



Osmar Alexandre do Amaral Neto

**Aplicação consistente do método dos
elementos de contorno a problemas de
mecânica da fratura**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Março de 2020



Osmar Alexandre do Amaral Neto

**Aplicação consistente do método dos
elementos de contorno a problemas de
mecânica da fratura**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Ney Augusto Dumont

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Ph.D. Luiz Carlos Wrobel

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

Ph.D. José Claudio de Faria Telles

Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Ph.D. Alexandre Antonio de Oliveira Lopes

Cenpes – Petrobras

Rio de Janeiro, 2 de Março de 2020

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Osmar Alexandre do Amaral Neto

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade de Fortaleza (UNIFOR) em 2017. Em 2018, deu início ao mestrado em estruturas no Departamento de Engenharia civil e ambiental da PUC-Rio, atuando na linha de pesquisa do método dos elementos de contorno e mecânica da fratura. Além das experiências acadêmicas conquistadas, também estagiou na construção civil e em escritório de cálculo estrutural.

Ficha Catalográfica

Neto, Osmar Alexandre do Amaral

Aplicação consistente do método dos elementos de contorno a problemas de mecânica da fratura / Osmar Alexandre do Amaral Neto; orientador: Ney Augusto Dumont. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental , 2020.

v., 70 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental .

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Estruturas – Teses. 3. Método dos Elementos de Contorno;. 4. Mecânica da fratura;. 5. Fator de intensidade de tensão;. 6. Integral J;. I. Dumont, N. A.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental . III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por ter me concedido a vida, por sempre ter me dado força nos momentos de dificuldade e por ter colocado pessoas tão especiais em minha vida.

Agradeço a minha família como um todo, em especial meus pais, Osmar Nogueira do Amaral e Marta Elizabeth Barreto do Amaral, por terem me criado em um ambiente familiar cheio de amor, por terem me educado e me apoiado em minhas escolhas. Um agradecimento especial a pessoa mais importante da minha vida, meu irmão Alisson Barreto do Amaral, pela companhia, pelo apoio e por todos esses anos de amizade.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Ney Augusto Dumont, por toda a paciência que teve comigo, por todo o conhecimento passado a mim e por todas as conversas que tivemos durante as reuniões de dissertação.

Durante o mestrado, tive a oportunidade de conhecer pessoas incríveis que sempre andaram ao meu lado, seja nos estudos ou nos momentos de diversão, são eles: Julio Alves, Ícaro Rodrigues, Eric Alves, Daniel Carvalho, Marcello Congro, Renan Costa, Verissa Queiroz, Chris Weidlich, Lucian Marotta, Manuel Lucas, Felipe Tourinho, Vitor Monteiro.

Também sou grato aos membros da minha banca examinadora: Prof. Luiz Carlos Wrobel, Prof. José Claudio de Faria Telles e Prof. Alexandre Antonio de Oliveira Lopes, que comprometeram muito generosamente seu tempo e conhecimento para avaliar a minha dissertação.

Agradeço também às pessoas que me acolheram no Rio de Janeiro e dividiram moradia comigo, são eles: Carol Girão e Hugo Ítalo.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

Neto, Osmar Alexandre do Amaral; Dumont, N. A.. **Aplicação consistente do método dos elementos de contorno a problemas de mecânica da fratura**. Rio de Janeiro, 2020. 70p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Como proposto até agora na literatura técnica, a modelagem de trincas pelo método dos elementos de contorno é melhor executada recorrendo a uma solução fundamental hiper-singular – na chamada formulação dual –, uma vez que somente com a solução fundamental singular, as questões topológicas resultantes não são abordadas adequadamente. Uma abordagem mais natural pode contar com a representação direta da singularidade da ponta da trinca, como já proposto no âmbito do método híbrido dos elementos de contorno – com a implementação de funções de tensão generalizadas de Westergaard. Por outro lado, avaliações matemáticas recentes indicam que a formulação convencional dos elementos de contorno – com base na solução fundamental de Kelvin – é capaz de representar precisamente altos gradientes de tensão e lidar com topologias extremamente complicadas, desde que as integrações numéricas sejam resolvidas adequadamente. Propomos neste trabalho que, independentemente da configuração, uma estrutura trincada seja representada geometricamente como apareceria em experimentos de laboratório, com abertura de trinca na faixa de micrômetros (O alcance dos nanômetros é matematicamente viável na presente formulação, mas não é realista em termos de mecânica do contínuo). Devido ao esquema de integração numérica recém-desenvolvido, é possível obter uma avaliação da precisão de máquina de todas as grandezas e resultados de tensões consistentemente avaliados em pontos internos tão próximos da ponta da trinca quanto se queira. É importante ressaltar que não são introduzidas questões topológicas artificiais, o condicionamento da álgebra linear é mantido sob controle e é sempre possível obter uma convergência dos resultados tão alta quanto se queira. Os desenvolvimentos atuais se aplicam a problemas bidimensionais. Algumas ilustrações numéricas mostram que resultados altamente precisos são obtidos para trincas representadas com apenas alguns elementos de contorno quadráticos, geralmente curvos – e alguns pontos de integração de Gauss-Legendre por elemento – e que a avaliação numérica da integral J acaba sendo simples (embora não computacionalmente barato) e, na verdade, o meio mais confiável de obter fatores de intensidade de tensões.

Palavras-chave

Método dos Elementos de Contorno; Mecânica da fratura; Fator de intensidade de tensão; Integral J ;

Abstract

Neto, Osmar Alexandre do Amaral; Dumont, N. A. (Advisor).
Consistent application of the boundary element method to fracture mechanics problems.. Rio de Janeiro, 2020. 70p.
Dissertação de mestrado – Department of Civil and Environmental Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

As hitherto proposed in the technical literature, the boundary element modelling of cracks is best carried out resorting to a hypersingular fundamental solution – in the frame of the so-called dual formulation –, since with the singular fundamental solution alone the ensuing topological issues would not be adequately tackled. A more natural approach might rely on the direct representation of the crack tip singularity, as already proposed in the frame of the hybrid boundary element method – with implementation of generalized Westergaard stress functions. On the other hand, recent mathematical assessments indicate that the conventional boundary element formulation – based on Kelvin’s fundamental solution – is in fact able to precisely represent high stress gradients and deal with extremely convoluted topologies provided only that the numerical integrations be properly resolved. We propose in this work that independently of configuration a cracked structure be geometrically represented as it would appear in laboratory experiments, with crack openings in the range of micrometers. (The nanometer range is actually mathematically feasible in the present formulation but not realistic in terms of continuum mechanics.) Owing to the newly developed numerical integration scheme, machine precision evaluation of all quantities may be achieved and stress results consistently evaluated at interior points arbitrarily close to crack tips. Importantly, no artificial topological issues are introduced, linear algebra conditioning is well kept under control and arbitrarily high convergence of results is always attainable. The present developments apply to two-dimensional problems. Some numerical illustrations show that highly accurate results are obtained for cracks represented with just a few quadratic, generally curved, boundary elements – and a few Gauss-Legendre integration points per element – and that the numerical evaluation of the J-integral turns out to be straightforward (although not computationally cheap) and actually the most reliable means of obtaining stress intensity factors.

Keywords

Boundary Element Method; Fracture mechanics; Stress intensity factor; J integral;

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Considerações Iniciais	12
1.2	Objetivos e Delimitações do Estudo	14
1.3	Estrutura do Trabalho	15
2	Fundamentos da mecânica da fratura	16
2.1	Solução de Inglis para tensão em furos elípticos	16
2.2	Balanço de energia de Griffith	17
2.3	Fator de Intensidade de Tensões	18
2.4	Função de Tensão Complexa de Westergaard	20
2.5	Integral J	22
3	Método Consistente dos Elementos de Contorno (MCEC)	24
3.1	Breve histórico	24
3.2	Formulação de elementos de contorno	25
3.3	Avaliação numérica das matrizes H e G	30
3.3.1	Singularidade da matriz H	32
3.3.2	Singularidade da matriz G	33
4	Desenvolvimentos da integral J no método consistente dos elementos de contorno	34
5	Aplicação do método a problemas de mecânica da fratura	36
5.1	Trinca em domínio infinito	36
5.1.1	Trinca elíptica	37
5.1.2	Trinca entre duas cavidades circulares	43
5.2	Trinca em domínio finito	44
5.2.1	Trinca elíptica de centro	45
5.2.1.1	Estudo de confiabilidade dos resultados	46
5.2.1.2	Estudo de fator de intensidade de tensões	49
5.2.2	Trinca reta de bordo	50
5.2.2.1	Estudo de confiabilidade dos resultados	51
5.2.2.2	Estudo de fator de intensidade de tensões	55
5.3	Estudo do Raio do contorno circular da integral J	57
6	Fator de intensidade de tensão em função da abertura da ponta da trinca	59
7	Considerações finais	63
7.1	Conclusões	63
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	65
	Referências bibliográficas	66

Lista de figuras

Figura 2.1	Furo elíptico em placa plana. Fonte: Anderson, 1995.	16
Figura 2.2	Definição dos eixos de coordenadas na ponta da trinca. Fonte: Anderson, 1995.	19
Figura 2.3	Modos de fratura. Fonte: Anderson, 1995.	19
Figura 2.4	Trinca em uma placa infinita carregada biaxialmente. Fonte: Anderson, 1995.	21
Figura 2.5	Caminho arbitrário de J ao redor da ponta da trinca. Fonte: Adaptada de Anderson, 1995.	23
Figura 3.1	Ações em um corpo elástico. Fonte: Notas de aula de Dumont.	26
Figura 3.2	Polos de singularidade. Fonte: Adaptada das notas de aula de Dumont	31
Figura 3.3	Esquema de integração em torno da singularidade. Fonte: Notas de aula de Dumont.	33
Figura 4.1	Esquema de integração de J.	34
Figura 5.1	Ilustração de como as forças de domínio devem ser transformadas em forças aplicadas no contorno.	37
Figura 5.2	Trinca elíptica em meio infinito carregada uniaxialmente.	38
Figura 5.3	Convergência do FIT para uma trinca elíptica em meio infinito	39
Figura 5.4	Erro correspondente a diversas aberturas variando a razão do tamanho do elemento.	40
Figura 5.5	Ponta da trinca para uma abertura inicial de $2 \cdot 10^{-3}$ e razão de tamanho do elemento 1,35.	40
Figura 5.6	Erro de geometria referente a parte descontínua da matriz H .	41
Figura 5.7	Curva de tensão em pontos internos, colineares, localizados no plano da trinca a uma distância de 10^{-3} da ponta da trinca.	41
Figura 5.8	Erro entre as tensões de referência e as tensões encontradas numericamente.	42
Figura 5.9	Resultados numéricos para uma variação do coeficiente de Poisson para uma trinca elíptica em domínio infinito.	42
Figura 5.10	Trinca elíptica entre duas cavidades circulares	43
Figura 5.11	Convergência do FIT para uma trinca entre duas cavidades circulares em meio infinito	44
Figura 5.12	Trinca elíptica centrada em meio finito com carregamento perpendicular ao plano da trinca.	46
Figura 5.13	Comparação entre os erros $ \mathbf{Gt}_{\text{pol}} - \mathbf{Hd}_{\text{pol}} $ e $ \mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}} $ para uma trinca elíptica em domínio finito	48
Figura 5.14	Erro de deslocamentos em pontos internos	49
Figura 5.15	Erro de tensão em pontos internos	49

Figura 5.16	Convergência do FIT para uma trinca elíptica em meio finito	50
Figura 5.17	Trinca reta de bordo carregada uniaxialmente	51
Figura 5.18	Comparação entre os erros $ \mathbf{Gt}_{\text{pol}} - \mathbf{Hd}_{\text{pol}} $ e $ \mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}} $ para uma trinca reta de bordo com abertura inicial de trinca de $2 \cdot 10^{-3}$.	52
Figura 5.19	Comparação entre os erros $ \mathbf{Gt}_{\text{pol}} - \mathbf{Hd}_{\text{pol}} $ e $ \mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}} $ para uma trinca reta de bordo com abertura inicial de trinca de $2 \cdot 10^{-5}$.	52
Figura 5.20	Trinca inclinada de bordo carregada uniaxialmente	53
Figura 5.21	Comparação entre os erros $ \mathbf{Gt}_{\text{pol}} - \mathbf{Hd}_{\text{pol}} $ e $ \mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}} $ para uma trinca inclinada de bordo com abertura inicial de trinca de $2 \cdot 10^{-3}$.	53
Figura 5.22	Comparação entre os erros $ \mathbf{Gt}_{\text{pol}} - \mathbf{Hd}_{\text{pol}} $ e $ \mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}} $ para uma trinca inclinada de bordo com abertura inicial de trinca de $2 \cdot 10^{-5}$.	54
Figura 5.23	Erro de deslocamentos em pontos internos	54
Figura 5.24	Erro de tensão em pontos internos	55
Figura 5.25	Convergência do FIT para uma trinca de bordo	56
Figura 5.26	Erro correspondente a diversas aberturas variando a razão do tamanho do elemento.	56
Figura 5.27	Resultados numéricos para uma variação do coeficiente de Poisson para uma trinca reta de bordo.	57
Figura 6.1	Deslocamento relativo entre nós da face da trinca.	59
Figura 6.2	(a) Erro do FIT e (b) Erro da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ para uma trinca elíptica de abertura inicial $2 \cdot 10^{-3}$, razão de tamanho do elemento igual a 1.35 e 60 elementos quadráticos.	60
Figura 6.3	(a) Erro do FIT e (b) Erro da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ para uma trinca elíptica de abertura inicial $2 \cdot 10^{-3}$, razão de tamanho do elemento igual a 1.35 e 120 elementos quadráticos.	61
Figura 6.4	(a) Erro do FIT e (b) Erro da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ para uma trinca elíptica de abertura inicial $2 \cdot 10^{-5}$, razão de tamanho do elemento igual a 1.35 e 60 elementos quadráticos.	62
Figura 6.5	(a) Erro do FIT e (b) Erro da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ para uma trinca elíptica de abertura inicial $2 \cdot 10^{-5}$, razão de tamanho do elemento igual a 1.35 e 120 elementos quadráticos.	62

Lista de tabelas

Tabela 5.1	Estudo de confiabilidade dos resultados para uma trinca elíptica em domínio infinito com abertura inicial $2 \cdot 10^{-3}$.	38
Tabela 5.2	Erro do FIT para diferentes raios do caminho da integral J.	58

Lista de Abreviaturas

FIT – Fator de Intensidade de Tensão

MCEC – Método Consistente dos Elementos de Contorno

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

MFLE – Mecânica da Fratura Linear Elástica

MHEC – Método Híbrido dos Elementos de Contorno

PIB – Produto Interno Bruto

1

Introdução

A parte introdutória dessa dissertação estabelece algumas considerações iniciais sobre a mecânica da fratura e o método dos elementos de contorno, assim como os objetivos que foram alcançados e a estruturação da dissertação, com uma breve descrição de cada capítulo.

1.1

Considerações Iniciais

Os problemas de mecânica da fratura são tão antigos quanto as estruturas feitas pelo homem, porém tem se intensificado recentemente, muito pelo fato de hoje termos tecnologias que não tínhamos em séculos passados. Com o início da tecnologia aeroespacial inúmeros acidentes passaram a ocorrer, e à medida que novas tecnologias sejam criadas, novos problemas precisarão ser evitados.

Em 1983, estudos conduzidos por Duga et al. [1] estimaram que os custos causados por trincas nos Estados Unidos, em 1978, foram da ordem de \$99 bilhões de dólares, o que representava, na época, aproximadamente 4% do PIB. Além disso, o estudo estimou uma significativa economia de recursos caso os conceitos da mecânica da fratura fossem usados racionalmente.

Segundo Anderson [2], existem duas principais causas para a falha de estruturas, a primeira relacionada a erro humano, devido a negligências durante a fase de projeto, construção ou operação. A segunda causa de falha nas estruturas é a aplicação de novos materiais ou projetos mais sofisticados, que dão um certo grau de imprevisibilidade ao comportamento estrutural. Um exemplo referente ao segundo tipo de falha são os navios norte-americanos Liberty da segunda guerra mundial.

Ao longo das últimas décadas os avanços no estudo de mecânica da fratura têm prevenido uma enorme quantidade de falhas estruturais, salvando muitas vidas. Quando aplicada corretamente, a mecânica da fratura reduz o número de acidente causados pelos dois tipos de falhas estruturais mencionados anteriormente.

Os estudos na área de mecânica da fratura se desenvolveram bastante durante o século XX, tendo adquirido bastante força após os estudos de Inglis [3], que foi o primeiro a analisar a concentração de tensões causada por

furos elípticos em placas planas. Em 1920, Griffith [4], a partir dos estudos de Inglis, usou conceitos de termodinâmica para formular uma teoria de mecânica da fratura baseada no balanço de energia. Mais tarde, Irwin fez diversas contribuições, entre elas a extensão da teoria de Griffith a metais [5], o conceito de taxa de liberação de energia [6] e, através dos desenvolvimentos de Westergaard [7], propôs o fator de intensidade de tensão [8], que veio a ser o mais importante parâmetro dentro da mecânica da fratura. Em 1968, Rice [9] mostrou que a taxa de liberação de energia poderia ser expressa como uma integral de linha, para problemas bidimensionais, que ficou conhecida como integral J.

Atualmente, são utilizados diversos métodos numéricos de discretização de problemas de mecânica da fratura, porém dois desses métodos merecem destaque, entre eles o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). O MEF é amplamente utilizado por sua simplicidade e generalidade. Contudo, o método tem algumas desvantagens quando se trata de problemas de mecânica da fratura, como por exemplo a sensibilidade à distorção dos elementos e um elevado custo computacional devido ao grande refinamento da malha requerido na ponta da trinca. Para contornar essas limitações, algumas formulações não convencionais do método têm sido desenvolvidas.

O MEC, embora seja de formulação mais complexa, tem algumas vantagens para resolver problemas de mecânica da fratura pois, além de requerer a discretização somente do contorno, diminuindo o custo computacional, utiliza soluções fundamentais da elasticidade, que permite uma boa aproximação dos altos gradientes de tensão devido a singularidade do problema.

Para resolver problemas mais gerais de mecânica da fratura, Telles et al [10] propuseram uma técnica numérica, baseada na formulação integral hiper singular de problemas de fratura, para determinar uma função de Green em um meio isotrópico.

Alguns anos depois, Dumont orientou trabalhos baseados na utilização da série de Williams e da solução de Westergaard como solução fundamental no âmbito do Método Híbrido dos Elementos de Contorno (MHEC) [11, 12, 13]. Nos trabalhos desenvolvidos por Mamani e Cardoso sob orientação de Dumont [14, 15, 16, 17, 18], foi aplicada, como solução fundamental, uma função generalizada de Westergaard à problemas de potencial e elasticidade 2D, também no âmbito do MHEC.

