Bibliografia

[1] *Planing of the Broadcasting Satellite Service in Regions 1 and 3*, Tecnical Basis for planning, Final Acts - World Broadcasting - Satellite Administrative Radio Conference, Geneva, 1977.

[2] *Regional Administrative Radio Conference for the planing of the BroadCasting-Satellite Service in Region 2*, Technical Basis for Planing, Final Acts - Geneva, 1983.

[3] *Technical Basis for the World Administrative Radio Conference on the Use of the Geostationary-Satellite Orbit and the Planing of space Services Utilizing it*, Report of the CCIR, july 1984.

[4] *Orbit Space Minimizer*, Technical Report, Kokusai Denshin Denwa Co. Ltd., Japan 1984.

[5] *CCIR Report to the Second Session of the World Administrative Radio Conference on the Use of the Geostationary-Satellite Orbit and the planing of Space Services Utilizing it*, Technical Report of the CCIR, july 1988.

[6] *World administrative Radio Conference on the Use of the Geostationary-Satellite Orbit and the Planning on the space Services Utilizing it*, Final Acts, Outubro 1988, Geneva - Apêndice 30B.

[7] *Revision of the Broadcasting Satellite Service im Regions 1 and 3*, Technical Basis for planing, Final Acts - World Radiocommunication Conference, Stambul, 2000.

[8] J. M. P. Fortes, *Notas de aula da disciplina ELE-2605 - Sistemas de Comunicações via Satélite*, CETUC/PUC-Rio, 2003.

[9] *Estimation of interference produced by the non-geostationary orbit FSS network to earth station of the geostationary orbit FSS networks in the*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

bands 11/13 and 20/30 GHZ - ITU - WRC-97, document 4A/85-E. 30 june 1998.

[10] A. V. Fiacco & G. P. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, John Wiley, 1968.

[11] G. R. Walsh, *Methods of Optimization*, John Wiley, 1975.

[12] W. L. Morgan & G.D. Gordon, *Communications Satellite Handbook*, Wiley Interscience.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

A
Geometria

A.1
Bases Consideradas

A Figura A.1 ilustra as duas bases consideradas na representação dos vetores utilizados no desenvolvimento desse trabalho.

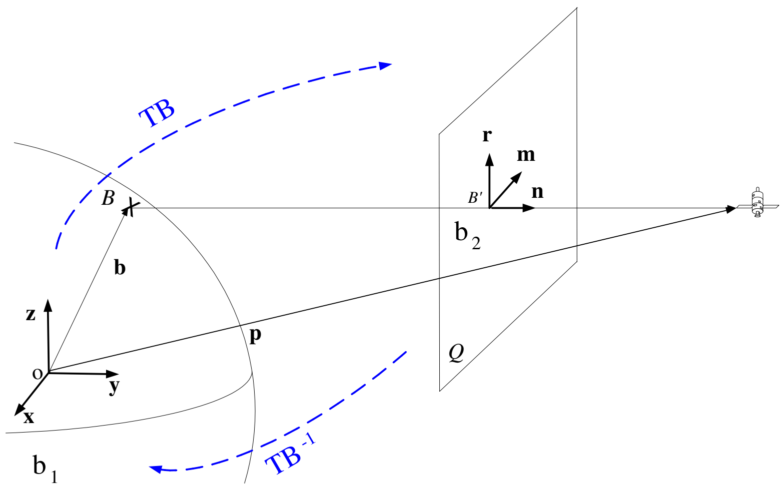

Figura A.1: Matriz transição de base.

A base b_1 é ortogonal, e sua origem está localizada no centro da Terra, sendo composta pelos vetores $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$,$\mathbf{z}$. O vetor $\mathbf{z}$ aponta para o Norte, o vetor $\mathbf{x}$ pertence ao plano do equador e aponta para o ponto de longitude zero, já o vetor $\mathbf{y}$ é dado pelo produto vetorial: $\mathbf{z} \times \mathbf{x}$.

A base $b2$, também ortogonal, tem sua origem no plano $\mathcal{Q}$ é composta pelos vetores $\mathbf{n}$,$\mathbf{m}$,$\mathbf{r}$. O plano $\mathcal{Q}$ é o plano perpendicular a direção de apontamento da antena do satélite. Sendo assim o vetor $\mathbf{n}$ é unitário na direção de apontamento do satélite e normal ao plano $\mathcal{Q}$.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{b})^{\mathbf{T}}(\mathbf{p} - \mathbf{b})}} \qquad \text{(A-1)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

O vetor **m** é paralelo ao plano do equador e ortogonal ao vetor **n** ($\mathbf{n}.\mathbf{m} = \mathbf{0}$). Finalmente, define-se o vetor **r** como $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$.

A matriz mudança de bases $\mathbf{M_{b_1 \to b_2}}$ que corresponde a transformação linear que transforma a representação dos vetores na base b_1 em sua representação na base b_2 é dada por:

$$\mathbf{M_{b_1 \to b_2}} = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \tag{A-2}$$

A matriz M^{-1} é a matriz que transforma os vetores representados na base [**n**, **m**,**r**] para vetores na base [**x**, **y**,**z**].

