



Fabiano Edson Carlos

**Instabilidade magnética induzida por um fio
com corrente elétrica de ferrofluido confinado
em uma célula de Hele-Shaw**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, do Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Rafael Menezes de Oliveira

Rio de Janeiro
Maio de 2024



Fabiano Edson Carlos

**Instabilidade magnética induzida por um fio
com corrente elétrica de ferrofluido confinado
em uma célula de Hele-Shaw**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Rafael Menezes de Oliveira

Orientador

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Adriano Possebon Rosa

Universidade de Brasília – UNB

Prof. Paulo Roberto de Souza Mendes

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 06 de Maio de 2024

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Fabiano Edson Carlos

Graduou-se em Engenharia Civil Aeronáutica pelo ITA: Instituto Tecnológico de Aeronáutica em 2011. Foi Tenente Engenheiro na Força Aérea Brasileira de 2011 a 2015 e Engenheiro de Petróleo na Petrobras desde 2016.

Ficha Catalográfica

Carlos, Fabiano Edson

Instabilidade magnética induzida por um fio com corrente elétrica de ferrofluido confinado em uma célula de Hele-Shaw / Fabiano Edson Carlos; orientador: Rafael Menezes de Oliveira . – 2024.

55 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2024.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Mecânica – Teses. 2. Ferrofluido. 3. Célula de Hele-Shaw. 4. Simulação Numérica. 5. Ferrodinâmica. I. Oliveira, Rafael Menezes de. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD: 621

Agradecimentos

Em primeiro lugar, eu agradeço aos meus pais, à minha esposa e à minha irmã pelo apoio emocional por todos estes anos, que me deram forças para vencer inúmeros desafios.

Eu gostaria de agradecer ao meu Orientador, Prof. Rafael Menezes de Oliveira, em especial por dispor de excelente didática, paciência para explicar temas complexos e disponibilidade que muito me motivaram a fazer este trabalho desde que cursei a sua disciplina de estabilidade hidrodinâmica. Além de um ótimo profissional, o Prof. Rafael foi um grande amigo nos meus anos de mestrado.

Agradeço também ao Departamento de Engenharia Mecânica (DEM) por fornecer uma estrutura de *cluster* de servidores que me permitiu realizar simulações numéricas e atingir os resultados apresentados neste trabalho. Agradeço especialmente ao coordenador Prof. Florian Pradelle e ao Prof. Igor Braga de Paula.

Sou grato também aos membros da minha banca examinadora, Prof. Adriano Possebon Rosa e Prof. Paulo Roberto de Souza Mendes, que generosamente se dispuseram a avaliar a minha dissertação. E agradeço também à Carina Beline, por todo apoio administrativo nos processos internos da PUC-RIO.

Agradeço também aos meus gestores na Petrobras, onde trabalho, que me apoiaram a concluir o mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Carlos, Fabiano Edson; Oliveira, Rafael Menezes de. **Instabilidade magnética induzida por um fio com corrente elétrica de ferrofluido confinado em uma célula de Hele-Shaw**. Rio de Janeiro, 2024. 55p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Empregamos simulações numéricas para calcular a forma da interface que separa uma gota de fluido não magnético cercada por um ferrofluido confinado em uma célula de Hele-Shaw. O sistema está sujeito a um campo magnético azimutal gerado por um fio condutor de corrente. O campo azimutal tem um efeito desestabilizador na interface e puxa o ferrofluido radialmente para dentro. Por outro lado, a tensão superficial tende a estabilizar as deformações da interface. O comportamento dinâmico e as formas morfológicas resultantes também são influenciados pelas viscosidades de ambos os fluidos e pela suscetibilidade magnética do ferrofluido. No presente trabalho, empregamos um método preciso de integrais de contorno baseado no formalismo de *vortex sheet* para examinar a dinâmica não linear e determinar essas deformações interfaciais. Analisamos como a interação entre efeitos magnéticos, de tensão superficial e de viscosidade afeta a morfologia da interface. Isso é capturado variando os parâmetros adimensionais que controlam o escoamento. São eles: a susceptibilidade magnética do material magnético, o contraste de viscosidade entre a gota não magnética e o ferrofluido e a tensão superficial efetiva, que pondera efeitos da tensão superficial com a intensidade do campo aplicado. Comparamos casos particulares de nossas simulações não lineares com previsões teóricas de uma análise perturbativa de modos acoplados que retém termos lineares e fracamente não lineares. A concordância entre as duas abordagens para tempos curtos corrobora a validação do método numérico e indica a validade e algumas limitações da abordagem aproximada.

Palavras-chave

Ferrofluido; Célula de Hele-Shaw; Simulação Numérica; Ferrohidrodinâmica.

Abstract

Carlos, Fabiano Edson; Oliveira, Rafael Menezes de (Advisor). **Magnetic instability induced by a current-carrying wire of ferrofluid confined in a Hele-Shaw cell.** Rio de Janeiro, 2024. 55p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

We employ numerical simulations to calculate the shape of the interface separating a nonmagnetic fluid droplet surrounded by a ferrofluid confined in a Hele-Shaw cell. The system is subjected to an azimuthal magnetic field generated by a current-carrying wire passing through the center of the nonmagnetic droplet, perpendicularly to the Hele-Shaw plane. The azimuthal field has a destabilizing effect on the interface and pulls the ferrofluid radially inwards. On the other hand, surface tension tends to stabilize interface deformations. The resulting dynamic behavior and morphological shapes are also influenced by the viscosities of both fluids and the magnetic susceptibility of the ferrofluid. In the current work, we employ an accurate boundary integral method based on the vortex-sheet formalism to examine the nonlinear dynamics and determine these interfacial deformations. We analyze how the interaction between magnetic, surface tension and viscosity effects affects the interface morphology. This is captured by varying the dimensionless parameters that control the flow. They are the magnetic susceptibility of the magnetic material, the viscosity contrast between the non-magnetic droplet and the ferrofluid, and the effective surface tension, which balances the effects of surface tension with the intensity of the applied field. We compare particular cases from our nonlinear simulations with theoretical predictions from a mode-coupling perturbative analysis that retains linear and weakly nonlinear terms. The correspondence between the two approaches for short times corroborates the validation of the numerical method and indicates the validity and some limitations of the approximate approach.

Keywords

Ferrofluid; Hele-Shaw cell; Numerical Simulation; Ferrohydrodynamics.

Sumário

1	Introdução	13
1.1	Definição de Ferrofluido e Aplicações	13
1.2	Exemplos de Instabilidade Magnética e Viscosa	17
1.3	Objetivo do Trabalho e Divisão dos Capítulos	22
2	Metodologia	24
2.1	O Problema Físico	24
2.2	Equações e Parâmetros Governantes	26
2.3	Análise Fracamente Não Linear	31
2.4	Taxa de Crescimento Linear	33
3	Resultados das Simulações	36
3.1	Influência da tensão superficial efetiva e da susceptibilidade magnética	36
3.2	Influência do contraste de viscosidade em diferentes susceptibilidades magnéticas	39
3.3	Influência do contraste de viscosidade e da susceptibilidade magnética no crescimento de padrões simétricos	42
3.4	Influência do campo magnético e do contraste de viscosidade na deformação de gotas quase simétricas	46
4	Conclusões e Perspectivas	50
	Referências bibliográficas	52

Lista de figuras

- Figura 1.1 Suspensão coloidal definida como ferrofluido respondendo a um campo magnético externo. 13
- Figura 1.2 Aplicação de ferrofluido como amortecedor de vibração em uma caixa de som. 14
- Figura 1.3 Processo de desparafinação por aquecimento da camada de ferrofluido em oleoduto proposto por Wang [6]. 14
- Figura 1.4 Exemplos de abordagens, considerações e aplicações de ferrofluido nas áreas de medicina, tratamento de água e engenharia mecânica apresentadas por Oehlsen [7]. 15
- Figura 1.5 Conceito estudado por Harischandra *et al.* [8] de deformação de uma gota de líquido em uma interface ar-ferrofluido. (A) Um conjunto de oito solenóides acima de uma interface ar-ferrofluido com uma gota de líquido, onde os solenóides podem deformar a interface para moldar o líquido. (B) Exemplos de uma gota sendo moldada, rotacionada e distorcida em formato espiral. (C) Ilustração 3D da deformação da interface ar-ferrofluido moldando a forma da gota líquida. (D) e (E) Deformação de uma gota de líquido em diferentes interfaces ar-ferrofluido deformadas (fora de escala). As linhas tracejadas vermelhas mostram o estado inicial de uma gota de óleo. 16
- Figura 1.6 Aplicação de campo magnético perpendicular à esquerda, através da passagem de corrente elétrica pelas bobinas de Helmholtz [11]. Na direita, são mostrados os padrões pico (a) e labirinto (b) [9]. 17
- Figura 1.7 Aplicação de campo magnético radial à esquerda, pela passagem de corrente elétrica em sentidos opostos, denominados anti-bobinas de Helmholtz. Na imagem à direita, é mostrada a deformação da gota de ferrofluido com dedos longos e pontudos. 18
- Figura 1.8 Aplicação de campo magnético combinado (radial e azimutal) a uma célula de Hele-Shaw. 19
- Figura 1.9 Célula girante com velocidade angular Ω em um campo azimutal gerado por um fio perpendicular à célula, com corrente elétrica I . 20
- Figura 1.10 Demonstração de uma interface instável gerada através do deslocamento de um fluido mais viscoso (glicerina) por um fluido menos viscoso (ar) apresentada por Saffman e Taylor [23], gerando a formação de dedos viscosos na interface. Este efeito ficou conhecido como instabilidade de Saffman-Taylor. 21
- Figura 1.11 Cenários de deslocamento de um fluido mais viscoso por um menos viscoso, estudados por Homsy [24]. (A) célula Hele-Shaw quadrada horizontal, (B) célula de Hele-Shaw na posição vertical, (C) célula de Hele-Shaw preenchida com um fluido miscível fortemente não-Newtoniano. 22

- Figura 2.1 Representação esquemática de uma gota não magnética de viscosidade η_2 , rodeada por ferrofluido de viscosidade η_1 , confinados entre as placas de uma célula Hele-Shaw de espessura b . O sistema está sujeito a um campo magnético azimutal H gerado por um fio condutor com corrente elétrica I . A perturbação tem amplitude $\zeta = \zeta(\alpha, t)$, e α é o ângulo azimutal. 24
- Figura 2.2 Representação do sistema no instante inicial. (a): gota de fluido não magnético com interface submetida a uma perturbação inicial aleatória (Equação 2-2). (b): com a perturbação inicial do modo máximo (Equação 2-3). (c): com a perturbação inicial combinada (Equação 2-4). 26
- Figura 2.3 Taxa de deformação linear na interface ($\lambda(n)$) para diferentes modos de Fourier (n) e valores de tensão superficial efetiva (B). No gráfico (a), $\chi = 0.25$, e no gráfico (b), $\chi = 0.35$. 35
- Figura 3.1 Resultados de simulação para $A = 0$ com perturbação inicial aleatória. χ é constante em cada coluna: (a), (d) e (g) $\chi = 0.1$, (b), (e) e (h) $\chi = 0.25$, e por fim (c), (f) e (i) $\chi = 0.5$. B é constante em cada linha: (a)–(c) $B = 0.0005$, (d)–(f) $B = 0.001$, e (g)–(i) $B = 0.0025$. Os tempos finais, t_f , são (a) 8.3, (b) 3.2, (c) 2.2, (d) 11.27, (e) 3.95, (f) 2.09, (g) 18.69, (h) 4.79, e (i) 2.34. 36
- Figura 3.2 Os gráficos (a) e (b) representam a variação de raio a partir do raio não perturbado ($R - 1$) ao longo do ângulo azimutal α para uma simulação mais instável (c) e mais estável (g) da Figura 3.1, respectivamente. 39
- Figura 3.3 Resultados de simulação para $B = 0.0005$ com perturbação inicial aleatória. A é constante em cada coluna: (a), (d) e (g) $A = -0.9$, (b), (e) e (h) $A = 0$, e por fim (c), (f) e (i) $A = 0.9$. χ é constante em cada linha: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$, e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Os tempos finais, t_f , são (a) 4.01, (b) 4.44, (c) 4.26, (d) 3.46, (e) 3.87, (f) 3.75, (g) 3.22, (h) 3.75, e (i) 3.54. 40
- Figura 3.4 Os gráficos (a) e (b) representam, respectivamente, os diferentes padrões formados pelas simulações (g) e (i) da Figura 3.3, sendo observados pela ótica da variação de raio a partir do raio não perturbado ($R - 1$) ao longo do ângulo azimutal α . 42
- Figura 3.5 Os gráficos (a) e (b) representam, na ordem, os pontos de máximo (em azul) e mínimo (em vermelho) dos padrões formados pelas imagens (g) e (i) da Figura 3.3, indicando, respectivamente, um padrão mais uniforme dos dedos e um padrão mais competitivo. 42
- Figura 3.6 Resultados de simulação para $B = 0.0005$ com perturbação inicial do modo máximo. A é constante em cada coluna: (a), (d) e (g) $A = -0.9$, (b), (e) e (h) $A = 0$, e por fim (c), (f) e (i) $A = 0.9$. χ é constante em cada linha: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$, e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Os tempos finais, t_f , são (a) 6.53, (b) 5.91, (c) 5.07, (d) 7.29, (e) 6.37, (f) 5.17, (g) 9.9, (h) 10.0, e (i) 9.99. 43

- Figura 3.7 Análise comparativa entre a simulação não linear (FNL) e a teoria fracamente não-linear de segunda ordem (2nd) no cenário em que os fluidos têm a mesma viscosidade ($A = 0$), com a tensão superficial efetiva $B = 0.0005$, susceptibilidade magnética $\chi = 0.35$, e tempo final $t_f = 5$. 45
- Figura 3.8 Os gráficos (a) e (b) representam, respectivamente, a variação de raio ($R - 1$) ao longo do ângulo azimutal α para as simulações (e) e (h) da Figura 3.6. Os gráficos indicam simetria nos padrões formados. 45
- Figura 3.9 Resultados de simulação para $B = 0.0005$ com perturbação inicial combinada. A é constante em cada coluna: (a), (d) e (g) $A = -0.9$, (b), (e) e (h) $A = 0$, e por fim (c), (f) e (i) $A = 0.9$. χ é constante em cada linha: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$, e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Os tempos finais, t_f , são (a) 3.19, (b) 3.11, (c) 2.44, (d) 3.43, (e) 3.76, (f) 3.1, (g) 2.72, (h) 3.20, e (i) 3.59. 46
- Figura 3.10 Os gráficos (a)–(d) representam, na ordem, os diferentes padrões formados pelas simulações (a), (c), (d) e (i) da Figura 3.9, sendo observados pela ótica da variação de raio ($R - 1$) ao longo do ângulo α . Lembrando que, inicialmente a gota era aproximadamente circular de raio unitário. 48
- Figura 3.11 Os gráficos (a)–(d) representam, na ordem, os pontos de máximo e mínimo dos padrões formados pelas imagens (a)–(d) da Figura 3.10, indicando, respectivamente, o avanço mais uniforme da gota na direção radial externa e uma competição maior da invasão do ferrofluido radialmente para o centro da célula de Hele-Shaw. 49

Lista de Símbolos e Abreviaturas

- * – Parâmetro adimensional
- 2nd – Formulação fracamente não-linear com termos de 2^a ordem
- \vec{a} – Aceleração do fluido || A – Contraste de viscosidade
- α – Ângulo azimutal da interface na célula de Hele-Shaw
- B – Tensão superficial efetiva
- b – Espessura da célula de Hele-Shaw
- $C(n)$ – Função de competição de dedos
- χ – Suscetibilidade magnética do ferrofluido
- \hat{e}_γ – Vetor unitário na direção azimutal
- η – Viscosidade dinâmica
- ϕ – Velocidade potencial
- FNL – Formulação não linear
- $F(n, n'), G(n, n')$ – Termos de acoplamento de 2^a ordem
- Γ – *Vortex sheet*
- H – Campo magnético
- I – Corrente elétrica
- κ – Curvatura
- λ – Taxa de crescimento da deformação linear
- λ_{DM} – Taxa de crescimento da deformação linear de Dias e Miranda (2015) [21]
- L_C – Comprimento característico
- $L_{C,DM}$ – Comprimento característico de Dias e Miranda (2015) [21]
- μ_0 – Permeabilidade magnética no vácuo
- n – Modo azimutal de Fourier
- n_{max} – Modo azimutal de Fourier com maior taxa de crescimento linear
- p – Pressão do fluido
- φ – Fase aleatória
- r – Raio
- R – Raio da interface
- \hat{s} – Vetor unitário na direção da superfície da interface
- σ – Tensão superficial
- t – Tempo
- T – Módulo da componente tangencial da velocidade na interface

T_C – Tempo característico

$T_{C,DM}$ – Tempo característico de Dias e Miranda (2015) [21]

t_f – Tempo final

θ – Ângulo tangente da interface

U – Módulo da componente normal da velocidade na interface

V_C – Velocidade característica

$V_{C,DM}$ – Velocidade característica de Dias e Miranda (2015) [21]

\vec{v} – Velocidade do fluido

ζ – Amplitude

$\dot{\zeta}$ – Taxa de deformação da amplitude

1 Introdução

1.1 Definição de Ferrofluido e Aplicações

Rosenweig [1] e Blums *et al.* [2] definem ferrofluidos como suspensões coloidais estáveis de partículas magnéticas de tamanho nanométrico suspensas em um fluido não magnético, como na Figura 1.1. Esses fluidos têm viscosidades newtonianas quando submetidos a moderadas intensidades de campo magnético e se comportam como superparamagnéticos, tendo uma resposta imediata a um campo externo aplicado. Como resultado, estes materiais podem ser facilmente manipulados por meios magnéticos.

