3
O Problema de Fluxo de Potência Ótimo

3.1.
Introdução

Como foi visto no capítulo anterior, para realizar uma repartição de custos ou benefícios, é necessário determinar a função de custo do serviço que será utilizado pelos agentes. Este capítulo tem como objetivo apresentar a formulação matemática do problema de fluxo de potência ótimo (FPO), que será utilizado para calcular as funções de custo de mínimo custo de instalação de potência reativa e mínimo custo de corte de carga, utilizadas no cálculo da remuneração dos geradores que provêem os serviços ancilares de suporte de potência reativa e reserva de potência, respectivamente.

O objetivo da resolução de um FPO em um sistema de potência é definir um conjunto de ações de controle que eliminem as violações operativas do sistema, tais como violações no perfil de tensão de barras do sistema, violações no carregamento dos circuitos, desbalanços entre carga e geração, dentre outras. Entre as ações de controle realizadas pelo FPO, pode-se citar a atuação sobre a injeção de potência ativa e reativa dos geradores, modificações nos tap´s dos transformadores e desligamentos forçados de cargas do sistema.

Inicialmente, será realizada na seção 3.2 uma recapitulação da teoria básica sobre Fluxo de Potência e o método de Newton-Raphson, um algoritmo iterativo utilizado para sua solução. Em seguida, a seção 3.3 aborda a modelagem do problema de fluxo de potência ótimo, apresentando suas restrições de igualdade e desigualdade, bem como suas principais funções-objetivo. A seção 3.4 trata da resolução do problema de FPO pelo método de pontos interiores, apresentando a metodologia primal-dual para o FPO, a formulação do problema barreira logarítmica, suas condições de otimalidade, a resolução do sistema de equações e algoritmo de solução. A seção 3.5 demonstra como calcular a derivada do valor ótimo de um problema de otimização com relação a um parâmetro do problema. Finalmente a seção 3.6 apresenta as principais conclusões obtidas neste capítulo.

3.2. Fluxo de Potência

O cálculo do fluxo de potência em uma rede de energia elétrica consiste essencialmente na determinação do estado da rede e da distribuição de seus fluxos, por meio da representação de um conjunto de equações e inequações algébricas [34].

Os componentes de um sistema de energia elétrica podem ser classificados em dois grupos:

- componentes internos, tais como linhas de transmissão, transformadores, reatores e capacitores, modelados por equações algébricas que representam o fluxo de potência entre dois nós da rede elétrica;
- componentes externos, tais como geradores e cargas, modelam as injeções de potência nos nós da rede.

A primeira lei de Kirchhoff define as equações básicas de fluxo de potência, onde a potência líquida injetada em cada nó da rede elétrica deve ser igual à soma das potências injetadas por todos os componentes internos ligados a este nó. Isto garante a conservação das potências ativa e reativa em cada nó da rede.

Na formulação básica do fluxo de potência, cada barra da rede é representada por quatro variáveis:

θ_i ângulo da tensão na barra i

V_i módulo da tensão na barra i

P_i potência ativa líquida injetada na barra i

Q_i potência reativa líquida injetada na barra i

Na resolução do problema de fluxo de potência, duas variáveis possuem seu valor conhecido e duas são incógnitas. De acordo com quais variáveis sejam incógnitas, definem-se três tipos de barras:

- barra de carga (PQ), onde Pi e Qi são conhecidos e Vi e θi são calculados;
- barra de geração (PV), onde Pi e Vi são conhecidos e Qi e θi são calculados;
- barra de referência ($V\theta$), onde Vi e θi são conhecidos e Pi e Qi são calculados.

De posse destas variáveis, o problema de fluxo de potência pode ser formulado por meio de um conjunto de equações e inequações algébricas, da seguinte forma:

$$g(x,z) = 0 \tag{3.1}$$

$$h(x,z) \leq 0 \tag{3.2}$$

onde

x variáveis de estado (incógnitas)

z variáveis de controle (valores especificados)

O conjunto de restrições de igualdade representado pela equação (3.1) é composto por duas equações para cada barra:

$$\sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} = P_i \tag{3.3}$$

$$\sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij} = Q_i + V_i^2 b_{shi} \tag{3.4}$$

onde

Ω_i conjunto das barras ligadas à barra i

P_{ij} fluxo de potência ativa no circuito i-j

Q_{ij} fluxo de potência reativa no circuito i-j

b_{shi} susceptância shunt na barra i

As expressões gerais dos fluxos de potência ativa e reativa em linhas de transmissão, transformadores em fase e defasadores são:

$$P_{ij} = a_{ij}^2 \cdot V_i^2 \cdot g_{ij} - a_{ij} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \left[g_{ij} \cdot \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \cdot \mathrm{sen}\left(\theta_{ij} + \varphi_{ij}\right)\right] \tag{3.5}$$

$$P_{ji} = V_j^2 \cdot g_{ij} - a_{ij} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \left[g_{ij} \cdot \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cdot \mathrm{sen}\left(\theta_{ij} + \varphi_{ij}\right)\right] \tag{3.6}$$