A.2 Definição do feixe elíptico sobre o plano $\mathcal{Q}$

Os satélites considerados neste estudo possuem feixes elípticos, desta forma, deseja-se descrever as elipses que representam o contorno de −3dB desses feixes sobre o plano $\mathcal{Q}$ para posteriormente transladarmos para a superfície da Terra e definir a área de cobertura do satélite. Os parâmetros que determinam essa elipse são ϕ_{01}, ϕ_{02} e γ [3].

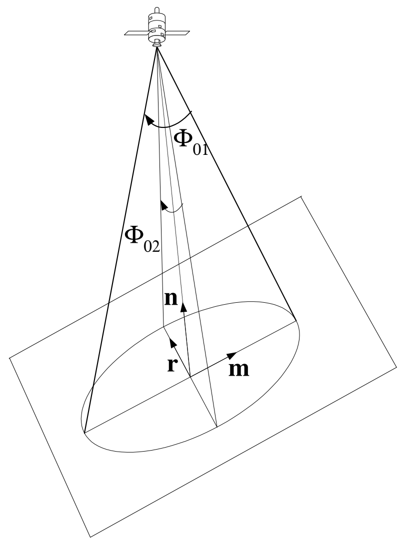

Figura A.2: Ângulos que definem a elipse do contorno de −3dB.

Os ângulos ϕ_{01} e ϕ_{02} representam a largura de feixe do eixo maior e menor, respectivamente, conforme Figura A.2.

As equações que determinam os eixos maior (e_M) e menor (e_m) em Km são dadas por

$$\begin{aligned} e_M &= d \tan \phi_{01} \\ e_m &= d \tan \phi_{02} \end{aligned} \qquad \text{(A-3)}$$

onde d é a distância em Km do plano $\mathcal{Q}$ ao satélite. De forma paramétrica, a equação da elipse é definida por

$$\begin{aligned} m &= e_M \cos\theta \cos\gamma - e_m \sin\theta \sin\gamma \\ r &= e_M \cos\theta \sin\gamma + e_m \sin\theta \cos\gamma \\ & 0 < \theta < 2\pi \end{aligned}$$

O parâmetro γ é o ângulo de orientação da elipse, definido como o ângulo entre a linha paralela ao plano do equador (eixo $\mathbf{m}$) e o eixo principal da elipse, medido no sentido anti-horário.

A título de exemplo, a área de cobertura dos satélites responsáveis por cobrir o Brasil no Plano do Serviço Fixo por Satélite Elaborado pela UIT em 1988 [6] estão representados na Figura A.3.

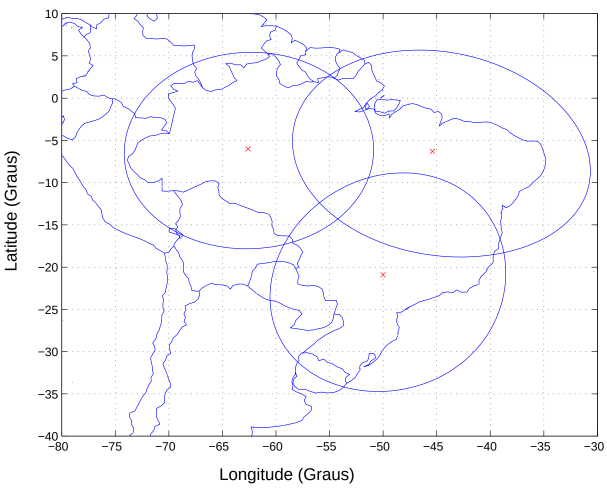

Figura A.3: Contorno de 3dB das elipses que cobrem o Brasil

Percebe-se que sobre a superfície da Terra o contorno elíptico de -3dB fica distorcida devido aos efeitos da curvatura da Terra.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

B
Expressões Analíticas para o cálculo do Vetor Gradiente e da Matriz Hessiana

B.1
Desenvolvimento do Vetor Gradiente e da Matriz Hessiana

Neste Apêndice são desenvolvidos expressões analíticas para o vetor Gradiente e a matriz Hessiana utilizados na otimização. Para o problema definido em (3-27) com n sistemas a função objetivo do k-ésimo problema sem restrição (equação (4-1)) se escreve:

$$
\begin{aligned}
f_k(\tilde{\mathbf{x}}) \;=\; x_n - x_1 + r_k \Bigg[& \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}) - L_{se}}}_{\text{restrição de entrada única}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{x_{\ell+1} - x_{\ell}}}_{\text{restrição de pré-fixação de ordem}} \\
& + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{1}{a_\ell - x_\ell} + \frac{1}{b_\ell - x_\ell} \right)}_{\text{restrição de arco de serviço}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{G_i(\tilde{\mathbf{x}}) - L_{ag}}}_{\text{restrição de entrada agregada}} \Bigg]
\end{aligned}
$$

onde $G_{ij}(\tilde{x})$ é a razão portadora-interferente de entrada única do sistema j interferindo no sistema i, conforme equação (3-23). $G_i(\tilde{x})$ é a razão portadora interferência de entrada agregada sobre o sistema i, conforme equação (3-24). Os parâmetros a_ℓ e b_ℓ são os limite inferior e superior, respectivamente do arco de serviço do ℓ-ésimo sistema, conforme equação (3-25).

