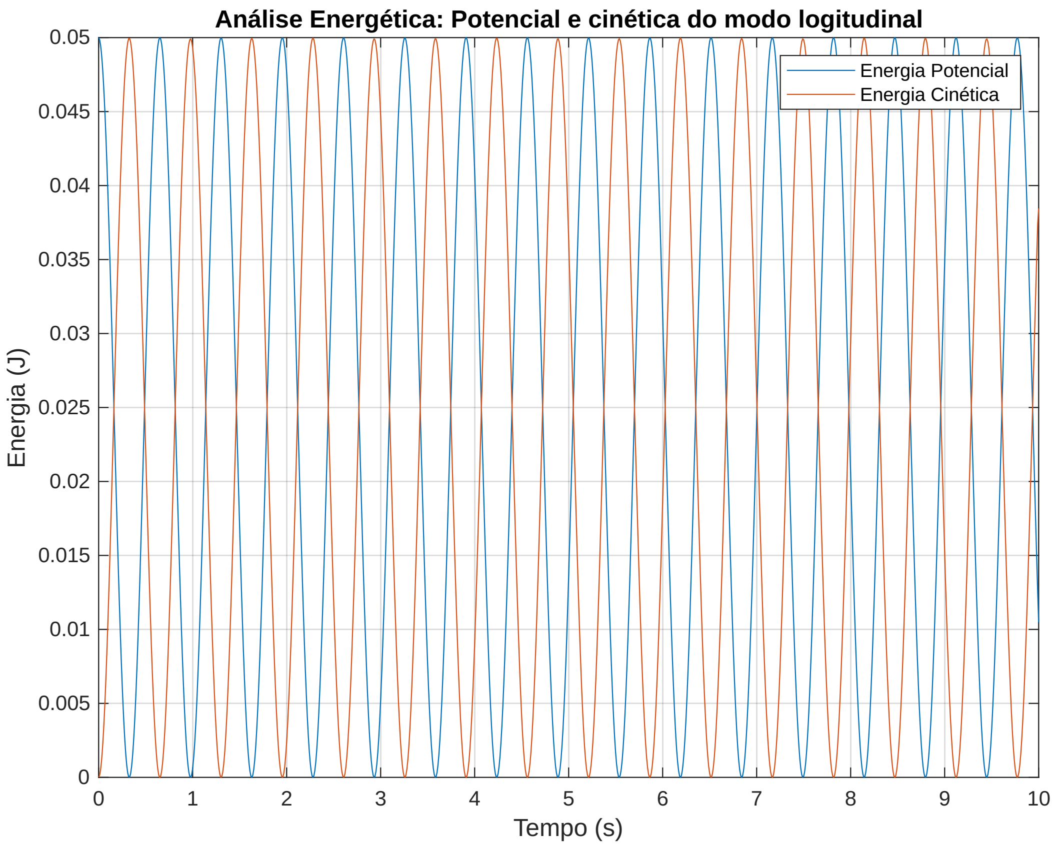

Figura 9: Distribuição da energia total ao longo do tempo - modo longitudinal

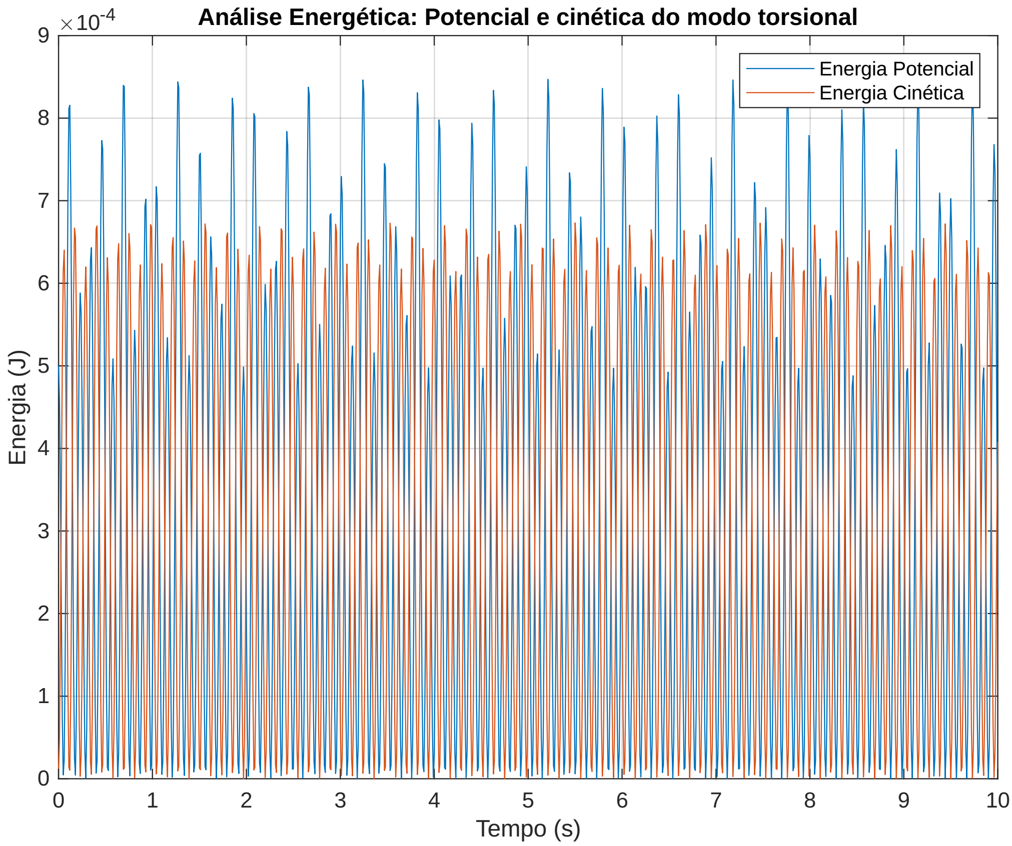

Figura 10: Distribuição da energia total ao longo do tempo - modo torsional

Os espectros de Fourier mostrados nas figuras 11 e 12 revelam picos nas frequências naturais dos sistema, associados aos modos de vibração do pêndulo. Na figura 11 o pico representa a frequência natural associada ao primeiro modo de vibração, ω_1, na figura 12 o maior pico representa a frequência natural associada ao segundo modo de vibração, ω_2.

Devido às condições iniciais escolhidas, que é uma combinação linear dos dois modos de vibração do sistema, observamos os dois picos no espectro de frequência da figura 12, ou seja, no espectro de Fourier do angulo de torção θ.