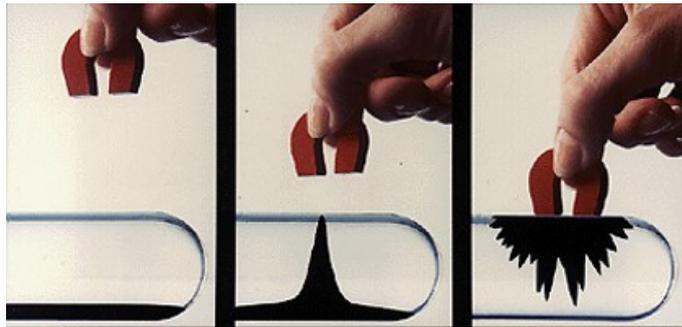


Figura 1.1: Suspensão coloidal definida como ferrofluido respondendo a um campo magnético externo.

Devido às suas características únicas, Oliveira e Miranda [3] indicam que os ferrofluidos têm atraído interesse crescente em diversas áreas de pesquisa científica incluindo física, química, engenharia, ciência dos materiais, biologia e medicina. Torres-Díaz e Rinaldi [4] e Zhang *et al.* [5] informam que desde o seu desenvolvimento, os ferrofluidos têm sido amplamente utilizados como vedações e lubrificantes (como na Figura 1.2) sendo mantidos no lugar por meio de campos magnéticos, enquanto a interação com campos magnéticos dinâmicos permitiu a fabricação de válvulas, bombas e sistemas ópticos ajustáveis à base de ferrofluido.

Na área de engenharia de petróleo, Wang [6] estudou o processo de aquecimento de origem eletromagnética em um sistema de desparafinação numa tubulação com deposição de parafina. Neste problema de garantia de

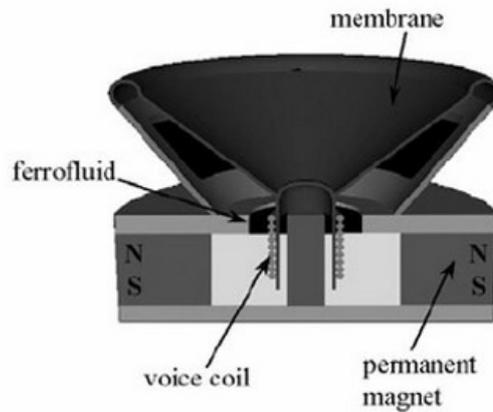


Figura 1.2: Aplicação de ferrofluido como amortecedor de vibração em uma caixa de som.

escoamento, o ferrofluido é adicionado em uma fina camada anular interna à construção de um oleoduto. Então, em um *pig* é gerado um campo magnético variável, causando o movimento das partículas magnéticas. Isto por sua vez leva a aquecimento da parede do duto, facilitando o processo de desparafinação, conforme Figura 1.3.

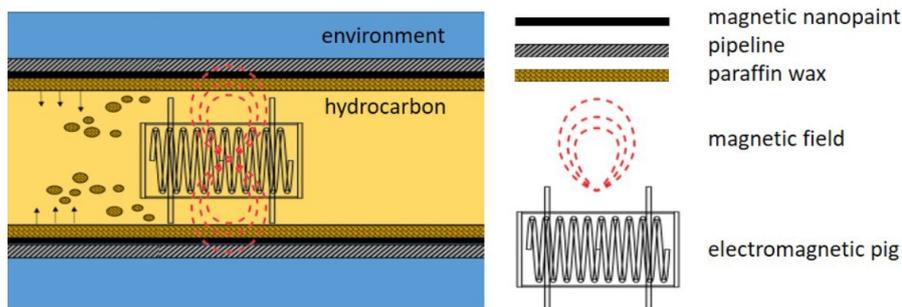


Figura 1.3: Processo de desparafinação por aquecimento da camada de ferrofluido em oleoduto proposto por Wang [6].

Oehlsen [7] fornece de forma bem ampla o escopo e as oportunidades de pesquisa em relação aos métodos de síntese de nanopartículas, surfactantes e líquidos transportadores para produção de ferrofluidos, juntamente com a reologia e aplicações de ferrofluidos nas áreas biomédica, tratamento de água e engenharia mecânica, como mostra a Figura 1.4.

Na área de biomedicina, os ferrofluidos são utilizados como biosensores para detectar tecidos e órgãos biológicos que geram campos magnéticos. Em técnicas de imagem médica, como o diagnóstico via ressonância magnética, onde se utiliza um campo magnético para fazer os prótons presentes na água dos tecidos biológicos se alinharem com o campo magnético, uma onda de radiofrequência interrompe o equilíbrio e os agentes de contraste (neste caso

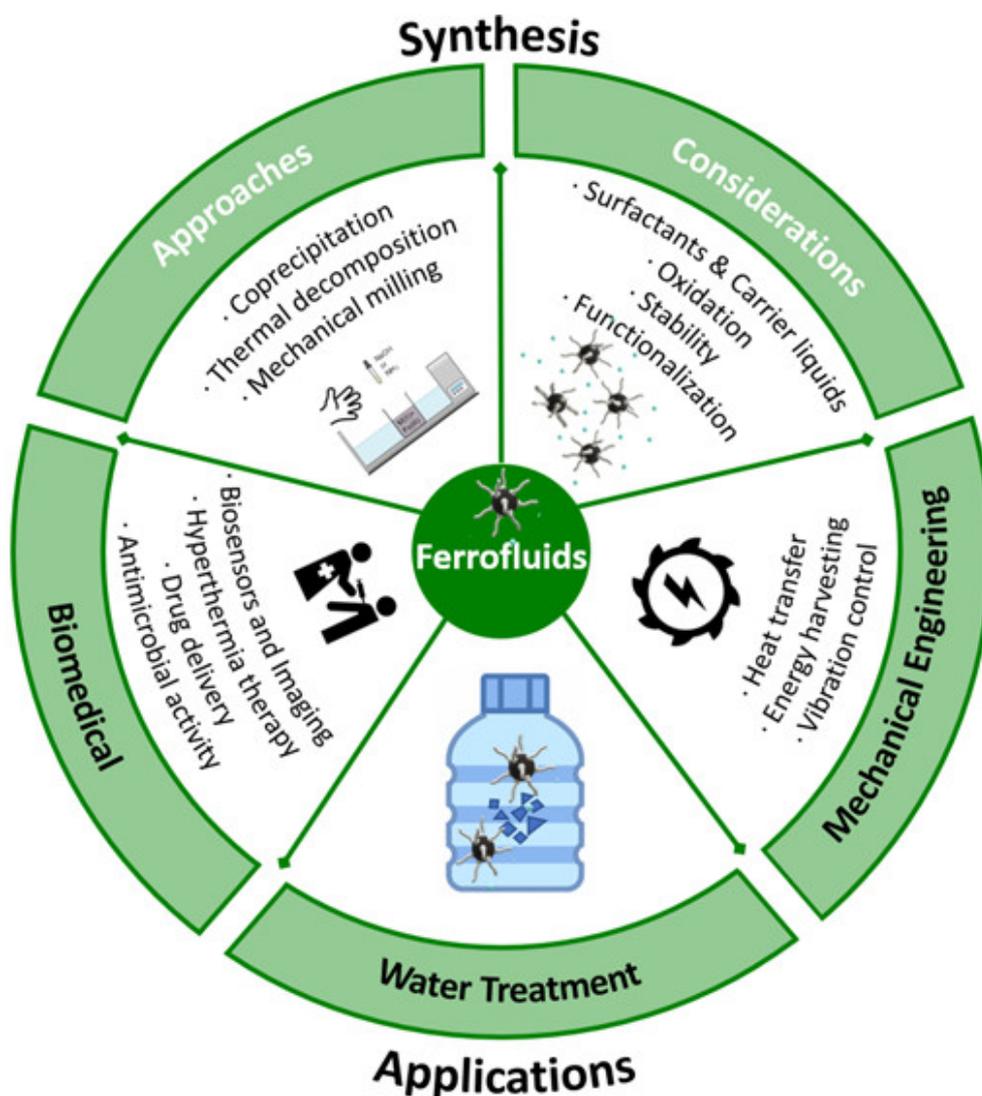


Figura 1.4: Exemplos de abordagens, considerações e aplicações de ferrofluido nas áreas de medicina, tratamento de água e engenharia mecânica apresentadas por Oehlsen [7].

o ferrofluido) detectam a energia formada quando os prótons se realinham ao campo magnético formando a imagem de resposta. E na terapia do câncer, estudou-se a hipertermia do fluido magnético, fluido este que aquece quando exposto a um campo magnético externo alternado de alta frequência, gerando calor de 41 a 46 °C, induzindo processos capazes de matar células cancerígenas. Encerrada a sessão, é possível remover o ferrofluido do corpo também com um campo magnético.

Ainda informado em Oehlsen [7], na área de tratamento de água, como ferrofluidos têm uma grande área superficial e podem ligar-se facilmente a muitas moléculas, eles podem atrair contaminantes de efluentes aquosos como de cor e turbidez, metais, matéria orgânica e bactérias. E então podem ser separados da água através da aplicação de um campo magnético externo.

E por fim, como últimos exemplos de aplicação, mostrado em Oehlsen [7], no campo da engenharia mecânica, foram desenvolvidas aplicações em transferência de calor pela aplicação de campos magnéticos externos devido a sua alta condutividade térmica, em transformação de energia por exemplo para carregar dispositivos móveis através do movimento do corpo humano com dispositivos que utilizam molas magnéticas e ferrofluidos para minimizar perdas por atrito, e no controle de vibração devido às suas características magnetoviscosas por exemplo ao suprimir a vibração induzida pelo vento em estruturas da construção civil.

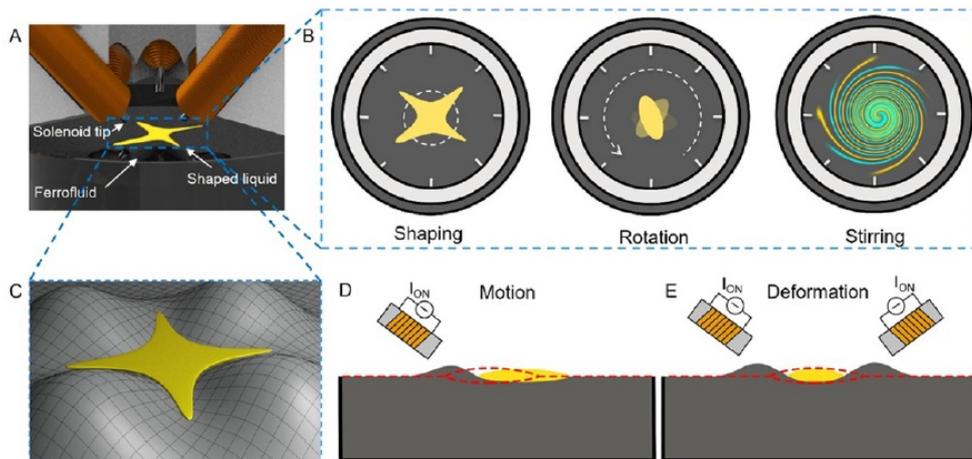


Figura 1.5: Conceito estudado por Harischandra *et al.* [8] de deformação de uma gota de líquido em uma interface ar-ferrofluido. (A) Um conjunto de oito solenóides acima de uma interface ar-ferrofluido com uma gota de líquido, onde os solenóides podem deformar a interface para moldar o líquido. (B) Exemplos de uma gota sendo moldada, rotacionada e distorcida em formato espiral. (C) Ilustração 3D da deformação da interface ar-ferrofluido moldando a forma da gota líquida. (D) e (E) Deformação de uma gota de líquido em diferentes interfaces ar-ferrofluido deformadas (fora de escala). As linhas tracejadas vermelhas mostram o estado inicial de uma gota de óleo.

Em Harischandra *et al.* [8], foram estudadas experimentalmente deformações de gotas não magnéticas inseridas em um filme fino de ferrofluido na interface ar-ferrofluido, como mostrado na Figura 1.5. Enquanto as técnicas atuais de manipulação da interface são limitadas majoritariamente a transporte e captura, nesta análise é relatado um método de modelagem do ferrofluido que pode comprimir, girar e moldar líquidos não magnéticos em uma interface ar-ferrofluido através de uma deformação programável por um campo magnético externo. O método se propõe a potencialmente abrir novas possibilidades para a fabricação de finos filmes de líquido, e para o desenvolvimento da engenharia de tecidos e de experimentos biológicos que podem ser realizados em uma interface ar-líquido.

1.2

Exemplos de Instabilidade Magnética e Viscosa

A adição de forças de corpo magnéticas às equações da mecânica dos fluidos enriquece a dinâmica desses materiais. Como resultado, é importante compreender como os materiais magnéticos respondem à aplicação de diferentes configurações de campo magnético. Além disso, a combinação conveniente da fluidez dos líquidos e das propriedades magnéticas dos sólidos torna os ferrofluidos materiais ideais para estudar uma variedade de instabilidades interfaciais e processos de formação de padrões.

Como tal, a formação de padrões interfaciais em ferrofluidos quando submetidos a um campo magnético externo tem sido estudada por vários pesquisadores. Um dos exemplos, mostrado em Cowley e Rosensweig [9], Friedrichs e Engel [10], Chen *et al.* [11], e Torres-Díaz e Rinaldi [4], é a instabilidade de Rosensweig. Este fenômeno é observado pela ação de um campo magnético uniforme aplicado perpendicularmente a ferrofluidos em repouso sobre uma superfície e leva ao desenvolvimento de uma série de picos, que resulta dos efeitos combinados de forças magnéticas, gravitacionais e de tensão superficial. Curiosamente, se uma gota de ferrofluido fica presa entre as duas placas de vidro planas e paralelas, sistema conhecido como célula de Hele-Shaw, a aplicação da mesma configuração de campo magnético perpendicular leva à formação de uma instabilidade que gera padrões labirínticos (Zahn e Shumovich [12], Chen *et al.* [11] e Tsebers e Maiorov [13]), formado por um intrincado sistema de caminhos, demonstrados na Figura 1.6.

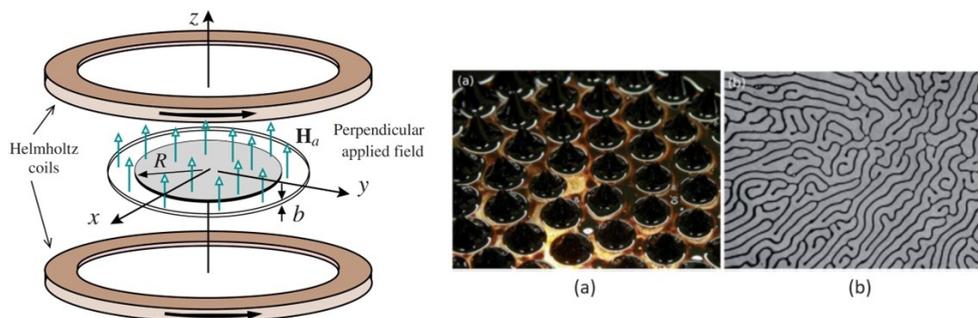


Figura 1.6: Aplicação de campo magnético perpendicular à esquerda, através da passagem de corrente elétrica pelas bobinas de Helmholtz [11]. Na direita, são mostrados os padrões pico (a) e labirinto (b) [9].

Os padrões interfaciais observados são bastante sensíveis ao campo magnético externo e a influência de outras configurações de campo foram consideradas nas deformações dinâmicas de gotas de ferrofluido confinadas em uma célula de Hele-Shaw. Oliveira e Miranda [3] consideraram uma variação simples do problema anterior. O campo magnético perpendicular para

induzir os padrões labirínticos é gerado por duas bobinas de Helmholtz com correntes elétricas na mesma direção. Ao manter a célula de Hele-Shaw na distância intermediária entre as bobinas, e simplesmente inverter a direção da corrente elétrica em uma dessas bobinas, o campo magnético que passa pela superfície de Hele-Shaw encontra-se no plano e cresce radialmente (Figura 1.7). Este campo magnético radial quando aplicado a uma gota magnética leva a padrões interfaciais que são totalmente diferentes daqueles gerados pelo campo uniforme. Ele estica a gota radialmente, levando a dedos pontiagudos.

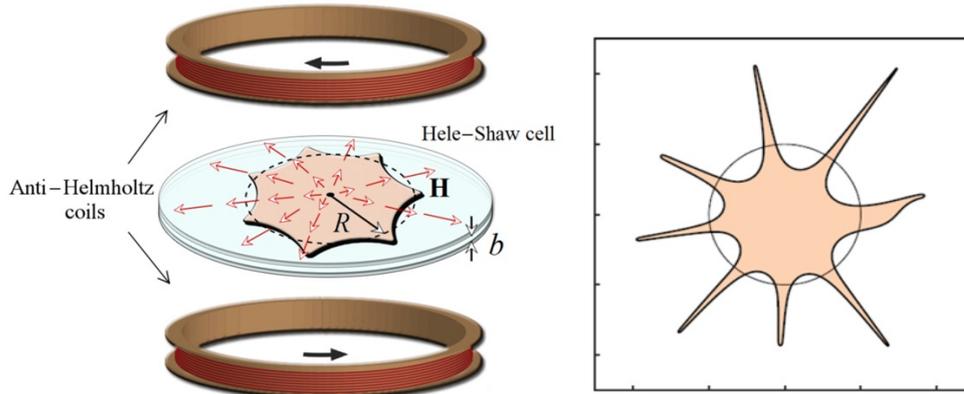


Figura 1.7: Aplicação de campo magnético radial à esquerda, pela passagem de corrente elétrica em sentidos opostos, denominados anti-bobinas de Helmholtz. Na imagem à direita, é mostrada a deformação da gota de ferrofluido com dedos longos e pontudos.