Recentemente, uma formulação consistente do método dos elementos de contorno foi desenvolvida por Dumont [19]. Esta nova formulação consiste em resolver de forma exata os problemas de singularidade inerentes à formulação

do método. Outras contribuições de Dumont foram com relação ao termo do erro referente aos deslocamentos de corpo rígido, que têm que ser levados em consideração e não mais desprezados, como é feito no método convencional. Outro fator que diferencia o método consistente do convencional está em uma melhora na interpolação das forças de superfície, facilitando a montagem da matriz $\mathbf{G}$ de flexibilidade.

1.2

Objetivos e Delimitações do Estudo

A presente dissertação de mestrado tem como objetivo geral tratar de problemas de modo I de mecânica da fratura usando um programa em *Maple*[20] com formulação no Método Consistente dos Elementos de Contorno (MCEC). Mostrar se técnicas como a utilização de elementos *quarter-point*, elementos descontínuos ou o uso de funções hiper singulares, por exemplo, não são necessárias. Qualquer problema de elasticidade 2D pode ser resolvido seguindo a formulação aqui apresentada, independente de haver ou não singularidade devido a geométrica.

Dentre os objetivos específicos deste trabalho, estão:

- Implementação computacional da integral J em um programa com formulação no método consistente dos elementos de contorno para obter fatores de intensidade de tensão.
- Aplicação do método consistente dos elementos de contorno a problemas clássicos da mecânica da fratura linear elástica.
- Estudo do fator de intensidade de tensão variando diversos parâmetros, como o coeficiente de Poisson, a abertura inicial da trinca e o número de elementos na trinca.
- Controle dos erros cometidos na integração numérica das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ utilizadas na solução de diversos problemas de mecânica da fratura apresentados nesse trabalho, tanto para resultados no contorno como para resultados em pontos internos.
- Mostrar que é possível resolver problemas com sérios problemas topológicos de mecânica da fratura sem utilização de uma formulação hiper singular ou usar a função de tensão de Westergaard como solução fundamental do problema.

1.3

Estrutura do Trabalho

Este trabalho é composto por seis capítulos e um apêndice, sendo estruturado de tal forma que no capítulo 1 é apresentada uma breve introdução sobre o tema, os objetivos que se buscam alcançar e sua estruturação.

Capítulo 2. São apresentados os conceitos de mecânica da fratura linearmente elástica (MFLE), abordando com mais ênfase conceitos como balanço de energia de Griffith, o Fator de Intensidade de Tensão (FIT), a função de tensão de Westergaard e a integral J.

Capítulo 3. Este capítulo apresenta a formulação do método consistente dos elementos de contorno aplicado a problemas de elastostática plana. São apresentados também os problemas de singularidade, quase singularidades real e complexa.

Capítulo 4. Neste capítulo são mostrados todos os desenvolvimentos teóricos realizados para que fosse possível a implementação da integral J no método consistente dos elementos de contorno.

Capítulo 5. São apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação do método consistente dos elementos de contorno a problemas clássicos de mecânica da fratura linearmente elástica.

Capítulo 6. Apresenta as conclusões do autor a respeito dos resultados encontrados nesse trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

2

Fundamentos da mecânica da fratura

Este capítulo apresenta uma breve revisão de elasticidade e mecânica da fratura linearmente elástica. Diversos pontos são abordados, entre eles o balanço de energia de Griffith, a função de tensão de Westergaard, o fator de intensidade de tensão e a integral J.

2.1

Solução de Inglis para tensão em furos elípticos

Um dos primeiros a estudar o efeito de concentração de tensões em furos elípticos contidos em uma placa plana foi Inglis [3]. Suas análises consistiam em um furo elíptico com dimensões $2a$ de comprimento e $2b$ de abertura em uma placa submetida a uma tensão de tração perpendicular à maior dimensão do furo, como mostra a Figura 2.1. Uma de suas considerações foi de que a placa fosse grande o suficiente para que as bordas não tivessem influência no furo.

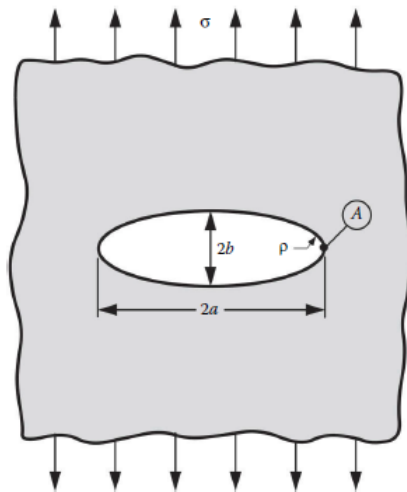


Figura 2.1: Furo elíptico em placa plana. Fonte: Anderson, 1995.

De acordo com Inglis, a tensão na ponta do furo elíptico (ponto A) é

dada por

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b} \right) \quad (2-1)$$

onde σ é a tensão aplicada a uma distância infinitamente grande. Observa-se que à medida em que $b \rightarrow 0$, a tensão tende a infinito na ponta da elipse e o furo tende a se parecer mais com uma trinca afiada. Por este motivo Inglis achou mais conveniente escrever a equação (2-1) em termos do raio de curvatura $\rho = b^2/a$:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2-2)$$

Quando $a \gg b$, a equação (2-2) se torna

$$\sigma_{m\acute{a}x} = 2\sigma\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2-3)$$

A equação (2-3) prevê que as tensões tendem a infinito em um ponto infinitamente próximo da ponta da trinca. Esta ideia estabelecida por Inglis foi bastante questionada na época, haja vista que nenhum material consegue suportar tal tensão. Contudo, este estudo foi de grande utilidade a Griffith [4] no desenvolvimento da sua teoria do balanço de energia.

2.2

Balanço de energia de Griffith

Em 1920, Griffith [4] analisou o mesmo problema de Inglis mostrado na Figura 2.1 para $a \gg b$ e determinou que, quando ocorre um crescimento da trinca, a energia potencial Π sofre um decréscimo devido à descarga que surge na região fraturada. Então, a partir das análises de tensão de Inglis [3], Griffith mostrou que

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2-4)$$

onde Π_0 é a energia potencial de uma placa sem trinca e B é a espessura da placa.

Sob uma perspectiva molecular, o trabalho realizado para romper as ligações atômicas e gerar uma trinca é dado por

$$W_s = 4aB\gamma_s \quad (2-5)$$

onde γ_s é a energia de superfície do material e $2aB$ é a área da trinca.

Então, levando em consideração os conceitos estabelecidos anteriormente, o balanço de energia de Griffith para um crescimento dA na área da trinca, sob condições de equilíbrio, pode ser expresso como

$$\frac{dE}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (2-6)$$

Substituindo as equações (2-4) e (2-5) na equação (2-6), obtém-se a tensão de ruptura σ_f

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2} \quad (2-7)$$

Em 1956, Irwin [6] propôs uma abordagem de energia para problemas de mecânica da fratura, equivalente ao modelo de Griffith, onde a derivada do potencial com relação à área da trinca foi definida como sendo a taxa de liberação de energia $\mathcal{G}$, que corresponde à energia absorvida para aumentar o comprimento da trinca:

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (2-8)$$

2.3

Fator de Intensidade de Tensões

Algumas expressões de tensões podem ser desenvolvidas para certas configurações de trinca sujeitas a um carregamento externo. Westergaard [7] e Williams [21] foram os primeiros a publicar tais expressões.

Com base em um sistema de coordenadas polares de origem na ponta da trinca, como mostra a Figura 2.2, o campo de tensões para qualquer trinca sob um regime linearmente elástico é dado por

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{K_n}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (2-9)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, r e θ são definidos na Figura 2.2, K é uma constante conhecida como Fator de Intensidade de Tensão (FIT), cujo subscrito n indica o modo de carregamento e f_{ij} é uma função de θ . Os termos de ordem superior contidos no somatório dependem da geometria e tendem a um valor ou finito ou nulo quando $r \rightarrow 0$.

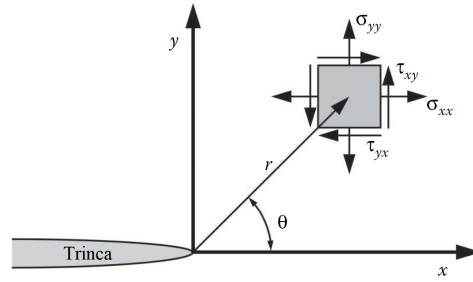


Figura 2.2: Definição dos eixos de coordenadas na ponta da trinca. Fonte: Anderson, 1995.

Segundo Anderson [2], existem três modos distintos de carregamento a que uma trinca pode ser submetida. Como mostrado na Figura 2.3, são eles:

- Modo I (Abertura): Causado por tensão de tração normal ao plano da trinca.
- Modo II (Cisalhamento no plano): Causado por tensão cisalhante no plano da trinca. As faces da trinca deslizam entre si.
- Modo III (Cisalhamento fora do plano): Causado por tensão cisalhante atuando fora do plano.

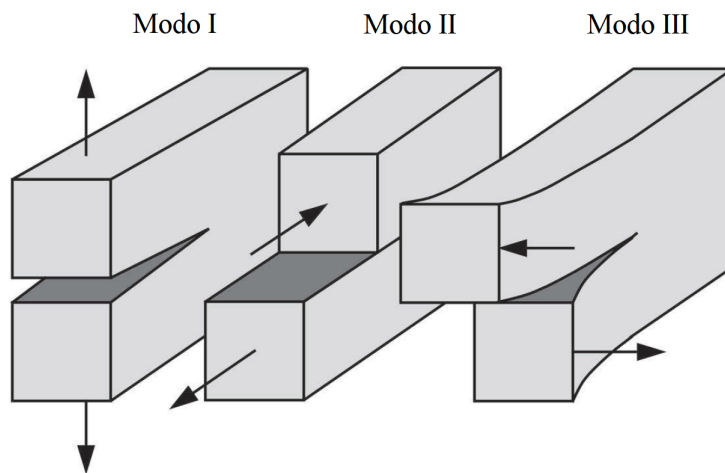


Figura 2.3: Modos de fratura. Fonte: Anderson, 1995.

Embora os fatores de intensidade de tensão sejam dados em várias formas, dependendo do carregamento e da geometria do problema, K pode ser resumido a uma única forma

$$K_{(I,II,III)} = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2-10)$$

onde σ é a tensão característica, a é a dimensão longitudinal da trinca e Y é uma constante adimensional que depende da geometria e dos modos de carregamento. Diversos valores de K para diferentes problemas podem ser encontrados em Tada et al. [22].

Uma relação pode ser estabelecida entre o Fator de Intensidade de Tensão e a taxa de liberação de energia. O primeiro é um parâmetro local que descreve as tensões, deformações e deslocamentos na ponta da trinca; já o segundo descreve um comportamento global da estrutura e quantifica a energia necessária para aumentar o comprimento da trinca. Para os três modos de carregamento, essa relação é dada por

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E} + \frac{K_{III}^2}{2G} \quad (2-11)$$

para estado plano de tensões. Para estado plano de deformações, basta substituir E por $E/(1 - \nu^2)$.

2.4

Função de Tensão Complexa de Westergaard

Em 1939, Westergaard [7] mostrou que determinados problemas podem ser descritos por meio de uma função de tensão complexa $Z(z)$, onde $z = x + iy$ e $i = \sqrt{-1}$. Essa função se relaciona com a função de Airy da seguinte forma:

$$\Phi = \Re(\bar{\bar{Z}}) + y\Im(\bar{Z}) \quad (2-12)$$

onde $\Re$ e $\Im$ são, respectivamente, as parte real e imaginária da função. As barras em cima de Z representam integrais com relação a z , de modo que

$$\bar{\bar{Z}} = \frac{d\bar{\bar{Z}}}{dz} \quad \text{e} \quad Z = \frac{dZ}{dz} \quad (2-13)$$

As tensões são dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Re(Z) - y\Im(Z') \\ \sigma_{yy} &= \Re(Z) + y\Im(Z') \\ \tau_{xy} &= -y\Re(Z') \end{aligned} \quad (2-14)$$

e para o estado plano de deformações, os deslocamentos são

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2\mu} \left[(1 - 2\nu)\Re(\bar{Z}) - y\Im(Z) \right] \\ u_y &= \frac{1}{2\mu} \left[2(1 - \nu)\Im(\bar{Z}) - y\Re(Z) \right] \end{aligned} \quad (2-15)$$

Nota-se que, no plano da trinca, para $y = 0$, as tensões são simétricas e a tensão cisalhante vai a zero, o que implica modo I de carregamento, além de indicar que o plano da trinca é um plano principal.

Seja uma placa infinita com uma trinca centrada e carregada biaxialmente, como mostra a Figura 2.4, Westergaard propôs a seguinte função de tensão para este problema, considerando as coordenadas com origem no centro da trinca:

$$Z(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2-16)$$

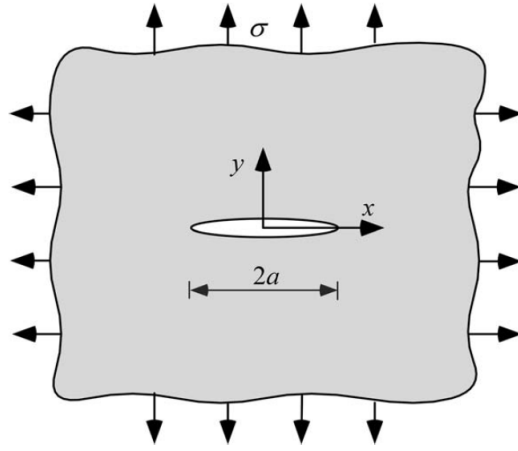


Figura 2.4: Trinca em uma placa infinita carregada biaxialmente. Fonte: Anderson, 1995.

Para o plano da trinca, onde $y = 0$, a função de tensão Z é puramente imaginária para $-a < x < a$ e real para $|x| > a$. Segundo as equações (2-14) e (2-16), as tensões normais ao plano da trinca são dadas por

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \Re(Z) = \frac{\sigma x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (2-17)$$

Fazendo uma mudança na origem das coordenadas do centro da trinca para a ponta da trinca, ou seja, fazendo $x = x^* + a$ e levando em consideração que $x^* \ll a$, tem-se

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \lim_{x^* \rightarrow 0} \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2x^*}} \quad (2-18)$$

Igualando a equação (2-18) às tensões radial (σ_r) e tangencial (σ_θ)

desenvolvidas por Williams [21], para $\theta = 0$, tem-se que

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (2-19)$$

Substituindo a equação (2-19) na equação (2-16) e fazendo $z = z^* + a$, obtém-se a função de Westergaard em termos de K_I :

$$Z(z^*) = \lim_{z^* \rightarrow 0} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi z^*}} \quad (2-20)$$

onde se pode usar $z^* = re^{i\theta}$, para $r^2 = (x - a)^2 + y^2$ e $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x - a} \right)$.

Os campos de tensões e deslocamentos em qualquer direção em um ponto da placa próximo à ponta da trinca podem ser obtidos substituindo a equação (2-20) nas equações (2-14) e (2-15). Esses campos são dados por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ u_y &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2-21)$$

onde $k = 3 - 4\nu$ para estado plano de deformação e $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ para estado plano de tensão. Deve ser observado que as equações encontradas usando a função de tensões de Westergaard, desenvolvidas por Irwin [8], são as mesmas encontradas no desenvolvimento de Williams [21], mesmo seguindo caminhos totalmente diferentes.

Caso haja uma modificação do problema exposto na Figura 2.4, em que o carregamento na direção x deixa de ser aplicado, obtém-se um problema ainda de modo I, porém carregado uniaxialmente na direção y . Assim, faz-se uma subtração de σ em σ_{xx} e a tensão σ_{yy} não sofre qualquer alteração.

2.5

Integral J

Em 1968, Rice [9] introduziu o conceito de integral J como um método para se medir a taxa de liberação de energia, em que esta integral independe do caminho percorrido, desde que esteja dentro do domínio da estrutura envolvendo o ponto de singularidade e inicie na face inferior e termine na

face superior da trinca (trecho AB), como mostra a Figura 2.5.

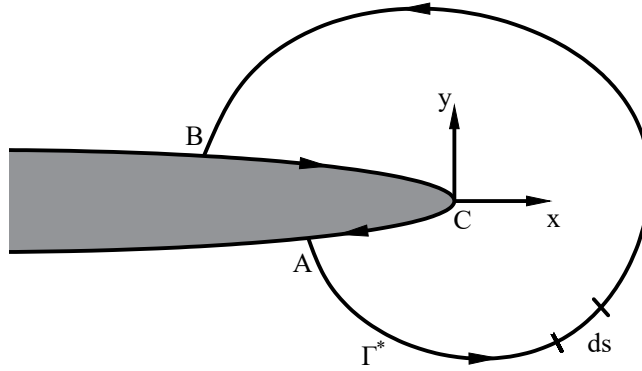


Figura 2.5: Caminho arbitrário de J ao redor da ponta da trinca. Fonte: Adaptada de Anderson, 1995.

Considerando o sistema cartesiano mostrado na Figura 2.5, a integral J pode ser escrita como

$$J = \int_{\Gamma^*} \left(W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (2-22)$$

onde W é a densidade de energia de deformação dada por $\int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$, T_i são as componentes do vetor de forças de superfície dado por $\sigma_{ij} n_j$, u_i são as componentes do vetor de deslocamentos e ds é um incremento ao longo do caminho de integração.

Para um contorno fechado que não envolva um ponto de singularidade, a integral J se anula. Os trechos BC e CA do contorno Γ^* , correspondentes às faces superior e inferior da trinca, não contribuem para o valor de J , pois nesses trechos $dy = 0$ para uma trinca plana e $t_i = 0$.

Sendo uma versão mais geral da taxa de liberação de energia, a integral J teve bastante sucesso como um parâmetro de caracterização da fratura para materiais não lineares. Em termos de mecânica da fratura linearmente elástica, J assume o valor de $\mathcal{G}$, na equação (2-11).

3

Método Consistente dos Elementos de Contorno (MCEC)

3.1

Breve histórico

O MEC se baseou nas soluções desenvolvidas por Green [23] onde, em 1828, formulou a representação integral para a solução de problemas de Dirichlet e Neumann para equação de Laplace, introduzindo a chamada função de Green. Em 1848, William Thomson, também conhecido como Lorde Kelvin, desenvolveu uma solução fundamental para uma força pontual em um corpo infinito [24]. Betti [25] apresentou um método geral para integrar as equações da elasticidade e obter sua solução na forma integral. Mais tarde, em 1885, Somigliana [26] usou o teorema da reciprocidade de Betti para obter a representação integral da solução para problemas de elasticidade, acrescentando em sua expressão as forças de corpo, deslocamentos no contorno e forças de superfície.