O vetor Gradiente de $f_k(\tilde{\mathbf{x}})$ é definido por:

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \left(\frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_2}, \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial f(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_n} \right)^T$$

Para definirmos a p-ésima componente de $g(\tilde{\mathbf{x}})$ vamos analisar três

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

casos distintos.

O primeiro caso é quando a componente do gradiente a ser determinada for a primeira ($p = 1$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_k(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_1} &= -1 - r_k \left[\underbrace{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \frac{h'_{1j}(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_{1j}(\tilde{\mathbf{x}})} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 1}}^{n} \frac{h'_{i1}(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_{i1}(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{2(n-1) termos} + \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \right. \\ &\left. + \frac{(-1)}{(x_1 - a_1)^2} + \frac{1}{(b_1 - x_1)^2} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h'_i(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_i(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{n termos} \right]\end{aligned}$$

Os $(n-1)$termos referem-se ao sistema p atuando como interferente no sistema i e os outros $(n-1)$ termos referem-se ao sistema p atuando como vítima do sistema j. Seja:

$$\begin{aligned} h_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}) &= G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}) - L_{se} \\ h'_{ij}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial h_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} = \frac{\partial G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} \\ h_i(\tilde{\mathbf{x}}) &= G_i(\tilde{\mathbf{x}}) - L_{ag} \\ h'_i(\tilde{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial h_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} = \frac{\partial G_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} = \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} \frac{\partial G_{ij}(\tilde{x})}{\partial x_p} \right]^{-1} \end{aligned} \tag{B-1}$$

O termo $\frac{\partial G_{ij}(\mathbf{x})}{\partial x_k}$ é desenvolvida no Apêndice B.3 para o caso onde p é interferente e para o caso onde p é vítima. Pela equação (B-1) observa-se que para cada termo $\frac{\partial G_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p}$ onde $i \neq p$, temos apenas um termo para cada i, onde p é o sistema interferente e para o termo onde $i = p$ temos o somatório de $n-1$ termos para o caso onde p é o sistema vítima.

O segundo caso é quando a componente do gradiente a ser determinada é a última ($p = n$).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\frac{\partial f_k(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_n} = 1 - r_k \left[\underbrace{\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{n} \frac{h'_{nj}(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_{nj}(\tilde{\mathbf{x}})} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq n}}^{n} \frac{h'_{in}(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_{in}(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{2(n-1) termos} + \frac{(-1)}{(x_n - x_{n-1})^2} \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)}{(x_n - a_n)^2} + \frac{1}{(b_n - x_n)^2} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h'_i(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_i(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{ntermos} \right]$$

O Terceiro caso é quando a componente do gradiente a ser determinada não é a última nem a primeira ($p \neq 1$ e $p \neq n$).

$$\frac{\partial f_k(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} = -r_k \left[\underbrace{\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \frac{h'_{pj}(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_{pj}(\tilde{\mathbf{x}})} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} \frac{h'_{ip}(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_{ip}(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{2(n-1) termos} + \frac{(-1)}{(x_p - x_{p-1})^2} \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)}{(x_p - a_p)^2} + \frac{1}{(b_p - x_p)^2} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h'_i(\tilde{\mathbf{x}})}{h^2_i(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{ntermos} + \right]$$

A matriz Hessiana de $f(\mathbf{x})$ é definido por:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Para definirmos o elemento T_{ij} de $T(\tilde{\mathbf{x}})$ vamos analisar dois casos distintos.

O Primeiro caso é quando a componente da Matriz Hessiana a ser determinada pertence a diagonal ($j = p$ e $i = p$):

$$\frac{\partial^2 f_k(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p \partial x_p} = -r_k \left[\underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \left(\frac{\frac{\partial^2 h_{pj}(\mathbf{x})}{\partial x_p^2} h_{pj}(\tilde{\mathbf{x}}) - 2 \left(\frac{\partial h_{pj}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} \right)^2}{h_{pj}^3(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{(n-1) termos} + \right.$$

$$\left. \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{n} \left(\frac{\frac{\partial^2 h_{ip}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p^2} h_{ip}(\tilde{\mathbf{x}}) - 2 \left(\frac{\partial h_{ip}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} \right)^2}{h_{ip}^3(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{(n-1) termos} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\frac{\partial^2 h_{i}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p^2} h_{i}(\tilde{\mathbf{x}}) - 2 \left(\frac{\partial h_{i}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} \right)^2}{h_{i}^3(\tilde{\mathbf{x}})} \right)}_{n termos} \right]$$