Oliveira *et al.* [14] ampliaram a análise ao submeter a gota de ferrofluido a um campo magnético combinado, gerado por um campo azimutal produzido por uma corrente elétrica em um fio superposto ao campo magnético radial previamente avaliado, mostrado na Figura 1.8. O acoplamento entre as duas configurações de campo levou à formação de dedos pontudos e distorcidos, aos quais giram conforme o padrão se estende. Neste campo magnético, Yu e Christov [15] propõem que, nas condições certas, a gota de ferrofluido confinada na célula de Hele-Shaw se comporta como uma engrenagem girante estável.

Para isto, foi realizada uma análise fracamente não-linear, inspirada no comportamento conhecido das bifurcações de Hopf (ou bifurcações de Poincaré-Andronov-Hopf), para projetar um campo magnético que varia lentamente no tempo, de modo que o tempo de viagem e a surgência da onda interfacial possam ser controlados. Como explicado em Souza [16], o termo bifurcação de Hopf se refere a um fenômeno em que uma solução de equilíbrio de uma equação de evolução se desenvolve em uma órbita periódica conforme o parâmetro de bifurcação é variado de forma controlada.

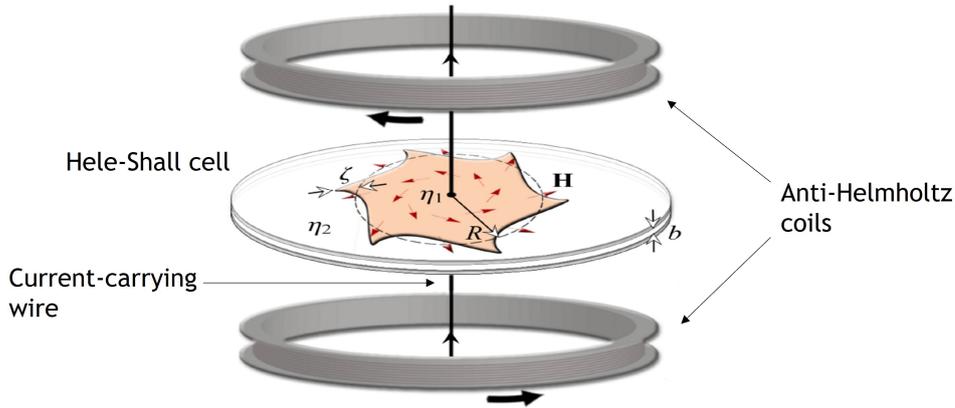


Figura 1.8: Aplicação de campo magnético combinado (radial e azimutal) a uma célula de Hele-Shaw.

Ainda na análise do sistema demonstrado na Figura 1.8, Yu e Christov [17] abordaram que estabilidade linear nem sempre implica estabilidade não-linear. Inicialmente, é demonstrado como a combinação dos campos magnéticos azimutal e radial pode manipular a forma interfacial de uma gota de ferrofluido linearmente instável na célula de Hele-Shaw. Na sequência, que a teoria fracamente não linear pode ser usada para ajustar o crescimento inicial instável. E por fim, mostra-se que a não linearidade interrompe a instabilidade e leva a uma forma permanente de gota. De forma mais específica, a gota deformada pode ser colocada em movimento com uma velocidade de rotação calculada, através de ondas não lineares viajando pela interface entre os fluidos, demonstrando um deslocamento não linear das ondas na interface fluido-fluido.

Em Yu e Christov [18], o sistema da Figura 1.8 estudado é uma gota de ferrofluido fazendo interface com o ar, que suporta ondas que viajam governadas por uma nova equação modificada do tipo Kuramoto-Sivashinsky, derivada de uma aproximação de onda longa. O equilíbrio entre produção e dissipação de energia nesta equação de onda longa permite a existência de sólitons dissipativos. Sóliton trata-se de um pulso de ondas não linear fortemente estável, que se propaga de forma livre e em velocidade constante e preservando a sua forma. Neste cenário, a velocidade de propagação e o formato do perfil das ondas podem ser ajustados através do campo magnético externo.

Em outro estudo, Jackson e Miranda [19] e Lira *et al.* [20] analisaram a resposta de uma gota de ferrofluido rodeada por um fluido não magnético em uma célula rotativa submetida apenas ao movimento azimutal campo magnético (Figura 1.9). Nesta configuração, as forças centrífugas são o mecanismo propulsor das instabilidades interfaciais, enquanto os efeitos do campo magnético e da tensão superficial tendem a estabilizar as deformações das gotas.

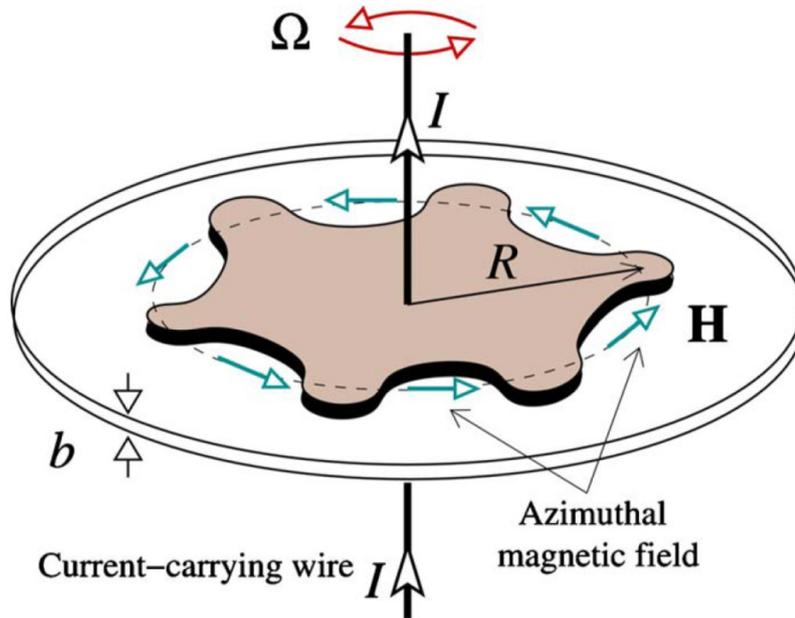


Figura 1.9: Célula girante com velocidade angular Ω em um campo azimutal gerado por um fio perpendicular à célula, com corrente elétrica I .

Curiosamente, ao inverter a ordem dos fluidos e considerando uma gota não magnética ao centro do sistema, o campo azimutal torna-se o agente desestabilizador porque o ferrofluido no entorno tenta avançar sobre a gota não magnética pela ação da força magnética aplicada no ferrofluido na direção do fio. Dias e Miranda [21] conduziram análises lineares e fracamente não lineares desta configuração, enquanto Chen e Lin [22] conduziram simulações não lineares baseadas em uma abordagem de interface difusa (*diffuse-interface approach*). O trabalho atual amplia a análise iniciada por Dias e Miranda [21] e Chen e Lin [22].

Outro fenômeno que tem impacto direto na morfologia das gotas que vamos estudar no problema físico proposto (Capítulo 2, Seção 2.1) é o efeito da instabilidade viscosa de Saffman-Taylor ou *viscous fingering*, demonstrado em Saffman e Taylor [23] ao estudar a penetração de um fluido em um meio poroso ou uma célula de Hele-Shaw contendo um líquido de maior viscosidade. Quando um fluido viscoso que preenche os vazios de um meio poroso é impulsionado para frente pela pressão de outro fluido de acionamento, a interface entre eles pode ser instável se o fluido de acionamento for o menos viscoso dos dois. Assim, a interface entre os dois fluidos cresce através de uma interpenetração, com formato similar a dedos, como mostra a Figura 1.10 Esta ocorrência é comum em reservatórios de petróleo, onde fluidos não miscíveis (como a água) ou miscíveis (como um gás composto por hidrocarbonetos e gás carbônico) deslocam o óleo contido na rocha reservatório.

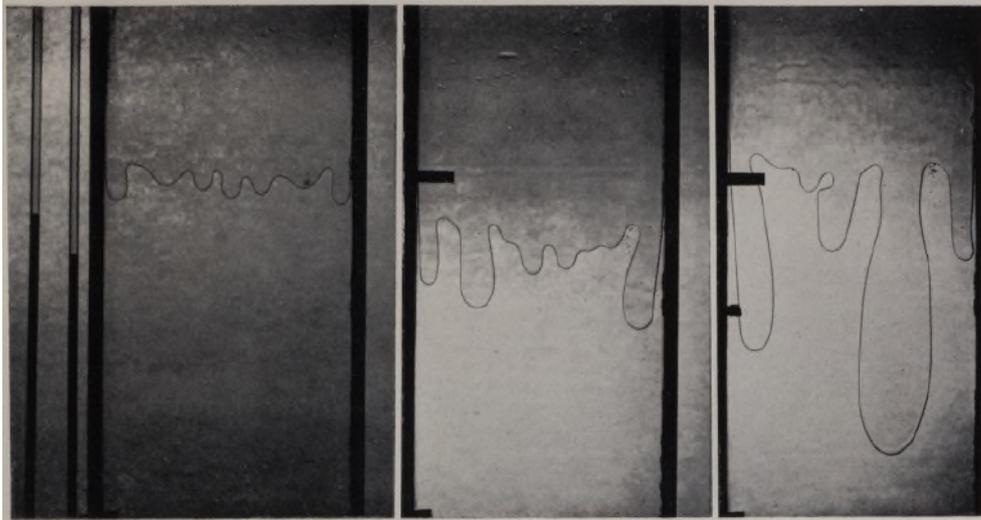


Figura 1.10: Demonstração de uma interface instável gerada através do deslocamento de um fluido mais viscoso (glicerina) por um fluido menos viscoso (ar) apresentada por Saffman e Taylor [23], gerando a formação de dedos viscosos na interface. Este efeito ficou conhecido como instabilidade de Saffman-Taylor.

Este efeito tem sido estudado em diferentes áreas, como física, química e engenharia devido à sua importância em processos industriais. Por exemplo, no trabalho de revisão da área de Homsy [24], foram estudados três cenários (Figura 1.11): (A) O padrão de dedos formando quando um material mais viscoso é substituído por um menos viscoso, totalmente miscível com ele, injetando-se a partir de um canto de uma célula Hele-Shaw quadrada horizontal, onde neste caso o fluido consiste em água injetada na glicerina; Neste exemplo específico, os padrões são impulsionados pela diferença de viscosidade e influenciados pela mistura difusiva entre os fluidos. (B) Os padrões formados quando um fluido menos denso e menos viscoso penetra em um fluido mais denso e mais viscoso imiscível com ele quando uma grande célula de Hele-Shaw é inclinada para uma posição vertical. Neste caso, tanto a gravidade como a viscosidade são forças importantes na condução da instabilidade. (C) Por fim, o padrão que resulta quando um fluido Newtoniano de baixa viscosidade injetado de uma fonte penetra uma célula de Hele-Shaw preenchida com um fluido miscível, mas fortemente não-Newtoniano.

Abrindo um parênteses no conceito apresentado, segundo Peng *et al.* [25], para os fluidos Newtonianos, a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação, enquanto os demais casos são definidos como fluidos não-Newtonianos. Entre eles os fluidos em que esta relação não é linearmente proporcional, e/ou fluidos que exigem uma tensão de cisalhamento mínima para começar a deformar (tensão limite de escoamento). Um trabalho que trata deste conceito em um cenário semelhante ao em estudo nesta

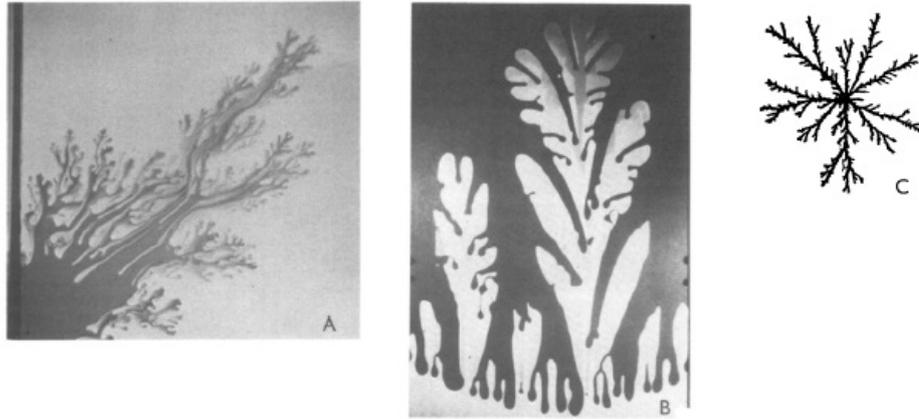


Figura 1.11: Cenários de deslocamento de um fluido mais viscoso por um menos viscoso, estudados por Homsy [24]. (A) célula Hele-Shaw quadrada horizontal, (B) célula de Hele-Shaw na posição vertical, (C) célula de Hele-Shaw preenchida com um fluido miscível fortemente não-Newtoniano.

dissertação é o de Abedi *et al.* [26], que trata da influência do deslizamento da interface em um deslocamento radial de um material viscoso em uma Célula Hele-Shaw.

Em um estudo de revisão da área da instabilidade de Saffman-Taylor, McCloud e Maher [27] realizam vários experimentos perturbativos. Este trabalho focou em variar experimentalmente parâmetros como dimensão da célula de Hele-Shaw, materiais, vazão em fluxo radial, entre outros, e analisar os resultados. Em uma linha semelhante, Casademunt [28] explora o papel dinâmico do contraste de viscosidade numericamente, termo definido matematicamente para o nosso problema físico no Capítulo 2, Seção 2.2. Os atratores concorrentes são identificados como uma solução de bolha fechada. É relatado brevemente resultados relativos a fluxos em uma célula rotativa de Hele-Shaw (sistema semelhante à Figura 1.9), singularidades topológicas e efeitos de molhamento, e também discutidas direções futuras no contexto de estudo dos dedos viscosos.

1.3

Objetivo do Trabalho e Divisão dos Capítulos

O trabalho atual amplia a análise iniciada por Dias e Miranda [21] e Chen e Lin [22] ao realizar simulações numéricas baseadas em um método de integrais de contorno que rastreia a interface entre a gota não magnética e o ferrofluido no entorno. Investigamos como a interação entre o campo azimutal, a susceptibilidade magnética, a tensão superficial, a diferença de viscosidade e diferentes formas de perturbação inicial na interface entre os fluidos contribuem para a formação de padrões.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. No Capí-

tulo 2, apresentamos as equações governantes do sistema, bem como o método de integrais de contorno (*boundary integral method*) que usa o formalismo de *vortex sheet*, abordamos uma taxa de crescimento linear e uma abordagem perturbativa fracamente não linear. No Capítulo 3, analisamos como a interação entre os efeitos magnéticos, a tensão superficial, a influência de diferentes respostas de magnetização, a diferença de viscosidade entre os fluidos e diferentes formas de perturbação inicial afetam a morfologia da interface. Finalmente, no Capítulo 4 resumimos nossas descobertas.

2 Metodologia

2.1 O Problema Físico

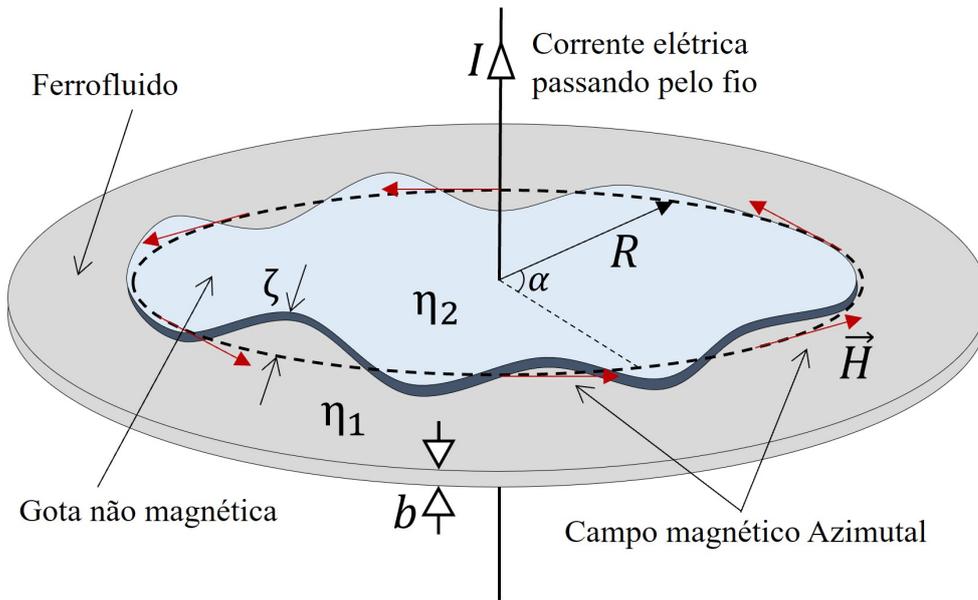


Figura 2.1: Representação esquemática de uma gota não magnética de viscosidade η_2 , rodeada por ferrofluido de viscosidade η_1 , confinados entre as placas de uma célula Hele-Shaw de espessura b . O sistema está sujeito a um campo magnético azimutal H gerado por um fio condutor com corrente elétrica I . A perturbação tem amplitude $\zeta = \zeta(\alpha, t)$, e α é o ângulo azimutal.