Fredholm [27] foi o primeiro a usar equações integrais singulares no contorno para problemas de potencial em meados do século XX. Nos métodos mencionados anteriormente, as incógnitas no contorno têm um significado físico ou geométrico e por essa razão são chamados de método direto. Além desses métodos, havia também outras formulações do BEM, em que as incógnitas no contorno não têm um significado físico ou geométrico, e ficaram conhecidos como métodos indiretos [28, 29, 30]. Sherman [31, 32], Mikhlin [33] e Muskhelishvili [34] usaram funções complexas para desenvolver o método das integrais de contorno para a solução de problemas de elasticidade plana.

Os primeiros trabalhos que levaram a fundamentação do MEC como uma técnica computacional apareceram no início dos anos 60. Jaswon [35] e Symm [36] usaram as equações de Fredholm para resolver alguns problemas de potencial bidimensionais [37, 38]. No final da década de 60, Rizzo [39] e Cruse [40] aplicaram o método a problemas de elasticidade bidimensional e tri dimensional, respectivamente. Já em 1976, Lachat e Watson [41] trouxeram importantes avanços ao MEC, introduzindo uma abordagem paramétrica semelhante a utilizada em MEF. Com isso, houve uma facilidade na implementação computacional do método.

O primeiro a deduzir a formulação das equações integrais utilizando a técnica de resíduos ponderados foi Brebbia [42, 43], em 1978.

Mais tarde Dumont [19, 44, 45, 46] fez alguns tratamentos e melhorias na solução das singularidades presentes no método, criando o chamado método consistente dos elementos de contorno. Mais detalhes históricos do desenvolvimento da formulação clássica do MEC são encontrados em Cheng e Cheng [47]

Neste capítulo é apresentado um resumo do Método Consistente dos Elementos de Contorno [19] aplicado a problemas da elastostática, além de abordar toda a base teórica de desenvolvimento do método.

3.2

Formulação de elementos de contorno

Como mostra a Figura 3.1, um corpo elástico está submetido a forças de corpo b_i no domínio Ω e forças de superfície $\bar{t}_i$ na parte Γ_σ do contorno, além de seus deslocamentos $\bar{u}_i$ serem conhecidos na parte complementar Γ_u de Γ . O campo de tensões satisfaz o equilíbrio no domínio,

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (3-1)$$

ao mesmo tempo em que satisfaz as equações de equilíbrio e compatibilidade no contorno:

$$\sigma_{ji}\eta_j = \bar{t}_i \quad \text{ao longo de} \quad \Gamma_\sigma \quad (3-2)$$

e

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em} \quad \Gamma_u \quad (3-3)$$

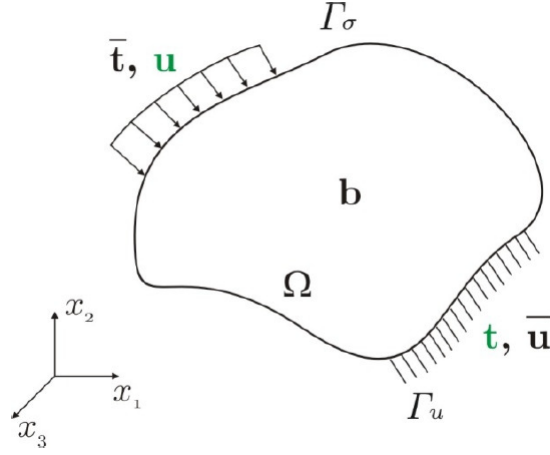


Figura 3.1: Ações em um corpo elástico. Fonte: Notas de aula de Dumont.

Sendo o tensor de tensões σ_{ij} simétrico e satisfazendo a equação constitutiva $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$, o problema pode ser estruturado de acordo com a fórmula forte do princípio da energia potencial total estacionária, para uma variação δu_i de u_i :

$$\delta\pi = - \int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}\eta_j - \bar{t}_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \quad (3-4)$$

De acordo com a equação (3-3), $\delta u_i = 0$ em Γ_u , o que estende a integral no contorno de Γ_{σ} para Γ .

Uma forma não variacional da equação (3-4) pode ser escrita em termos de resíduos ponderados, recorrendo a um campo de solução fundamental, onde tensões e deslocamentos satisfazem a mesma equação de elasticidade $\delta\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}\delta u_{k,l}^*$ e a parte homogênea da equação (3-1), porém não satisfaz a equação (3-2):

$$- \int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) \delta u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} (\sigma_{ji}\eta_j - t_i) \delta u_i^* d\Gamma = 0 \quad (3-5)$$

Integrando por partes duas vezes e aplicando o teorema de Green sucessivamente ao primeiro termo da equação (3-5), além de se fazer uso da identidade $\sigma_{ji}\delta u_{i,j}^* \equiv u_{k,l}C_{ijkl}\delta u_{i,j}^* \equiv u_{k,l}\delta\sigma_{kl}^*$, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \delta\sigma_{ji}^*\eta_j\delta u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \delta\sigma_{ji,j}^*u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i\delta u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i\delta u_i^* d\Omega \quad (3-6)$$

O método convencional dos elementos de contorno pode ser desenvolvido a partir da equação (3-6), em que as soluções fundamentais $\delta\sigma_{ij}^*$ e δu_i^* são

dadas por:

$$\delta\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ijm}^* \delta p_m^* \quad (3-7)$$

$$\delta u_i^* = (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) \delta p_m^* \quad (3-8)$$

onde u_{is}^r são deslocamentos de corpo rígido, multiplicados por constantes arbitrárias C_{sm} , e δp_m^* são parâmetros de forças virtuais arbitrárias, com m sendo o local e direção de aplicação dessas forças. As funções $\delta\sigma_{ijm}^*$ e δu_{im}^* têm suporte global, em que m se refere ao ponto fonte, ou seja, o ponto de aplicação de δp_m^* e i ao ponto campo, onde os efeitos de δp_m^* são medidos.

Embora $\delta\sigma_{ijm}^*$ e δu_{im}^* tendam a infinito no ponto de aplicação de δp_m^* , os resultados são analíticos no domínio Ω que, no desenvolvimento natural da formulação a seguir, termine por excluir o domínio no entorno de m . Por conveniência, as funções $\delta\sigma_{ijm}^*$ são normalizadas de tal forma que, para um domínio Ω_0 que contém δp_m^* , com contorno Γ_0

$$\int_{\Omega_0} \sigma_{jim,j}^* d\Omega = \int_{\Gamma_0} \sigma_{jim}^* \eta_j d\Gamma \equiv -\delta_{im} \quad (3-9)$$

De acordo com a definição de solução fundamental exposta anteriormente, a integral de domínio do lado esquerdo da equação (3-6) é avaliada como $\int_{\Omega} \delta\sigma_{ji,j}^* u_i d\Omega = -\delta_{im} u_i \delta p_m^* = -u_m \delta p_m^*$.

Substituindo $\delta\sigma_{ijm}^*$ e δu_{im}^* na equação (3-6) de acordo com as equações (3-7) e (3-8), pode-se obter uma forma modificada da identidade de Somigliana:

$$\begin{aligned} u_m &= \int_{\Gamma} t_i u_{im}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega \\ &+ C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_i u_{is}^r d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \end{aligned} \quad (3-10)$$

A equação (3-10) é utilizada para avaliar deslocamentos em pontos internos. Com os devidos tratamentos, essa equação pode ser usada para avaliar tensões em pontos internos.

O termo entre parênteses se torna zero quando as forças de corpo estão em equilíbrio com as forças de superfície. Contudo, isso não é necessariamente verdade quando se lida com aproximações.

Os deslocamentos u_i e as forças de superfície t_i podem ser aproximados

no contorno como

$$u_i = u_{in}d_n \quad (3-11)$$

$$t_i = t_{i\ell}t_\ell \quad (3-12)$$

onde d_n é o vetor de deslocamentos nodais e u_{in} são as funções de interpolação com suporte local, escolhidas de tal forma que nos pontos nodais $u_{in} \equiv \delta_{in}$. As forças de superfície t_ℓ são atributos de superfície que dependem da normal η_i , pois o contorno pode não ser inteiramente suave, podendo haver mais de uma normal associadas a um determinado nó. As funções de interpolação $t_{i\ell}$ também têm suporte local.

Assim como em elementos finitos, o método consistente dos elementos de contorno usa uma formulação isoparamétrica, em que a mesma função de interpolação u_{in} é usada para aproximar a geometria do contorno.

Substituindo as equações (3-11) e (3-12) na identidade de Somigliana (equação (3-10)), obtém-se a equação fundamental do método dos elementos de contorno

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n &= \int_{\Gamma} t_{il} u_{im}^* d\Gamma t_l + \int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega \\ &+ C_{sm} \left(\int_{\Gamma} t_{il} u_{is}^r d\Gamma t_l + \int_{\Omega} b_i u_{is}^r d\Omega \right) \end{aligned} \quad (3-13)$$

que, em forma matricial, fica

$$\mathbf{H}\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{t} + \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-14)$$

onde $\mathbf{H} = [H_{mn}]$ é uma matriz quadrada de transformação cinemática que transforma deslocamentos entre dois sistemas de referências, $\mathbf{G} = [G_{m\ell}]$ é uma matriz do tipo de flexibilidade, $\mathbf{b}$ é o vetor de deslocamentos nodais equivalentes devido às forças de corpo e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um erro cuja magnitude depende da quantidade de deslocamentos de corpo rígido que estão implícitos nas soluções fundamentais.

Quando há a existência de forças de corpo e uma solução particular (p) é conhecida, o termo b_m de deslocamentos nodais equivalentes, presente na equação (3-14), pode ser aproximado como se segue:

$$\int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} t_{il} u_{im}^* d\Gamma t_l^p + \left(\int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma + \delta_{mn} \right) d_n^p \quad (3-15)$$

Então, a equação (3-14) fica

$$\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{G}(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-16)$$

A partir dos termos entre parênteses da equação (3-13), o vetor $\boldsymbol{\varepsilon}$ presente nas equações (3-14) e (3-16) pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (3-17)$$

onde $\mathbf{R}$ é dado por Dumont [19, 45]:

$$R_{\ell s} = \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{is}^r d\Gamma \quad (3-18)$$

Levando em consideração os desenvolvimentos anteriores e após algumas manipulações algébricas, é possível chegar a uma equação consistente do método dos elementos de contorno:

$$\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) = \mathbf{G}_a(\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \equiv \mathbf{G} \mathbf{P}_R^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^p) \quad (3-19)$$

onde $\mathbf{P}_R^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{R}(\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T$ é o projetor ortogonal no espaço admissível das forças de superfície. Embora seja uma forma mais consistente de se resolver a equação (3-14), essa alteração na matriz $\mathbf{G}$ não gera grandes melhoras nos resultados.

Aplicando a equação (3-15) referente às forças de corpo à equação (3-10), a identidade de Somigliana se torna:

$$u_m = u_m^p + \int_{\Gamma} t_{i\ell} u_{im}^* d\Gamma (t_\ell - t_\ell^p) - \int_{\Gamma} \sigma_{jim}^* \eta_j u_{in} d\Gamma (d_n - d_n^p) \quad (3-20)$$

Uma das diferenças do método convencional para o método consistente está na interpolação das forças de superfície. No método consistente, Dumont [19, 48] propôs uma decisiva melhoria e simplificação na função de interpolação, sendo trocada por:

$$t_{i\ell} \leftarrow \frac{|J|_\ell}{|J|} t_{i\ell} \quad (3-21)$$

onde $|J|_\ell$ é o valor do jacobiano avaliado no ponto ℓ . Esse procedimento leva a uma integração numérica mais fácil de $\mathbf{G}$.

Como visto anteriormente, para o desenvolvimento das equações (3-10) e (3-13) em elastostática plana, faz-se necessário estabelecer as soluções fundamentais da equação de Navier, também conhecidas como soluções fundamentais de Kelvin [24]. Para estado plano de deformações, essas soluções fundamentais, em termos de deslocamentos, tensões e forças de superfície, são dadas

respectivamente por:

$$u_{im}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} \{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{im} - r_{,i} r_{,m} + C \delta_{im} \} \quad (3-22)$$

$$\sigma_{ijm}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu) (r_{,j} \delta_{im} + r_{,i} \delta_{jm} - r_{,m} \delta_{ij}) + 2r_{,j} r_{,m} r_{,i} \} \quad (3-23)$$

$$p_{im}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu) \delta_{im} + 2r_{,i} r_{,m}] \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) (r_{,i} n_m - n_i r_{,m}) \right\} \quad (3-24)$$

onde r é a distância entre um ponto fonte de aplicação da força unitária e um ponto campo no contorno.

3.3

Avaliação numérica das matrizes **H** e **G**

As matrizes **H** e **G**, contidas na equação (3-13), quando expandidas em forma matricial, se tornam:

$$\mathbf{H} = \frac{-1}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{r^2} \mathbf{f} d\xi + \int_0^1 \frac{1}{r^4} \mathbf{h} d\xi \right\} \quad (3-25)$$

onde

$$\mathbf{f} = (0, 5-\nu) N_n^{oe} \begin{bmatrix} xy' - yx' & xx' + yy' \\ -(xx' + yy') & xy' - yx' \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{h} = (xy' - yx') N_n^{oe} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

e

$$\mathbf{G} = \frac{-|J|_\ell}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ \int_0^1 \ln(r) \mathbf{I}_g d\xi - \int_0^1 \frac{1}{r^2} \mathbf{g} d\xi \right\} \quad (3-27)$$

onde

$$\mathbf{I}_g = (3-4\nu) N_\ell^{oe} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{g} = N_\ell^{oe} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

Segundo Dumont [44, 50, 51] as singularidades podem ocorrer de três formas, como mostra a Figura 3.2 para uma variável paramétrica ξ . A primeira, que será explicada nas seções 3.3.1 e 3.3.2, se dá quando o ponto fonte está dentro dos limites de integração ($0 \leq \xi_s \leq 1$). A segunda, conhecida como quase singularidade real, ocorre quando o ponto fonte está no seguimento de

integração, porém fora e suficientemente próximo dos limites de integração ($\xi_s = a < 0$ ou $\xi_s = a > 1$). O terceiro tipo de singularidade é conhecido como quase singularidade complexa, onde o ponto fonte se encontra bastante próximo, porém fora do seguimento de integração ($\xi_s = a \pm bi$).

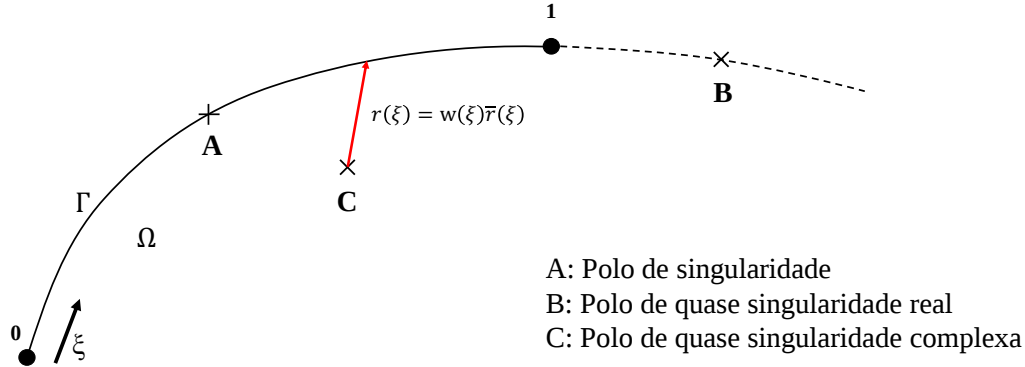


Figura 3.2: Polos de singularidade. Fonte: Adaptada das notas de aula de Dumont

Quando se tem um polo de quase singularidade real ($\xi_s = a < 0$ ou $\xi_s = a > 1$), ponto B da Figura 3.2, a matriz **H** apresenta um núcleo de singularidade do tipo $1/(\xi - \xi_s)$. Esse núcleo de singularidade vem do cancelamento dos termos singulares de $1/r^2$ e $1/r^4$ com os termos singulares das matrizes **h** e **f** da equação (3-25), que tendem a zero quando r tende a zero. Já a matriz **G** apresenta um único núcleo de singularidade do tipo $\ln(\xi - \xi_s)$.

Segundo Dumont [44], seja $p(\xi)$ um polinômio genérico, as integrais singulares da equação (3-25) podem ser representadas da seguinte forma:

$$\int_0^1 \frac{p}{\xi - a} \equiv \int_0^1 \frac{1}{(\xi - a)} \frac{f(\xi - a)}{r^{2n}} \quad (3-29)$$

onde n é a multiplicidade da raiz real a . Logo, o problema é resolvido com uma expansão em série de Taylor de p em torno de $\xi_s = a$ e sucessivas aplicações de L'Hospital ao limite de p para $\xi \rightarrow a$.

No caso de um polo de quase singularidade complexa ($\xi_s = a \pm bi$), ponto C da Figura 3.2, a matriz **H** apresenta um núcleo de singularidade do tipo $1/w$ e $1/w^2$, onde $w = (\xi - a - bi)(\xi - a + bi)$. Diferente da quase singularidade real, não há um cancelamento dos termos singulares de $1/r^2$ e $1/r^4$ com os termos singulares das matrizes **h** e **f** da equação (3-25). Já a matriz **G** apresenta um núcleo de singularidade do tipo $\ln(w)$ e outra do tipo $1/w$.

Seja $p(\xi)$ um polinômio genérico, as integrais singulares da equação (3-25) podem ser representadas da seguinte forma:

$$\int_0^1 \frac{p}{w^n} \equiv \int_0^1 \frac{1}{w^n} \frac{f w^n}{r^{2n}} \quad (3-30)$$

onde n é a ordem do núcleo de singularidade.

Para a quase singularidade complexa, Dumont [44] propôs uma expansão em série de p em torno de um dipolo $\xi_s = a \pm bi$ e sucessivas aplicações de L'Hospital ao limite de p para $\xi \rightarrow \xi_s$.

3.3.1

Singularidade da matriz $\mathbf{H}$

No geral, a matriz $\mathbf{H}$ pode ser avaliada em termos de quadratura de Gauss-Legendre, porém, quando analisada no ponto de singularidade, a matriz $\mathbf{H}$ deve ser avaliada em termos de uma parte finita [49] somada a uma parte descontínua:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{fp} + \mathbf{H}_{disc} \quad (3-31)$$

Para um ponto fonte dentro do limite de integração ($0 < \xi_s < 1$), a integral de parte finita é dada por Gauss-Legendre somada a uma parcela de correção, conforme apresentado por Dumont [50, 51]:

$$\mathbf{H}_{fp} \simeq \mathbf{H}_{GL} - \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\ln \frac{1-\xi_0}{\xi_0} - \sum_{i=1}^{n_g} \frac{h_i}{\xi_i - \xi_0} \right) \quad (3-32)$$

e para um contorno suave a parte descontínua é dada por:

$$\mathbf{H}_{disc} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \quad (3-33)$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade.