$$Q_{ij} = -a_{ij}^2 \cdot V_i^2 \cdot \left(b_{ij} + b_{sh_{ij}}\right) - a_{ij} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \left[g_{ij} \cdot \mathrm{sen}\left(\theta_{ij} + \varphi_{ij}\right) - b_{ij} \cdot \cos \cdot \left(\theta_{ij} + \varphi_{ij}\right)\right] \tag{3.7}$$

$$Q_{ji} = -V_j^2 \cdot \left(b_{ij} + b_{sh_{ij}}\right) + a_{ij} \cdot V_i \cdot V_j \cdot \left[g_{ij} \cdot \mathrm{sen}\left(\theta_{ij} + \varphi_{ij}\right) + b_{ij} \cdot \cos\left(\theta_{ij} + \varphi_{ij}\right)\right] \tag{3.8}$$

onde:

a_{ij} tap do transformador i-j

θ_{ij} diferença angular θ_i - θ_j

φ_{ij} ângulo de defasamento no circuito i-j

g_{ij} condutância série no circuito i-j

b_{ij} susceptância série no circuito i-j

b_{shij} metade da susceptância shunt no circuito i-j

Utilizam-se $a_{ij} = 0$ e $\varphi_{ij} = 0$ para a representação de linhas de transmissão, $b_{shij} = 0$ e $\varphi_{ij} = 0$ para transformadores em fase, $b_{shij} = 0$ e $a_{ij} = 1$ para defasadores puros e $b_{shij} = 0$ para defasadores.

O conjunto de restrições de desigualdade representado pela inequação (3.2) contém as restrições operacionais de tensão, de injeção de potência ativa e reativa do sistema, conforme apresentado a seguir:

$$V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max} \quad (3.9)$$

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max} \quad (3.10)$$

$$Q_i^{min} \leq Q_i \leq Q_i^{max} \quad (3.11)$$

Normalmente, os algoritmos utilizados para a resolução do problema de fluxo de potência correspondem à resolução do sistema de equações (3.3) e (3.4) por um processo iterativo. Dentre os diversos algoritmos utilizados, o mais eficiente é o Método de Newton-Raphson [35] e seus variantes, o Método Desacoplado [36] e o Método Desacoplado Rápido [37]. A modelagem matemática do Método de Newton-Raphson, utilizado neste trabalho para a resolução do fluxo de potência, é apresentada na seção a seguir.

3.2.1. Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson se baseia em séries de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (x - x_0)^n = C_0 + C_1 \cdot \Delta x + C_2 \cdot \Delta x^2 + \ldots + C_n \cdot \Delta x^n \quad (3.12)$$

Quando os coeficientes C_n assumem os valores da série abaixo, a série de potências se transforma em uma Série de Taylor:

$$C_0 = f(x_0) \;;\; C_1 = \frac{f'(x_0)}{1!} \;;\; C_2 = \frac{f''(x_0)}{2!} \;;\; \ldots \;;\; C_n = \frac{f^n(x_0)}{n!} \quad (3.13)$$

Ou seja:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot \Delta x^n \quad (3.14)$$

Para a aplicação em fluxo de potência, os termos em (3.14) de ordem superior a um podem ser desprezados, pois possuem valores próximos a zero. Assim, a equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (3.15)$$

A resolução deste problema é feita por um método iterativo, onde o resultado de cada iteração será o dado de entrada para a próxima iteração. Assim, a equação (3.15) pode ser reescrita na forma matricial para a primeira iteração como:

$$y - f(x) = J(x) \cdot \Delta x^{0} \tag{3.16}$$

onde J(x) é a matriz jacobiana.

Analogamente, para a iteração ν tem-se:

$$y - f\left(x^{\upsilon}\right) = J\left(x^{\upsilon}\right) \cdot \Delta x^{\upsilon} \tag{3.17}$$

Finalmente, a solução do problema pode ser resumida como:

$$\begin{cases} \Delta x^{\nu} = \left[J\left(x^{\upsilon}\right)\right]^{-1} \cdot \left[y - f\left(x^{\nu}\right)\right] \\ x^{\nu+1} = x^{\upsilon} + \Delta x^{\upsilon} \end{cases} \tag{3.18}$$

Para o problema de fluxo de potência, tem-se que:

$$\left[y - f\left(x^{\upsilon}\right)\right] = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{esp} - P^{calc} \\ Q^{esp} - Q^{calc} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$\Delta x^{\upsilon} = \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

onde:

P^{esp} e Q^{esp} vetores das potências ativa e reativa líquidas especificadas no problema, respectivamente

P^{calc} e Q^{calc} vetores das potências ativa e reativa líquidas calculadas por meio das equações (3.3) e (3.4), respectivamente

θ e V vetores dos ângulos e tensões nas barras do sistema, respectivamente

3.3. Fluxo de Potência Ótimo

O problema de fluxo de potência ótimo (FPO) foi formulado inicialmente por J. Carpentier [38]. O FPO pode ser definido como sendo a determinação do estado de uma rede elétrica que otimiza uma determinada função-objetivo, satisfazendo um conjunto de restrições físicas e operacionais.