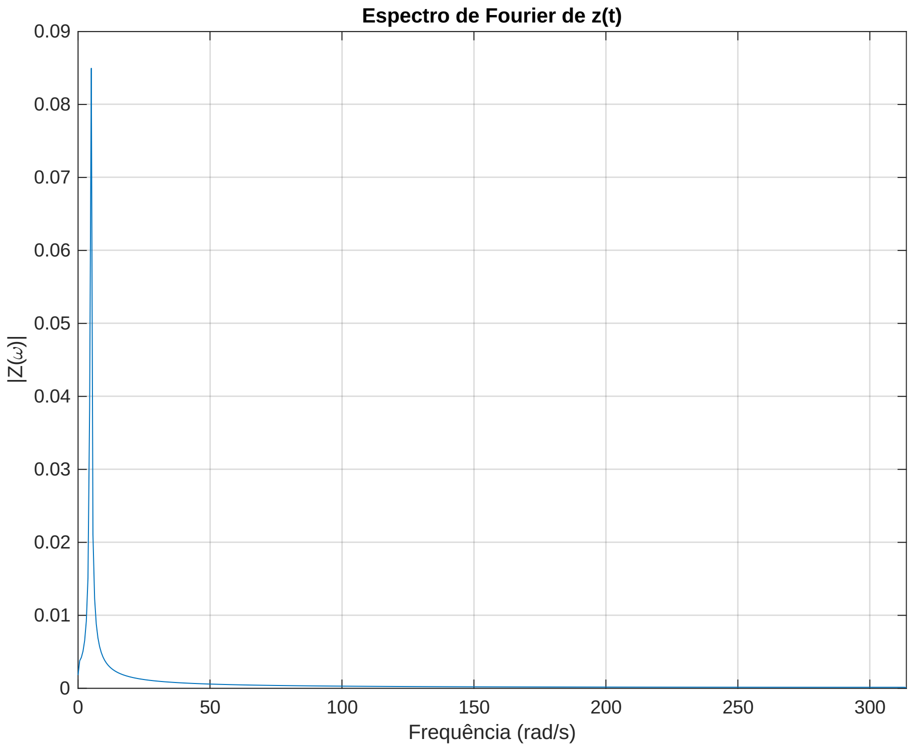

Figura 11: Espectro de Fourier do deslocamento z

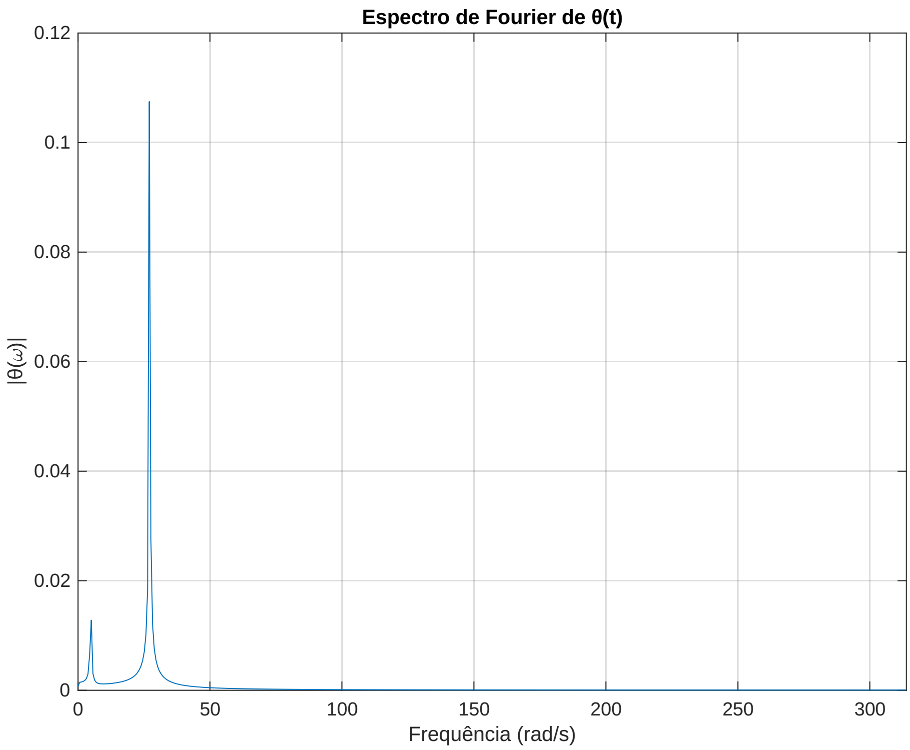

Figura 12: Espectro de Fourier do ângulo de torção θ

5 Conclusão

O estudo deste trabalho abordou a dinâmica do pêndulo de Wilberforce com foco na interação entre os modos de vibração torcional e longitudinal, e tendo como foco a compreensão do comportamento acoplado desse sistema discreto com dois graus de liberdade. Partindo da formulação das equações diferenciais, a análise modal e energética, foi possível explorar as frequências natuais do sistema e a sua transferência de energia entre os modos de vibração.

A análise modal revelou as duas frequências naturais distintas para o ssitema, que correspondem aos modos de vibração longitudinal e torsional. A aproximação numérica, validada pela solução analítica, permitiu observar nos gráficos temporais os deslocamentos relacioanados a cada modo.

Na análise energética observou-se o prinípio de conservação de energia total ao longo tempo e a oscilação entre as formas de energia potencial e cinética. A energia do modo torcional foi consideravelmente inferior a energia do modo logitudinal, e isto foi explicado através das características físicas do sistema, como a constante elástica torcional e o momento de inércia.