Quando $\mathbf{H}$ é avaliada nos limites de integração, para $\xi_s = 0$ ou $\xi_s = 1$, a parte finita fica sendo

$$\mathbf{H}_{fp} \simeq \mathbf{H}_{GL} \pm \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\ln \left| \frac{dr}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_s} - \sum_{i=1}^{n_g} \frac{h_i}{\xi_i} \right) \quad (3-34)$$

e de acordo com o esquema apresentado na Figura 3.3, que ilustra como é realizada a integração em torno da singularidade, onde não há uma suavidade

no encontro de um elemento com outro, a parte descontínua fica:

$$\mathbf{H}_{disc} \simeq \left(1 - \frac{\theta^+ - \theta^-}{2\pi}\right) \mathbf{I} + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}_{\theta^+}^{\theta^-} \quad (3-35)$$

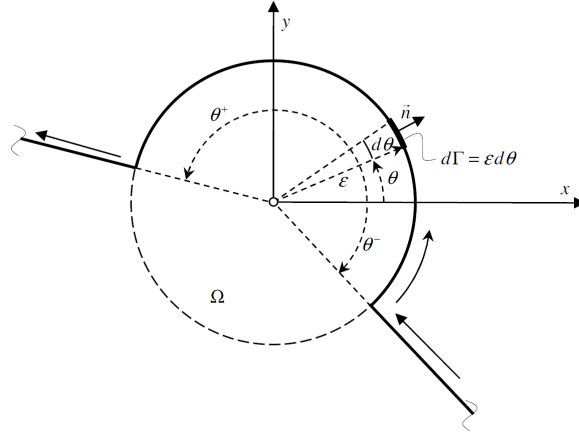


Figura 3.3: Esquema de integração em torno da singularidade. Fonte: Notas de aula de Dumont.

3.3.2

Singularidade da matriz $\mathbf{G}$

Quando não há problemas de singularidade, a matriz $\mathbf{G}$ pode ser resolvida somente usando quadratura de Gauss-Legendre. Porém, quando há singularidade e o ponto fonte está dentro do intervalo de integração ($0 \leq \xi_s = a \leq 1$), a integral imprópria de $\mathbf{G}$ é resolvida em termos de Gauss-Legendre somada a um termo de correção, ficando

$$\mathbf{G} \simeq \mathbf{G}_{GL} - \frac{(3-4\nu)|J|_\ell}{8\pi G(1-\nu)} C_{Gr} \mathbf{I} \quad (3-36)$$

onde

$$C_{Gr} = \int_0^1 \ln |\xi - \xi_s| N_\ell^{oe} d\xi - GL \int_0^1 \ln |\xi - \xi_s| N_\ell^{oe} d\xi \quad (3-37)$$

e a primeira integral do lado direito da equação (3-35) é dada por uma matriz de constantes.

4

Desenvolvimentos da integral J no método consistente dos elementos de contorno

A integral J é uma integral de linha em um contorno circular com centro na ponta da trinca, cujo sistema de coordenadas está representado na Figura 4.1.

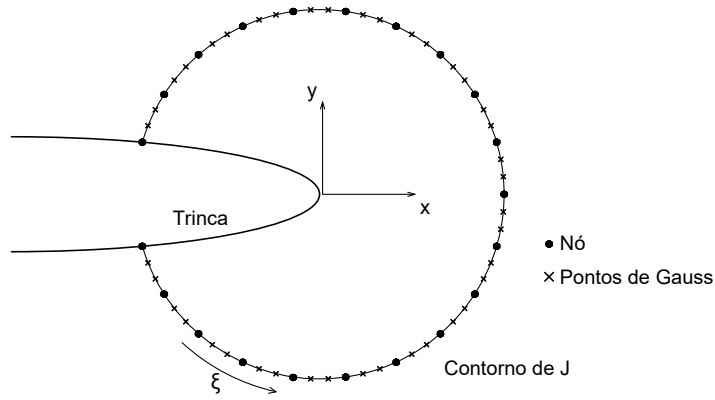


Figura 4.1: Esquema de integração de J.

Para a obtenção do fator de intensidade de tensão, foi necessário fazer alguns desenvolvimentos da integral J (equação (2-22)) no âmbito do método consistente dos elementos de contorno.

O termo da integral J correspondente a derivada dos deslocamentos com relação ao eixo x, ao longo do caminho de J, é dado a partir da identidade de Somigliana:

$$u_{m,x} = u_{m,x}^p + \int_{\Gamma} t_{il} u_{im,x}^* d\Gamma (t_{\ell} - t_{\ell}^p) - \int_{\Gamma} (\sigma_{jim}^* \eta_j)_{,x} u_{in} d\Gamma (d_n - d_n^p) \quad (4-1)$$

Substituindo a derivada com relação ao eixo x das soluções fundamentais de deslocamentos (equação (3-22)) e de tensões (equação (3-23)) na equação (4-1) e expandindo em forma matricial, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{\partial u^p}{\partial x} + \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{|J|_{\ell}}{4G} \int_{seg} \left[\frac{1}{r^2} (\mathbf{U}_{21} + \mathbf{U}_{22}) + \frac{1}{r^4} \mathbf{U}_4 \right] d\xi (t_{\ell} - t_{\ell}^p) \right. \\ & \left. - \int_{seg} \left[\frac{1}{r^2} \mathbf{P}_2 + \frac{1}{r^4} (\mathbf{P}_{41} + \mathbf{P}_{42}) + \frac{1}{r^6} \mathbf{P}_6 \right] d\xi (d_n - d_n^p) \right\} \end{aligned} \quad (4-2)$$

onde

$$\mathbf{U}_{21} = (3 - 4\nu) \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} N_\ell^{oe} ; \quad (4-3)$$

$$\mathbf{U}_{22} = - \begin{bmatrix} 2x & y \\ y & 0 \end{bmatrix} N_\ell^{oe} ; \quad (4-4)$$

$$\mathbf{U}_4 = 2 \begin{bmatrix} x^3 & x^2y \\ x^2y & y^2x \end{bmatrix} N_\ell^{oe} ; \quad (4-5)$$

$$\mathbf{P}_2 = (0, 5 - \nu) \begin{bmatrix} y' & x' \\ -x' & y' \end{bmatrix} N_n^{oe} ; \quad (4-6)$$

$$\mathbf{P}_{41} = -2x(0, 5 - \nu) \begin{bmatrix} xy' - yx' & xx' + yy' \\ -(xx' + yy') & xy' - yx' \end{bmatrix} N_n^{oe} ; \quad (4-7)$$

$$\mathbf{P}_{42} = \begin{bmatrix} 3x^2y' - 2xyx' & 2xyy' - y^2x' \\ 2xyy' - y^2x' & y'y^2 \end{bmatrix} N_n^{oe} ; \quad (4-8)$$

$$\mathbf{P}_6 = -2(xy' - yx')\mathbf{U}_4 \quad (4-9)$$

A equação (4-2) apresenta integrais singulares que são tratadas, nesse trabalho, de forma consistente para problemas de quase singularidade real e complexa, já definidas na seção 3.3 e mostradas na Figura 3.2.

Quando se tem um polo de quase singularidade real, a primeira e a segunda integral da equação (4-2) apresentam, respectivamente, núcleos de singularidade do tipo $1/(\xi - a)$ e $1/(\xi - a)^2$. Esses núcleos de singularidade decorrem do cancelamento dos termos singulares de $1/r^2$, $1/r^4$ e $1/r^6$ com os termos singulares presentes nas matrizes (4-3) a (4-9).

No caso de um polo de quase singularidade complexa, a primeira integral apresenta núcleos de singularidade do tipo $1/w$ e $1/w^2$ e a segunda integral apresenta núcleos de singularidade do tipo $1/w$, $1/w^2$ e $1/w^3$. Diferente da quase singularidade real, não há um cancelamento dos termos singulares, pois o raio r tende a zero onde os termos das matrizes (4-3) a (4-9) não tendem.

Como já explicado na seção 3.3, para um polo de quase singularidade real, faz-se uma expansão em série de Taylor de p em torno da raiz real a . Já para um polo de quase singularidade complexa, Dumont [44] propôs uma expansão em série de p em torno de um dipolo $\xi_s = a \pm bi$.

Foi uma contribuição original desse trabalho resolver a integração numérica de forma consistente para o termo correspondente a derivada dos deslocamentos com relação ao eixo longitudinal da trinca.

5

Aplicação do método a problemas de mecânica da fratura

Neste capítulo, encontram-se os resultados obtidos para alguns problemas bastante conhecidos no estudo de mecânica da fratura. Dois desses exemplos são tratados em um domínio infinito e outros dois em domínio finito, assim como as particularizações da formulação para cada tipo de problema. Todos os problemas apresentados são de condições de contorno de Neumann.

Alguns dados gerais e importantes devem ser destacados para uma melhor interpretação ou replicação dos resultados por parte do leitor, como o uso de elementos quadráticos no modelo, o coeficiente de Poisson ($\nu = 0.2$), o módulo de elasticidade transversal ($G = 80000$), o número de pontos de Gauss ($ng = 4$) utilizado na integração de cada elemento e o número de dígitos de precisão numérica de 30 casas decimais.

São realizados diversos estudos em que alguns desses parâmetros são variados, mantendo todos os outros constantes. Caso algum dos exemplos mostrados tenha outro parâmetro alterado, será devidamente detalhado no texto.

Para os exemplos que seguem, o fator de intensidade de tensão foi calculado através da integral J, discretizada em 10 setores e 4 pontos de Gauss em cada setor, aproximando um contorno circular com centro na ponta da trinca. Um estudo de convergência mostrou que com 10 setores e 4 pontos de Gauss em cada setor, tem-se precisão na sexta casa decimal. Não foi utilizado o Crack Tip Opening Displacement (CTOD) devido às incertezas nos resultados utilizando essa técnica.

5.1

Trinca em domínio infinito

O método dos elementos de contorno é uma excelente ferramenta na solução de problemas de domínio infinito, levando vantagem sobre alguns métodos de discretização do domínio, como o Método dos Elementos Finitos (MEF). Essa vantagem se deve à utilização de soluções fundamentais dentro da formulação do MEC.

Em grande parte dos problemas de domínio infinito, as forças são aplicadas no próprio domínio, sendo necessário realizar uma transformação

das forças de domínio em forças aplicadas no contorno. Todo esse processo resulta na equação (3-16), que consiste na separação do problema na soma de duas partes: tensões aplicadas em um domínio sem trinca e tensões aplicadas no contorno no sentido de fechar a trinca, como mostra a Figura 5.1.

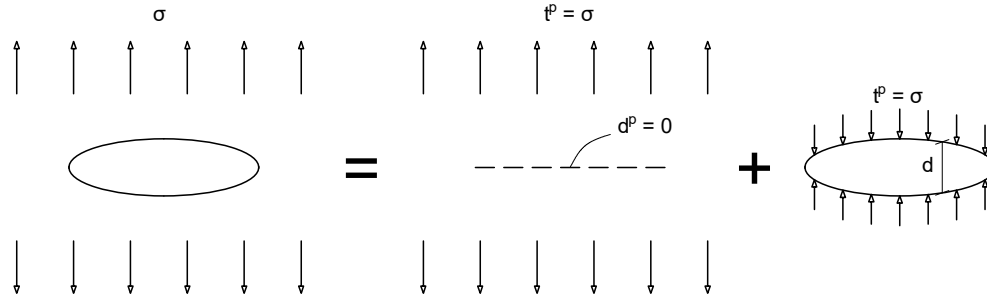


Figura 5.1: Ilustração de como as forças de domínio devem ser transformadas em forças aplicadas no contorno.

Fazendo uso da equação (3-16) e sabendo que, em problemas de domínio infinito, a matriz $\mathbf{H}$ é não singular, os deslocamentos no contorno são dados por:

$$\mathbf{d} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{t}^p \quad (5-1)$$

que corresponde ao esquema mais a direita da Figura 5.1.

Após obter os resultados de deslocamentos no contorno, os mesmos são utilizados para calcular deslocamentos e tensões em pontos internos, utilizando a identidade de Somigliana (equação (3-20)). Porém, como apresentado na Figura 5.1, uma constante, correspondente às tensões aplicadas na placa sem trinca, deve ser adicionada a solução.

5.1.1 Trinca elíptica

O primeiro exemplo da seção 5.1 trata de uma trinca elíptica em domínio infinito submetida a um carregamento unitário perpendicular ao plano da trinca, o que leva a um problema de modo I de fratura. As dimensões da trinca deste exemplo são apresentadas na Figura 5.2, assim como um modelo de sua discretização.

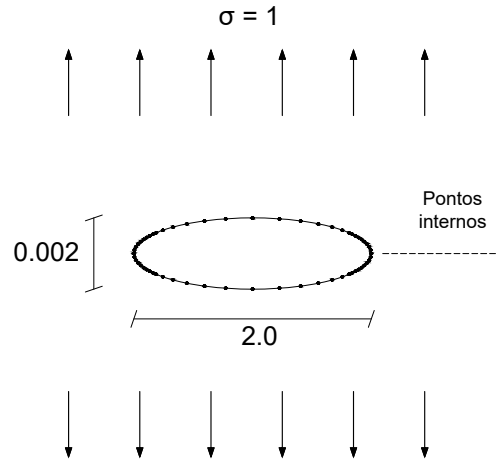


Figura 5.2: Trinca elíptica em meio infinito carregada uniaxialmente.

Para garantir a confiabilidade dos resultados apresentados, fez-se um estudo em que foram variados o número de dígitos de precisão numérica e o número de pontos de Gauss utilizados. A tabela 5.1 apresenta os resultados desse estudo para uma trinca elíptica em domínio infinito de abertura inicial $2 \cdot 10^{-3}$ e razão de tamanho dos elementos de 1,35.

Tabela 5.1: Estudo de confiabilidade dos resultados para uma trinca elíptica em domínio infinito com abertura inicial $2 \cdot 10^{-3}$.

Dígitos de precisão	ng = 4	ng = 6	ng = 8
20	1,7721619841024	1,77217342024597	1,77217341712007
30	1,77216196571388	1,77217342024848	1,77217341712007
40	1,77216196489224	1,77217342024818	1,77217341712007

Um estudo de convergência foi realizado para três tipos de discretização, onde foi mudada a razão de tamanho entre elementos vizinhos, fazendo com que haja uma densidade maior desses elementos na ponta da trinca. Esse estudo é apresentado na Figura 5.3.

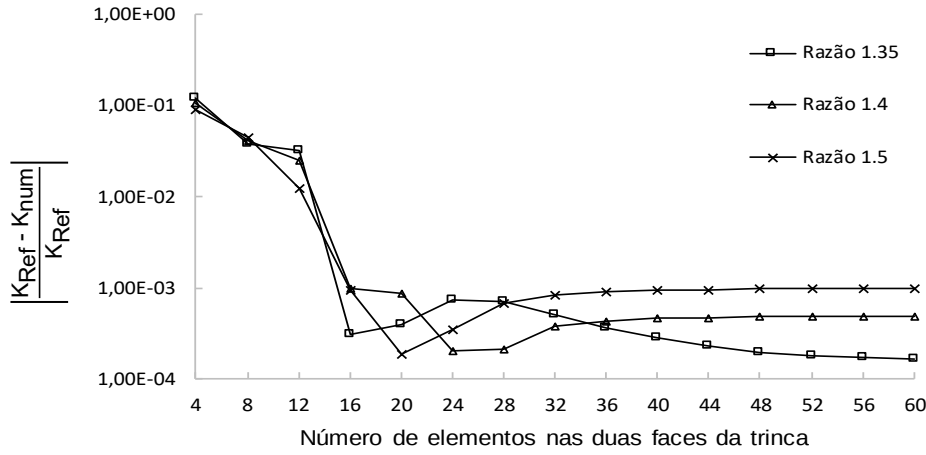


Figura 5.3: Convergência do FIT para uma trinca elíptica em meio infinito

O gráfico da Figura 5.3 mostra o erro entre o fator de intensidade de tensão obtido numericamente, usando a metodologia apresentada nesse trabalho, e o fator de intensidade de tensão de referência ($K = 1,7724539$) para o problema exposto na Figura 5.1, encontrado em Tada et al.[22] e dado por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5-2)$$

onde σ é a tensão aplicada remotamente e a é o semi comprimento da trinca.

Percebe-se que os resultados mostrados na Figura 5.3 apresentam um erro muito pequeno, sendo a razão de 1.35 o melhor resultado para este problema, com erro na quarta casa decimal. Parte desse erro se deve ao fato de que a solução de referência foi desenvolvida para uma trinca de abertura inicial zero, o que difere do modelo estabelecido nesse estudo e do que acontece na prática.

Para verificar o efeito da abertura inicial da trinca no FIT, fez-se um estudo de erros variando essa abertura nos valores de $2 \cdot 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-4}$ e $2 \cdot 10^{-5}$, para diversas razões de proporção de elementos e uma discretização de 60 elementos na trinca. Os resultados desse estudo são apresentados na Figura 5.4.

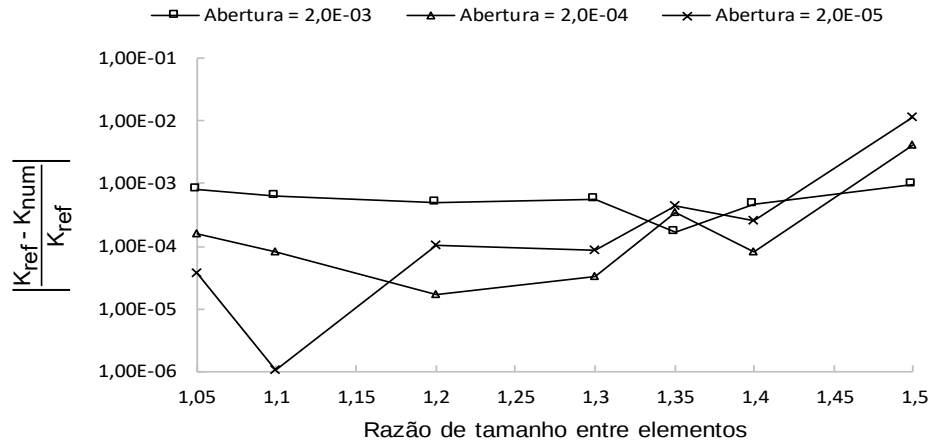


Figura 5.4: Erro correspondente a diversas aberturas variando a razão do tamanho do elemento.

Constatou-se que os resultados melhoram à medida em que o tamanho da abertura inicial da trinca é reduzida, desde que a proporção de elementos seja ajustada também. O melhor resultado obtido para uma trinca de abertura $2 \cdot 10^{-3}$ foi de $1,6468 \cdot 10^{-4}$ para uma razão de 1,35. Com uma abertura de $2 \cdot 10^{-4}$, o melhor resultado foi de $1,6917 \cdot 10^{-5}$ para uma razão de 1,2. Já para uma abertura ainda menor, de $2 \cdot 10^{-5}$, o melhor resultado foi de $1,0518 \cdot 10^{-6}$ com uma razão de 1,1.