Caracterizado como um problema de programação não-linear com restrições, o problema de FPO pode ser formulado matematicamente como:

$$
\begin{aligned}
& \min f(x) \\
\text{s.a.} \quad & g(x) = 0 \\
& h(x) \leq 0 \\
& l \leq x \leq u
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

onde:

x	vetor de variáveis do sistema
g(x)	restrições de igualdade
h(x)	restrições de desigualdade
u, l	limites superior e inferior dos controles

As restrições de igualdade correspondem à modelagem da rede (equações de balanço de potência ativa e reativa em cada nó da rede), enquanto que as restrições de desigualdade representam os limites das variáveis do sistema (restrições funcionais dos equipamentos e operacionais do sistema).

3.3.1. Restrições de Igualdade

As restrições de igualdade básicas do FPO correspondem às equações (3.3) e (3.4) do fluxo de potência. Contudo, cada problema a ser estudado é um caso particular, tendo um objetivo específico. Dependendo do tipo de aplicação, novas restrições ou equações podem ser acrescentadas, como as relativas ao intercâmbio líquido entre áreas, e alguns controles podem ser considerados fixos, assim como algumas das variáveis podem ser consideradas nulas, de acordo com a rede analisada.

As principais restrições de igualdades utilizadas em problemas de FPO são apresentadas a seguir em sua forma geral.

Equações de Balanço de Potência Ativa

$$\sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} = PG_i - FC_i \cdot \left(1 - A_i - B_i + A_i \cdot V_i + B_i \cdot V_i^2\right) \cdot PL_i + PA_i \tag{3.22}$$

onde:

Ω_i	conjunto de barras ligadas à barra i
P_{ij}	fluxo ativo no circuito i-j
PG_i	potência ativa gerada na barra i
FC_i	fator de carga (em pu) na barra i
PL_i	carga ativa na barra i

A_i fator de carga (em pu) da variação linear da carga ativa em relação à tensão

B_i fator de carga (em pu) da variação quadrática da carga ativa em relação à tensão

V_i módulo de tensão na barra i

PA_i injeção de potência ativa na barra i

As expressões dos fluxos P_{ij} e P_{ji} correspondem às equações (3.5) e (3.6), respectivamente. Nas equações apresentadas, é incluído um fator de variação das cargas em relação à tensão. Não considerar esta hipótese é equivalente a declarar $A_i = B_i = C_i = D_i = 0$ em cada barra da rede.

Equações de Balanço de Potência Reativa

$$\sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij} = QG_i + QC_i - QI_i + V_i^2 \cdot b_{shi} - FC_i \cdot \left(1 - C_i - D_i + C_i \cdot V_i + D_i \cdot V_i^2\right) \cdot QL_i \qquad (3.23)$$

onde:

Ω_i conjunto de barras ligadas à barra i

Q_{ij} fluxo reativo no circuito i-j

QG_i potência reativa gerada na barra i

QC_i injeção de potência reativa capacitiva na barra i

QI_i injeção de potência reativa indutiva na barra i

V_i módulo de tensão na barra i

b_{shi} shunt na barra i

FC_i fator de carga (em pu) da barra i

QL_i carga reativa da barra i

C_i fator de carga (em pu) da variação linear da carga reativa em relação à tensão

D_i fator de carga (em pu) da variação quadrática da carga reativa em relação à tensão

As expressões dos fluxos Q_{ij} e Q_{ji} correspondem às equações (3.7) e (3.8), respectivamente.

Intercâmbio Líquido entre Áreas

$$IT_k = \sum_{I_1} P_{ij} + \sum_{I_2} P_{ji} - \sum_{I_3} P_{ij} - \sum_{I_4} P_{ji} \qquad (3.24)$$

onde:

IT_k intercâmbio líquido na área k

P_{ij} fluxo ativo no circuito i-j

I_1 conjunto de circuitos de interligação i-j tal que
1. a medição é realizada no nó i
2. o nó i pertence a área k

I_2 conjunto de circuitos de interligação i-j tal que
1. a medição é realizada no nó j
2. o nó j pertence a área k

I_3 conjunto de circuitos de interligação i-j tal que
1. a medição é realizada no nó i
2. o nó i não pertence a área k

I_4 conjunto de circuitos de interligação i-j tal que
1. a medição é realizada no nó j
2. o nó j não pertence a área k

3.3.2.
Restrições de Desigualdade

As restrições de desigualdade correspondem às restrições de canalização nas variáveis e restrições funcionais do tipo máximo carregamento em circuitos. Estas restrições refletem limites de operação dos equipamentos, ou alguma política operativa específica.