O Segundo caso é quando a componente da Matriz Hessiana a ser determinada não pertence a diagonal ($i = l$, $j = p$):

$$\frac{\partial^2 f_k(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_l \partial x_p} = -r_k \left[\frac{\frac{\partial^2 h_{lp}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_l \partial x_p} h_{lp}(\tilde{\mathbf{x}}) - 2 \left(\frac{\partial h_{lp}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_l} \frac{\partial h_{lp}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} \right)}{h_{lp}^3(\tilde{\mathbf{x}})} + \frac{\frac{\partial^2 h_{pl}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p \partial x_l} h_{pl}(\tilde{\mathbf{x}}) - 2 \left(\frac{\partial h_{pl}(\mathbf{x})}{\partial x_p} \frac{\partial h_{pl}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_l} \right)^2}{h_{pl}^3(\tilde{\mathbf{x}})} \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\partial^2 h_{l}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_l \partial x_p} h_{l}(\tilde{\mathbf{x}}) - 2 \left(\frac{\partial h_{l}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_l} \frac{\partial h_{l}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p} \right)}{h_{l}^3(\tilde{\mathbf{x}})} + \frac{\frac{\partial^2 h_{p}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_p \partial x_l} h_{p}(\tilde{\mathbf{x}}) - 2 \left(\frac{\partial h_{p}(\mathbf{x})}{\partial x_p} \frac{\partial h_{p}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_l} \right)^2}{h_{p}^3(\tilde{\mathbf{x}})} \right]$$

A matriz Hessiana é simétrica.

B.2
Calculo da Derivada da Razão Portadora - Interferência

Antes de calcular a derivada da razão portadora-interferência, algumas analogias podem ser feitas em torno desse cálculo a fim de facilitar o

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

desenvolvimento da matriz Hessiana e do vetor Gradiente.

Seja a equação (3-4) expressa em dB dada por

- *Downlink*

$$\left.\left(\frac{C}{I}\right)_{down}\right|_{db} = E_3 + G_3(\gamma) + G_4(0) - l_{sd} + G_3'(0) + \\ -E_3' - G_3'(\eta) - G_4(\varepsilon) + l_{sd'} - G_3(0) \qquad \text{(B-2)}$$

- *Uplink*

$$\left.\left(\frac{C}{I}\right)_{up}\right|_{db} = E_1 + G_1'(0) + G_2(\phi) - l_{su} \\ -E_1 - G_1'(\theta) - G_2(\rho) + l_{su'} \qquad \text{(B-3)}$$

- *C/I total*

$$\left.\left(\frac{C}{I}\right)_{total}\right|_{db} = 10\log\left[\left[10^{\frac{(C/I)_d}{10}}\right]^{-1} + \left[10^{\frac{(C/I)_u}{10}}\right]^{-1}\right]^{-1} \qquad \text{(B-4)}$$

E_1, E_1', E_3, E_3' estão definidos na equação (3-5).

Sejam apenas dois sistemas e as quantidades com o índice j reference ao interferente e as quantidades com o índice i reference ao sistema vítima (interferido). Onde $G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})$ é uma função que represente a razão (C/I) total em dB do sistema j no sistema i. O vetor $\tilde{\mathbf{x}}$ define as posições orbitais dos satélites envolvidos. No caso de dois sistemas, temos $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})^{\mathbf{T}}$.

As variações de $G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})$ em relação a variação da posição orbital do satélite interferente podem ser definidas por:

$$\frac{\partial G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_j} \quad e \quad \frac{\partial^2 G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_j^2}$$

E as variações de $G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})$ em relação a variação do satélite vítima são

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

definidas por:

$$\frac{\partial G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i} \quad e \quad \frac{\partial^2 G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i^2}$$

Sendo assim, identifica-se a analogia entre:

- As derivadas primeiras:

$$\frac{\partial G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_{ji}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G_{ji}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i}$$

- As derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 G_{ji}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_j^2}$$

$$\frac{\partial^2 G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_j^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 G_{ji}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial x_i^2}$$

- As derivadas segundas Mistas:

$$\frac{\partial^2 G_{ij}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial^2 x_i \partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 G_{ji}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial^2 x_j \partial x_i}$$

B.3 Desenvolvimento da Derivada Primeira da Razão Portadora-Interferência

Neste Apêndice define-se então as expressões para a derivada primeira da razão Portadora-Interferência em função de $\mathbf{p}$, d, $\mathbf{c}$, diagramas de irradiação das antenas, ϕ_{o1}, ϕ_{o2} Φ, Φ_0 e γ. $G_{ij}(\mathbf{x})$ é definido conforme equação (B-4) por:

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = 10\log\left[\left[10^{\frac{(C/I)_d}{10}}\right]^{-1} + \left[10^{\frac{(C/I)_u}{10}}\right]^{-1}\right]^{-1} \tag{B-5}$$

onde $(C/I)_d$ e $(C/I)_u$ representam as razões Portadora-Interferência do sistema j interferindo no sistema i, sem estar em dB. Para facilitar a notação, vamos definir:

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \left[\left[10^{\frac{(C/I)_d}{10}}\right]^{-1} + \left[10^{\frac{(C/I)_u}{10}}\right]^{-1}\right]^{-1} \tag{B-6}$$

Seja 1 o índice que representa o sistema interferente e 2 o índice que representa o sistema vítima. Sendo assim, a variação em função do sistema interferente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1} &= \frac{10}{\Lambda(\mathbf{x})\ln(10)}\frac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1}\\ \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1} &= [\Lambda(\mathbf{x})]^2\left\{[(C/I)_d]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_1} + [(C/I)_u]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_1}\right\}\end{aligned} \tag{B-7}$$