O problema físico é configurado conforme ilustrado na Figura 2.1 com dois fluidos incompressíveis e newtonianos. Na figura, há uma célula de Hele-Shaw de espessura b , contendo uma gota inicialmente circular de fluido não magnético de raio R e viscosidade η_2 , rodeado por um ferrofluido de viscosidade η_1 . A tensão superficial entre eles é denotada por σ . Um longo fio passa perpendicularmente pelo centro da gota e conduz uma corrente elétrica I que produz um campo magnético azimutal de magnitude H no plano da célula de Hele-Shaw, conforme explicado por Rosensweig [1], Miranda [29], e Lira *et al.* [20]. Neste trabalho, foram consideradas diferentes configurações de perturbação inicial. O raio adimensional inicial da configuração da gota não perturbada é $R_0 = 1$.

O campo azimutal desestabiliza a interface entre os fluidos, deformando o círculo que apresenta uma pequena perturbação inicial. Cabe ressaltar que a configuração de campo magnético azimutal neste cenário (como em Dias e Miranda [21] e Chen e Lin [22]) é desestabilizante porque temos uma gota não magnética cercada de ferrofluido, e seria estabilizante se a configuração se invertesse (como em Jackson e Miranda [19] e Lira *et al.* [20]), ou seja, uma gota de ferrofluido cercada de fluido não magnético.

A primeira perturbação inicial, denominada perturbação aleatória, aplicada de forma similar a Oliveira *et al.* [30], é construída a partir da superposição de 30 modos azimutais de Fourier, conforme equações abaixo. Esta técnica é

$$(x(\alpha, 0), y(\alpha, 0)) = R(\alpha)(\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (2-1)$$

com

$$R(\alpha) = R_0 \left[1 + 0.0001 \sum_{n=0}^{30} \cos(n\alpha + \varphi_n) \right] \quad (2-2)$$

onde φ_n é uma fase aleatória, e $R_0 = 1$. O segundo tipo de perturbação inicial, denominada perturbação do modo máximo, é gerada com apenas um dos modos azimutais da Equação 2-2 (também com $R_0 = 1$), como expressa na Equação 2-3. O modo escolhido, referente a n_{max} é o modo de Fourier de maior taxa de crescimento linear da deformação da interface, explicada mais adiante neste Capítulo, Seção 2.3, e demonstrada na Equação 2-32.

$$R(\alpha) = R_0 [1 + 0.0001 \cos(n_{max}\alpha)] \quad (2-3)$$

O terceiro tipo de perturbação inicial, demonstrada na Equação 2-4 com $R_0 = 1$, denominado de perturbação combinada, trata-se de uma combinação das perturbações anteriores, porém ampliando o modo azimutal de Fourier de n_{max} em um fator de 200, conforme Equação 2-4. Experimentalmente é possível obter esta configuração construindo um ímã com o formato da configuração do modo único de Fourier e posicionando-o acima da célula de Hele-Shaw para determinar a forma inicial da gota magnética. Flutuações térmicas garantirão que uma perturbação aleatória de baixa amplitude permanecerá presente. Os três tipos de perturbação inicial estão representadas na Figura 2.2.

$$R(\alpha) = R_0 \left[1 + 0.02 \cos(n_{max}\alpha) + 0.0001 \sum_{n=0}^{30} \cos(n\alpha + \varphi_n) \right] \quad (2-4)$$

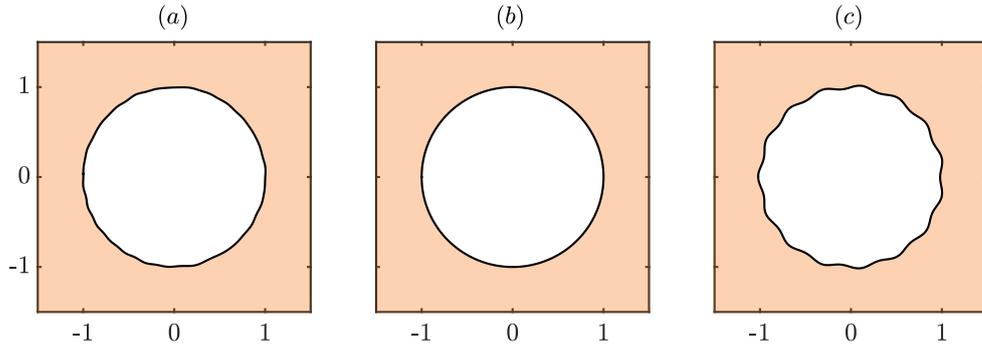


Figura 2.2: Representação do sistema no instante inicial. (a): gota de fluido não magnético com interface submetida a uma perturbação inicial aleatória (Equação 2-2). (b): com a perturbação inicial do modo máximo (Equação 2-3). (c): com a perturbação inicial combinada (Equação 2-4).

2.2

Equações e Parâmetros Governantes

A dinâmica do problema passa pelo rastreamento da interface entre a gota não magnética e o ferrofluido. Assim, iniciamos descrevendo, para cada posição da interface, a distância até o centro a partir da amplitude $\zeta = \zeta(\alpha, t)$, onde neste problema $R_0 = 1$:

$$R(\alpha, t) = R_0 + \zeta(\alpha, t) \quad (2-5)$$

A dinâmica da interface para a geometria da célula de Hele-Shaw é governada por uma Lei de Darcy modificada (Tsebers e Maiorov [13]), que inclui o efeito magnético aplicado por Oliveira e Miranda [3] e Dias e Miranda [21] para a velocidade média na folga entre as placas,

$$\vec{v}_i = -\frac{b^2}{12\eta_i} \nabla \left(p_i - \frac{1}{2} \mu_0 \chi H^2 \right), \quad (2-6)$$

onde o subscrito $i = 1$ para o ferrofluido no entorno e $i = 2$ para a gota não magnética no centro, e b é a espessura da célula de Hele-Shaw. A velocidade de cada fluido é dada por \vec{v}_i , e a pressão é p_i . μ_0 expressa a permeabilidade magnética no vácuo, χ é a susceptibilidade magnética do ferrofluido,

$$\vec{M} = \chi \vec{H}, \quad (2-7)$$

\vec{M} sendo a magnetização do ferrofluido e $\vec{H} = (I/2\pi r)\hat{e}_\alpha$ a intensidade do campo magnético radial, onde \hat{e}_α indica o vetor unitário na direção azimutal. Esta relação de magnetização linear é válida no limite de intensidades de campo magnético relativamente baixas e se a fração volumétrica das partículas

magnéticas de tamanho nanométrico não for muito alta. Esta configuração de campo é utilizada em trabalhos como Dias e Miranda [21], Yu e Christov [17] e Chen e Lin [22].

A primeira condição de contorno é especificada pela condição de Young-Laplace de salto de pressão na fronteira, conforme descrito por Rosensweig [1], Blums *et al.* [2], e Oliveira e Miranda [3], e dada por

$$p_1 - p_2 = - \left[\sigma \kappa + \frac{1}{2} \mu_0 (\vec{M} \cdot \hat{n})^2 \right]. \quad (2-8)$$

Para avaliar os estágios não lineares da dinâmica deste sistema, aplicamos o *vortex sheet formalism*, que trata-se da diferença da componente tangencial das velocidades na interface. Esta grandeza coincide com o local onde a vorticidade é não nula no sistema. Utilizaremos esta técnica uma vez que a componente tangencial das velocidades dos fluidos é descontínua na interface.

$$\Gamma = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \hat{s}, \quad (2-9)$$

Esta abordagem permite a simulação numérica precisa no tempo e explora o salto na componente tangencial da velocidade do fluido entre o ferrofluido (fluido 1) e a gota não magnética (fluido 2), onde \hat{s} representa o vetor unitário na direção do comprimento do arco.

As leis de Darcy para os dois fluidos são usadas para escrever a velocidade da interface em termos de uma integral da *vortex sheet*. A partir disso, a evolução temporal é feita por integração. Cabe ressaltar que a velocidade da interface depende da integral da vortex sheet. Assim, trata-se de uma equação integro-diferencial. Hou *et al.* [33] propôs uma simplificação para transformar esta equação em uma diferencial.

Assim como em Oliveira [32] e Hou *et al.* [33], as equações de evolução para determinar a forma da interface podem ser escritas em termos do ângulo tangente θ a partir de:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = U \hat{n} - T \hat{s} \quad (2-10)$$

onde

$$\vec{X}(\alpha, t) = (x(\alpha, t), y(\alpha, t)) = r(\alpha, t) (\cos(\phi), \sin(\phi))$$

descreve a posição da interface parametrizada por α que evolui no tempo, t . A componente normal da velocidade de interface é dada por $U(\Gamma, t)$ e a componente tangencial por $T(\Gamma, t)$. Estas velocidades dependem da integral de Γ . Novamente, em Oliveira [32] e Hou *et al.* [33], descrito como linearizar

esta equação integro-diferencial.

Assim, aplicando as Equações 2-6 e 2-8 em 2-9, utilizaremos a linha de raciocínio de Dias e Miranda [21]. A expressão do *vortex sheet* fica:

$$\Gamma = 2 \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right) \vec{v} \cdot \hat{s} + \frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \nabla \left\{ \sigma \kappa + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \chi \left[1 + \chi (\hat{n} \cdot \hat{e}_\gamma)^2 \right] \right\} \cdot \hat{s} \quad (2-11)$$

A Equação acima é dimensional. Vamos desenvolver a equação de forma adimensional, utilizando o símbolo sobrescrito * para os termos adimensionais.

Tomando por base uma Velocidade Característica (V_C) e um Comprimento Característico (L_C):

$$V_C = \frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R_0^3} \quad \text{e} \quad L_C = R_0 \quad (2-12)$$

Aplicamos V_C e L_C na Equação 2-11:

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= \frac{\tilde{\Gamma}}{V_c} \Rightarrow \\ \Gamma^* &= 2 \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right) \vec{v}^* \cdot \hat{s} + \\ &+ \frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \frac{12(\eta_1 + \eta_2)}{b^2} \frac{4\pi^2 R^3}{\mu_0 I^2} \frac{\nabla^*}{R} \left\{ \frac{\sigma \kappa^*}{R} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^{*2} R^2} \chi \left[1 + \chi (\hat{n} \cdot \hat{e}_\gamma)^2 \right] \right\} \cdot \hat{s} \Rightarrow \\ \Gamma^* &= 2 \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right) \vec{v}^* \cdot \hat{s} + \nabla^* \left\{ \frac{4\pi^2 R \sigma}{\mu_0 I^2} \kappa^* + \frac{1}{2} \frac{1}{r^{*2}} \chi \left[1 + \chi (\hat{n} \cdot \hat{e}_\gamma)^2 \right] \right\} \cdot \hat{s} \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação de forma adimensional, porém, sem o símbolo sobrescrito *:

$$\Gamma = 2 \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right) \vec{v} \cdot \hat{s} + \nabla \left\{ \frac{4\pi^2 R \sigma}{\mu_0 I^2} \kappa + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \chi \left[1 + \chi (\hat{n} \cdot \hat{e}_\gamma)^2 \right] \right\} \cdot \hat{s}$$

Por fim, podemos escrever a equação definindo parâmetros adimensionais:

$$\Gamma = -2A\vec{v} \cdot \hat{s} + \nabla \left\{ 2B\kappa + \frac{\chi}{r^2} \left[1 + \chi (\hat{n} \cdot \hat{e}_\gamma)^2 \right] \right\}, \quad (2-13)$$

onde A é o contraste de viscosidade e B a tensão superficial efetiva, que relaciona as influências da tensão superficial com a magnitude do campo magnético. Esses dois parâmetros adimensionais são dados por

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \quad \text{e} \quad B = \frac{4\pi^2\sigma R_0}{\mu_0 I^2}. \quad (2-14)$$

Esses parâmetros, juntamente com a susceptibilidade magnética, χ completam os três parâmetros adimensionais que controlam a dinâmica, chamados Parâmetros Governantes.

A modelagem de *vortex sheet* é acoplada às equações de evolução em diversos trabalhos científicos. Como exemplo de trabalhos diretamente ligados a ferrofluidos, tem Oliveira e Miranda [3] e Oliveira *et al.* [14]. Em simulação numérica em célula de Hele-Shaw tem Hou *et al.* [33], Ceniceros *et al.* [34], Hou *et al.* [35] e Tryggvason e Aref [36].

Cabe esclarecer que o *vortex sheet* e as simulações numéricas com o método de integrais de contorno permitem acompanhar a evolução da interface até estágios avançados da dinâmica não linear. O método numérico implementado não investiga cenários com tensão superficial nula, mas consegue capturar detalhes complexos da morfologia da interface em problemas de deformação de gotas confinadas regidas por tensão superficial.

Em contrapartida, para desenvolver um tratamento analítico da evolução da interface, Dias e Miranda [21] aplicaram um método perturbativo de modos acoplados, que consegue investigar o início da dinâmica não linear. Esta abordagem analítica fornece análise de estabilidade linear e tendências morfológicas através do acoplamento de segunda ordem dos modos de Fourier, descrito na sequência.

Como em Miranda e Widom [31], vamos tentar escrever uma equação de evolução aproximada para a interface perturbada, de amplitude $\zeta(\alpha, t)$. A evolução linear pode ser descrita em termos dos modos complexos de Fourier.

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta(\alpha, t) e^{-in\alpha} d\alpha \quad (2-15)$$

Onde os valores inteiros de n denotam os números discretos da onda azimutal.

Em uma abordagem perturbativa fracamente não linear, de segunda ordem, a perturbação pode ser representada por:

$$\zeta(\alpha, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_n(t) e^{in\alpha} \quad (2-16)$$

Esta abordagem consegue capturar o início do comportamento não linear do sistema.

Seguindo os mesmos passos de Dias e Miranda [21] em estudos de fluxo fracamente não linear em célula de Hele-Shaw, define-se inicialmente a expansão em Fourier para a velocidade potencial. A partir da Lei de Darcy modificada (Equação 2-6), e assumindo um sistema incompressível, ou seja, $\nabla \cdot v = 0$, a velocidade potencial ϕ ($v = -\nabla\phi$) obedece a Equação de Laplace.

Assim, a Equação de Darcy em sua forma potencial, também apresentada em Brandão e Miranda [37] fica da seguinte forma:

$$A \left(\frac{\phi_2 + \phi_1}{2} \right) + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) = \frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)}(p_2 - p_1) \quad (2-17)$$

Para resolver este equacionamento, serão necessárias duas condições de contorno, aplicadas na interface entre os fluidos.

Esta condição inclui a contribuição tradicional relacionada à tensão superficial σ e à curvatura κ , e a tração magnética normal, que considera a influência da componente normal da magnetização do ferrofluido, \vec{M} .

A curvatura perpendicular às placas é constante e pode ser desprezada para efeitos de cálculo, pois estamos trabalhando com o problema em duas dimensões na célula de Hele-Shaw.

Assim, para a curvatura da interface paralela às placas, utilizaremos a equação geral:

$$\kappa = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{(R^2 + R')^{3/2}}$$

Onde

$$\vec{R} = (x(\alpha), y(\alpha)) = (R(\alpha)\cos\alpha, R(\alpha)\sin\alpha) \quad \text{e} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{R}}{d\alpha} \quad \text{e} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{d\alpha}$$

Desenvolvendo a expansão binomial e mantendo apenas o termo de primeira ordem:

$$\kappa = -\frac{1}{R^2} \left[\zeta(\alpha, t) + \frac{\partial^2 \zeta(\alpha, t)}{\partial \alpha^2} \right] \quad (2-18)$$

Uma vez equacionado o lado direito, vamos equacionar o lado esquerdo da lei de Darcy modificada (Equação 2-17). Tentaremos escrever as velocidades potenciais (ϕ) em termos de perturbação de amplitude (ζ).

Para resolver as equações envolvendo velocidade potencial na formulação fracamente não linear, faremos uma solução por separação de variáveis ($\phi = R(r)S(\alpha)$), a partir da solução geral abaixo ($\nabla^2\phi = 0$ para ambos os fluidos).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (2-19)$$

Após resolvermos a equação acima, chegamos em:

$$\phi_1(R, \alpha) = \sum_{n \neq 0} \phi_{1n} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{|n|} e^{in\alpha} \quad \text{e} \quad \phi_2(R, \alpha) = \sum_{n \neq 0} \phi_{2n} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{|n|} e^{in\alpha}$$

Para calcular ϕ_{1n} e ϕ_{2n} , precisamos de uma segunda condição de contorno. Assim, utilizaremos a condição de contorno cinemática de que a componente normal das velocidades dos fluidos é contínua através da interface, também descrita em Miranda e Widom [31]:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial R}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right]_{r=R} \quad (2-20)$$

Como $R = R_0 + \zeta$, então $\frac{\partial R}{\partial t} = \dot{\zeta}$. Assim:

$$\phi_{1n} = \frac{1}{|n|} \dot{\zeta} \quad \text{e} \quad \phi_{2n} = -\frac{1}{|n|} \dot{\zeta} \quad (2-21)$$

Este equacionamento é utilizado nas Seções seguintes, referentes à análise fracamente não linear e à taxa de crescimento linear.

2.3

Análise Fracamente Não Linear

Mantendo os termos de segunda ordem em ζ da transformada de Fourier, temos a seguinte equação adimensional de movimento para as amplitudes de perturbação, para $n \neq 0$,

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n) \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right] \quad (2-22)$$

onde $\lambda(n)$ é a taxa de crescimento linear da Seção 2.3. As funções $F(n, n')$ e $G(n, n')$ são termos de acoplamento de segunda ordem. Em Dias e Miranda [21], os termos adimensionais são:

$$F(n, n')_{DM} = -|n| \left\{ \frac{3}{2} \frac{\chi \mu_0 I^2}{4\pi^2 \sigma R} \left[1 - \frac{1}{3} \chi n' (n' - n) \right] + \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\} \quad (2-23)$$

e

$$G(n, n')_{DM} = |n|[1 \mp (nn')] - 1 \quad (2-24)$$

onde o sinal \mp irá variar no sentido oposto do argumento.