Na seção 3.3.1 foi apresentada a equação da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$, que pode ser usada para medir o ângulo entre elementos e, por consequência, o erro que se está cometendo na geometria do modelo. Como mencionado, a parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ é 0,5 para um contorno suave, ou próximo a isso nos nós de encontro entre elementos. A Figura 5.5 mostra a ponta da trinca para uma abertura de $2 \cdot 10^{-3}$ e uma razão de tamanho entre os elementos 1,35.

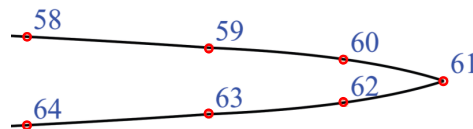


Figura 5.5: Ponta da trinca para uma abertura inicial de $2 \cdot 10^{-3}$ e razão de tamanho do elemento 1,35.

O erro de geometria para um quarto da trinca com abertura $2 \cdot 10^{-5}$ é apresentado pela Figura 5.6, em que o nó 1 corresponde ao nó da ponta da trinca, enquanto o nó 31 corresponde ao nó do meio da trinca. Esse erro é

medido unicamente para os nós de encontro dos elementos, pois o nó central é suave. Com isso, pode-se ter total controle dos erros que se está cometendo na geometria do problema.

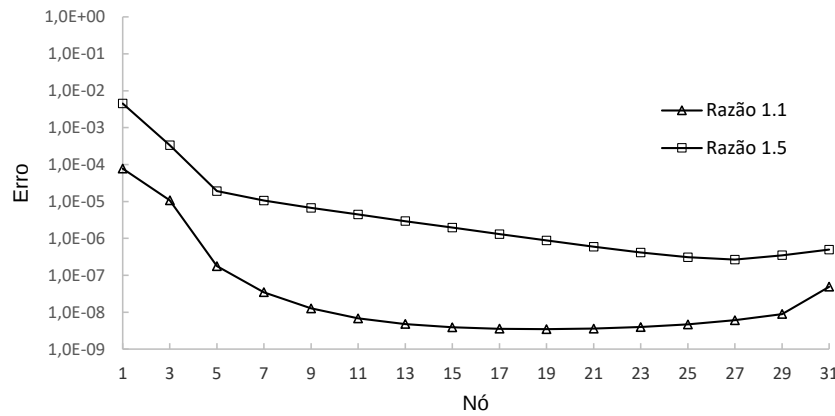


Figura 5.6: Erro de geometria referente a parte descontínua da matriz **H**.

Na Figura 5.7, encontra-se os resultados obtidos para o cálculo de tensão em quarenta pontos internos, colineares e com o primeiro ponto situado a uma distancia de 10^{-3} da ponta da trinca, vide Figura 5.2. Esse estudo foi realizado para uma trinca de abertura $2 \cdot 10^{-3}$ e uma razão de tamanho do elemento de 1.35.

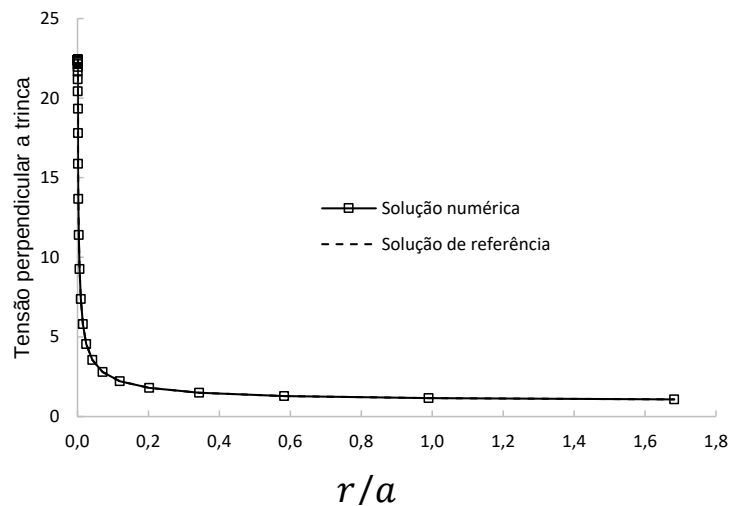


Figura 5.7: Curva de tensão em pontos internos, colineares, localizados no plano da trinca a uma distância de 10^{-3} da ponta da trinca.

As tensões perpendiculares ao plano da trinca, obtidas numericamente, tendem a infinito quando calculadas próximo à ponta da trinca. A figura 5.8

apresenta o erro entre essas tensões e a solução de referência obtida utilizando a função de tensão complexa de Westergaard sem aproximação, permitindo a aferição dos resultados em pontos internos a uma distância qualquer da ponta da trinca.

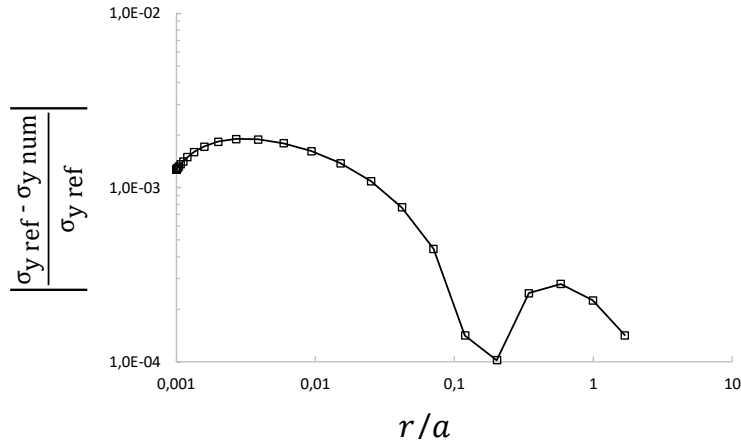


Figura 5.8: Erro entre as tensões de referência e as tensões encontradas numericamente.

Outro estudo realizado nesse trabalho de pesquisa foi medir o efeito da variação do coeficiente de Poisson no fator de intensidade de tensão, como mostra o gráfico da Figura 5.9.

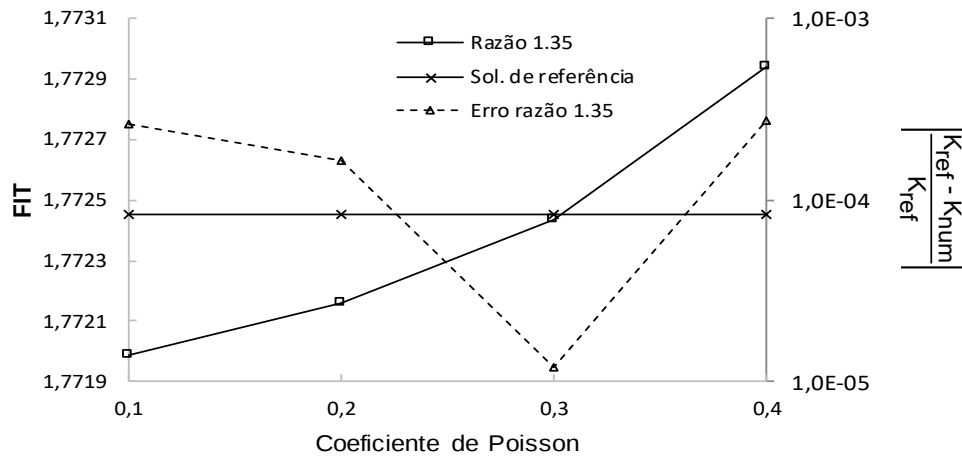


Figura 5.9: Resultados numéricos para uma variação do coeficiente de Poisson para uma trinca elíptica em domínio infinito.

No eixo das ordenadas à esquerda, encontra-se o fator de intensidade de tensão e no eixo à direita, tem-se o erro entre a solução numérica e a de

referência. Nota-se que a variação do coeficiente de Poisson afeta os resultados do FIT.

5.1.2

Trinca entre duas cavidades circulares

O segundo exemplo da seção 5.1 se refere a uma trinca elíptica entre duas cavidades circulares em meio infinito, submetida a um carregamento unitário, uniaxial e perpendicular ao plano da trinca. Os dados de geometria e carregamento são apresentados na Figura 5.10. Foi colocada, nas cavidades circulares, uma razão de proporção do tamanho dos elementos de 1,2, de forma a se obter uma densidade maior de elementos nas laterais das cavidades.

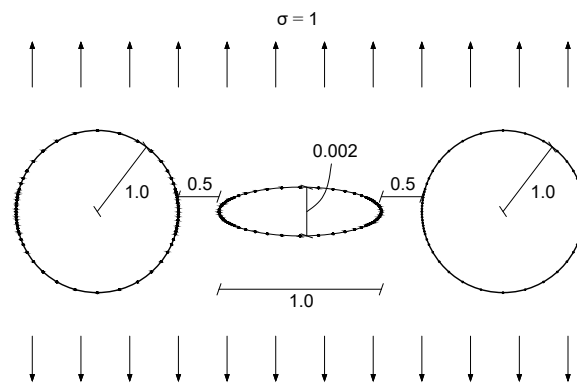


Figura 5.10: Trinca elíptica entre duas cavidades circulares

Para esse exemplo, foi realizado um estudo de convergência do fator de intensidade de tensão, em que se manteve constante o número de elementos nas cavidades circulares (40 elementos em cada cavidade) e se variou, somente, a quantidade de elementos na trinca, vide Figura 5.11. A solução de referência encontrada em Newman [52] para uma trinca de abertura inicial nula é $K = 2,0402701$, de acordo com as dimensões do problema descrito.

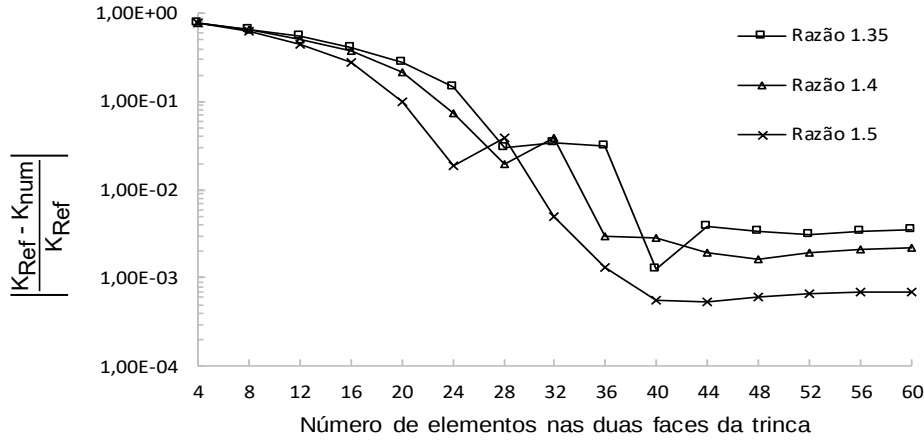


Figura 5.11: Convergência do FIT para uma trinca entre duas cavidades circulares em meio infinito

O gráfico de convergência da Figura 5.11 mostra os erros entre a solução de referência e a solução encontrada numericamente usando a metodologia proposta nesse trabalho de pesquisa, além de apresentar resultados ainda melhores do que os obtidos por Dumont e Lopes [13] no âmbito do MHEC.

Pode-se perceber que o melhor resultado é obtido para uma razão entre o tamanho dos elementos de 1.5, com erros na terceira casa decimal. Porém, como visto na seção anterior, os resultados podem ser ainda melhores caso a abertura inicial da trinca seja reduzida.

5.2

Trinca em domínio finito

Quando o problema é de domínio finito, alguns cuidados devem ser tomados, pois a matriz $\mathbf{H}$ é singular e portanto, não tem inversa única. No entanto, uma técnica de inversas generalizadas, também conhecida como inversa de Bott-Duffin [53], pode ser adotada, já que a matriz $\mathbf{H}$ não transforma deslocamentos de corpo rígido ($\mathbf{W}$), ou seja

$$\mathbf{H}\mathbf{W} = 0 \quad (5-3)$$

Sendo assim, a equação (3-14), quando resolvida em termos de deslocamentos no contorno, é dada por

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}^{(-1)}\mathbf{G}\mathbf{t} \quad (5-4)$$

onde $\mathbf{H}^{(-1)}$ é a inversa generalizada da matriz $\mathbf{H}$.

O processo de inversão da matriz $\mathbf{H}$ consiste em projetar a inversa de uma matriz genérica de $\mathbf{H}$ no espaço ortogonal à base de deslocamentos de

corpo rígido. Essa matriz genérica é não singular por se tratar da soma de duas matrizes complementares, uma parcela admissível e outra inadmissível. Então, a equação (5-4) fica sendo

$$\mathbf{d} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{W} \left(\mathbf{W}^T \mathbf{W} \right)^{-1} \mathbf{W}^T \right) \left(\mathbf{H} + \mathbf{W} \left(\mathbf{W}^T \mathbf{W} \right)^{-1} \mathbf{W}^T \right)^{-1} \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (5-5)$$

onde o primeiro conjunto de parênteses corresponde ao projetor ortogonal à base de deslocamentos de corpo rígido e o segundo conjunto de parenteses corresponde à inversa da matriz genérica de $\mathbf{H}$.

Após obtidos os deslocamentos no contorno, basta utilizar a identidade de Somigliana (equação (3-20)) para encontrar deslocamentos e tensões em pontos internos, aqui utilizados para calcular o fator de intensidade de tensão pela integral J.

5.2.1

Trinca elíptica de centro

O primeiro exemplo da seção 5.2 é uma trinca elíptica centrada em uma placa finita, submetida a um carregamento unitário e perpendicular ao plano da trinca, como é visto na Figura 5.12. Foi aplicada à trinca uma razão de proporção do tamanho do elemento de 1.4, de forma a ter elementos menores na ponta da trinca. Já no contorno lateral, foi aplicada uma razão de 1.05, reduzindo o tamanho do elemento à medida que se aproxima do centro da placa. O contorno externo foi discretizado com 50 elementos quadráticos e o contorno da trinca com 60 elementos quadráticos.

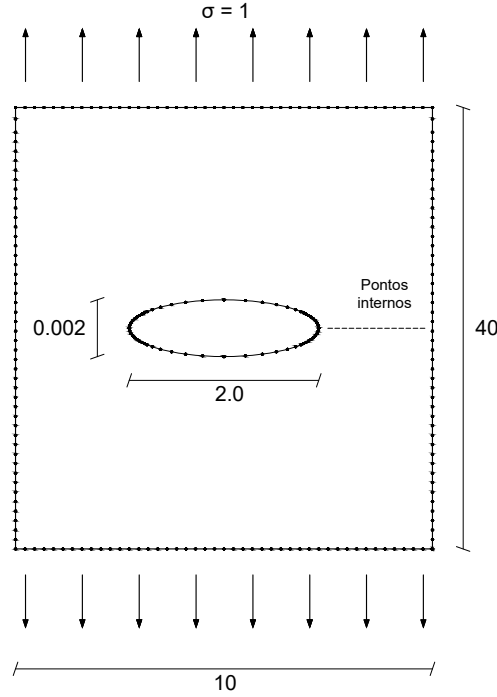


Figura 5.12: Trinca elíptica centrada em meio finito com carregamento perpendicular ao plano da trinca.

5.2.1.1

Estudo de confiabilidade dos resultados

Como este problema não tem uma solução analítica, é necessário garantir que o modelo apresentado nesse trabalho seja resolvido de forma precisa e com erros de simulação do problema controlados.

O primeiro erro a ser verificado é proveniente de $|\mathbf{G}\mathbf{t} - \mathbf{H}\mathbf{d}|$ para soluções polinomiais analíticas de tensão ($\mathbf{t}_{\text{pol}}$) e de deslocamentos ($\mathbf{d}_{\text{pol}}$). O erro é obtido dividindo a norma Euclidiana de $\mathbf{G}\mathbf{t} - \mathbf{H}\mathbf{d}$ pela norma Euclidiana de $\mathbf{G}\mathbf{t}$, como segue

$$\text{Erro} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\mathbf{G}\mathbf{t}_{\text{pol}} - \mathbf{H}\mathbf{d}_{\text{pol}}|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\mathbf{H}\mathbf{d}_{\text{pol}}|^2}} \quad (5-6)$$

Outro erro que deve ser verificado é o erro proveniente da inversão da matriz $\mathbf{H}$, que é cometido ao resolver o problema para deslocamentos no contorno e tem a ver com o condicionamento do sistema de equações. Esse erro corresponde a uma comparação entre as soluções polinomiais de deslocamentos ($\mathbf{d}_{\text{pol}}$) e os deslocamentos ($\mathbf{d}_{\text{num}}$) obtidos a partir das soluções polinomiais de tensão, sendo assim, o erro é calculado como

$$\text{Erro} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\Delta \mathbf{d}|^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n |\mathbf{d}_{\text{num}}|^2}} \quad (5-7)$$

Primeiro, são aplicadas as soluções polinomiais de tensão ($\mathbf{t}_{\text{pol}}$) na equação (5-4) e em seguida é somada a parcela inadmissível à matriz $\mathbf{H}$

$$\mathbf{d}_{\text{num}} = \left(\mathbf{H} + \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \right)^{(-1)} \mathbf{G} \mathbf{t}_{\text{pol}} \quad (5-8)$$

Após calcular os deslocamentos a partir das soluções polinomiais de tensão, é necessário projetar o vetor diferença ($\Delta \mathbf{d}$) no espaço ortogonal à base de deslocamentos de corpo rígido

$$\Delta \mathbf{d} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \right) (\mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}}) \quad (5-9)$$

No total, vinte soluções polinomiais são testadas: quatro lineares, quatro quadráticas, quatro cúbicas, quatro quárticas e quatro quánticas. A Figura 5.13 mostra que os resultados do erro para $|\mathbf{G} \mathbf{t} - \mathbf{H} \mathbf{d}|$ são muito próximos dos erros obtidos para $|\mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}}|$, o que leva à conclusão de que a matriz $\mathbf{H}$ não apresenta problemas de mau condicionamento. Ainda é possível notar que a solução para os campos lineares, que estão multiplicados por constantes para facilitar a visualização dos resultados, deve corresponder à solução analítica, para um contorno curvo da trinca, segundo o teorema de convergência de Dumont [48]. Cada ponto do gráfico da Figura 5.13 representa uma média aritmética das quatro soluções polinomiais correspondentes ao seu respectivo grau.