Seja

$$\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_1} = \ln(10)\left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{db}}\right]\frac{\partial (C/I)_d|_{db}}{\partial x_1}$$

Onde $(C/I)_d|_{db}$ é dado pela equação (B-2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial[(C/I)_d|_{db}]}{\partial x_1} &= \frac{\partial G_3(\gamma)}{\partial x_1} + \frac{\partial G_4(0)}{\partial x_1} - \frac{\partial l_{sd}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_3'(0)}{\partial x_1}\\ &\quad -\frac{\partial G_3'(\eta)}{\partial x_1} - \frac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_1} + \frac{\partial l_{sd'}}{\partial x_1} - \frac{\partial G_3(0)}{\partial x_1}\end{aligned} \tag{B-8}$$

Vamos desenvolver todos os termos acima separadamente. A perda de

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

espaço livre é dada por:

$$l_s = 92.44 + 20\log(d^*) + 20\log(f) \tag{B-9}$$

onde:

$$d^* = [(\mathbf{E_T} - \mathbf{p})^T(\mathbf{E_T} - \mathbf{p})]^{\frac{1}{2}} \tag{B-10}$$

Onde d^* é a distância dado em km, f é a freqüência de operação dado em GHz, $\mathbf{E_T}$ é a posição da estação terrena e $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite.

Desta forma $\dfrac{\partial l_{sd}}{\partial x_1} = 0$, pela geometria do problema tanto $\mathbf{E_T}$ e $\mathbf{p}$ referem-se ao sistema vítima. Percebe-se que l_{sd} não depende de x_1 só depende da posição do satélite vítima.

Para $\dfrac{\partial G_3(0)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial G_3'(0)}{\partial x_1}$,$\dfrac{\partial G_4(0)}{\partial x_1}$ conforme o diagrama de irradiação das antenas $G(0)$ é igual ao G_{max} que é um valor constante. Logo suas derivadas são nulas. Da mesma forma $\dfrac{\partial G_3(\gamma)}{\partial x_1}$ também é nulo. Pela geometria do problema, percebe-se que ele não depende da posição do satélite interferente.

Para $l_{sd'}$ dado por (B-9) e (B-10), onde $\mathbf{E_T}$ é a posição da estação terrena no sistema vítima e $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite interferente. tem-se:

$$\frac{\partial l_{sd'}}{\partial x_1} = \frac{20}{d^* \ln(10)}\frac{\partial d^*}{\partial x_1} \tag{B-11}$$

$$\frac{\partial d^*}{\partial x_1} = \frac{\partial d^*}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \tag{B-12}$$

Como $\mathbf{p}$ é um vetor em coordenadas retangulares e $\mathbf{p_c} = (p_{c1},\ p_{c2},\ p_{c3})^T$ é o vetor $\mathbf{p}$ em coordenadas polares e $k = 180/\pi$, $RS = 42.250$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p_c} &= (RS,\ 0,\ x_1)^T \\ \mathbf{p} &= [p_{c1}\cos(x_1 k),\ p_{c1}\sin(x_1 k), 0]^T \end{aligned} \tag{B-13}$$

$$\frac{\partial d^*}{\partial \mathbf{p}^T} = -d^{*(-1)}(\mathbf{E_T} - \mathbf{p})^T \tag{B-14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} = p_{c1}[-\sin(x_1 k)k,\ \cos(x_1 k)k, 0]^T \tag{B-15}$$

Ao substituir (B-14) e (B-15) em (B-12), obtem-se:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\frac{\partial d^*}{\partial x_1} = d^{*(-1)}[(E_{T1} - p_1)\sin(x_1 k)k - (E_{T2} - p_2)\cos(x_1 k)k]p_{c1} \quad \text{(B-16)}$$

E substituindo (B-16) em (B-11), $\frac{\partial l_{sd'}}{\partial x_1}$ está definido. Para determinar $\frac{\partial G_3'(\eta)}{\partial x_1}$, vamos utilizar a Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial G_3'}{\partial x_1} = \frac{\partial G_3'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \quad \text{(B-17)}$$

onde, conforme as equações que descrevem o diagrama de radiação do satélite, temos:

$$\frac{\partial G_3'}{\partial \eta} = \begin{cases} -24\eta & \text{,se } 0 < \eta < 1.45 \\ -\dfrac{20}{\log(10)\eta} & \text{,se } \eta > 1.45 \end{cases} \quad \text{(B-18)}$$

$$\eta(x_1) = \frac{\Phi(x_1)}{\Phi_0(x_1)}$$

onde Φ e Φ_0 estão definidos conforme Figura 3.3

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} &= \frac{\Phi(x_1)'\Phi_0(x_1) - \Phi_0(x_1)'\Phi(x_1)}{[\Phi_0(x_1)]^2} \quad \text{(B-19)} \\ \Phi(x_1)' &= \frac{\partial \Phi(x_1)}{\partial x_1} \\ \Phi(x_1) &= \arccos\left(\frac{\mathbf{b_p}^T \mathbf{df}_{nmr}}{\| \mathbf{b_p}^T \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) \end{aligned}$$

onde, conforme Figura 3.6 e Figura B.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{b_p} &= \mathbf{TB}(\mathbf{c} - \mathbf{p}) + \mathbf{TB}(\mathbf{c} - \mathbf{E_T'}) \\ \mathbf{E_T'} &= \mathbf{E_T} + \beta(\mathbf{p} - \mathbf{E_T}), \text{conforme equação (3-15),} \end{aligned}$$

substituindo $\mathbf{a}$ por $\mathbf{E_T}$.