O cálculo do termo adimensional $F(n, n')$ para os nossos parâmetros característicos a partir de $F(n, n')_{DM}$ (Equação 2-23) é desenvolvido a seguir.

O termo dimensional é calculado da seguinte forma: $\tilde{F} = \frac{F}{L_C T_C}$. Assim, para os nossos termos característicos:

$$\frac{F(n, n')}{L_C T_C} = \tilde{F}(n, n') = \frac{F(n, n')_{DM}}{L_{C,DM} T_{C,DM}} \Rightarrow$$

$$\frac{F(n, n')}{R \frac{12(\eta_1 + \eta_2)}{b^2} \frac{4\pi^2 R^4}{\mu_0 I^2}} = \frac{F(n, n')_{DM}}{R \frac{12(\eta_1 + \eta_2) R^3}{b^2 \sigma}} \Rightarrow$$

$$F(n, n') = F(n, n')_{DM} \frac{4\sigma\pi^2 R}{\mu_0 I^2} \Rightarrow$$

$$F(n, n') = -\frac{4\sigma\pi^2 R}{\mu_0 I^2} |n| \left\{ \frac{3}{2} \frac{\chi\mu_0 I^2}{4\pi^2 \sigma R} \left[1 - \frac{1}{3} \chi n'(n' - n) \right] + \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\} \Rightarrow$$

$$F(n, n') = -|n| \left\{ \frac{3}{2} \chi \left[1 - \frac{1}{3} \chi n'(n' - n) \right] + \frac{4\sigma\pi^2 R}{\mu_0 I^2} \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\}.$$

Lembrando que definimos o parâmetro de tensão superficial efetiva $B = \frac{4\sigma\pi^2 R}{\mu_0 I^2}$, portanto:

$$F(n, n') = -|n| \left\{ \frac{3}{2} \chi \left[1 - \frac{1}{3} \chi n'(n' - n) \right] + B \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] \right\} \quad (2-25)$$

Por outro lado, como o termo dimensional $\tilde{G} = G(n, n') L_C$ e $L_C = L_{C,DM} = R$, temos $G(n, n') = G(n, n')_{DM} \frac{L_{C,DM}}{L_C} = G(n, n')_{DM} \frac{R}{R} = G(n, n')_{DM}$

Assim, a partir da Equação 2-24, temos:

$$G(n, n') = |n|[1 \mp (nn')] - 1 \quad (2-26)$$

onde o sinal \mp irá variar no sentido oposto do argumento. Observa-se que esta equação fica inalterada, ou seja, chega-se na mesma equação apresentada em Dias e Miranda [21].

Em Brandão e Miranda [37], é apresentada a função $C(n)$:

$$C(n) = \frac{1}{2} \left\{ \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda\left(\frac{n}{2}\right) G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] + \left[F\left(\frac{n}{2}, n\right) + \lambda(n) G\left(\frac{n}{2}, n\right) \right] \right\} \quad (2-27)$$

Definida como função de competição de dedos. A ação do modo sub-harmônico quebra a simetria rotacional aumentando e diminuindo alternadamente o comprimento de cada um dos dedos. Este efeito descreve a competição de dedos.

Por exemplo, para $\chi = 0.35$, $B = 0.0005$ e $n = 16$, temos, das Equações 2-25, 2-26 e 2-32:

$$F(-8, 8) = -8 \left\{ \frac{1.05}{2} \left[1 - \frac{2.8}{3}(8 + 8) \right] + 0.0005 [1 - 4(24 - 8)] \right\} = 58.77$$

$$\text{e } F(8, 16) = 60.31$$

$$G(8, -8) = 8[1 - (-64)] - 1 = 519 \quad \text{e} \quad G(8, 16) = -1017$$

$$\lambda(8) = 8[0.35 - 0.0005(8^2 - 1)] = 2.548 \quad \text{e} \quad \lambda(16) = 3.56$$

Assim, a partir da Equação 2-27:

$$C(16) = \frac{1}{2} [58.77 + 2.548(519) + 60.31 + 3.56(-1017)] = -1975.63$$

Portanto, neste cenário, onde $C(16) < 0$, como conclusão do trabalho de Brandão e Miranda [37], há uma maior competição nos dedos do ferrofluido que entram e empurram a gota não magnética ao comparar com os dedos da gota não magnética que saem e invadem o espaço do ferrofluido. Este efeito pode ser visto nas simulações numéricas do próximo Capítulo, em especial na Figura 3.5(b) e 3.11(d).

2.4

Taxa de Crescimento Linear

Uma abordagem linear da taxa de crescimento da deformação adimensional na interface é apresentada em Dias e Miranda [21], que é independente do tempo, denominada $\lambda_{DM}(n)$:

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n \quad (2-28)$$

e

$$\lambda_{DM}(n) = |n| \left[\chi \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \sigma R} - (n^2 - 1) \right] \quad (2-29)$$

Porém, enquanto em Dias e Miranda [21] o Tempo Característico utilizado para adimensionalizar as equações foi:

$$T_{C,DM} = \frac{12\eta R^3}{b^2 \sigma} \quad (2-30)$$

Utilizaremos um Tempo Característico diferente, ou seja, $T_C = \frac{L_C}{V_C}$, sendo L_C e V_C o Comprimentos Característico e a Velocidade Característica já definidos em 2-12. Cabe ressaltar que as simulações não lineares utilizam um Tempo característico diferente.

Assim:

$$T_C = R / \left(\frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^3} \right) \Rightarrow$$

$$T_C = \frac{12(\eta_1 + \eta_2) 4\pi^2 R^4}{b^2 \mu_0 I^2} \quad (2-31)$$

Dessa forma, a taxa de crescimento linear para o nosso cenário, $\lambda(n)$, pode ser calculada a partir de $\lambda_{DM}(n)$:

$$\lambda(n) = [\lambda_{DM}(n)] (T_C) \left(\frac{1}{T_{C,DM}} \right) \Rightarrow$$

$$\lambda(n) = |n| \left[\chi \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \sigma R} - (n^2 - 1) \right] \left[\frac{12(\eta_1 + \eta_2) 4\pi^2 R^4}{b^2 \mu_0 I^2} \right] \left[\frac{b^2 \sigma}{12(\eta_1 + \eta_2) R^3} \right] \Rightarrow$$

$$\lambda(n) = |n| \left[\chi - \frac{4\pi^2 \sigma R}{\mu_0 I^2} (n^2 - 1) \right]$$

Aplicando de 2-14 o termo adimensional de tensão superficial efetiva,

$$B = \frac{4\pi^2 \sigma R}{\mu_0 I^2},$$

temos a taxa de crescimento linear de deformação na interface escrita como mostra a Equação 2-32 a seguir.

$$\lambda(n) = |n| \left[\chi - B (n^2 - 1) \right] \quad (2-32)$$

Onde a maior taxa de crescimento linear entre os diferentes valores de $\lambda(n)$ é dado por $\lambda(n_{max})$, sendo n_{max} o valor inteiro calculado mais próximo de:

$$n_{max} = \sqrt{\left\lceil \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\chi}{B} \right) \right\rceil} \quad (2-33)$$

O número de modos que influenciam na taxa de crescimento linear é limitado e varia de acordo com χ e B . Exemplos deste efeito são mostrados na Figura 2.3.

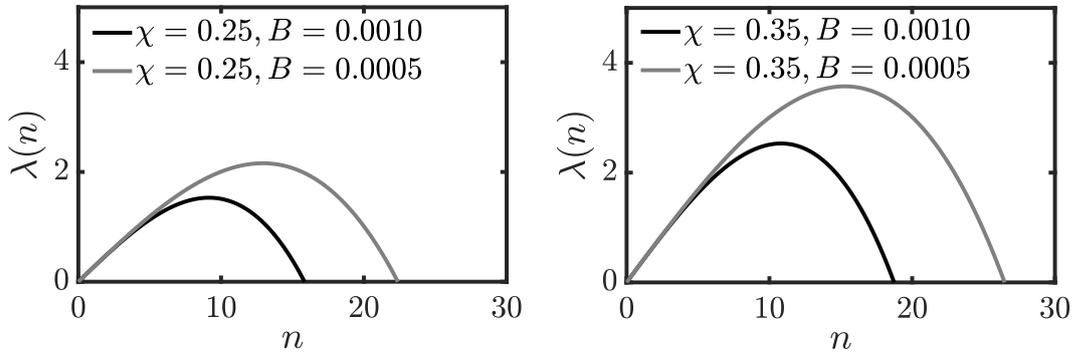


Figura 2.3: Taxa de deformação linear na interface ($\lambda(n)$) para diferentes modos de Fourier (n) e valores de tensão superficial efetiva (B). No gráfico (a), $\chi = 0.25$, e no gráfico (b), $\chi = 0.35$.

Note que a taxa de crescimento linear não é influenciada pelo Contraste de Viscosidade (A). Para observarmos a influência do Contraste de Viscosidade no sistema, é necessária uma abordagem não linear ou, pelo menos, fracamente não linear. As nossas simulações numéricas, de uma abordagem fortemente não linear pretendem revelar a influência do contraste de viscosidade nos padrões de interface gerado pelo campo magnético azimutal.

O próximo Capítulo discute as influências dos parâmetros governantes adimensionais A , B e χ na formação de padrões, para diferentes configurações de perturbação inicial. Para isso, será realizada uma simulação numérica não linear. A abordagem aproximada fracamente não linear será utilizada em uma comparação da evolução do perímetro em um estado estacionário na Seção 3.3, ao avaliar a imagem (h) da Figura 3.6 nas duas abordagens, representada pela Figura 3.7.

3 Resultados das Simulações

3.1 Influência da tensão superficial efetiva e da susceptibilidade magnética

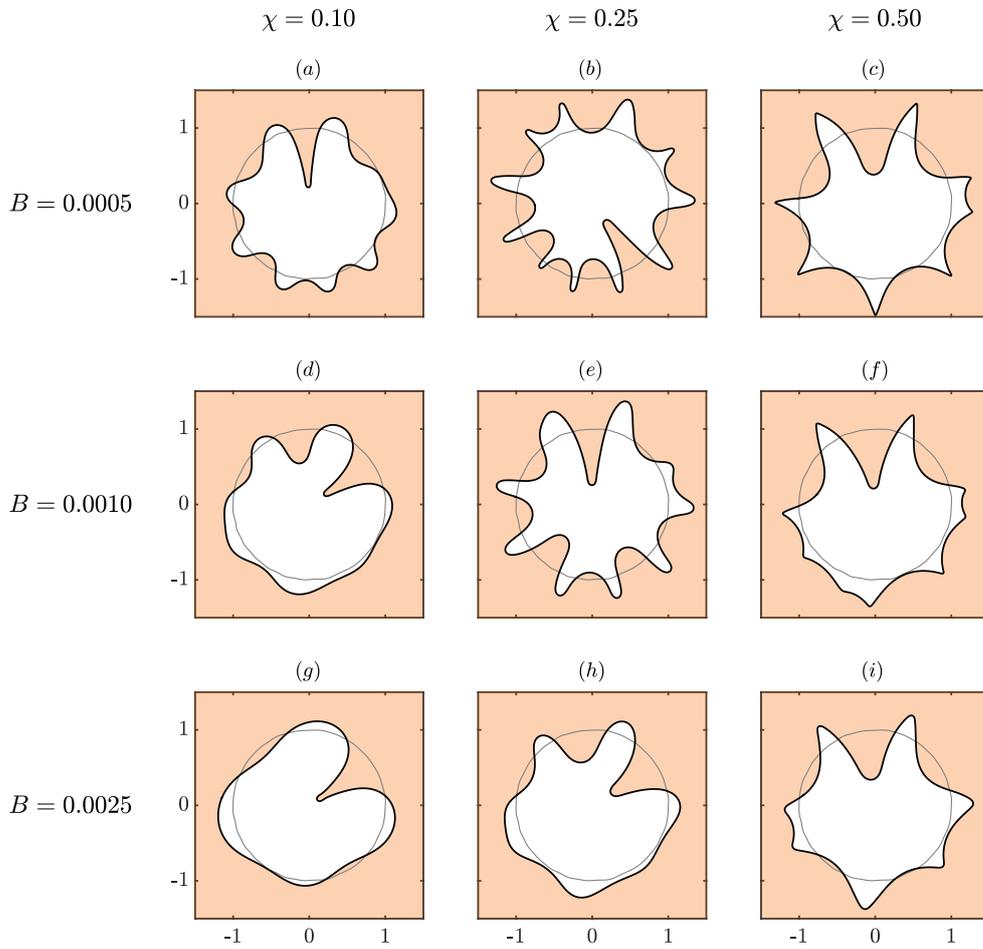


Figura 3.1: Resultados de simulação para $A = 0$ com perturbação inicial aleatória. χ é constante em cada coluna: (a), (d) e (g) $\chi = 0.1$, (b), (e) e (h) $\chi = 0.25$, e por fim (c), (f) e (i) $\chi = 0.5$. B é constante em cada linha: (a)–(c) $B = 0.0005$, (d)–(f) $B = 0.001$, e (g)–(i) $B = 0.0025$. Os tempos finais, t_f , são (a) 8.3, (b) 3.2, (c) 2.2, (d) 11.27, (e) 3.95, (f) 2.09, (g) 18.69, (h) 4.79, e (i) 2.34.

Nesta Seção, iniciamos nossa discussão analisando na Figura 3.1 os padrões interfaciais gerados pela desestabilização do campo magnético azimutal. Devido à dependência $1/r$ do campo magnético, sua magnitude aumenta a

medida que se aproxima da origem. Ele puxa o ferrofluido radialmente para dentro em direção à origem do sistema de coordenadas onde o fio com corrente elétrica está localizado. Isto tem uma forte influência nos padrões estruturais formados, e a formação de um dedo de ferrofluido invadindo rapidamente a gota não magnética é observada em todos os casos. Esta análise está também estruturada em Carlos e Oliveira [38].

Uma resposta magnética mais intensa do ferrofluido ao campo aplicado leva a uma formação de padrões mais instáveis. Isto indica que os padrões se deformam mais rapidamente fazendo que com alguns dedos se aproximem da origem. Quando isto acontece, as deformações se tornam cada vez mais rápidas e, quando um dedo atinge o fio, nosso simulador torna-se incapaz de calcular o próximo instante de tempo. Isso determina os tempos finais t_f mostrados.

Isto pode ser entendido considerando uma posição azimutal de maior amplitude inicial. Este ponto sofrerá a influência de um campo de maior magnitude, e ele terá seu crescimento amplificado em relação aos demais. Esta condição geral é encontrada para todos os casos, independentemente dos valores dos parâmetros A , B e χ , e estabelece as condições ideais para um dedo de rápido crescimento que domina a corrida em direção à origem. Como resultado, um dedo invasor de maior amplitude é observado em cada simulação. Nossa análise nesta Seção é conduzida mantendo ambos os fluidos com a mesma viscosidade ($A = 0$) e a perturbação inicial aleatória (Equação 2-2).

Analisando a influência parâmetros restantes que governam o sistema de dois fluidos: a susceptibilidade magnética do ferrofluido χ e a tensão superficial efetiva B . χ é constante ao longo de diferentes colunas: (a), (d) e (g) $\chi = 0.1$; (b), (e) e (h) $\chi = 0.25$; e (c), (f) e (i) $\chi = 0.5$. B é constante ao longo de diferentes linhas: (a)–(c) $B = 0.0005$, (d)–(f) $B = 0.001$ e (g)–(i) $B = 0.0025$. Cada imagem mostra as condições iniciais por um círculo ligeiramente perturbado de raio $R = 1$ em cinza e os tempos finais de simulação, t_f , que têm contornos pretos com a região interna branca delimitando a gota não magnética e a região externa laranja indicando o ferrofluido. Os tempos finais, t_f , são (a) 8.3, (b) 3.2, (c) 2.2, (d) 11.27, (e) 3.95, (f) 2.09, (g) 18.69, (h) 4.79 e (i) 2.34.

A partir da avaliação da Figura 3.1, procuramos compreender o papel desempenhado pela tensão superficial efetiva B e pela susceptibilidade magnética χ . Ao comparar a evolução das gotas iniciais para diferentes valores de B e χ , podemos observar o impacto das diversas formas simuladas da interface da gota com o ferrofluido.

Valores maiores de B aumentam a estabilidade do sistema em relação à morfodinâmica do padrão não linear da gota não magnética imersa em o

ferrofluido. Esta tendência é observada através de um número reduzido de ramificações observadas quando nas linhas mais baixas, para uma mesma coluna. Isto pode ser visto comparando as imagens (a) - (c), com (d) - (f) e finalmente com (g) - (i) da Figura 3.1. Esta tendência de estabilização é esperada porque valores maiores de B indicam uma maior influência relativa da tensão superficial σ . Experimentalmente, isso pode ser observado reduzindo a amperagem no fio condutor de corrente, o que aumenta o valor de B à medida que se reduz o valor da corrente elétrica I .

Por outro lado, o efeito oposto ocorre quando analisamos o aumento da susceptibilidade magnética χ . Uma resposta magnética mais intensa do ferrofluido ao campo aplicado leva a uma formação de padrões mais instáveis. Podemos observar esse efeito à medida que avançamos em diferentes colunas, para uma mesma linha. Por exemplo, considere o conjunto dado pelas imagens (g), (h) e (i) da Figura 3.1. Este conjunto de padrões aparece com maior número de ramificações. Além disso, o formato dos dedos fica mais pontudo para valores maiores de χ . Finalmente, o tempo necessário para obter os tempos finais são menores para valores maiores de χ . Isto indica uma evolução mais rápida dos padrões estruturais formados, corroborando a natureza instável do parâmetro. Observa-se que um avanço acelerado na formação dos padrões e a formação de dedos mais pontudos são eventos comuns a todas as linhas. No entanto, o número de ramificações na imagem (c) é menor que em (b). Tendo o menor B e o maior valor de χ investigados, já era esperado que a imagem (c) da Figura 3.1 seja o caso mais instável. Os dedos são bem pontiagudos, e a rápida evolução evita que haja muitas divisões de dedos, então o número das ramificações não é tão grande quanto ao da imagem (b).