Módulo de Tensão

$$V_i^{min} \leq V_i \leq V_i^{max} \tag{3.25}$$

Potência Ativa Gerada

$$PG_i^{min} \leq PG_i \leq PG_i^{max} \tag{3.26}$$

Potência Reativa Gerada

$$QG_i^{min} \leq QG_i \leq QG_i^{max} \tag{3.27}$$

Injeção de Potência Reativa Capacitiva

$$0 \leq QC_i \leq QC_i^{max} \tag{3.28}$$

Injeção de Potência Reativa Indutiva

$$0 \leq QI_i \leq QI_i^{max} \tag{3.29}$$

Injeção de Potência Ativa

$$0 \leq PA_i \leq PA_i^{max} \tag{3.30}$$

Tap do Transformador

$$a_{ij}^{min} \leq a_{ij} \leq a_{ij}^{max} \tag{3.31}$$

Ângulo de Defasamento

$$\varphi_{ij}^{min} \leq \varphi_{ij} \leq \varphi_{ij}^{max} \tag{3.32}$$

Rejeição de Carga

Existem algumas situações, como em sistemas com problemas de tensão ou carregamento nos circuitos, por exemplo, onde pode ser necessário reduzir a carga em determinadas barras de forma a viabilizar a operação do sistema. Estes cortes de carga são modelados matematicamente através do fator (FCi), presente nas equações de balanço ativo e reativo, o qual encontra-se entre os seguintes limites:

$$0 \leq FC_i \leq 1 \tag{3.33}$$

Observe que $FC_i = 1$ significa que a carga total da barra é considerada, enquanto $FC_i = 0$ anula o valor da carga.

Intercâmbio entre Áreas

$$IT_l^{min} \leq IT_l \leq IT_l^{max} \tag{3.34}$$

Máximo Carregamento nos Circuitos

O máximo carregamento de fluxo em um circuito i-j pode ser considerado como:

$$P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 \leq {S_{ij}^{max}}^2 \tag{3.35}$$

onde:

S_{ij}^{max} máximo carregamento do circuito em potência aparente

Alternativamente, o carregamento pode ser especificado em termos de potência ativa, conforme a seguir:

$$-S_{ij}^{max} \leq P_{ij} \leq S_{ij}^{max} \tag{3.36}$$

3.3.3. Funções-objetivo

Dependendo do tipo de aplicação do problema de FPO, as funções-objetivo podem ser lineares ou não-lineares, sendo utilizadas de forma isolada ou combinadas entre si. A modelagem matemática das funções-objetivo mais utilizadas é apresentada a seguir:

Mínimo Custo de Geração Ativa

$$f = \sum_{i \in I_G} CP_i \cdot PG_i \tag{3.37}$$

onde:

I_G conjunto de geradores controláveis de potência ativa

CP_i custo de geração ativa do gerador i

PG_i geração ativa do gerador i

Mínima Injeção de Potência Reativa

$$f = \sum_{i \in IQ_C} QC_i + \sum_{i \in IQ_I} QI_i \tag{3.38}$$

onde:

IQ_c conjunto de barras candidatas à injeção de potência reativa capacitiva

QC_i potência reativa capacitiva injetada na barra i

IQ_i conjunto de barras candidatas à injeção de potência reativa indutiva

QI_i potência reativa indutiva injetada na barra i

Mínima Injeção de Potência Ativa

$$f = \sum_{i \in I_p} PA_i \tag{3.39}$$

onde:

I_P conjunto de barras candidatas à injeção de potência ativa

PA_i potência ativa injetada na barra i

Mínima Perda

$$f = \sum_{i,j \in I_C} \left(P_{ij} + P_{ji}\right) \tag{3.40}$$

onde:

I_C conjunto de circuitos do sistema

P_{ij}, P_{ji} fluxo ativo nos circuitos i-j , j-i

Note que $P_{ij} + P_{ji}$ é igual a perda no circuito i-j. As expressões dos fluxos P_{ij} e P_{ji} são relativas às fórmulas (3.5) e (3.6), respectivamente.

Mínimo Corte de Carga

$$f = \sum_{i \in I_C} (1 - FC_i) \cdot PL_i \tag{3.41}$$

onde:

I_C	conjunto de barras de carga
FC_i	fração de carga efetiva na barra i (em pu)
PL_i	carga original da barra i

Observe que $FC_i \cdot PL_i$ representa a carga efetiva na barra i, enquanto que $(1\text{-}FC_i) \cdot PL_i$ representa o corte de carga nesta barra.

Mínimo Desvio de Potência Ativa Gerada

$$f = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in I_G} \rho \cdot \left(PG_i - \overline{PG_i} \right)^2 \tag{3.42}$$

onde:

I_G	conjunto de geradores controláveis de potência ativa
ρ	peso associado ao desvio de potência ativa
PG_i	geração de potência ativa do gerador i
$\overline{PG_i}$	geração de potência ativa inicial no gerador i

Mínimo Desvio de Ângulo de Defasamento

$$f = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j \in I_\varphi} \rho \cdot \left(\varphi_{ij} - \overline{\varphi_{ij}} \right)^2 \tag{3.43}$$

onde:

I_φ	conjunto de circuitos com controle de ângulo de defasamento
ρ	peso associado ao desvio de ângulo de defasamento
φ_{ij}	ângulo de defasamento no circuito i-j
$\overline{\varphi}_{ij}$	ângulo de defasamento inicial no circuito i-j

Mínimo Desvio de Tensão

$$f = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \in I} \rho \cdot \left(V_i - \overline{V_i} \right)^2 \tag{3.44}$$

onde:

I	conjunto de barras do sistema
ρ	peso associado ao desvio de tensão
V_i	tensão da barra i
$\overline{V}_i$	tensão inicial da barra i