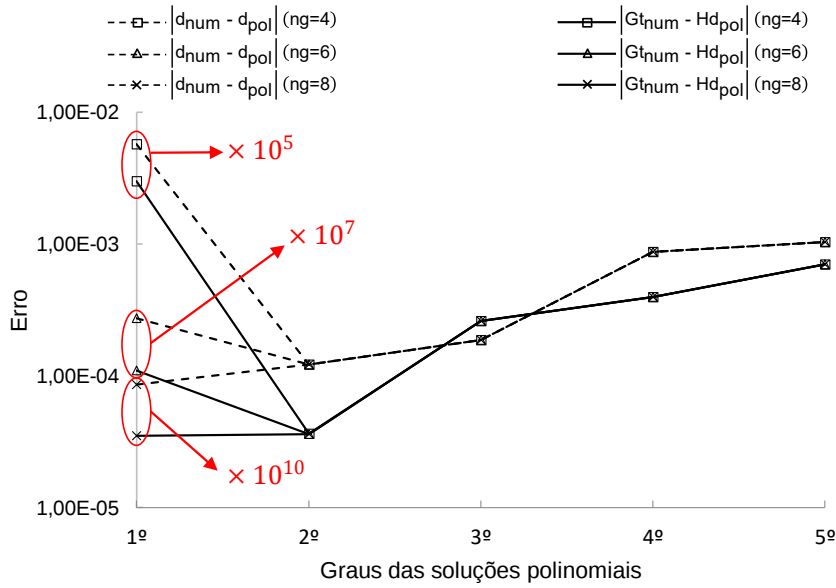


Figura 5.13: Comparação entre os erros $|G_{t_{pol}} - H_{d_{pol}}|$ e $|d_{pol} - d_{num}|$ para uma trinca elíptica em domínio finito

Para verificar o erro cometido no cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos, vide Figura 5.12, foram aplicadas as mesmas soluções polinomiais à identidade de Somigliana. Em seguida, os resultados obtidos foram comparados com as próprias soluções polinomiais, avaliados nas coordenadas dos pontos internos. Os resultados dessa análise, para $ng = 4$, são apresentados nas Figuras 5.14 e 5.15 para deslocamentos e tensões em pontos internos.

Os pontos internos apresentados na Figura 5.12 são colineares e espaçados de forma crescente a partir do ponto interno 1, que está localizado a uma distância de 10^{-3} da ponta da trinca, até o nó 40, que está a uma distância de $\sim 0,64$ do contorno lateral. Percebe-se, pelas Figuras 5.14 e 5.15, que os resultados para tensão são piores que os de deslocamentos e não importa se o ponto interno está próximo ou afastado do contorno, não há propagação de erro.

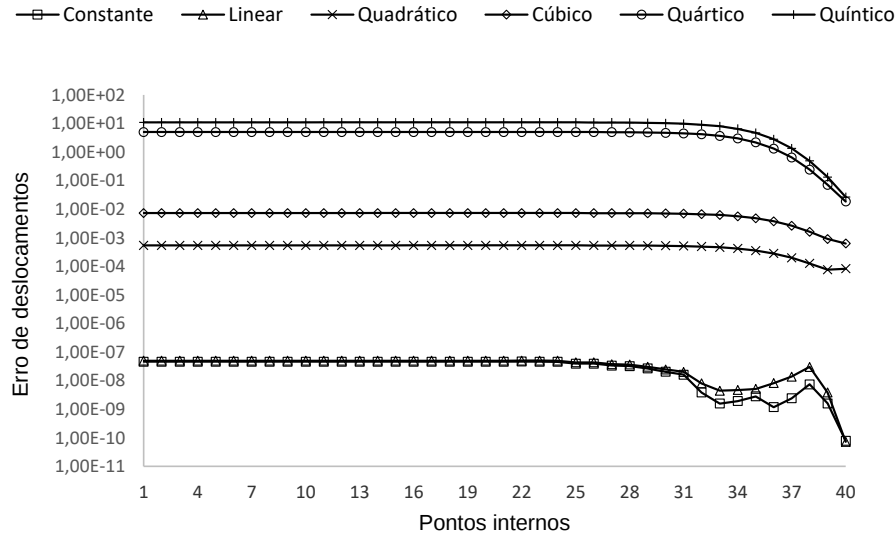


Figura 5.14: Erro de deslocamentos em pontos internos

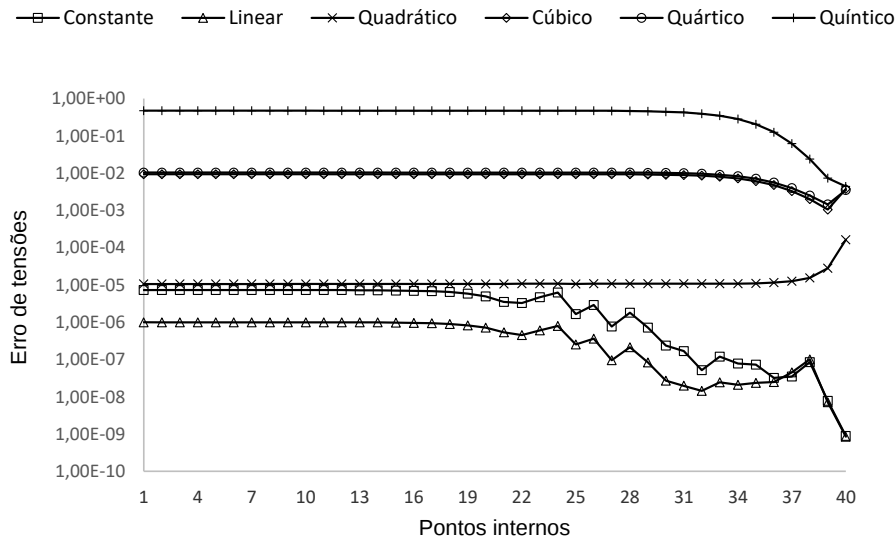


Figura 5.15: Erro de tensão em pontos internos

5.2.1.2

Estudo de fator de intensidade de tensões

Foi feito um estudo de convergência desse problema, de modo a manter constante a quantidade de elementos no contorno da placa e variar somente os elementos da trinca, onde foram aplicadas algumas razões de proporção no tamanho do elemento. A Figura 5.16 mostra o erro da convergência para três razões diferentes.

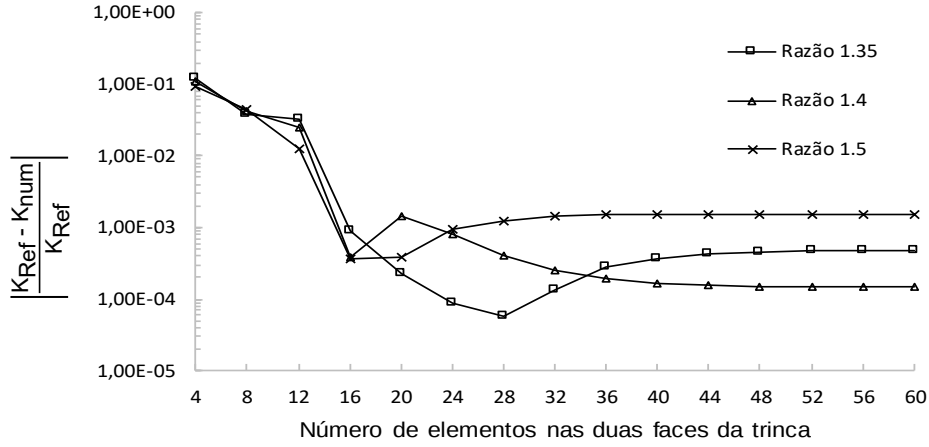


Figura 5.16: Convergência do FIT para uma trinca elíptica em meio finito

Analisando os resultados apresentados na Figura 5.16, constatou-se que os melhores resultados foram obtidos para uma razão de 1,4, com erros na ordem de 10^{-4} . Esse erro foi calculado em relação à solução de referência ($K = 1,8158459$) encontrada em Tada et al. [22]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2W}} \left\{ 1 - 0,025 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 0,06 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right\} \quad (5-10)$$

onde a é o semi comprimento longitudinal da trinca, W é a distancia do meio da trinca até a borda lateral da placa e σ é a tensão aplicada perpendicular ao plano da trinca.

5.2.2

Trinca reta de bordo

No segundo exemplo da seção 5.2, tem-se uma trinca reta de bordo com um carregamento unitário perpendicular ao plano da trinca, como mostra a Figura 5.17.

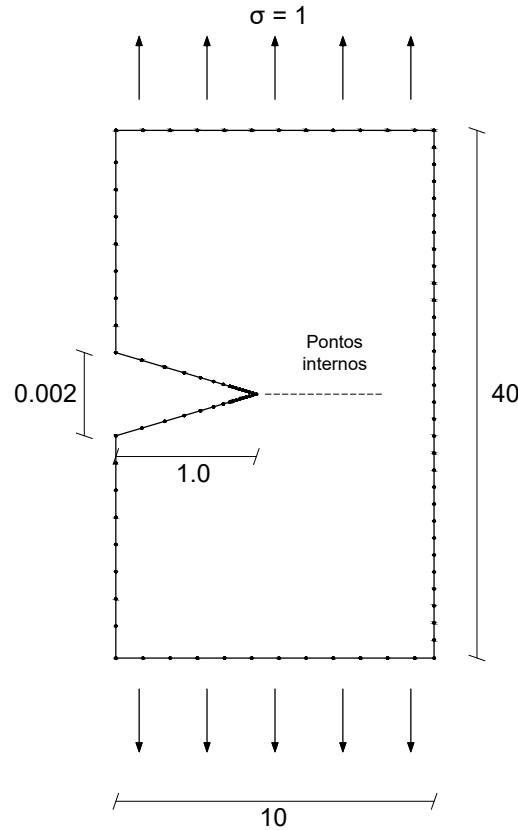


Figura 5.17: Trinca reta de bordo carregada uniaxialmente

Foi aplicada à trinca uma razão de proporção do tamanho do elemento de 1.35 e na face imediatamente antes e depois da trinca, foi aplicada uma razão de 1.05, de forma a se ter uma redução do tamanho dos elementos próximo à ponta da trinca. No modelo, foram usados 8 elementos quadráticos nas faces superior e inferior da placa, 32 elementos quadráticos nas faces laterais e 15 elementos quadráticos em cada face da trinca.

5.2.2.1

Estudo de confiabilidade dos resultados

Assim como no exemplo anterior, foram analisados os erros de $|\mathbf{Gt} - \mathbf{Hd}|$ e $|\mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}}|$, também para as mesmas soluções polinomiais de tensão ($\mathbf{t}_{\text{pol}}$) e deslocamentos ($\mathbf{d}_{\text{pol}}$). Os resultados são apresentados nas Figuras 5.18 e 5.19 para uma abertura inicial da trinca de 10^{-3} e 10^{-5} . Os erros obtidos para as soluções polinomiais lineares foram multiplicados por constantes (em vermelho) para facilitar a interpretação dos resultados.

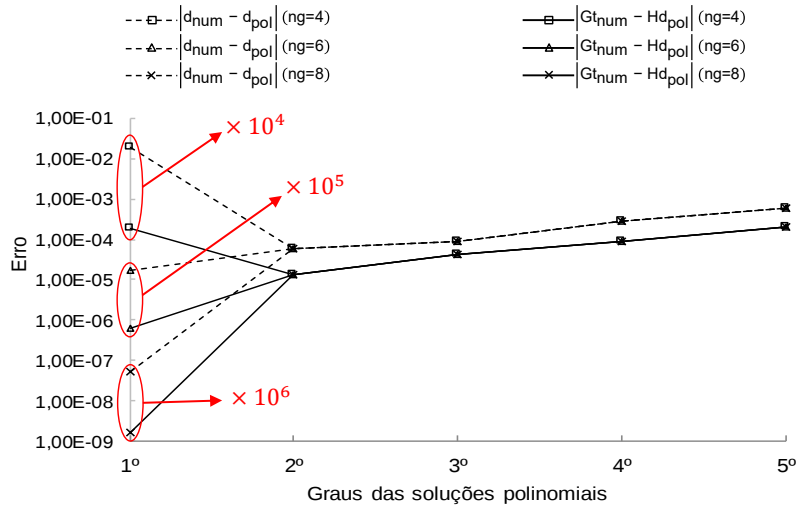


Figura 5.18: Comparação entre os erros $|Gt_{pol} - Hd_{pol}|$ e $|d_{pol} - d_{num}|$ para uma trinca reta de bordo com abertura inicial de trinca de $2 \cdot 10^{-3}$.

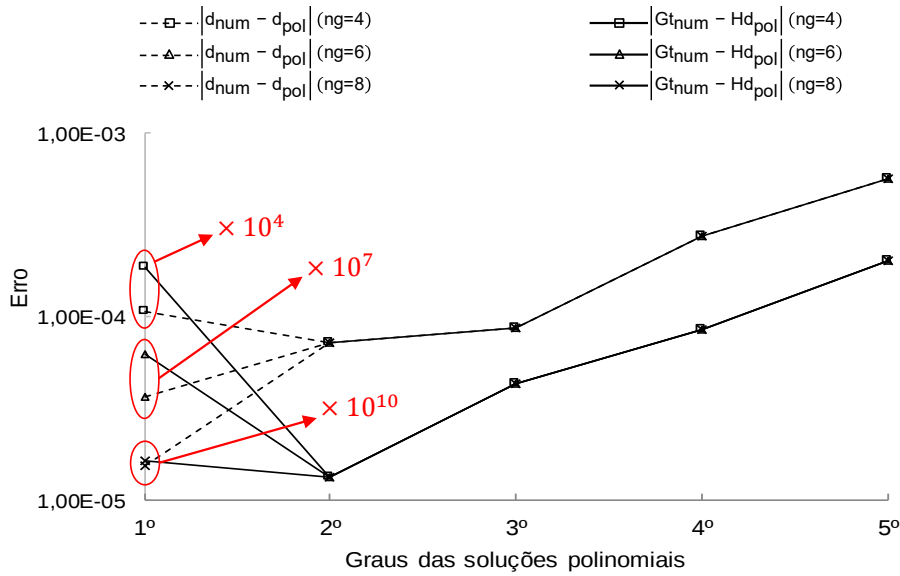


Figura 5.19: Comparação entre os erros $|Gt_{pol} - Hd_{pol}|$ e $|d_{pol} - d_{num}|$ para uma trinca reta de bordo com abertura inicial de trinca de $2 \cdot 10^{-5}$.

É possível perceber que não há uma diferença grande entre os dois tipos de erros analisados, o que leva a uma boa confiança na solução numérica do problema, sem problemas de mau condicionamento.

De modo a explorar o problema eliminando qualquer tipo de simetria, foi realizado o mesmo estudo para uma trinca inclinada de bordo com abertura inicial de $2 \cdot 10^{-3}$ e $2 \cdot 10^{-5}$, como mostra a Figura 5.20.

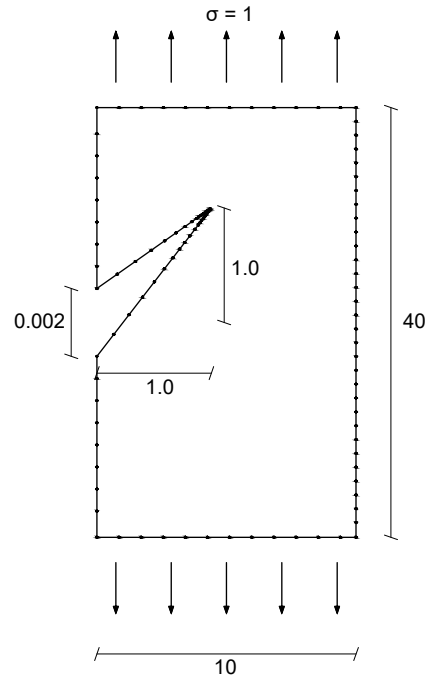


Figura 5.20: Trinca inclinada de bordo carregada uniaxialmente

Nota-se, através dos gráficos das Figuras 5.21 e 5.22 que, para a solução polinomial do segundo grau, o erro $|\mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}}|$ é maior do que o erro encontrado para resolver uma trinca reta de bordo. Isso se deve a falta de simetria do problema.

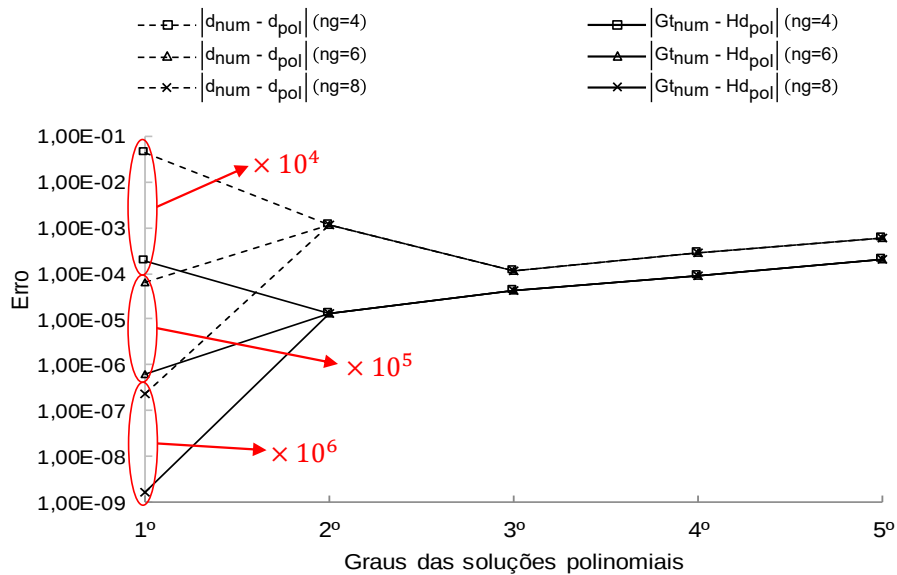


Figura 5.21: Comparação entre os erros $|\mathbf{Gt}_{\text{pol}} - \mathbf{Hd}_{\text{pol}}|$ e $|\mathbf{d}_{\text{pol}} - \mathbf{d}_{\text{num}}|$ para uma trinca inclinada de bordo com abertura inicial de trinca de $2 \cdot 10^{-3}$.

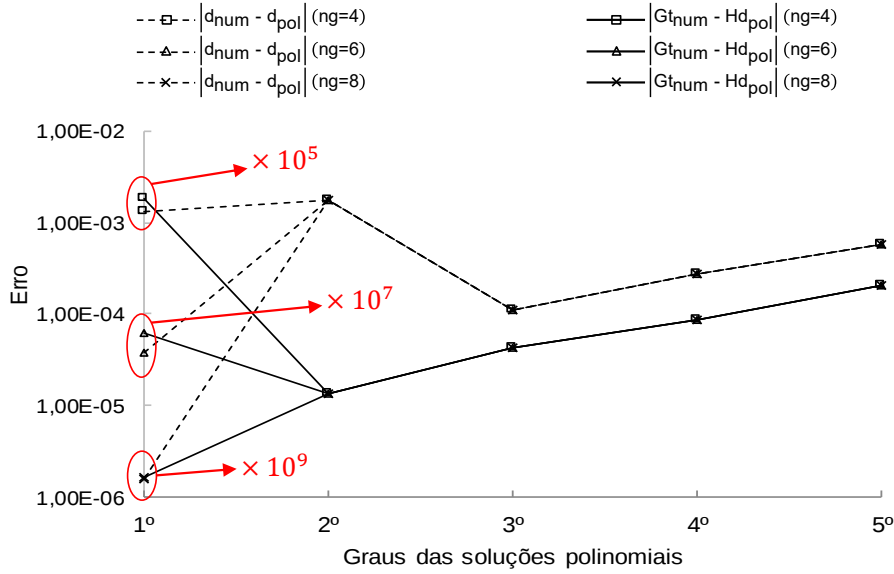


Figura 5.22: Comparação entre os erros $|\mathbf{Gt}_{pol} - \mathbf{Hd}_{pol}|$ e $|\mathbf{d}_{pol} - \mathbf{d}_{num}|$ para uma trinca inclinada de bordo com abertura inicial de trinca de $2 \cdot 10^{-5}$.