Por fim, o comportamento dinâmico é relevante em diversas aplicações da engenharia e a abordagem apresentada neste trabalho fornece ferramentas para análise e controle de diversos outros sistemas dinâmicos, como no caso de uma coluna de perfuração. Devido à complexidade da dinâmica de uma coluna de perfuração, optou-se por não modelar diretamente o sistema contínuo da coluna, mas sim utilizar o pêndulo como uma ferramenta para investigar o fenômeno de acoplamento entre os dois tipos de vibração presentes em uma coluna.

6 Referências Bibliográficas

[1] BAKER, G. L., AND BLACKBURN, J. A. *The Pendulum: A Case Study in Physics*. Oxford University Press, Oxford, 2005.

[2] BERG, R. E., AND MARSHALL, T. S. Wilberforce pendulum oscillations and normal modes. *American Journal of Physics 59*, 1 (1991), 32–38.

[3] INMAN, D. J. *Engineering Vibration*, 4th ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2013.

[4] KELLY, S. G. Schaum's outline of theory and problems of mechanical vibrations. *McGraw-Hill* (1996).

[5] LIMA, R. Vibrações mecânicas, notas de aula. *PUC-Rio* (2023).

[6] ORTEGA, J., AND GOLUB, G. *Scientific Computing and Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1991.

[7] PEACOCK, T., AND HADJICONSTANTINOU, N. Vibrations: Two degrees of freedom systems - wilberforce pendulum and bode plots. Tech. rep., Massachusetts Institute of Technology, 2007.

[8] SAMPAIO, R., CATALDO, E., AND BRANDÃO, A. *Análise e processamento de sinais*, vol. 22 of *Notas em matemática aplicada*. SBMAC, São Carlos-SP, 2006.

[9] SILVA, O. H. M. Pêndulo de wilberforce: uma proposta de montagem para ambientes educativos informais e laboratórios didáticos. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 30, n. 2, p. 409-426* (2013).

[10] STRANG, G. Linear algebra and its applications, 2000.

[11] SUTTON, R. M. *Demonstration experiments in physics: S18 135*. McGraw-Hill, 1938.

[12] WALTER, C., SAMPAIO, R., AND CATALDO, E. Vibrações mecânicas–resumo da teoria e exercícios. *RJ: PUC-Rio e AEB (Agência Espacial Brasileira)* (1998).

[13] WILBERFORCE, L. R. On the vibrations of a loaded spiral spring. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 38*, 233 (1894), 386–392.