O efeito combinado da tensão superficial efetiva B , que tem efeito estabilizante, com a susceptibilidade magnética χ , desestabilizante, pode ser observado ao comparar os padrões formados das imagens (c), mais instável com tempo final de 2.2, e (g), mais estável com tempo final de 18.69, da Figura 3.1. Além disso, observa-se uma formação dos dedos Mais pontudos, mais ramificados e mais rápidos na imagem (c). Para evidenciar este efeito, foram comparadas as amplitudes de cada formação no tempo final da simulação, na Figura 3.2.

Cabe ressaltar que os gráficos 3.2(a) e 3.2(b) foram construídos com $(R - 1)$ em vez de R para facilitar a identificação através do sinal, o mesmo valerá para os gráficos seguintes na mesma formulação, 3.8(a)-(b) e 3.10(a)-(d). Valores positivos correspondem aos dedos que saem, enquanto valores negativos indicam os dedos que entram. O ponto de mínimo indica o dedo com amplitude grande que se aproxima da origem e sofre a influência de campo

magnéticos mais intensos. Cabe ressaltar que os pontos de máximo e mínimo na figura 3.2(a) aparecem com curvatura bastante acentuada, enquanto os da figura 3.2(b) tem curvaturas mais suaves. Esta constatação também indica uma maior estabilização do padrão da Figura 3.1(g) se comparada à 3.1(c)

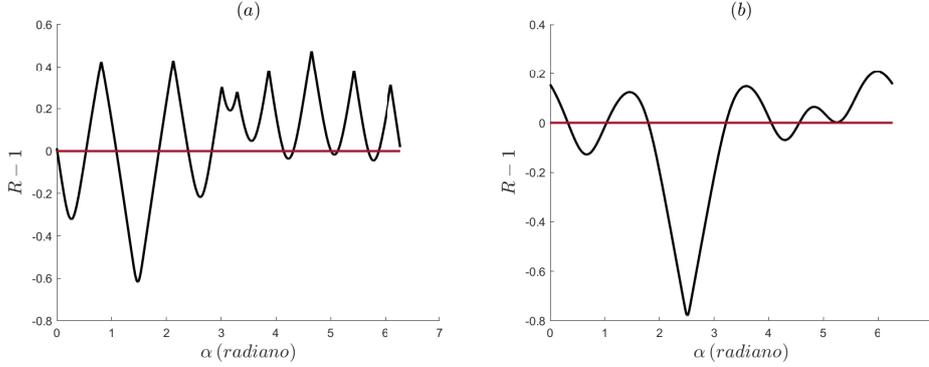


Figura 3.2: Os gráficos (a) e (b) representam a variação de raio a partir do raio não perturbado ($R - 1$) ao longo do ângulo azimutal α para uma simulação mais instável (c) e mais estável (g) da Figura 3.1, respectivamente.

3.2

Influência do contraste de viscosidade em diferentes susceptibilidades magnéticas

Nesta Seção, serão analisados na Figura 3.3 os padrões interfaciais gerados pela desestabilização do campo magnético azimutal. De forma semelhante à Seção anterior, a magnitude do campo magnético aumenta à medida que se aproxima da origem, puxando o ferrofluido radialmente para dentro em direção à origem do sistema de coordenadas. Observa-se também nestes casos a formação de um dedo de ferrofluido invadindo rapidamente a gota não magnética. A análise nesta Seção é norteadada ao fixar a tensão superficial efetiva ($B = 0.0005$), com a perturbação inicial aleatória (Equação 2-2), para observar a influência dos parâmetros restantes que governam o sistema: a susceptibilidade magnética do ferrofluido χ e o contraste de viscosidade A .

O contraste de viscosidade A é constante ao longo de diferentes colunas: (a), (d) e (g) $A = 0.9$; (b), (e) e (h) $A = 0$; e (c), (f) e (i) $A = -0.9$. Cabe reforçar que para valores positivos de A indicam que o ferrofluido (fluido externo) é menos viscoso, enquanto valores negativos indicam que a gota não magnética no centro da célula de Hele-Shaw é menos viscosa. χ é constante ao longo de diferentes linhas: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$ e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Cada imagem mostra as condições iniciais por um círculo ligeiramente perturbado de raio $R = 1$ pintado em cinza e os tempos finais de simulação, t_f , que separam a região interna branca delimitando a gota não

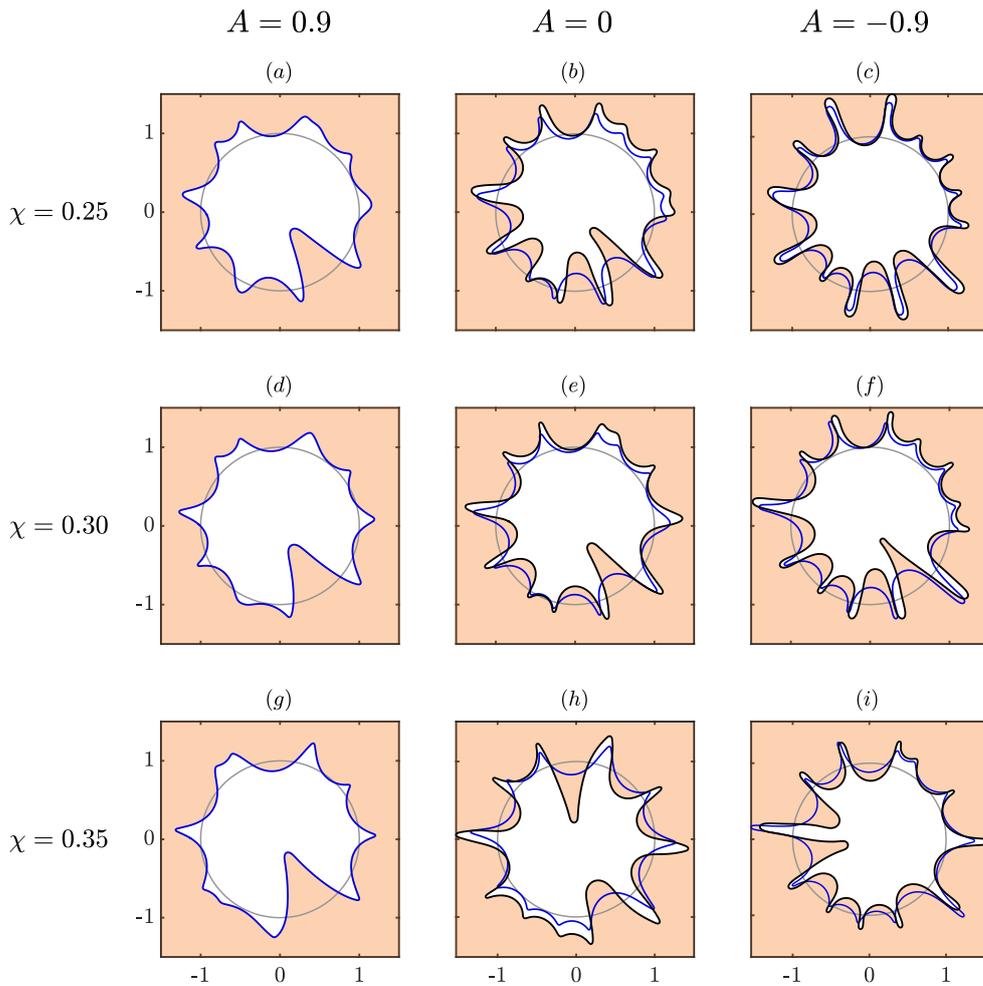


Figura 3.3: Resultados de simulação para $B = 0.0005$ com perturbação inicial aleatória. A é constante em cada coluna: (a), (d) e (g) $A = -0.9$, (b), (e) e (h) $A = 0$, e por fim (c), (f) e (i) $A = 0.9$. χ é constante em cada linha: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$, e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Os tempos finais, t_f , são (a) 4.01, (b) 4.44, (c) 4.26, (d) 3.46, (e) 3.87, (f) 3.75, (g) 3.22, (h) 3.75, e (i) 3.54.

magnética e a região externa laranja indicando o ferrofluido. Os tempos finais, t_f , são (a) 4.01, (b) 4.44, (c) 4.26, (d) 3.46, (e) 3.87, (f) 3.75, (g) 3.22, (h) 3.75, e (i) 3.54. Além disso, foi gerado um contorno em azul para identificar os mesmos passos de tempo em cada linha, que coincidem com os tempos finais da primeira coluna, ou seja, para os padrões de contorno azul: (a)–(c) $t = 4.01$, (d)–(f) $t = 3.46$, e (g)–(i) $t = 3.22$.

A partir da avaliação da Figura 3.3, procuramos compreender o papel desempenhado pelo contraste de viscosidade A e confirmar o da susceptibilidade magnética χ , em contraste à seção anterior onde as viscosidades dos fluidos eram as mesmas e a tensão superficial efetiva B variava. Ao comparar a evolução das gotas iniciais para diferentes valores de A e χ , podemos observar o impacto das diversas formas simuladas da interface da gota com o ferrofluido e algumas características morfológicas, em especial o efeito da instabilidade de

Saffman-Taylor [23], descrito na Introdução.

Nas imagens da primeira coluna da Figura 3.3, com $A = 0.9$, o que indica que o ferrofluido é menos viscoso que a gota magnética. Em contrapartida, na última coluna, com $A = -0.9$, a gota magnética é menos viscosa. Cabe lembrar que o efeito de instabilidade de Saffman-Taylor pode ser observado quando o fluido menos viscoso desloca o fluido mais viscoso. E o fluido que desloca neste cenário é o ferrofluido, atraído para o centro da célula de Hele-Shaw pelo campo magnético azimutal. Assim, isolando os demais efeitos (para os mesmos parâmetros governantes), a coluna da esquerda é instável em relação a instabilidade de Saffman-Taylor, isto é, o ferrofluido menos viscoso é atraído para o centro e deforma a gota não magnética mais viscosa. Em contrapartida, os padrões da coluna da direita são estáveis em relação a instabilidade viscosa de Saffman-Taylor.

Dessa forma, o fluido interno é menos viscoso para $A = -0.9$. Note que nestes casos temos o ferrofluido mais viscoso externo num processo de deslocamento induzido pelo campo. Esta configuração é estável em relação a instabilidade de Saffman-Taylor. Esta estabilidade pode ser observada, por exemplo, comparando o contorno em azul das imagens (i) com (g) da Figura 3.3, dado que ambas se encontram no mesmo instante de tempo. O padrão da imagem (g) tem um dedo de crescimento rápido que se aproxima da origem, enquanto a amplitude de todos os demais dedos que entram é mais modesta. Isto indica que o fato de sistema ser estável em relação a instabilidade de Saffman-Taylor ($A = -0.9$) faz com que a corrida em direção à origem do sistema de coordenadas se torne mais equilibrada, permitindo que mais modos de Fourier influenciam o padrão final que se mostra mais ramificado do que os casos mais instáveis da coluna da esquerda com $A = 0.9$.

Os gráficos (a) e (b) da Figura 3.4 representam, respectivamente, os diferentes padrões formados pelas simulações (g) e (i) da Figura 3.3, sendo observados pela ótica da variação de raio $(R-1)$ ao longo do ângulo azimutal α . Pode-se observar qualitativamente que o primeiro gráfico (3.4(a)) tem um dedo invasor de maior amplitude e uma menor variabilidade entre as amplitudes dos demais dedos, enquanto os da figura (b) tem uma diferença maior nas amplitudes dos demais dedos, excluindo o dedo que avança no centro. Este efeito é mais evidente na Figura 3.5, onde os pontos de máximo dos dedos da gota que saem em direção ao ferrofluido estão representados em azul, e os pontos de mínimo dos dedos de ferrofluido que invadem a gota estão representados em vermelho. Fisicamente, valores de A positivos fazem com que o sistema seja instável em relação a Saffman-Taylor.

Em paralelo, quando analisamos o aumento da susceptibilidade magné-

tica χ , observamos novamente o efeito já constatado na Seção anterior. Uma resposta magnética mais intensa do ferrofluido ao campo aplicado leva a uma formação de padrões mais instáveis. Isto indica que os padrões se deformam mais rapidamente fazendo que com alguns dedos se aproximem da origem.

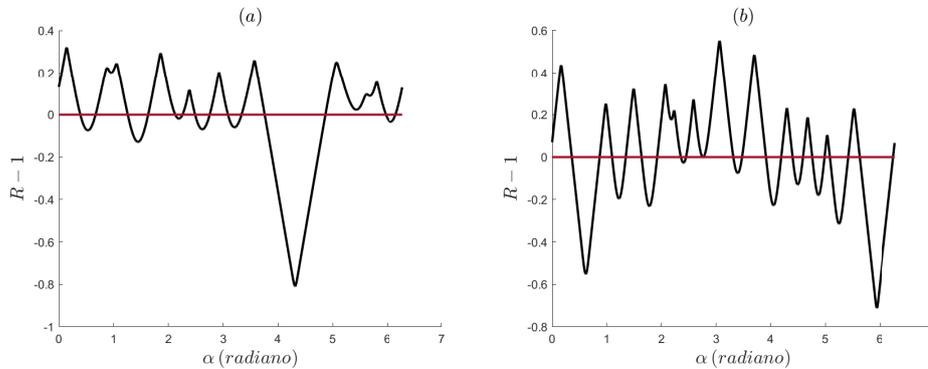


Figura 3.4: Os gráficos (a) e (b) representam, respectivamente, os diferentes padrões formados pelas simulações (g) e (i) da Figura 3.3, sendo observados pela ótica da variação de raio a partir do raio não perturbado ($R - 1$) ao longo do ângulo azimutal α .

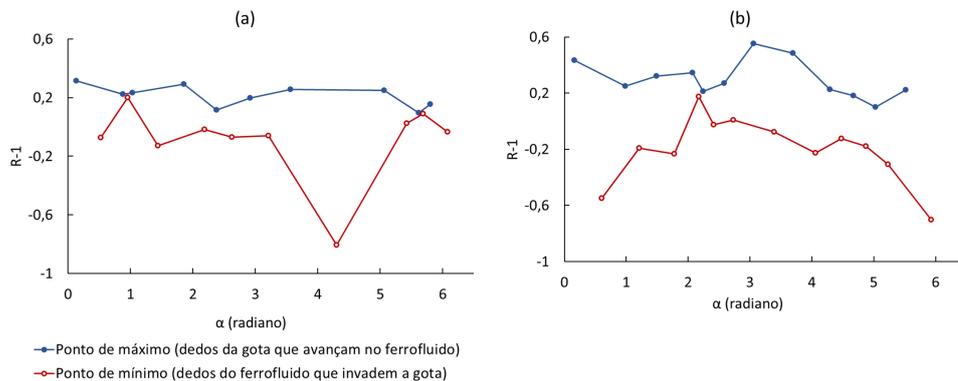


Figura 3.5: Os gráficos (a) e (b)) representam, na ordem, os pontos de máximo (em azul) e mínimo (em vermelho) dos padrões formados pelas imagens (g) e (i) da Figura 3.3, indicando, respectivamente, um padrão mais uniforme dos dedos e um padrão mais competitivo.