Desta forma:

$$\mathbf{b_p} = \mathbf{TB}(\mathbf{c} - \mathbf{p}) + \mathbf{TB}(\mathbf{c} - \mathbf{E_T} + \beta(\mathbf{p} - \mathbf{E_T}))$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

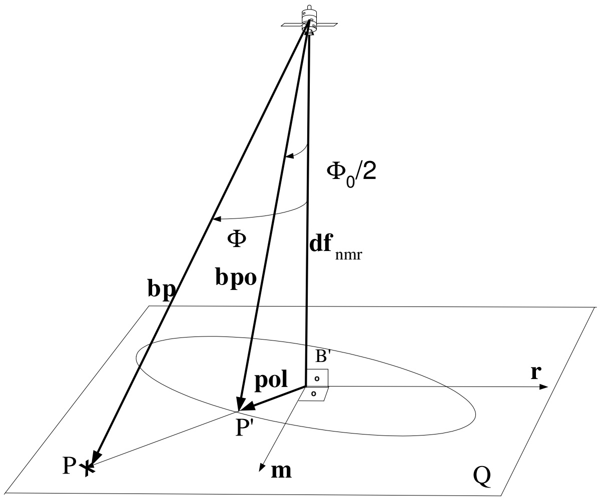

Figura B.1: Definição dos vetores

e

$$\mathbf{df}_{nmr} = \mathbf{TB}(\mathbf{c} - \mathbf{p})$$

onde **df** é um vetor na direção de apontamento do satélite e $\mathbf{df}_{nmr}$ é o vetor **df** em coordenadas [n,m,r].Onde **c** está definido em (3-9), repare que ele não depende de x_1. **p** está definido em (B-13). **TB** está definido em (A-2). β está definido em (3-16) e $\mathbf{E_T}$ é a Estação Terrena do sistema interferente. $Q_0(x_1)$ será definido mais adiante.

Vamos definir:

$$A(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{b_p}^T \mathbf{df}_{nmr}}{\| \mathbf{b_p} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|} \right)$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x_1} \tag{B-20}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = \frac{2A(x)[A(x)]'}{\sqrt{1 - A(x)^2}} \tag{B-21}$$

$$[A(x)]' = \frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{(\mathbf{b_p}^T \mathbf{df}_{nmr})'(\| \mathbf{b_p} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_p}^T \mathbf{b}_{nmr})(\| \mathbf{b_p} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)'}{(\| \mathbf{b_p} \| \| \mathbf{b}_{nmr} \|)^2} \tag{B-22}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Analisa-se cada termo da equação (B-22) separadamente

$$\begin{aligned}
(\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})' &= (\mathbf{b_p}^T)'\mathbf{df}_{nmr} + \mathbf{b_p}^T(\mathbf{df}_{nmr})' \\
(\mathbf{b_p}^T)' &= (\mathbf{b_p}')^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b_p}' &= \mathbf{TB}'\mathbf{c} + \mathbf{TB}\mathbf{c}' - \mathbf{TB}'\mathbf{p} - \mathbf{TB}'\mathbf{E_T} - \mathbf{TB}'\beta\mathbf{p} \\
&\quad -\mathbf{TB}\beta'\mathbf{p} - \mathbf{TB}\beta\mathbf{p}' + \mathbf{TB}'\beta\mathbf{E_T} + \mathbf{TB}\beta'\mathbf{E_T} \qquad \text{(B-23)} \\
\mathbf{df}'_{nmr} &= \mathbf{TB}'\mathbf{c} + \mathbf{TB}\mathbf{c}' - \mathbf{TB}'\mathbf{p} - \mathbf{TB}\mathbf{p}' \qquad \text{(B-24)}
\end{aligned}$$

Para definir $\mathbf{b_p}'$ e $\mathbf{df}'_{nmr}$, precisamos definir primeiro $\mathbf{TB}'$:

$$\mathbf{TB}' = \frac{\partial \mathbf{TB}}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial n_1}{\partial x_1} & \frac{\partial n_2}{\partial x_1} & \frac{\partial n_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial m_1}{\partial x_1} & \frac{\partial m_2}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & \frac{\partial r_3}{\partial x_1} \end{pmatrix} \qquad \text{(B-25)}$$

Como todos os termos da Matriz **TB** dependem de **n** conforme Apêndice A.1 só há necessidade de derivar os n_i termos em relação a x_1 e para os outros termos usamos a regra da cadeia.