7 Apêndice

```
close all
clc
clear

global m k gamma epsilon I


% PAR METROS DO SISTEMA
m = 0.43;           % massa (kg)
I = 0.000136;       % momento de inercia (kgm )
k = 10;             % constante el stica longitudinal (Nm)
gamma = 0.1;        % constante el stica torcional (Nm)
epsilon = 0.03;     % constante de acoplamento (kg.ms )

% MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ
M = [m, 0; 0, I];
K = [k, 0.5*epsilon; 0.5*epsilon, gamma];
Kt = M^(-1/2)*K*M^(-1/2);

% FREQU NCIAS E MODOS
[autovetores, autovalores] = eig(Kt);    % problema de autovalores
frequencias_naturais = sqrt(diag(autovalores));
% Normalizando os modos de vibra  o
modos_vibracao = autovetores;
for i = 1:size(modos_vibracao, 2)
    modos_vibracao(:, i) = modos_vibracao(:, i) / norm(modos_vibracao(:, i)); % Normaliza cada vetor de modo
end

fprintf('Frequ ncias naturais (rad/s):\n');
fprintf('Modo 1: %.4f rad/s\n', frequencias_naturais(1));
fprintf('Modo 2: %.4f rad/s\n', frequencias_naturais(2));

disp('Modos de vibra  o:');
disp(modos_vibracao);

% CONDI  ES INICIAIS
Z0_1 = [0.1; 0.1];
V0_1 = [0; 0];
X0_1 = [Z0_1;V0_1];

Q0_1 = modos_vibracao^(-1)*M^(1/2)*Z0_1;
dotQ01 = modos_vibracao^(-1)*M^(1/2)*V0_1;
```

```

% TEMPO DE S I M U L A   O
t_max = 10;
tspan = 0:0.01:t_max;

% S O L U   O  A N A L T I C A
omega1 = frequencias_naturais(1);
omega2 = frequencias_naturais(2);
q1 = (sqrt(omega1^2 * Q0_1(1)^2 + dotQ01(1)^2) / omega1) *
    sin(omega1 * tspan + atan(omega1 * Q0_1(1) / dotQ01(1)))
    ;
q2 = (sqrt(omega2^2 * Q0_1(2)^2 + dotQ01(2)^2) / omega2) *
    sin(omega2 * tspan + atan(omega2 * Q0_1(2) / dotQ01(2)))
    ;
Z_analitico = M^(-1/2)*modos_vibracao*[q1; q2];

% A P R O X I M A   O  N U M  R I C A
% resolvendo as e q u a   e s  diferenciais utilizando o
    m t o d o  Runge-Kutta
[t,Z] = ode45(@edo_pendulowilberforce, tspan, X0_1);

% Plotando a s o l u   o  a n a l t i c a  e  a p r o x i m a   o  n u m r i c a
     para z(t)
figure;
plot(tspan, Z_analitico(1,:), 'DisplayName', 'S o l u   o
    A n a l t i c a ');
hold on;
plot(t, Z(:,1), '--', 'DisplayName', 'A p r o x i m a   o
    N u m r i c a ');
xlabel('Tempo (t)');
ylabel('z(t)');
legend;
grid on;

% Plotando a s o l u   o  a n a l t i c a  e  a p r o x i m a   o  n u m r i c a
     para   (t)
figure;
plot(tspan, Z_analitico(2,:), 'DisplayName', 'S o l u   o
    A n a l t i c a ');
hold on;
plot(t, Z(:,2), '--', 'DisplayName', 'A p r o x i m a   o
    N u m r i c a ');
xlabel('Tempo (t)');
ylabel('  (t)');
legend;
grid on;