3.3

Influência do contraste de viscosidade e da susceptibilidade magnética no crescimento de padrões simétricos

Nesta Seção, vamos avaliar os padrões interfaciais gerados pela desestabilização do campo magnético azimutal da Figura 3.6. A premissa de simulação a respeito do campo magnético permanece, com a magnitude crescente ao se aproximar da origem, puxando o ferrofluido radialmente para dentro em direção à origem do sistema de coordenadas. Diferente das Seções anteriores, uma

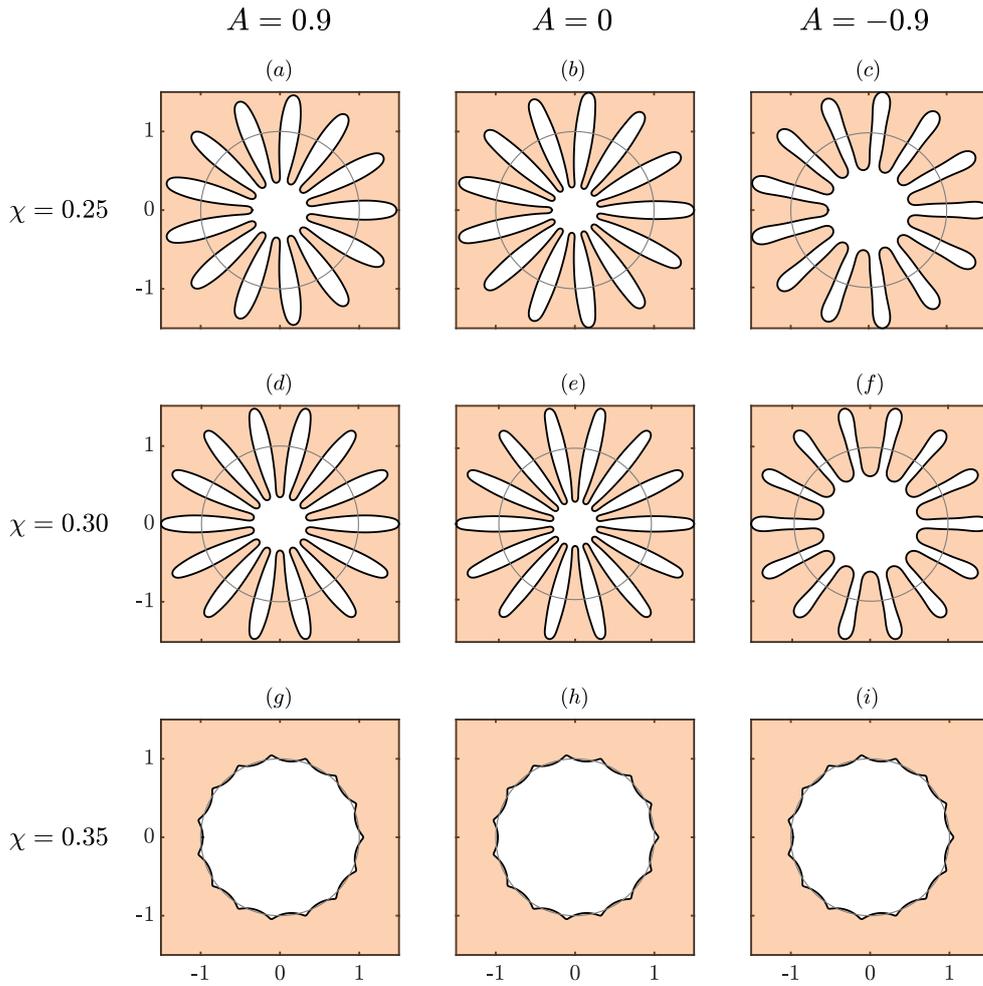


Figura 3.6: Resultados de simulação para $B = 0.0005$ com perturbação inicial do modo máximo. A é constante em cada coluna: (a), (d) e (g) $A = -0.9$, (b), (e) e (h) $A = 0$, e por fim (c), (f) e (i) $A = 0.9$. χ é constante em cada linha: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$, e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Os tempos finais, t_f , são (a) 6.53, (b) 5.91, (c) 5.07, (d) 7.29, (e) 6.37, (f) 5.17, (g) 9.9, (h) 10.0, e (i) 9.99.

alteração na condição de perturbação inicial leva a uma mudança drástica nos padrões estruturais formados. Nesta Seção, a aplicação da perturbação inicial do modo de Fourier com maior taxa de crescimento linear (Equação 2-3) leva a dois tipos de padrões distintos, a depender da combinação de B e χ : ou a gota não magnética atinge um estado estacionário em um formato próximo ao circular com dedos viscosos de pequena amplitude, como nas imagens (g) – (i), ou forma uma estrutura como nas demais imagens, (a)–(f), com dedos cuja amplitude são sempre crescente e caminham em direção à origem do sistema de coordenadas.

Vamos analisar a influência dos parâmetros restantes que governam o sistema: a susceptibilidade magnética do ferrofluido χ e o contraste de viscosidade A . A é constante ao longo de diferentes colunas: (a), (d) e (g)

$A = -0.9$ (ferrofluido mais viscoso que a gota não magnética); (b), (e) e (h) $A = 0$; e (c), (f) e (i) $A = 0.9$ (ferrofluido menos viscoso). χ é constante ao longo de diferentes linhas: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$ e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Cada imagem mostra as condições iniciais por um círculo ligeiramente perturbado de raio $R = 1$ pintado em cinza e os tempos finais de simulação, t_f , que têm contornos pretos com a região interna branca delimitando a gota não magnética e a região externa laranja indicando o ferrofluido. Os tempos finais, t_f , são (a) 6.53, (b) 5.91, (c) 5.07, (d) 7.29, (e) 6.37, (f) 5.17, (g) 9.9, (h) 10.0, e (i) 9.99. Diferente dos outros casos, as simulações de (g), (h) e (i) foram interrompidas manualmente, pois o padrão formado atingiu um estado estacionário e não houve um dedo invasor de ferrofluido invadindo a região da gota magnética.

A partir da avaliação da Figura 3.6, procuramos compreender o papel desempenhado pelo contraste de viscosidade A e pela susceptibilidade magnética χ , ao alterar a condição de perturbação inicial para a apresentada na Equação 2-3. Neste cenário, a tensão superficial efetiva também é fixada ($B = 0.0005$). Ao comparar a evolução das gotas iniciais para diferentes valores de A e χ , podemos observar o impacto das diversas formas simuladas da interface da gota com o ferrofluido e duas tendências morfológicas principais, além de novamente ser verificado o efeito da instabilidade de Saffman-Taylor [23].

Ao comparar as imagens (a) e (c) da Figura 3.6, a imagem da direita com $A = -0.9$ tem o fluido interno menos viscoso que o ferrofluido, sendo o sistema estável em relação à instabilidade de Saffman-Taylor. Este efeito se torna mais evidente na próxima Seção.

Por fim, vamos analisar nesta Seção os efeitos do χ nos padrões estruturais formados. Para os valores simulados de χ de 0.25 e 0.30, referentes às imagens (a)–(f) da Figura 3.6, observamos uma formação com dedos crescentes, pela combinação do modo de perturbação inicial coincidir com o modo de Fourier com maior taxa de crescimento dado pela equação 2-33. Dessa forma, o número de dedos bate com o valor de n_{max} calculado.

Já para a última linha, formada pelas imagens (g)–(i) da Figura 3.6, observa-se que o padrão atinge um estado estacionário, sem alteração de perímetro e de forma após um tempo de simulação. Para evidenciar o efeito, foi gerada a Figura 3.7. Enquanto a simulação (FNL da Figura 3.7) é fortemente não linear, a teoria perturbativa de segunda ordem (2nd da Figura 3.7) é fracamente não linear. Ambas preveem que um estado estacionário é alcançado, e pela Figura 3.7(b), os perímetros finais adimensionais previstos pelas duas abordagens é próximo, de valores aproximados de 6,6 e 6,8, respectivamente.

Como já observado, os padrões da Figura 3.6 apresentam comportamento simétrico bem uniforme, seja pela observação de uma formação com dedos

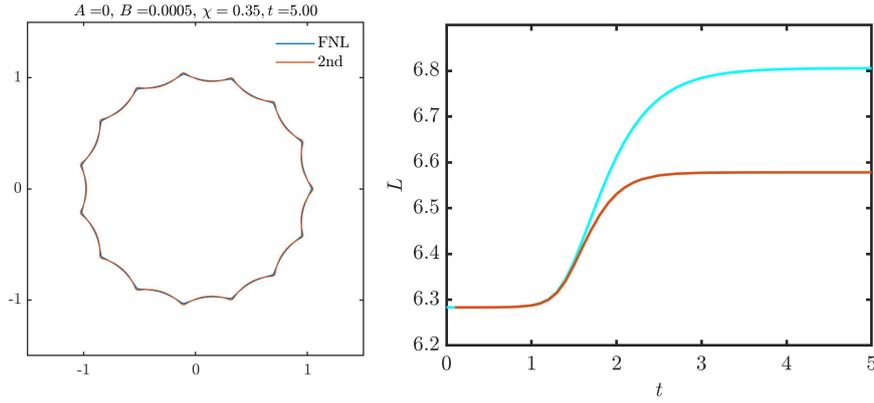


Figura 3.7: Análise comparativa entre a simulação não linear (FNL) e a teoria fracamente não-linear de segunda ordem (2nd) no cenário em que os fluidos têm a mesma viscosidade ($A = 0$), com a tensão superficial efetiva $B = 0.0005$, susceptibilidade magnética $\chi = 0.35$, e tempo final $t_f = 5$.

crecentes no caso das imagens (a)-(f), seja pelo comportamento estacionário com dedos curtos, para as imagens (g)-(i). Para evidenciar tanto o efeito do padrão oscilatório quanto pela diferença do tamanho dos dedos, foram plotados na Figura 3.8 os gráficos (a) e (b) que representam a variação de raio ($R - 1$) da interface ao longo do ângulo azimutal α , respectivamente, das imagens (e) e (i) da Figura 3.6.

Neste tipo de simulação, são observadas formações com padrão oscilatório bem uniforme. Tomamos por base os perfis representados pelas imagens (a) e (b) da Figura 3.8. Enquanto o gráfico (b) possui uma variação de raio bem pequena, o gráfico (a) possui variação bem maior.

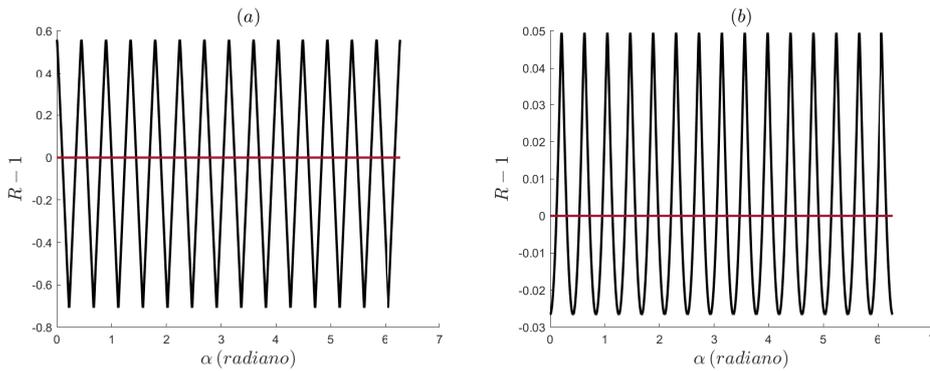


Figura 3.8: Os gráficos (a) e (b) representam, respectivamente, a variação de raio ($R - 1$) ao longo do ângulo azimutal α para as simulações (e) e (h) da Figura 3.6. Os gráficos indicam simetria nos padrões formados.

3.4

Influência do campo magnético e do contraste de viscosidade na deformação de gotas quase simétricas

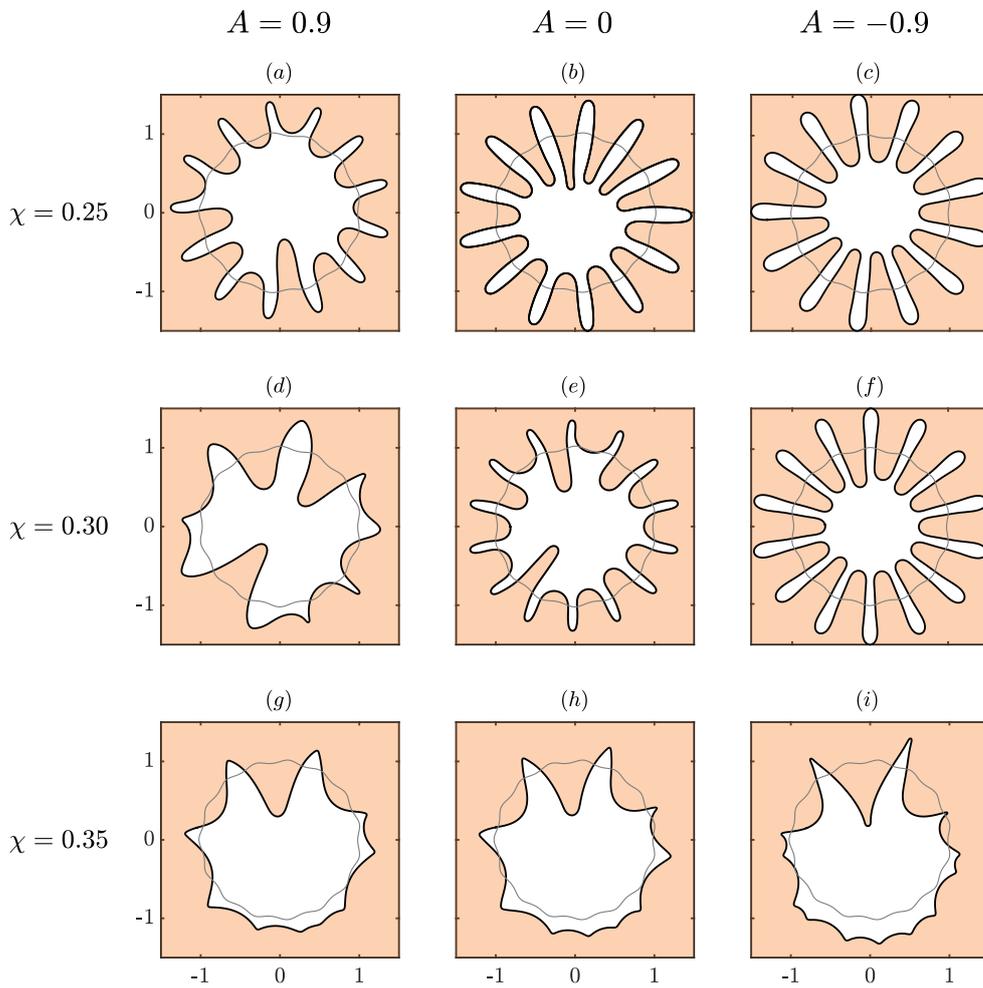


Figura 3.9: Resultados de simulação para $B = 0.0005$ com perturbação inicial combinada. A é constante em cada coluna: (a), (d) e (g) $A = -0.9$, (b), (e) e (h) $A = 0$, e por fim (c), (f) e (i) $A = 0.9$. χ é constante em cada linha: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$, e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Os tempos finais, t_f , são (a) 3.19, (b) 3.11, (c) 2.44, (d) 3.43, (e) 3.76, (f) 3.1, (g) 2.72, (h) 3.20, e (i) 3.59.

Nesta Seção, verificamos os padrões interfaciais gerados pela desestabilização do campo magnético azimutal da Figura 3.9. O efeito do campo magnético azimutal se mantém. Porém, uma combinação de efeitos na perturbação inicial leva à análises interessantes a partir da formação dos padrões observados. Nesta Seção, a tensão superficial efetiva é fixa ($B = 0.0005$) e a perturbação inicial é combinada, demonstrada na Equação 2-4. Esta perturbação inicial incentiva uma maior competição entre os diversos dedos viscosos, pois o modo de maior taxa de crescimento linear é amplificado em relação aos demais. Este efeito pode ser identificado nos diversos padrões estruturais formados da Figura 3.9.

Vamos analisar a influência dos parâmetros restantes que governam o sistema: a susceptibilidade magnética do ferrofluido χ e o contraste de viscosidade A . A é constante ao longo de diferentes colunas: (a), (d) e (g) $A = -0.9$ (gota menos viscosa); (b), (e) e (h) $A = 0$; e (c), (f) e (i) $A = 0.9$ (ferrofluido menos viscoso). χ é constante ao longo de diferentes linhas: (a)–(c) $\chi = 0.25$, (d)–(f) $\chi = 0.30$ e (g)–(i) $\chi = 0.35$. Cada imagem mostra as condições iniciais por um círculo ligeiramente perturbado de raio $R = 1$ pintado em cinza e os tempos finais de simulação, t_f , que têm contornos pretos com a região interna branca delimitando a gota não magnética e a região externa laranja indicando o ferrofluido. Os tempos finais, t_f , são (a) 3.19, (b) 3.11, (c) 2.44, (d) 3.43, (e) 3.76, (f) 3.1, (g) 2.72, (h) 3.20, e (i) 3.59.

Nas imagens (a), (b), (d), e (e) da Figura 3.9, observa-se uma maior competição entre os dedos invasores, observando um elevado número de bifurcações e mais de um dedo se aproximando do centro. Já nas imagens (c) e (f), a semelhança com o padrão simétrico se dá pelo fato do sistema ser estável em relação à instabilidade de Saffman-Taylor, uma vez que a gota não magnética é mais viscosa. Nesta configuração, os dedos de ferrofluido com amplitude definida pelo modo n_{max} tem vantagens em relação aos demais modos de Fourier na corrida em direção à origem: eles tem um crescimento inicial rápido como determinado pela taxa de crescimento linear (Equação 2-32) e sua amplitude inicial os deixa mais próximos da origem. Assim, eles estão submetidos a campos mais intensos que os puxam mais fortemente em direção ao centro. Além disso, como o sistema é estável em relação à instabilidade de Saffman-Taylor, instabilidades viscosas que poderiam alterar a dinâmica da corrida não estão presentes. A combinação desses fatores faz com que a parcela aleatória da perturbação inicial termine ficando com pouca influência na dinâmica e esses padrões tornam-se semelhantes aos observados quando apenas o modo da Equação 2-3 é imposto na perturbação inicial.

Nas imagens (g)–(i) da Figura 3.9, com $\chi = 0.35$, observa-se novamente uma resposta magnética mais intensa do ferrofluido ao campo aplicado levando a uma formação de padrões mais instáveis. Os dedos assumem um formato curto e pontudo, com um único dedo de ferrofluido invadindo a gota magnética. A maioria dos dedos tem baixa amplitude. Comparando as Figuras 3.6(g)–(i) e 3.9(g)–(i) vemos que a presença de uma parcela aleatória na perturbação inicial, mesmo que de baixa amplitude em relação a n_{max} (Equação 2-33), é suficiente para quebrar a simetria do problema e favorecer o crescimento de um único dedo de ferrofluido que se aproxima da origem. Isso faz com que esses padrões tornem-se semelhantes ao da Figura 3.3(g), gerado com os mesmos valores de B , χ , A e uma perturbação aleatória inicial de amplitude constante.

Uma diferença na forma da perturbação inicial leva a diferentes padrões formados, através dos diferentes efeitos dos parâmetros governantes do sistema. Assim, para as simulações (a), (c), (d) e (i) da Figura 3.9, observa-se diferentes padrões formados, evidenciados, respectivamente, nos gráficos (a)-(d) da Figura 3.10. É possível observar que a variação das amplitudes dos dedos de ferrofluido que entram na região da gota ($R - 1 < 0$) é bem maior do que a variação das amplitudes dos dedos da gota que invadem a região de ferrofluido ($R - 1 > 0$). Isso indica que a competição entre os dedos de ferrofluido na corrida para a origem é mais intensa, o que reflete a maior intensidade do campo magnético quanto mais próximo do fio que conduz corrente elétrica.