Após avaliar a integração numérica das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, assim como o condicionamento da matriz $\mathbf{H}$ para a trinca reta de bordo, foi realizado um estudo de erros para o cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos espaçados de forma crescente a partir do ponto 1, localizado a uma distância de 10^{-3} da ponta da trinca, até o ponto 40, que está a $\sim 1,44$ do contorno lateral da placa. Nota-se, pelas Figuras 5.23 e 5.24, que os resultados encontrados para deslocamentos são melhores que os encontrados para tensões.

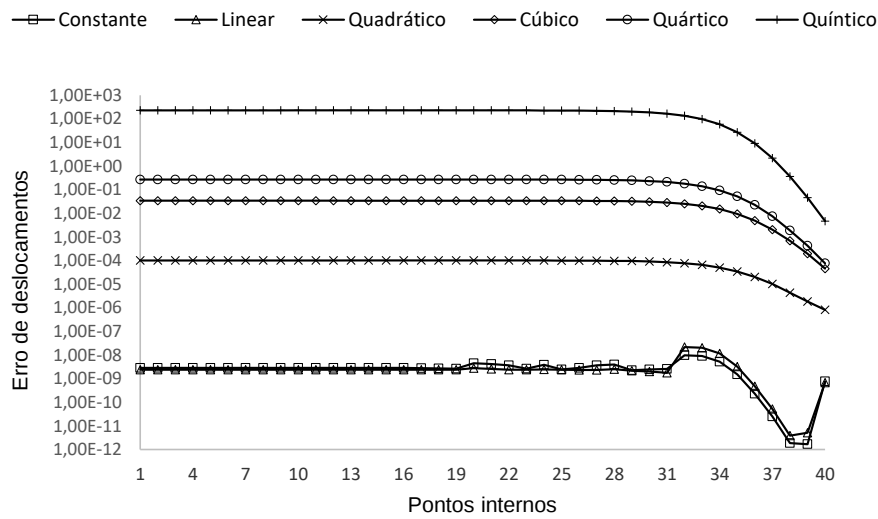


Figura 5.23: Erro de deslocamentos em pontos internos

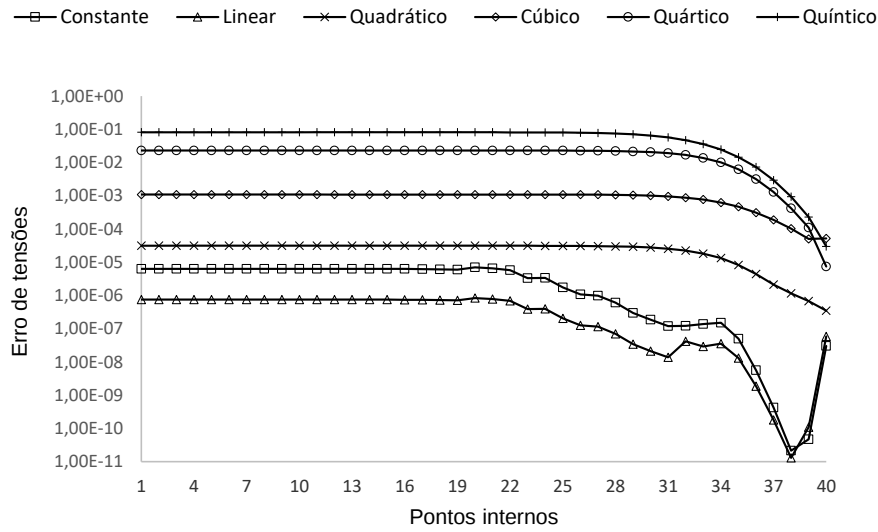


Figura 5.24: Erro de tensão em pontos internos

Nota-se nos resultados mostrados até agora, nessa seção, que embora o problema apresente contornos retos, o campo quadrático não é satisfeito analiticamente, pois como foi aplicada uma razão de proporção nos elementos, o jacobiano não é constante.

5.2.2.2

Estudo de fator de intensidade de tensões

Nesse exemplo, o estudo de convergência foi feito de forma a manter a quantidade de elementos no contorno sem trinca e variar somente a quantidade de elementos no contorno correspondente às faces da trinca. O gráfico de convergência ilustrado na Figura 5.25 mostra que, das três razões de tamanho do elemento apresentadas, o melhor resultado foi na ordem de 10^{-3} para uma razão de 1,35.

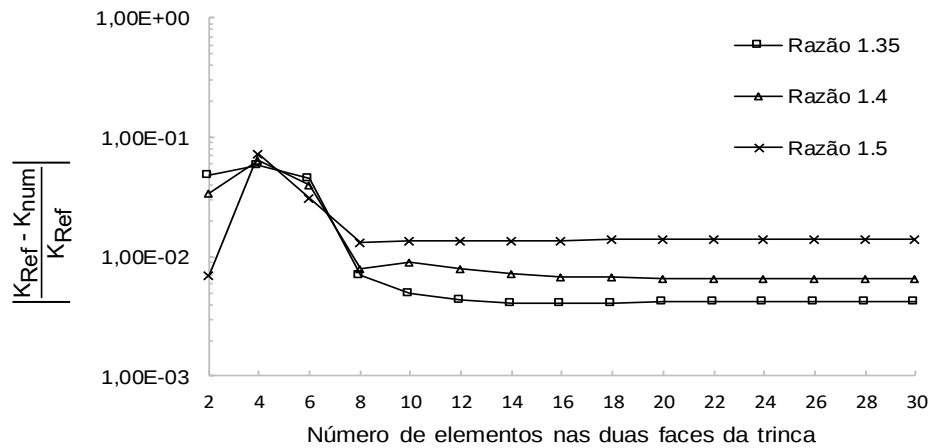


Figura 5.25: Convergência do FIT para uma trinca de bordo

Assim como no exemplo da seção 5.1.1, foi realizado um estudo variando a abertura inicial da trinca de bordo para diferentes razões de tamanho do elemento. Conclui-se, da Figura 5.26, que não há uma variação significativa dos resultados.

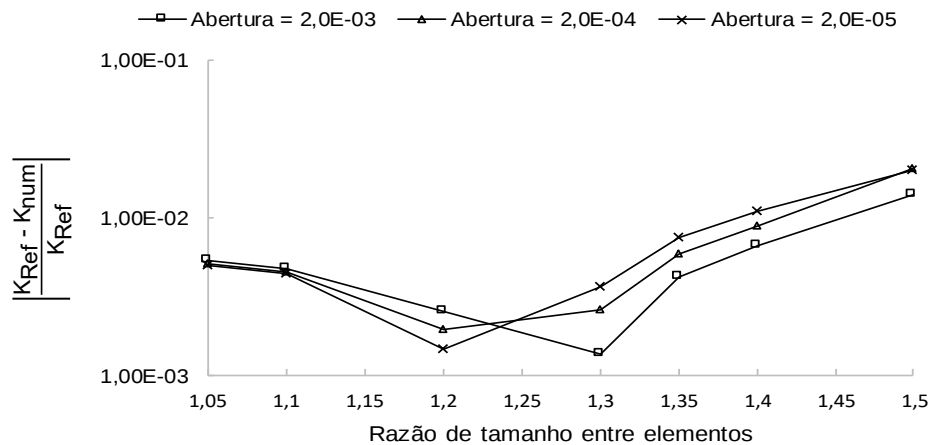


Figura 5.26: Erro correspondente a diversas aberturas variando a razão do tamanho do elemento.

O mesmo estudo de variação do coeficiente de Poisson realizado para a trinca elíptica em domínio infinito foi feito para o presente exemplo, com o intuito de medir o efeito do Poisson no fator de intensidade de tensão. O gráfico da Figura 5.27 mostra o valor do FIT no eixo das ordenadas do lado esquerdo, enquanto que o erro relativo comparado à solução de referência é mostrado no eixo do lado direito.

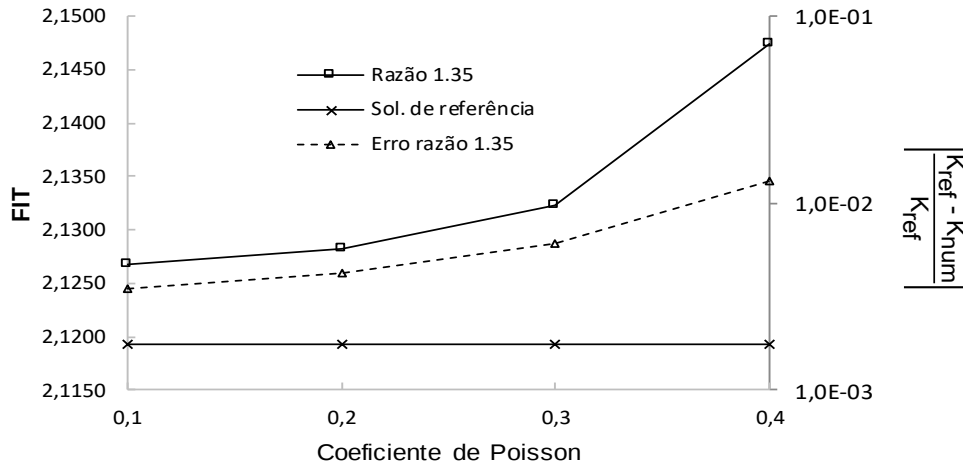


Figura 5.27: Resultados numéricos para uma variação do coeficiente de Poisson para uma trinca reta de bordo.

Os resultados numéricos apresentados nas Figuras 5.25, 5.26 e 5.27 foram comparados com uma solução de referência ($K = 2,1193242$) encontrada em Tada et al. [22] e é dada por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2W}} \frac{0,752 + 2,02 \left(\frac{a}{W} \right) + 0,37 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2W} \right)^3}{\cos \frac{\pi a}{2W}} \quad (5-11)$$

onde a é o comprimento longitudinal da trinca e W é a largura da placa.

5.3

Estudo do Raio do contorno circular da integral J

A tabela 5.2 mostra o estudo em que se verificou a influência da variação do raio do caminho circular da integral J nos resultados obtidos para o fator de intensidade de tensões.

Em todos os modelos, foi utilizada uma abertura inicial da trinca de 10^{-3} e 4 pontos de gauss em cada elemento do contorno. Na trinca elíptica em meio infinito com 60 elementos quadráticos na trinca e razão 1,35, o melhor erro foi na ordem de 10^{-4} para um raio de 10^{-1} . Na trinca elíptica de centro, com 60 elementos quadráticos na trinca e razão 1,4, o melhor erro foi na ordem de 10^{-4} para um raio de 10^{-1} . Na trinca reta de bordo, com 30 elementos quadráticos na trinca e razão 1,35, o melhor erro foi na ordem de 10^{-3} para um raio de 10^{-1} . Já para a trinca elíptica entre duas cavidade circulares, com 60 elementos quadráticos na trinca e razão 1,5, o melhor erro foi na ordem de 10^{-4} para um raio de 10^{-3} .

Tabela 5.2: Erro do FIT para diferentes raios do caminho da integral J.

Raio do caminho de J	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	Solução de referência
Trinca em meio infinito	1,780254	1,776583	1,774030	1,772162	1,772454
Erro	$4,4006 \cdot 10^{-3}$	$2,3294 \cdot 10^{-3}$	$8,8947 \cdot 10^{-4}$	$1,6468 \cdot 10^{-4}$	
Trinca de centro	1,827311	1,824615	1,821188	1,816118	1,815846
Erro	$6,3141 \cdot 10^{-3}$	$4,8289 \cdot 10^{-3}$	$2,9421 \cdot 10^{-3}$	$1,4958 \cdot 10^{-4}$	
Trinca de bordo	2,149591	2,135540	2,131207	2,128230	2,119324
Erro	$1,4281 \cdot 10^{-2}$	$7,6516 \cdot 10^{-3}$	$5,6069 \cdot 10^{-3}$	$4,2020 \cdot 10^{-3}$	
Trinca entre cavidades	2,053162	2,041691	2,012944	1,940831	2,040270
Erro	$6,3189 \cdot 10^{-3}$	$6,9654 \cdot 10^{-4}$	$1,3393 \cdot 10^{-2}$	$4,8738 \cdot 10^{-2}$	

Conclui-se, pela tabela 5.2, que o raio do caminho circular da integral J tem influência no fator de intensidade de tensões. Porém, não foi realizado um estudo detalhado da influência da distância dos nós do contorno no cálculo da integral J, como o que foi abordado por Lopes [12].

6

Fator de intensidade de tensão em função da abertura da ponta da trinca

Neste capítulo, encontra-se uma breve explicação sobre a técnica de obtenção do FIT a partir da abertura da ponta da trinca (*Crack Tip Opening Displacement* - CTOD), assim como os resultados obtidos no cálculo do FIT para uma trinca elíptica em meio infinito com diferentes aberturas iniciais, número de elementos e número de pontos de Gauss utilizados na integração das matrizes **H** e **G**.

A técnica consiste em utilizar as equações de deslocamentos desenvolvidas na seção 2.4 (equação (2-21)) nas faces da trinca, a fim de obter o fator de intensidade de tensão. A Figura 6.1 esquematiza dois nós, *B* e *C*, localizados em faces opostas de uma trinca inicialmente fechada. No problema, a trinca está em meio infinito e é submetida ao modo I de fratura.

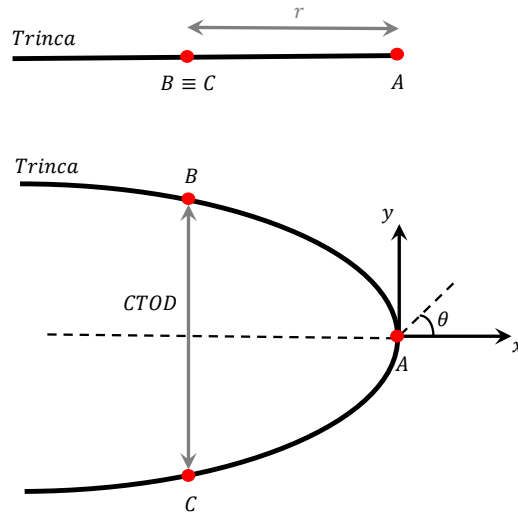


Figura 6.1: Deslocamento relativo entre nós da face da trinca.

A abertura da trinca, após aplicado o carregamento, é definida como:

$$CTOD = |u_y^B| + |u_y^C| = u_y(r, \pi) - u_y(r, -\pi) \quad (6-1)$$

Substituindo os deslocamentos (u_y) da equação (2-21) na equação (6-1),

o fator de intensidade de tensão pode ser definido como

$$K_I = \frac{G}{4 - 4\nu} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} (CTOD) \quad (6-2)$$

Assim, a equação (6-2) permite o cálculo do fator de intensidade de tensão (K_I) a partir dos valores numéricos de CTOD para nós muito próximos da ponta da trinca. Esse raciocínio pode ser estendido para o modo II de fratura, medindo-se o deslizamento entre as faces da trinca.

Dentre as vantagens do CTOD, destaca-se o seu baixo custo computacional, já que, diferente da integral J, não é necessário o cálculo de resultados em pontos internos. Entretanto, os resultados obtidos podem apresentar oscilações, uma vez que dependem das componentes de deslocamentos em pontos arbitrários da face da trinca.

O primeiro exemplo consiste em uma trinca elíptica situada em um domínio infinito e submetida a uma tensão uniforme perpendicular ao plano da trinca, resultando no modo I de fratura. A trinca foi, inicialmente, modelada com 60 elementos quadráticos, uma abertura inicial de $2 \cdot 10^{-3}$ e um fator de proporção do tamanho do elemento de 1.35. Tanto nesse exemplo quanto em todos os outros tratados neste capítulo, foi utilizado um módulo de elasticidade transversal (G) igual a 80000 e um coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,2.

A Figura 6.2 (a) mostra os resultados obtidos no cálculo do FIT a partir dos deslocamentos medidos nos nós imediatamente próximos da ponta da trinca até os nós do meio da trinca, totalizando 15 pares de nós opostos entre si. Os resultados foram obtidos com 4 e 8 pontos de Gauss.

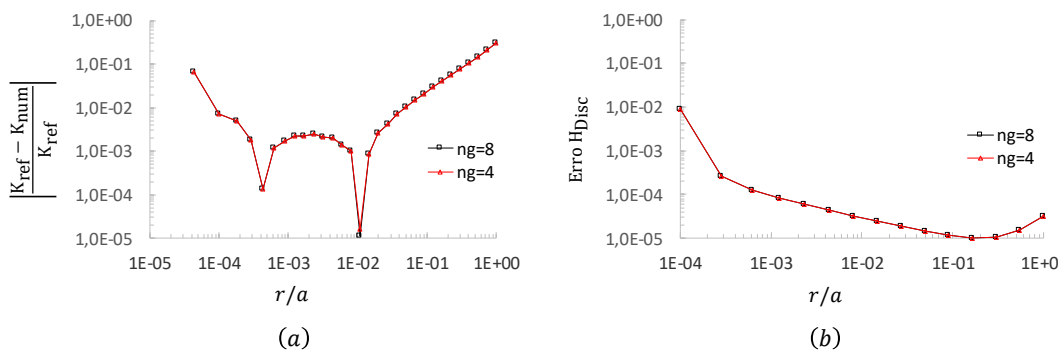


Figura 6.2: (a) Erro do FIT e (b) Erro da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ para uma trinca elíptica de abertura inicial $2 \cdot 10^{-3}$, razão de tamanho do elemento igual a 1.35 e 60 elementos quadráticos.

Nota-se, pela Figura 6.2 (a), que o erro aumenta nos nós imediatamente

próximos da ponta da trinca, mantém uma certa constância no meio do trecho e volta a aumentar nos nós mais afastados da ponta da trinca. Os erros dos nós mais afastados podem ser explicados pela equação (6-2), a qual é mais precisa para nós próximos da ponta da trinca. Já os erros dos nós mais próximos podem ser atribuídos aos erros de geometria cometidos na ponta da trinca. Para aferir esse erro de geometria, fez-se uso da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$, como mostrado na Figura 6.2 (b) para os nós de encontro dos elementos.