```

```
% erro relativo entre a s o l u   o anal t i c a e a p r o x i m a   o num r i c a
erro_z = norm(Z(:,1) - Z_analitico(1,:)) / norm(Z_analitico(1,:));
erro_theta = norm(Z(:,2) - Z_analitico(2,:)) / norm(Z_analitico(2,:));
disp(['Erro relativo para z(t): ', num2str(erro_z)]);
disp(['Erro relativo para   (t): ', num2str(erro_theta)]);


% plotando os resultados da a p r o x i m a   o num r i c a
figure;
plot(t, Z(:,1));
hold on;
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Deslocamento z (m)');


figure;
plot(t, Z(:,2));
xlabel('Tempo (s)');
ylabel(' ngulo  de T o r   o \theta (rad)');


% AN LISE NO DOM NIO DA FREQU NCIA
Fs = 1/(tspan(2) - tspan(1));      % F r e q u n c i a de amostragem

% Transformada R p i d a de Fourier
z_fft = fft(Z(:,1));
theta_fft = fft(Z(:,2));

L = length(tspan);  % Comprimento da s e q u n c i a de tempo

% Densidade espectral de p o t n c i a
P2_z = abs(z_fft / L);
P1_z = P2_z(1:L/2+1);
P1_z(2:end-1) = 2 * P1_z(2:end-1);  % Dobrando as magnitudes para considerar a parte positiva

P2_theta = abs(theta_fft / L);
P1_theta = P2_theta(1:L/2+1);
P1_theta(2:end-1) = 2 * P1_theta(2:end-1);  % Dobrando as magnitudes para considerar a parte positiva

% F r e q u n c i a s para o espectro em Hz
f = Fs * (0:(L/2)) / L;
```

```

% Convertendo frequ ncias para rad/s
omega = 2 * pi * f;

% Plotando o espectro de Fourier para z(t) em rad/s
figure;
plot(omega, P1_z);
xlabel('Frequ ncia (rad/s)');
ylabel('|Z(\omega)|');
title('Espectro de Fourier de z(t)');
xlim([0 max(omega)]); % Ajustando o limite para a frequ ncia m xima
grid on;

% Plotando o espectro de Fourier para  (t) em rad/s
figure;
plot(omega, P1_theta);
xlabel('Frequ ncia (rad/s)');
ylabel('| (\omega)|');
title('Espectro de Fourier de  (t)');
xlim([0 max(omega)]); % Ajustando o limite para a frequ ncia m xima
grid on;

% AN LISE ENERG TICA
vel_z = gradient(Z(:,1), t); % Derivada num rica da posi  o longitudinal
vel_theta = gradient(Z(:,2), t); % Derivada num rica da posi  o torcional

% Energia potencial e cin tica
E_pot_z = 0.5 * k * Z(:,1).^2;           % Energia potencial longitudinal
E_pot_theta = 0.5 * gamma * Z(:,2).^2;  % Energia potencial torcional
E_cin_z = 0.5 * m * vel_z.^2;           % Energia cin tica longitudinal
E_cin_theta = 0.5 * I * vel_theta.^2;      % Energia cin tica torcional

% Energia total
E_pot = E_pot_z + E_pot_theta;      % Energia potencial total
E_cin = E_cin_z + E_cin_theta;      % Energia cin tica total
E_total = E_pot + E_cin;            % Energia total
```

```
E_z = E_pot_z + E_cin_z;             % Energia do movimento longitudinal
E_theta = E_pot_theta + E_cin_theta; % Energia do movimento torcional

% Plotando as energias
figure;
plot(t, E_pot, t, E_cin, t, E_total);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Energia (J)');
legend('Energia Potencial', 'Energia Cin tica', 'Energia Total');
title('An lise Energ tica: Energia Total, Potencial e Cin tica');
xlim([0 t_max]);  % Ajustando para o tempo m ximo da simula  o
grid on;

figure;
plot(t, E_z, t, E_theta, t, E_total);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Energia (J)');
legend('Energia do Movimento Longitudinal', 'Energia do Movimento Torcional', 'Energia Total');
title('An lise Energ tica: Longitudinal, Torcional e Total');
xlim([0 t_max]);  % Ajustando para o tempo m ximo da simula  o
grid on;

figure;
plot(t, E_pot_z, t, E_cin_z);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Energia (J)');
legend('Energia Potencial', 'Energia Cin tica');
title('An lise Energ tica: Potencial e cin tica do modo logitudinal');
xlim([0 t_max]);  % Ajustando para o tempo m ximo da simula  o
grid on;

figure;
plot(t, E_pot_theta, t, E_cin_theta);
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Energia (J)');
legend('Energia Potencial', 'Energia Cin tica');
```

```
title('An lise Energ tica: Potencial e cin tica do modo torsional');
xlim([0 t_max/2]);  % Ajustando para o tempo m ximo da s i m u l a   o
grid on;

% Diagrama de Fase
figure;
subplot(2,1,1);
plot(Z(:,1), vel_z, 'Color', 'b'); % Modo Longitudinal (z)
xlabel('Deslocamento z [m]');
ylabel('Velocidade dz/dt [m/s]');
grid on;

subplot(2,1,2);
plot(Z(:,2), vel_theta, 'Color', 'r'); % Modo Torcional (theta)
xlabel(' ngulo     [rad]');
ylabel('Velocidade d  /dt [rad/s]');
grid on;
```

```
function DX = edo_pendulowilberforce(t,X)

global m k gamma epsilon I

% Vari veis de estado
z = X(1);      % Deslocamento longitudinal
theta = X(2);  %  ngulo  de t o r   o
vz = X(3);     % Velocidade longitudinal
ztheta = X(4); % Velocidade angular

% E q u a   e s diferenciais
dzdt = vz;                                  % Velocidade longitudinal
dthetadt = ztheta;                          % Velocidade angular
dz2dt = (-k*z - (epsilon/2)*theta)/m;     % A c e l e r a   o longitudinal
dtheta2dt = (-gamma*theta - (epsilon/2)*z)/I; % A c e l e r a   o angular

% Vetor de derivadas
DX = [dzdt; dthetadt; dz2dt; dtheta2dt];
end
```