Mínimo Desvio de Tap

$$f = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j \in I_T} \rho \cdot \left(a_{ij} - \overline{a_{ij}} \right)^2 \quad (3.45)$$

onde:

I_T conjunto de transformadores controláveis

ρ peso associado ao desvio de tap

a_{ij} tap do transformador i-j

$\overline{a_{ij}}$ tap inicial do transformador i-j

Mínimo Desvio de Intercâmbio

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i \in J_I} \rho \cdot \left(IT_i - \overline{IT_i} \right)^2 \quad (3.46)$$

onde:

J_I conjunto de áreas de intercâmbio

ρ peso associado ao desvio de intercâmbio entre áreas

IT_i intercâmbio da área i

$\overline{IT_i}$ intercâmbio inicial da área i

Mínimo Desvio de Ponto de Operação

Esta função-objetivo é uma combinação das funções-objetivo de desvio apresentadas anteriormente.

3.4. Resolução do Problema do FPO

Desde a formulação original de Carpentier, diversos métodos foram propostos para a resolução do FPO. Dentre eles destacam-se:

- Método do Gradiente Reduzido [39], por Dommel e Tinney em 1968;
- Método de Injeções Diferenciais [40], por Carpentier em 1973;
- Método de Newton [41], por Sun, Ashley, Brewer, Hughes e Tinney em 1984;
- Método de Programação Linear Sucessiva [42], por Alsaç, Bright, Prais e Stott em 1990.

Neste trabalho será adotado o Método de Pontos Interiores Primal-Dual porposto por Granville [43] e Latorre [44], conforme apresentado em [13].

3.4.1. Método de Pontos Interiores

O Método de Pontos Interiores pertence a uma classe de algoritmos de otimização originalmente designados para problemas de programação linear. Entretanto, devido ao seu alto grau de desempenho, tal método foi estendido para problemas de programação quadrática, convexa e problemas gerais de otimização diferenciáveis.

Na aplicação do Método de Pontos Interiores em problemas de FPO, em geral são adotadas duas estratégias distintas. A primeira aplica o método a um problema de programação linear obtido pela linearização das equações de balanço de potência ativa e reativa do algoritmo de fluxo de potência. A segunda, que será empregada neste trabalho, consiste em aplicar o método de pontos interiores diretamente ao problema de programação não-linear original do FPO. Esta segunda estratégia é conhecida também como Método dos Pontos Interiores Direto.

O Método de Pontos Interiores Direto apresenta as seguintes características na resolução do FPO:

- número reduzido de iterações para alcançar a solução ótima
- não depende da convergência do algoritmo de fluxo de potência, pois no esquema iterativo as equações de balanço só serão atendidas na solução ótima;
- eficiência na resolução de sistemas mal condicionados e com problemas de tensão.

O problema de FPO apresentado na equação (3.21) pode ser reformulado, sem perda de generalidade, como:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.a.} \quad h(x) = 0 \\ &\qquad\quad l \le x \le u \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde:

$h(x)$ equações de balanço e as restrições funcionais

l, u limites das variáveis de controle, variáveis de estado e folgas associadas às restrições funcionais

Com a inclusão das variáveis de folga s_1 e s_2, as restrições de desigualdade se tornam restrições de igualdade, resultando em:

$$
\begin{aligned}
&\min f(x) \\
&\text{s.a.} \quad h(x) = 0 \\
&\qquad\quad x - s_1 = l \\
&\qquad\quad x + s_2 = u \\
&\qquad\quad s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{3.48}
$$

No Método de Pontos Interiores as variáveis de folga são incorporadas à função-objetivo por meio de uma função de penalização, denominada barreira logarítmica. Assim, o problema original é transformado em uma sequência de problemas parametrizados pelo parâmetro barreira (μ), como segue:

$$
\begin{aligned}
&\min f(x) - \mu \cdot \sum_{i=1,n} \log(s_{1i}) - \mu \cdot \sum_{i=1,n} \log(s_{2i}) \\
&\text{s.a.} \quad h(x) = 0
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

Ao incorporar a barreira logarítmica, o Método de Pontos Interiores busca resolver o problema de otimização (3.49) para cada valor de μ, fazendo com que μ tenda a zero. Assim, para cada valor de μ executa-se uma iteração do Método de Newton-Raphson no sistema de equações não lineares definidos pelas condições de otimalidade de primeira ordem. As condições de otimalidade de primeira ordem e o Método de Newton-Raphson aplicado ao problema de FPO são apresentados nas próximas seções.