Seja **n** dado pela equação (A-1). Assim como **p**, **b** é dado em coordenadas retangulares e **b** é constante. Conforme a equação (B-13), apenas a primeira e segunda componente de **p** dependem de x_1. desta forma:

$$\frac{\partial n_1}{\partial x_1} = \frac{p_1' \parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel - (p_1 - b_1) \parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel'}{\parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel^2} \qquad \text{(B-26)}$$

Onde p_1' está definido em (B-15).

$$\begin{aligned}
\parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel' &= \left(\left[(p_1 - b_1)^2 + (p_2 - b_2)^2 + (p_3 - b_3)^2 \right]^{1/2} \right)' \\
&= \parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel^{-1} \left[(p_1 - b_1)(RS\, k \sin(x_1 k)) + \right. \\
&\quad + \left. (p_2 - b_2)(RS\, k \cos(x_1 k)) \right]
\end{aligned}$$

Calculando a derivada da segunda componente:

$$\frac{\partial n_2}{\partial x_1} = \frac{p_2' \parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel - (p_2 - b_2) \parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel'}{\parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel^2} \qquad \text{(B-27)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Onde p_2' está definido em (B-15). Calculando a terceira componente:

$$\frac{\partial n_3}{\partial x_1} = \frac{-(p_3 - b_3) \parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel'}{\parallel \mathbf{p} - \mathbf{b} \parallel^2} \qquad \text{(B-28)}$$

O vetor $\mathbf{m}$ é dado por (**??**). Sendo assim:

$$\frac{\partial m_1}{\partial x_1} = \frac{-n_2'(n_1^2 + n_2^2)^{1/2} + n_2' \left[(n_1^2 + n_2^2)^{1/2}\right]'}{(n_1^2 + n_2^2)} \qquad \text{(B-29)}$$

$n_2' = \dfrac{\partial n_2}{\partial x_1}$ é conhecido. Desenvolvendo $\left[(n_1^2 + n_2^2)^{1/2}\right]'$, temos:

$$\left[(n_1^2 + n_2^2)^{1/2}\right]' = \left[(n_1^2 + n_2^2)^{-1/2}\right] (n_1\, n_1' + n_2\, n_2')$$

$n_1' = \dfrac{\partial n_1}{\partial x_1}$ também é conhecido. A componente m_2 tem derivada parecida com a derivada da componente m_1:

$$\frac{\partial m_2}{\partial x_1} = \frac{-n_1'(n_1^2 + n_2^2)^{1/2} - n_1' \left[(n_1^2 + n_2^2)^{1/2}\right]'}{(n_1^2 + n_2^2)} \qquad \text{(B-30)}$$

Substituindo as equações (B-26) e (B-27) nas equações (B-29) e (B-30), $\dfrac{\partial m_1}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial m_2}{\partial x_1}$ estão definidos. Para completar faltam as derivadas das componentes de $\mathbf{r}$. O vetor $\mathbf{r}$ é definido no Apêndice A.1. Sendo assim:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = -m_2' n_3 - m_2 n_3' \qquad \text{(B-31)}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_1} = m_1' n_3 + m_1 n_3' \qquad \text{(B-32)}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_1} = m_2' n_1 + m_2 n_1' - m_1' n_2 - m_1 n_2' \qquad \text{(B-33)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Substituindo as equações (B-29) e (B-30) nas equações (B-31), (B-32) e (B-33) todas as componentes de $\mathbf{TB}$ estão definidas.

Desta forma $\dfrac{\partial \mathbf{TB}}{\partial x_1}$ está determinada. Voltando a equação (B-24), $\mathbf{df}'_{nmr}$ está determinado pois $\mathbf{p}'$ está definido por (B-15). Para determinar $\mathbf{b_p}'$ falta determinar β', conforme equação (B-23)

Seja β dado pela (3-16). Desta forma:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_1} = \frac{(\mathbf{c}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})'(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n}) - (\mathbf{c}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})'}{(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})^2} \tag{B-34}$$

onde:

$$(\mathbf{c}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})' = \mathbf{c}^T\mathbf{n}' + (\mathbf{c}^T)'\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n}' \tag{B-35}$$

$$(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})' = \mathbf{p}^T\mathbf{n}' + (\mathbf{p}^T)'\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n}' \tag{B-36}$$

como $\mathbf{p}'$ é determinado por (B-15) e substituindo a equação (B-36) e (B-35) na equação (B-34) β' é conhecido e conseqüentemente $\mathbf{b_p}$ também. Voltando a equação (B-22). Falta determinar $(\| \mathbf{b_p}^T \| \| \mathbf{df}^T_{nmr} \|)'$.

$$(\| \mathbf{b_p}^T \| \| \mathbf{df}^T_{nmr} \|)' = (\| \mathbf{b_p}^T \|' \| \mathbf{df}^T_{nmr} \|) + (\| \mathbf{b_p}^T \| \| \mathbf{df}^T_{nmr} \|') \tag{B-37}$$

$\| \mathbf{b_p}^T \|'$ é determinado utilizado as equações (B-23) e

$$\| \mathbf{b_p}^T \|' = \| \mathbf{b_p}^T \|^{-1} \, b_p (b'_p)^T \tag{B-38}$$

A quantidade $\| \mathbf{df}^T_{nmr} \|'$ é determinada analogamente a $\| \mathbf{b_p}^T \|'$ e, ainda, utilizando a equação (B-24).