Para dar mais destaque à maior variação dos dedos de ferrofluido que invadem a gota em direção ao centro, foram plotados nos gráficos (a)-(d) da Figura 3.11, respectivamente, os pontos de máximo nas linhas em azul (dos dedos da gota que avançam no ferrofluido) e de mínimo das linhas em vermelho (dos dedos de ferrofluido que invadem a gota) dos padrões apresentados nos gráficos (a)-(d) da Figura 3.10.

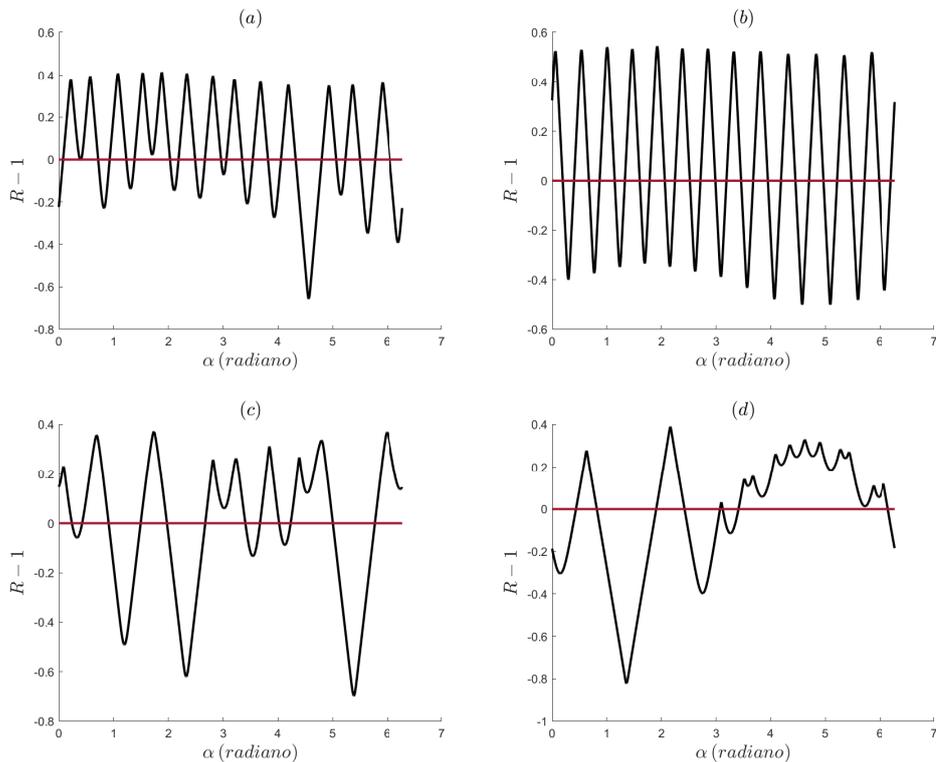


Figura 3.10: Os gráficos (a)-(d) representam, na ordem, os diferentes padrões formados pelas simulações (a), (c), (d) e (i) da Figura 3.9, sendo observados pela ótica da variação de raio ($R - 1$) ao longo do ângulo α . Lembrando que, inicialmente a gota era aproximadamente circular de raio unitário.

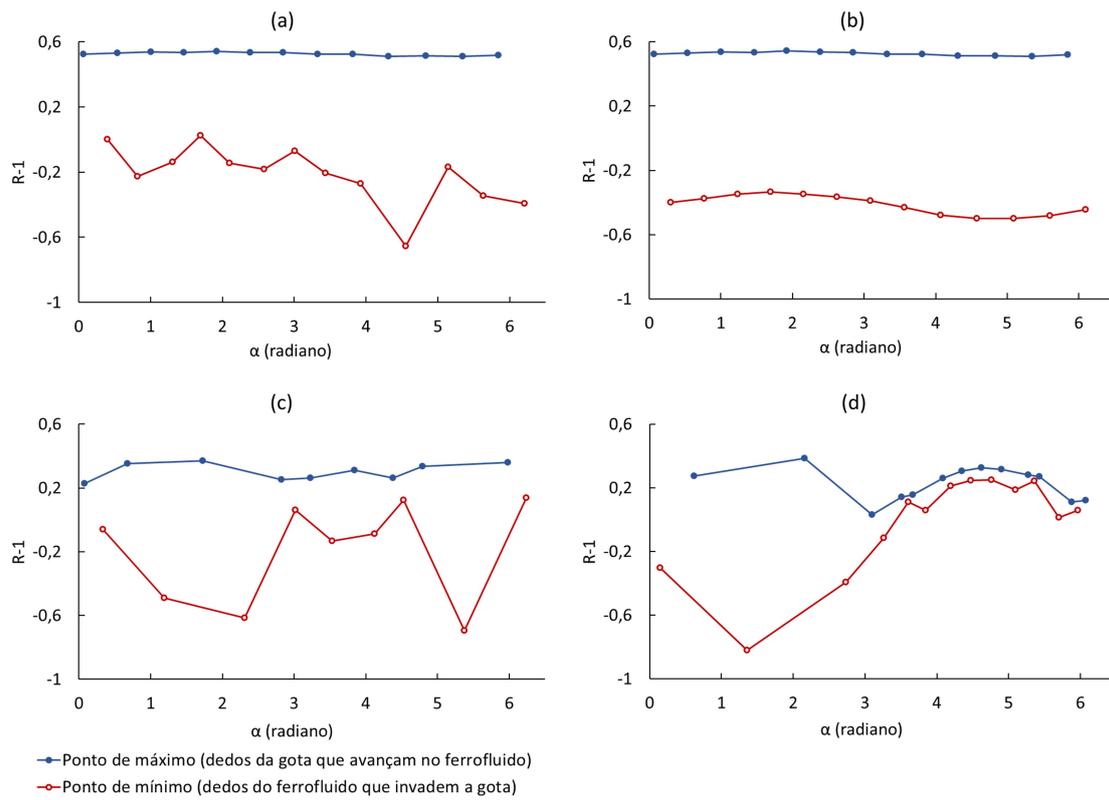


Figura 3.11: Os gráficos (a)-(d) representam, na ordem, os pontos de máximo e mínimo dos padrões formados pelas imagens (a)-(d) da Figura 3.10, indicando, respectivamente, o avanço mais uniforme da gota na direção radial externa e uma competição maior da invasão do ferrofluido radialmente para o centro da célula de Hele-Shaw.

4

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho estudamos a dinâmica totalmente não linear de uma gota não magnética circundada por um ferrofluido em uma célula de Hele-Shaw. Um fio condutor de corrente que passa pelo centro da gota não magnética gera um campo magnético azimutal que induz uma força magnética radial que puxa o ferrofluido externo em direção ao fio. As simulações numéricas executadas são baseadas em um método de integrais de contorno que usa o formalismo de *vortex sheet* para rastrear a evolução da interface e descrever a formação de padrões. Analisamos neste trabalho os efeitos do contraste de viscosidade A , da tensão superficial efetiva B e da susceptibilidade magnética do ferrofluido χ na morfologia da gota não magnética em diferentes cenários de perturbação inicial da gota com interface inicialmente circular.

Podemos observar na Seção 3.1 que os resultados das simulações numéricas mostram o efeito estabilizante da tensão superficial efetiva (B) no problema físico estudado, enquanto a susceptibilidade magnética (χ) possui efeito desestabilizante. Este efeito pode ser observado através dos padrões formados com dedos mais afiados apontando no direção radial externa na imagem (c) da Figura 3.1, em contraste com a imagem (i), efeito evidenciado ao observar a maior diferença na variação do raio no gráfico (a) da Figura 3.2 em comparação com o gráfico (b).

Na Seção 3.2, podemos observar o efeito da instabilidade de Saffman-Taylor, que ocorre quando o ferrofluido tem viscosidade menor ($A > 0$). Nestes cenários, evidenciados pelas imagens (a), (d) e (g) da Figura 3.3, é mais difícil empurrar a gota de maior viscosidade, e acaba ocorrendo apenas um dedo invasor de maior amplitude, que invade mais rápido devido a um campo magnético mais intenso à medida que o ferrofluido se aproxima do centro da célula de Hele-Shaw. Enquanto que nas imagens (c), (f) e (i) da Figura 3.3, há uma competição maior pelos dedos de ferrofluido que invadem o espaço da gota não magnética.

Na Seção 3.3, uma alteração na perturbação inicial gerou os padrões da Figura 3.6 com comportamento simétrico uniforme, seja pela observação de dedos crescentes formados nas imagens (a)-(f), seja pelo comportamento estacionário com dedos curtos, para as imagens (g)-(i). Além disso, constatou-

se na Figura 3.7 o comportamento estacionário para $\chi = 0,35$ tanto para a simulação não linear quanto para a abordagem fracamente não linear, com perímetros finais próximos.

E finalmente, na Seção 3.4, foi observado que um outro cenário de perturbação inicial levou a diferentes padrões formados, por diferentes atuações dos parâmetros governantes do sistema. Nas imagens (a), (b), (d), e (e) da Figura 3.9, observa-se uma maior competição entre os dedos invasores, observando um elevado número de bifurcações e mais de um dedo se aproximando do centro. Já nas imagens (c) e (f), a semelhança com o padrão simétrico se dá pelo fato do sistema ser estável em relação à instabilidade de Saffman-Taylor, uma vez que a gota não magnética é mais viscosa. Nesta configuração, os dedos de ferrofluido com amplitude definida pelo modo n_{max} tem vantagens em relação aos demais modos de Fourier na corrida em direção à origem. Já nas imagens (g)-(i) da Figura 3.9, com $\chi = 0.35$, observa-se novamente uma resposta magnética mais intensa do ferrofluido ao campo aplicado levando à formação de padrões mais instáveis. Os dedos assumem um formato curto e pontudo, com um único dedo de ferrofluido invadindo a gota magnética.

Nossas simulações complementam estudos teóricos e computacionais anteriores do sistema iniciado por Dias e Miranda (2015) e Chen e Lin (2016). Uma extensão natural desse trabalho é a consideração de um fluido magnetoreológico e a análise de deformações de gotas considerando diferentes configurações de campo magnético.

Referências bibliográficas

- [1] ROSENSWEIG, R. E.. **Ferrohydrodynamics**. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- [2] BLUMS, E.; CEBERS, A. ; MAIOROV, M. M.. **Magnetic Fluids**. De Gruyter, New York, 1997.
- [3] OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A.. **Fully nonlinear simulations of ferrofluid patterns in a radial magnetic field**. *Physical Review Fluids*, 5(124003), 2020.
- [4] TORRES-DÍAZ, I.; RINALDI, C.. **Recent progress in ferrofluids research: novel applications of magnetically controllable and tunable fluids**. *Soft Matter*, 10(8784), 2014.
- [5] ZHANG, X.; SUN, L.; YU, Y. ; ZHAO, Y.. **Flexible ferrofluids: Design and applications**. *Adv. Mater*, 31(1903497), 2019.
- [6] WANG, N.. **Ferrouid Applications in Petroleum Engineering**. PhD thesis, The University of Texas at Austin, New York, 2021.
- [7] OEHLSEN, O.; CERVANTES-RAMÍREZ, S. I.; CERVANTES-AVILÉS, P. ; MEDINA-VELO, I. A.. **Approaches on ferrofluid synthesis and applications: Currentstatus and future perspectives**. *ACS Omega*, 7, 4(3134-3150), 2022.
- [8] HARISCHANDRA, P. A. D.; VÄLISALMI, T.; CENEV, Z. M.; LINDER, M. B. ; ZHOU, Q.. **Shaping liquid droplets on an active air-ferrofluid interface**. *Langmuir*, 0(37224278), 2023.
- [9] COWLEY, M. D.; ROSENSWEIG, R. E.. **The interfacial stability of a ferromagnetic fluid**. *Journal of Fluid Mechanics*, 30:671–688, 1967.
- [10] FRIEDRICHS, R.; ENGEL, A.. **Pattern and wave number selection in magnetic fluids**. *Physical Review E*, 64(021406), 2001.
- [11] CHEN, C.-Y.; TSAI, W.-K. ; MIRANDA, J. A.. **Hybrid ferrohydrodynamic instability: Coexisting peak and labyrinthine patterns**. *Physical Review E*, 77(056306), 2008.

- [12] ZAHN, M.; SHUMOVICH, R.. **Labyrinthine instability in dielectric fluids.** IEEE Transactions on Industry Applications, IA-21(1), 1985.
- [13] TSEBERS, A. O.; MAIOROV, M. M.. **Magnetostatic instabilities in plane layers of magnetizable liquids.** Magnetohydrodynamics (N.Y.), 16(21), 1980.
- [14] OLIVEIRA, R. M.; COUTINHO, I. M.; ANJOS, P. H. A. ; MIRANDA, J. A.. **Shape instabilities in confined ferrofluids under crossed magnetic fields.** Physical Review E, 104(065113), 2021.
- [15] YU, Z.; CHRISTOV, I. C.. **Delayed hopf bifurcation and control of a ferrofluid interface via a time-dependent magnetic field.** Physical Review E, 107(055102), 2022.
- [16] SOUZA, G. H.. **Bifurcação de hopf em sistemas de equações diferenciais com simetria.** Master's thesis, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.
- [17] YU, Z.; CHRISTOV, I. C.. **Tuning a magnetic field to generate spinning ferrofluid droplets with controllable speed via nonlinear periodic interfacial waves.** Physical Review E, 103(013103), 2021a.
- [18] YU, Z.; CHRISTOV, I. C.. **Long-wave equation for a confined ferrofluid interface: Periodic interfacial waves as dissipative solitons.** Proceedings of the Royal Society A, 477(2256), 2021b.
- [19] JACKSON, D. P.; MIRANDA, J. A.. **Controlling fingering instabilities in rotating ferrofluids.** Physical Review E, 67(017301), 2003.
- [20] LIRA, S. A.; MIRANDA, J. A. ; OLIVEIRA, R. M.. **Stationary shapes of confined rotating magnetic liquid droplets.** Physical Review E, 82(036318), 2010.
- [21] DIAS, E. O.; MIRANDA, J. A.. **Azimuthal field instability in a confined ferrofluid.** Physical Review E, 91(023020), 2015.
- [22] CHEN, C.-Y.; LIN, T.-S.. **Interfacial Instability of a Non-magnetized Drop in Ferrofluids Subjected to an Azimuthal Field: A Diffuse-Interface Approach.** Birkhäuser, Maihingen, 2016.
- [23] SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. I.. **The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid.** Proceedings of the Royal Society A, 245(312), 1958.

- [24] HOMSY, G. M.. **Viscous fingering in porous media.** Annual Review of Fluid Mechanics, 19(271-311), 1987.
- [25] PENG, Y.; YUAN, J. L.; SUN, L.; JI, H. B.; LV, B. H. ; DONG, C. C.. **Application and prospect of the non-newtonian fluid in industrial field.** Materials science forum, 770(396-401), 2013.
- [26] ABEDI, B.; BERGHE, L. S.; FONSECA, B. S.; RODRIGUES, E. C.; OLIVEIRA, R. M. ; MENDES, P. R. S.. **Influence of wall slip in the radial displacement of a yield strength material in a hele–shaw cell.** Physics of Fluids, 34(113102), 2022.
- [27] MCCLOUD, K. V.; MAHER, J. V.. **Experimental perturbations to saffman-taylor flow.** Physics Reports, 260(139-185), 1995.
- [28] CASADEMUNT, J.. **Viscous fingering as a paradigm of interfacial pattern formation: Recent results and new challenges.** Chaos, 14(3)(809-24), 2004.
- [29] MIRANDA, J. A.. **Rotating hele-shaw cells with ferrofluids.** Physical Review E, 62(2985), 2000.
- [30] OLIVEIRA, R. M.; ABEDI, B.; SANTOS, L. F.; CÂMARA, P. S. ; MENDES, P. R. S.. **Similarity characteristics in the morphology of radial viscous fingers.** Physics of Fluids, 35(042114), 2023.
- [31] MIRANDA, J. A.; WIDOW, M.. **Radial fingering in a hele–shaw cell: a weakly nonlinear analysis.** Physica D, 120(315–328), 1998.
- [32] OLIVEIRA, R. M.. **Boundary integral simulations based on the vortex-sheet formalism for the discretization of sharp droplet interfaces in hele-shaw cells.** COB-2023-0963, 2023.
- [33] HOU, T. Y.; LOWENGRUB, J. S. ; SHELLEY, M. J.. **Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension.** Journal of Computational Physics, 114(312-338), 1994.
- [34] CENICEROS, H. D.; HOU, T. Y. ; SI, H.. **Numerical study of hele-shaw flow with suction.** Physics of Fluids, 11(9), 1999.
- [35] HOU, T. Y.; LOWENGRUB, J. S. ; SHELLEY, M. J.. **Boundary integral methods for multicomponent fluids and multiphase materials.** Journal of Computational Physics, 169(302-362), 2001.

- [36] TRYGGVASON, G.; AREF, H.. Numerical experiments on hele shaw flow with a sharp interface. *Journal of Fluid Mechanics*, 136(1-30), 1983.
- [37] BRANDÃO, R.; MIRANDA, J. A.. Viscous fluid fingering on a negatively curved surface. *Physical Review E*, 92(013018), 2015.
- [38] CARLOS, F. E.; OLIVEIRA, R. M.. Magnetic instability induced by a current-carrying wire of ferrofluids confined in a hele-shaw cell. COB-2023-0911, 2023.