3.4.2.
Condições de Otimalidade

Pelas condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker [45], tem-se a seguinte função Lagrangeana associada a (3.49):

$$
\begin{aligned}
L(x,\lambda,\pi_1,\pi_2,s_1,s_2) = f(x) - \mu\sum_{i=1,n}\log(s_{1i}) - \mu\sum_{i=1,n}\log(s_{2i}) - \\
\lambda^T h(x) - \pi_1^T(x - s_1 - l) - \pi_2^T(x + s_2 - u)
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

A equação (3.50) possui em (x, λ, π_1, π_2, s_1, s_2) um ponto estacionário que satisfaz:

$$(\nabla L_x) \quad \nabla f(x) - \lambda^T \nabla h(x) - \pi_1 - \pi_2 = 0 \tag{3.51}$$

$$(\nabla L_\lambda) \quad h(x) = 0 \tag{3.52}$$

$$(\nabla L_{\pi 1}) \quad x - s_1 = l \tag{3.53}$$

$$(\nabla L_{\pi 2}) \quad x + s_2 = u \tag{3.54}$$

$$(\nabla L_{s1}) \quad \pi_1 = (S_1)^{-1} \cdot \mu e \tag{3.55}$$

$$(\nabla L_{s2}) \quad \pi_2 = -(S_2)^{-1} \cdot \mu e \tag{3.56}$$

onde:

∇f	gradiente da função-objetivo em x
∇h	gradiente das restrições de igualdade em x
λ	multiplicador de Lagrange associado à restrição $h(x) = 0$
π_1	multiplicador de Lagrange associado à restrição $x - s_1 = l$
π_2	multiplicador de Lagrange associado à restrição $x + s_2 = u$
e	vetor de componentes unitários
S_1	matriz diagonal de componentes s_{1i}
S_2	matriz diagonal de componentes s_{2i}

3.4.3. Resolução do Sistema de Equações

Aplicando-se do método de Newton-Raphson ao sistema de equações (3.51)-(3.56), obtém-se o seguinte sistema de equações de segunda ordem:

$$\begin{aligned}&\left[\nabla^2 f(x) - \lambda^T \cdot \nabla^2 h(x)\right] \cdot \Delta x - \nabla h(x) \cdot \Delta\lambda - \Delta\pi_1 - \Delta\pi_2 = \\ &\quad \nabla f(x) - \lambda^T \cdot \nabla h(x) - \pi_1 - \pi_2\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\nabla^T h(x) \cdot \Delta x = -h(x) \tag{3.58}$$

$$\Delta x - \Delta s_1 = -(x - s_1 - l) \tag{3.59}$$

$$\Delta x + \Delta s_2 = -(x + s_2 - u) \tag{3.60}$$

$$-\Pi_1 \cdot \Delta s_1 - S_1 \cdot \Delta\pi_1 = -(\mu e - S_1\pi_1) \tag{3.61}$$

$$\Pi_2 \cdot \Delta s_2 + S_2 \cdot \Delta\pi_2 = -(\mu e + S_2\pi_2) \tag{3.62}$$

onde:

Π_1	matriz diagonal de componentes π_{1i}
Π_2	matriz diagonal de componentes π_{2i}

De (3.53)-(3.56) tem-se que:

$$x - s_1 - l = 0 \tag{3.63}$$

$$x + s_2 - u = 0 \tag{3.64}$$

$$\mu e - S_1\pi_1 = 0 \tag{3.65}$$

$$\mu e + S_2\pi_2 = 0 \tag{3.66}$$

$$\pi_1 + \pi_2 = \mu \cdot \left(S_1^{-1}e - S_2^{-1}e\right) \tag{3.67}$$

Substituindo (3.63) e (3.64) em (3.59) e (3.60), respectivamente, tem-se:

$$\Delta s_1 = \Delta x \tag{3.68}$$

$$\Delta s_2 = -\Delta x \tag{3.69}$$

Substituindo (3.68) e (3.69) em (3.61) e (3.62), respectivamente, obtém-se:

$$-\Pi_1 \cdot \Delta x - S_1 \cdot \Delta\pi_1 = -\left(\mu e - S_1\pi_1\right) \tag{3.70}$$

$$-\Pi_2 \cdot \Delta x + S_2 \cdot \Delta\pi_2 = -\left(\mu e + S_2\pi_2\right) \tag{3.71}$$

Rearranjando os termos em função de $\Delta\pi_1$ e $\Delta\pi_2$, tem-se

$$\Delta\pi_1 = S_1^{-1} \cdot \left(\mu e - S_1\pi_1 - \Pi_1 \cdot \Delta x\right) \tag{3.72}$$

$$\Delta\pi_2 = -S_2^{-1} \cdot \left(\mu e + S_2\pi_2 - \Pi_2 \cdot \Delta x\right) \tag{3.73}$$

Contudo, substituindo (3.65) e (3.66) em (3.72) e (3.73), respectivamente, as equações podem ser reescritas como:

$$\Delta\pi_1 = -S_1^{-1} \cdot \Pi_1 \cdot \Delta x \tag{3.74}$$

$$\Delta\pi_2 = S_2^{-1} \cdot \Pi_2 \cdot \Delta x \tag{3.75}$$

Substituindo (3.74), (3.75) e (3.67) em (3.57) tem-se:

$$\begin{aligned}\left[\nabla^2 f(x) - \lambda^T \cdot \nabla^2 h(x)\right] \cdot \Delta x - \nabla h(x) \cdot \Delta\lambda + S_1^{-1} \cdot \Pi_1 \cdot \Delta x - S_2^{-1} \cdot \Pi_2 \cdot \Delta x = \\ \nabla f(x) - \lambda^T \cdot \nabla h(x) - \mu \cdot \left(S_1^{-1}e - S_2^{-1}e\right)\end{aligned} \tag{3.76}$$