O mesmo estudo foi feito para uma trinca com o dobro de elementos, resultando nos gráficos da Figura 6.3 (a) e (b).

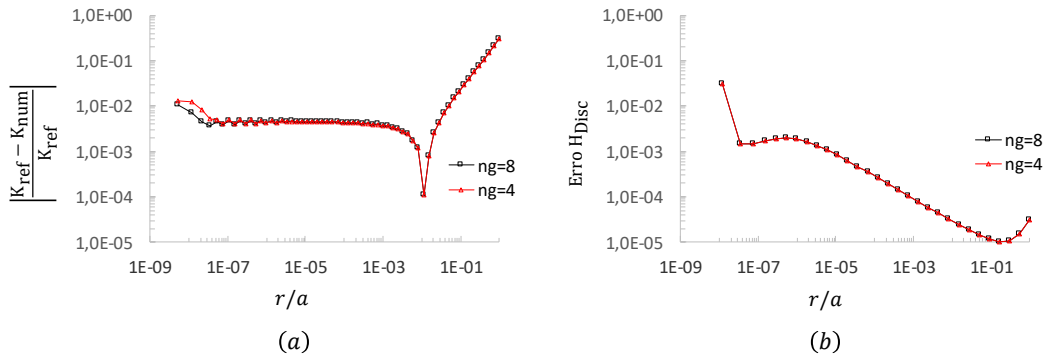


Figura 6.3: (a) Erro do FIT e (b) Erro da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ para uma trinca elíptica de abertura inicial $2 \cdot 10^{-3}$, razão de tamanho do elemento igual a 1.35 e 120 elementos quadráticos.

Nesse caso, os erros de geometria são menores devido a uma melhor discretização da trinca, apresentando resultados de erro do FIT mais constantes, entre 10^{-3} e 10^{-2} . Porém, ainda é possível perceber a influência do erro de geometria cometido próximo à ponta da trinca.

Além dos estudos realizados em uma trinca de abertura inicial de $2 \cdot 10^{-3}$, fez-se o mesmo estudo reduzindo a abertura inicial da trinca para $2 \cdot 10^{-5}$. Os resultados estão apresentados nas Figuras 6.4 e 6.5, para 60 e 120 elementos quadráticos, respectivamente. A análise foi feita para 4 e 8 pontos de Gauss e um fator de proporção do tamanho dos elementos de 1.35.

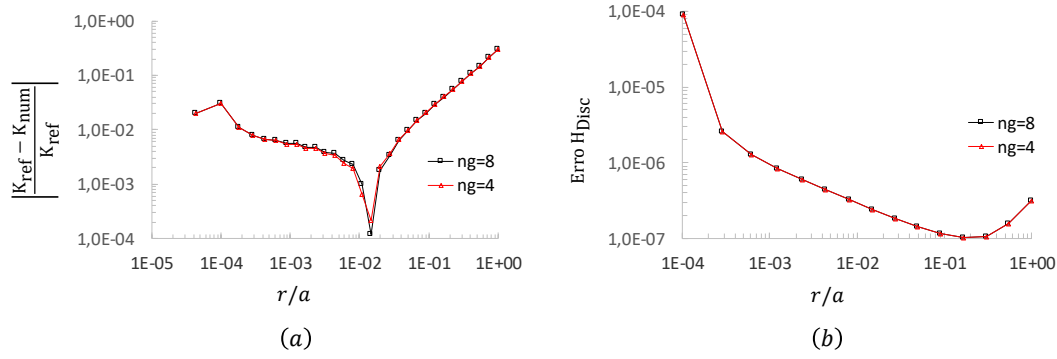


Figura 6.4: (a) Erro do FIT e (b) Erro da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ para uma trinca elíptica de abertura inicial $2 \cdot 10^{-5}$, razão de tamanho do elemento igual a 1.35 e 60 elementos quadráticos.

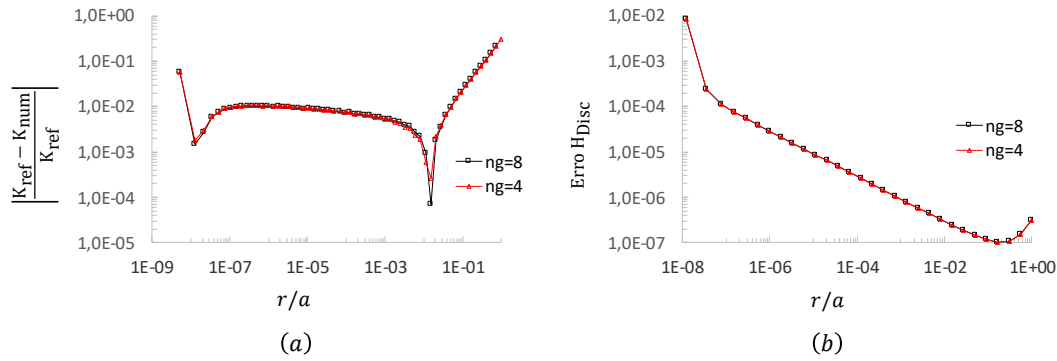


Figura 6.5: (a) Erro do FIT e (b) Erro da parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$ para uma trinca elíptica de abertura inicial $2 \cdot 10^{-5}$, razão de tamanho do elemento igual a 1.35 e 120 elementos quadráticos.

Assim como nos resultados obtidos para uma abertura inicial da trinca de $2 \cdot 10^{-3}$, o erro que ocorre nos nós imediatamente próximos da ponta da trinca pode ser explicado por erros de geometria nessa região.

Analisando os resultados apresentados nas figuras 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5, percebe-se que a técnica com base na abertura da ponta da trinca apresenta erros entre 10^{-3} e 10^{-2} , que são maiores do que os obtidos pela integral J.

Todos os resultados numéricos do FIT apresentados neste capítulo foram comparados com o FIT analítico para uma trinca em domínio infinito ($K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, para $\sigma = 1$ e $a = 1$), já a parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$, como explicado no capítulo anterior, foi comparada com 0.5 (contorno suave).

7

Considerações finais

7.1

Conclusões

Neste trabalho, foram resolvidos, matematicamente, os 3 tipos de singularidades presentes na integral J para modo I de carregamento em problemas planos, como tratado no capítulo 4, no âmbito do método consistente dos elementos de contorno. Além disso, foram resolvidos problemas de trinca em domínio finito e em domínio infinito, com a utilização da integral J e da abertura da ponta da trinca para obtenção do Fator de Intensidade de Tensão (FIT).

A aplicação do método consistiu em resolver quatro estruturas auto-equilibradas com condições de contorno do tipo Neumann, dentre elas, uma trinca elíptica em domínio infinito, uma trinca elíptica entre duas cavidades circulares em domínio infinito, uma trinca centrada em uma placa finita e uma trinca de bordo. A partir dessas estruturas, foram verificados erros de discretização, erros de integração numérica, erros devido à diferentes aberturas iniciais da trinca, erros no cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos e um estudo do efeito da variação do coeficiente de Poisson. Além disso, como se optou por um caminho circular da integral J , foi realizado um estudo do efeito da variação do raio deste caminho no cálculo do FIT.

No exemplo da trinca elíptica em domínio infinito, foi realizado primeiro um estudo de convergência do FIT, em que foram obtidos erros na ordem de 10^{-4} , porém a solução de referência corresponde a uma trinca de abertura inicial zero, o que levou a um estudo no qual a abertura inicial da trinca foi diminuída, chegando a erros ainda menores. Logo, analisando a parte descontínua da matriz $\mathbf{H}$, verificou-se o erro cometido na geometria da trinca. Em seguida, foi constatada uma pequena influência no FIT devido à variação do coeficiente de Poisson, apresentando erros na ordem de 10^{-4} em relação a solução de referência.

No exemplo da trinca elíptica entre duas cavidades circulares em domínio infinito, foi feito somente um estudo de convergência do FIT, mostrando que o problema pode ser resolvido com uma precisão de três casas decimais, quando comparado a uma solução de referência da literatura.

No exemplo da trinca elíptica em domínio finito, foram analisados os erros cometidos na integração numérica das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, assim como o erro de aferição do condicionamento da matriz $\mathbf{H}$. Após comparar os dois erros, constatou-se não haver uma influência significativa proveniente de um possível mau condicionamento da matriz $\mathbf{H}$. Além desse estudo, verificou-se também o erro para o cálculo de deslocamentos e de tensões em pontos internos, obtendo resultados próximos a 10^{-7} para as soluções polinomiais, em que foram utilizados 4 pontos de Gauss por elemento. Por fim, o estudo de convergência apresentou erros na ordem de 10^{-3} .

No exemplo da trinca de bordo, foram realizados estudos para aferir o condicionamento da matriz $\mathbf{H}$ e os erros cometidos na integração das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$, tanto para uma trinca reta quanto para uma trinca inclinada. Assim como no exemplo da trinca elíptica em domínio infinito, foi variada a abertura inicial da trinca, porém, não houve uma melhora significativa dos resultados, apresentando erros na ordem de 10^{-3} . Ademais, foi identificada uma influência maior da variação do coeficiente de Poisson neste exemplo, com erros da ordem de 10^{-2} .

Outro estudo realizado neste trabalho foi o cálculo do FIT a partir da abertura da ponta da trinca para uma trinca elíptica em domínio infinito e submetida ao modo I de fratura. Alguns fatores foram variados nesse estudo, dentre eles, o número de elementos, a abertura inicial da trinca e o número de pontos de Gauss usados na integração das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$. O CTOD foi medido em diversos pontos da trinca, constatando-se erros maiores em nós imediatamente próximos à ponta da trinca e em nós mais afastados da ponta da trinca. O primeiro erro pode ser justificado por possíveis erros de geometria e o segundo erro por falta de precisão da equação (6-2) no cálculo de resultados em pontos muito distantes da ponta da trinca.

Com todos os estudos realizados nesta dissertação, é possível ter um maior controle dos erros cometidos ao resolver problemas de elasticidade, inclusive quando se tem singularidades advindas da geometria do problema, como acontece no caso de trincas. Dentre os erros cometidos ao resolver esse tipo de problema, usando a formulação apresentada neste trabalho de pesquisa, estão o erro de geometria, o erro na descrição matemática da física do problema, o erro de discretização, o erro de integração numérica e, por fim, o erro de álgebra linear.

7.2

Sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho abre caminho para possíveis trabalhos futuros dentro do método consistente dos elementos de contorno, entre eles:

- Extensão da integral J para avaliar resultados do modo II de fratura.
- Resolver outros exemplos de trinca, como trincas curvas e inclinadas.
- Estudo de propagação de trinca.
- Consideração de zona plástica na ponta da trinca.
- Generalização da formulação para problemas tridimensionais de mecânica da fratura, a partir de desenvolvimentos já feitos para elementos triangulares.
- Utilização da formulação hipersingular, modelando a trinca sem abertura inicial, para fins de comparação com resultados analíticos da literatura, já que todos os problemas de integração numérica estão resolvidos.
- Incorporação dos algoritmos de integração, feitos em *maple*, a códigos já desenvolvidos em C++ e Fortran, que já funcionam para problemas 2D de potencial e de elasticidade, inclusive usando técnica de fast multipole.
- Estudo do fator de amplificação entre elementos para minimizar os erros de representação geométrica.

Referências bibliográficas

- [1] DUGA, J. J.; FISHER, W. H.; BUXBAUM, R. W.; ROSENFELD, A. R.; BURH, A. R.; HONTON, E. J.; MCMILLAN, S. C.. **The economic effects of fracture in the united states**. NBS Special Publication 647-2, 1983.
- [2] ANDERSON, T. L.. **Fracture Mechanics: Fundamental and Applications**. New York, 1995.
- [3] INGLIS, C. E.. **Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners**. Transactions of the institute of Naval Architects, 55:219–241, 1913.
- [4] GRIFFITH, A. A.. **The phenomena of rupture and flow in solids**. Philosophical Transactions, 221:163–198, 1920.
- [5] IRWIN, G. R.. **Fracture dynamics**. Fracturing of Metals, American Society for Metals, Cleveland, p. 147–166, 1948.
- [6] IRWIN, G. R.. **Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys**. Sagamore Research Conference Proceedings, 2:289–305, 1956.
- [7] WESTERGAARD, H. M.. **Bearing pressures and cracks**. Journal of Applied Mechanics, 6:49–53, 1939.
- [8] IRWIN, G. R.. **Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate**. Journal of Applied Mechanics, 24:361–364, 1957.
- [9] RICE, J. R.. **A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks**. Journal of Applied Mechanics, 35:379–386, 1968.
- [10] TELLES, J. C. F.; CASTOR, G. S.; GUIMARÃES, S.. **A numerical Green's function approach for boundary elements applied to fracture mechanics**. International Journal For Numerical Methods in Engineering, 38:3259–3274, 1995.

- [11] LOPES, A. A. O.. **Aplicação do método híbrido dos elementos de contorno a problemas de mecânica linear de fratura**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.
- [12] LOPES, A. A. O.. **Determinação de fatores de intensidade de tensão com o método híbrido dos elementos de contorno**. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- [13] DUMONT, N. A.;LOPES, A. A. O.. **On the explicit evaluation of stress intensity factors in the hybrid boundary element method**. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 26:151–165, 2002.
- [14] MAMANI, E. Y.. **O método híbrido dos elementos de contorno com base em funções de tensão de westergaard generalizadas**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.
- [15] MAMANI, E. Y.. **Modelagem de trincas com o uso de funções de tensão de westergaard generalizadas no método híbrido dos elementos de contorno**. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- [16] DUMONT, N. A.;MAMANI, E. Y.. **Generalized westergaard stress functions as fundamental solutions**. *CMES – Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 78:109–150, 2011.
- [17] CARDOSO, M. L.. **Uma implementação em elementos de contorno para problemas de mecânica da fratura usando funções generalizadas de westergaard**. dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.
- [18] DUMONT, N. A.;MAMANI, E. Y.;CARDOSO, M. L.. **A boundary element implementation for fracture mechanics problems using generalized westergaard stress functions**. *European Journal of Computational Mechanics*, 27:5-6:401–424, 2018.
- [19] DUMONT, N. A.. **The boundary element method revisited**. *Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods XXXII*, 50:227–238, 2010.
- [20] MAPLE 15. Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. Waterloo, Ontario.

- [21] WILLIAMS, M. L.. **On the stress distribution at the base of a stationary crack.** *Journal of Applied Mechanics*, 24:109–114, 1957.
- [22] TADA, H.; PARIS, P. C.; IRWIN, G. R.. **The Stress Analysis of Cracks Handbook.** Paris Productions, Inc., St. Louis, 2000.
- [23] GREEN, G.. **An Essay on the Application on Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.** Nottingham, 1828.
- [24] KELVIN, W.T.. **Note on the integrations of the equations of equilibrium of an elastic solid.** *Cambridge Dublin Math*, 3, 1848.
- [25] BETTI, E.. **Theoria dell' elasticita.** *Nuovo Cimento*, p. 7–10, 1872.
- [26] SOMIGLIANA, C.. **Sopra l' equilibrio di' un corpo elastico isotropo.** *Nuovo Cimento*, p. 17–20, 1885.
- [27] FREDHOLM, I.. **Sur une classe d' equations fonctionelles.** *Acta Mathematica*, 27:365–390, 1903.
- [28] KUPRADZE, V.D.. **Potential Methods in the Theory of Elasticity.** Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- [29] KELLOG, O.D.. **Foundations of Potential Theory.** Springer-Verlag, Berlin, 1929.
- [30] JASWON, M.A.; SYMM, G.T.. **Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics.** Academic Press, London, 1977.
- [31] SHERMAN, D.I.. **On the solution of the plane static problem of the theory of elasticity for displacements given on the boundary.** *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 27:911–913, 1940.
- [32] SHERMAN, D.I.. **On the solution of the plane static problem of the theory of elasticity for given external forces.** *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 28:25–28, 1940.
- [33] MIKHLIN, S.G.. **Integral Equations.** Pergamon Press, London, 1957.
- [34] MUSKHELISHVILI, N.I.. **Some Basic Problems of the Theory of Elasticity.** Noordhoff, Holland, 1963.
- [35] JASWON, M.A.. **Integral equation methods in potential theory. I.** *Proceedings of the Royal Society*, 275:23–32, 1963.

- [36] SYMM, G.T.. **Integral equation methods in potential theory. II.** Proceedings of the Royal Society, 275:33–46, 1963.
- [37] JASWON, M.A.. **An integral equation solution of the torsion problem.** Proceedings of the Royal Society, 275:237–246, 1963.
- [38] SYMM, G.T.. **An integral equation solution in conformal mapping.** Numerische Mathematik, 9:250–258, 1966.
- [39] RIZZO, F.J.. **An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics.** Quarterly of Applied Mathematics, 25:83–95, 1967.
- [40] CRUSE, T.. **Numerical solutions in three-dimensional elastostatics.** International Journal of Solids and Structures, 5:1259–1274, 1969.
- [41] LACHAT, J.C.; WATSON, J.O.. **Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10:991–1005, 1976.
- [42] BREBBIA, C.A.. **The boundary element method for engineers.** London/New York: Pentech Press/Halstead Press, 1978.
- [43] BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C.. **Boundary Element Techniques.** New York: Springer, Berlin, 1984.
- [44] DUMONT, N. A.. **On the efficient numerical evaluation of integrals with complex singularity poles.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 13:155–168, 1994.
- [45] DUMONT, N. A.. **An assessment of the spectral properties of the matrix G used in the boundary element methods.** Computational Mechanics, 22:32–41, 1998.
- [46] DUMONT, N. A.; NORONHA, M.. **A simple, accurate scheme for the numerical evaluation of integrals with complex singularity poles.** Computational Mechanics, 22:42–49, 1998.
- [47] CHENG, A. H.-D.; CHENG, D. T.. **Heritage and early history of the boundary element method.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 29:268–302, 2005.

- [48] DUMONT, N. A.. The collocation boundary element method revisited: Perfect code for 2D problems. *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, 6:965–975, 2018.
- [49] HADAMARD, J.. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, 1923.
- [50] DUMONT, N. A.. The boundary element method for 2D problems of potential and elasticity: Conceptually consistent formulation, a convergence theorem and numerical evaluations within machine precision: First part, theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, to be submitted, 2020.
- [51] DUMONT, N. A.. The boundary element method for 2D problems of potential and elasticity: Conceptually consistent formulation, a convergence theorem and numerical evaluations within machine precision: Second part, numerical evaluations and examples. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, to be submitted, 2020.
- [52] NEWMAN, J. C.. An improved method of collocation for stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries. NASA Technical Note, NASA TN D-6376, 1971.
- [53] BOTT, R.; DUFFIN, R. J.. On the algebra networks. *Transactions of the American Mathematical Society*, 74:99–109, 1953.