Rearranjando os termos, o conjunto de equações (3.57) e (3.58) pode ser reescrito em função das incógnitas Δx e $\Delta\lambda$ apenas.

$$\begin{aligned}\left[\nabla^2 f(x) - \lambda^T \cdot \nabla^2 h(x) + S_1^{-1} \cdot \Pi_1 - S_2^{-1} \cdot \Pi_2\right] \cdot \Delta x - \nabla h(x) \cdot \Delta\lambda = \\ \nabla f(x) - \lambda^T \cdot \nabla h(x) - \mu \cdot \left(S_1^{-1}e - S_2^{-1}e\right)\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\nabla^T h(x) \cdot \Delta x = -h(x) \tag{3.78}$$

Passando as equações (3.77) e (3.78) para a forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} H & -J \\ -J^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ h(x) \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

com:

$$H = \nabla^2 f(x) - \lambda^T \cdot \nabla^2 h(x) + S_1^{-1} \cdot \pi_1 - S_2^{-1} \cdot \pi_2$$
$$J = \nabla h(x)$$
$$z = \nabla f(x) - \lambda^T \cdot \nabla h(x) - \mu \cdot \left(S_1^{-1}e - S_2^{-1}e\right)$$

Por meio da resolução do sistema (3.79), são obtidos (Δx, $\Delta\lambda$). De posse do valor destas variáveis, é possível se determinar (Δs_1, Δs_2) a partir de (3.68)-(3.69) e ($\Delta\pi_1$, $\Delta\pi_2$) a partir de (3.74)-(3.75).

3.4.4. Passo Primal-Dual

As variáveis do problema apresentado em (3.48) contém variáveis primais (x,s_1,s_2) e variáveis duais (λ,π_1,π_2). Considerando os passos primal e dual separadamente, o maior incremento até a barreira logarítmica será:

$$\alpha_P = \min\left[\min_{\Delta s_{1i}<0}\frac{s_{1i}}{|\Delta s_{1i}|}, \min_{\Delta s_{2i}<0}\frac{s_{2i}}{|\Delta s_{2i}|}, 1\right] \quad (3.80)$$

$$\alpha_D = \min\left[\min_{\Delta \pi_{1i}<0}\frac{\pi_{1i}}{|\Delta \pi_{1i}|}, \min_{\Delta \pi_{2i}>0}\frac{-\pi_{2i}}{|\Delta \pi_{2i}|}, 1\right] \quad (3.81)$$

Determinando-se α_P e α_D, as variáveis primais e duais são atualizadas conforme mostrado a seguir:

$$x = x + \sigma \cdot \alpha_P \cdot \Delta x \quad (3.82)$$

$$s_1 = s_1 + \sigma \cdot \alpha_P \cdot \Delta s_1 \quad (3.83)$$

$$s_2 = s_2 + \sigma \cdot \alpha_D \cdot \Delta s_2 \quad (3.84)$$

$$\lambda = \lambda + \sigma \cdot \alpha_D \cdot \Delta\lambda \quad (3.85)$$

$$\pi_1 = \pi_1 + \sigma \cdot \alpha_D \cdot \Delta\pi_1 \quad (3.86)$$

$$\pi_2 = \pi_2 + \sigma \cdot \alpha_D \cdot \Delta\pi_2 \quad (3.87)$$

O parâmetro σ = 0,9995 é considerado de forma a evitar as singularidades da barreira logarítmica.

3.4.5. Atualização do Parâmetro Barreira

A atualização do parâmetro barreira é feita em cada iteração, utilizando-se a seguinte equação:

$$\mu = \beta\frac{s_1^T\pi_1 - s_2^T\pi_2}{2n} \quad (3.88)$$

onde β = 0,1 e n é o número de variáveis primais do problema.

3.4.6. Algoritmo de Solução

Partindo-se de um ponto viável com relação às restrições de canalização, o algoritmo de solução resultante dos passos descritos anteriormente pode ser resumido como segue:

Passo 1 – Inicializar as variáveis primais e duais ($x, s1, s2, \lambda, \pi 1, \pi 2$)

Passo 2 – Calcular os termos H, J e z da matriz (3.79):

$$H = \nabla^2 f(x) - \lambda^T \cdot \nabla^2 h(x) + S_1^{-1} \cdot \pi_1 - S_2^{-1} \cdot \pi_2$$
$$J = \nabla h(x)$$
$$z = -\nabla f(x) + \lambda^T \cdot \nabla h(x) + \mu \cdot \left(S_1^{-1} e - S_2^{-1} e\right)$$

Passo 3 – Resolver o sistema de equações (Δx, Δs_1, Δs_2, $\Delta\lambda$, $\Delta\pi_1$, $\Delta\pi_2$)

Passo 4 – Escolher os passos primal (α_p) e dual (α_D). Atualizar (3.82)-(3.93).

$$x = x + \sigma \cdot \alpha_P \cdot \Delta x$$
$$s_1 = s_1 + \sigma \cdot \alpha_P \cdot \Delta s_1$$
$$s_2 = s_2 + \sigma \cdot \alpha_D \cdot \Delta s_2$$
$$\lambda = \lambda + \sigma \cdot \alpha_D \cdot \Delta\lambda$$
$$\pi_1 = \pi_1 + \sigma \cdot \alpha_D \cdot \Delta\pi_1$$
$$\pi_2 = \pi_2 + \sigma \cdot \alpha_D \cdot \Delta\pi_2$$

Passo 5 – Atualizar o parâmetro barreira:

$$\mu = \beta \frac{s_1^T \pi_1 - s_2^T \pi_2}{2n}$$

Passo 6 – Condições de otimalidade dadas por (3.51) e (3.52):

Se ($\mu < \varepsilon$, $|h(x)| < \varepsilon$, $|z| < \varepsilon$) então
PARE
Senão
VOLTE ao passo 2
Fim

Observe que o maior esforço computacional do algoritmo é resolver a cada iteração o sistema de equações (3.79).

3.5.
A Função Valor Ótimo de um Problema de Otimização

Nesta seção será mostrado como se calcula a derivada de uma função valor ótimo de um problema de otimização, que define o valor dos custos marginais utilizados na metodologia de Aumann-Shapley [13].

Seja

$$v(x) = \min f(y)$$
$$\text{s.a.} \quad g(x,y) = 0 \tag{3.89}$$
$$a \leq y \leq b$$

uma função valor ótimo de um problema de otimização como função de x, onde:

$x \in D \subset R^m, y \in R^n$

D (conjunto aberto)

f(y), g(x, y) funções continuamente diferenciáveis.

Para fins de demonstração, suponha que para qualquer valor de $x \in D$ a função v(x) é bem definida, isto é, o problema tem solução ótima.

Para o cálculo das derivadas parciais de v(x) com relação a cada componente de x, supõe-se inicialmente que o problema (3.89) só possui restrições de igualdade, ou seja:

$$\begin{aligned} & v(x) = \min f(y) \\ & \text{s.a.} \quad g(x,y) = 0 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Note que para cada valor x, a solução ótima do problema (3.90) satisfaz as condições de Karush-Kuhn-Tucker: [45]

$$\nabla_y f(y) = \nabla_y g(x,y)^T \cdot \lambda \tag{3.91}$$

$$G(x,y) = 0 \tag{3.92}$$

onde:

$\nabla_y f(y)$ gradiente de f(y) nas variáveis y

$\nabla_y g(x,y)$ jacobiano de g(x,y)

λ multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade

Seja y(x) a solução de (3.90) para cada valor de x. Como f e g são continuamente diferenciáveis, então y(x) também é. Deste modo:

V(x) = f(y(x))

Com isto:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = \nabla_y^t f(y) \cdot \frac{\partial y(x)}{\partial x_i} \tag{3.93}$$

Substituindo (3.91) em (3.93), tem-se:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = \lambda^t \cdot \nabla_y g(x, y) \cdot \frac{\partial y(x)}{\partial x_i}$$

Mas g(x, y) = 0 para qualquer $x \in D$. Consequentemente:

$$\frac{\partial g(x, y(x))}{\partial x_i} + \nabla_y g(x, y(x)) \cdot \frac{\partial y(x)}{\partial x_i} = 0 \tag{3.94}$$

Ou

$$\nabla_y g(x, y(x)) \cdot \frac{\partial y(x)}{\partial x_i} = - \frac{\partial g(x, y(x))}{\partial x_i} \tag{3.95}$$

Logo:

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = -\lambda^t \cdot \frac{\partial g(x, y(x))}{\partial x_i} \tag{3.96}$$

Quando o problema possui restrições de desigualdade, a fórmula para o cálculo das derivadas de uma função valor ótimo é essencialmente a mesma.

3.6. Conclusões

Este capítulo apresentou a formulação matemática do problema de fluxo de potência ótimo, suas principais variáveis e equações. A aplicação do fluxo de potência ótimo torna possível a determinação um ponto de operação viável que não viole as restrições operativas para o sistema.

As funções-objetivo apresentadas neste capítulo fornecem uma poderosa ferramenta de análise, direcionando os controles do sistema de potência para atender aos mais diferentes critérios de operação e planejamento. Destaca-se neste capítulo as funções-objetivo de mínima injeção de potência reativa e de mínimo corte de carga, utilizadas neste trabalho para determinar a remuneração dos geradores que provêem os serviços ancilares de suporte de potência reativa e reserva de geração, respectivamente.

O emprego do algoritmo de pontos interiores permite que o problema de fluxo de potência ótimo seja aplicado a sistemas de grande porte, como o Sistema Elétrico Brasileiro. Este algoritmo garante a convergência do problema com um esforço computacional razoável.

Por fim, este capítulo demonstrou como se obtém a derivada para uma função valor ótimo de um problema de otimização. O valor desta derivada será calculado durante a solução do problema de fluxo de potência ótimo para se determinar o valor dos custos marginais, utilizados no método de repartição de custos de Aumann-Shapley, para os geradores que fornecem serviços ancilares.