Sendo assim substituindo as equações (B-37), (B-23) e (B-24) na equação (B-22), $\dfrac{\partial A(\mathbf{x})}{\partial x_1}$ está determinado e substituindo (B-21) e (B-22) em (B-20) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ também está. Voltando a equação (B-19). Vamos determinar Φ'_0.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\Phi_0(x_1)' = \frac{\partial \Phi_0(x_1)}{\partial x_1}$$
$$\Phi_0(x_1) = \arccos\left(\frac{\mathbf{b_{po}}^T \mathbf{df}_{nmr}}{\| \mathbf{b_{po}}^T \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right)$$

onde

$$\mathbf{b_{po}} = \mathbf{TB}[\mathbf{c} - \mathbf{p}] + \mathbf{p_{ol}}$$
$$\mathbf{p_{ol}} = (0,\ e_M \cos\delta\cos\gamma - e_m \sin\delta\sin\gamma,\ e_M \cos\delta\sin\gamma + e_m \cos\delta\cos\gamma)^T$$

$\mathbf{b_{po}}$ e $\mathbf{p_{ol}}$ estão representados nas Figuras B.1. γ é o ângulo de orientação da elipse. δ é o ângulo formado entre o vetor $\mathbf{b_{po}}$ e o eixo maior da elipse. Conforme representado na Figura B.2.

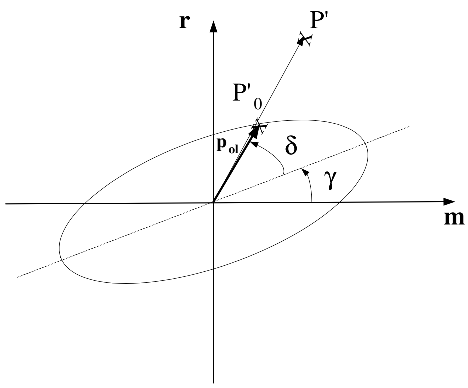

Figura B.2: Definição dos ângulos

Vamos definir:

$$B(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{b_{po}}^T \mathbf{df}_{nmr}}{\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|}\right) \tag{B-39}$$
$$\tag{B-40}$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial B}\frac{\partial B}{\partial x_1} \tag{B-41}$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial B} = \frac{2B(x)B'(x)}{\sqrt{1 - B(x)^2}} \tag{B-42}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\frac{\partial B(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{(\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})'(\| \mathbf{b_{po}} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{b}_{nmr})(\| \mathbf{b_{po}} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)'}{(\| \mathbf{b_{po}} \|\| \mathbf{b}_{nmr} \|)^2} \tag{B-43}$$

Seja

$$(\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})' = (\mathbf{b_{po}}^T)'\mathbf{df}_{nmr} + \mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}'_{nmr}$$

Como $\mathbf{df}'_{nmr}$ já foi determinado, basta determinar $(\mathbf{b_{po}}^T)' = (\mathbf{b_{po}}')^T$. Desta forma, temos pelas equações acima:

$$\begin{aligned} \mathbf{b_{po}}' &= \mathbf{df}'_{nmr} + \mathbf{p_{ol}}' \\ \mathbf{p_{ol}}' &= (0,\ -e_M\delta'\cos\gamma\sin\delta - e_m\delta'\sin\gamma\cos\delta, \\ & \quad -e_M\delta'\sin\gamma\sin\delta + e_m\delta'\cos\gamma\cos\delta)^T \end{aligned} \tag{B-44}$$

Pode-se mostrar que:

$$\delta = \arccos\left(\frac{\mathbf{p_{ol}}\mathbf{m}}{\| \mathbf{p_{ol}} \|\| \mathbf{m} \|}\right)$$

onde bfm é o vetor unitário [0,1,0]. Desta forma:

$$\delta' = \frac{2C(x)2C'}{\sqrt{1 - C(x)^2}} \tag{B-45}$$

onde C e C' são dados por:

$$C = \frac{\mathbf{p_{ol}}\mathbf{m}}{\| \mathbf{p_{ol}} \|\| \mathbf{m} \|} \tag{B-46}$$

$$C' = \left(\frac{(\mathbf{p_{ol}}^T\mathbf{m})' \| \mathbf{p_{ol}} \| - (\mathbf{p_{ol}}^T\mathbf{m}) \| \mathbf{p_{ol}} \|'}{(\| \mathbf{p_{ol}} \|)^2}\right) \tag{B-47}$$

Observa-se pela equação (B-47) falta determinar

$$(\mathbf{p_{ol}}^T\mathbf{m})' = (\mathbf{p_{ol}}')^T\mathbf{m}) = \mathbf{E}.(\mathbf{rot}.\mathbf{b_p}').\mathbf{m}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

onde b'_p é dado por (B-23) e

$$\mathbf{E} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/e_M & 0 \\ 0 & 0 & 1/e_m \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{rot} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

onde γ é definido conforme Figura B.1 e $\| \mathbf{p_{ol}} \|$ é dado analogamente à equação (B-38). Voltando a equação (B-45), observa-se que γ' está determinado.

$\mathbf{b_{po}}'$ está determinado. Substituindo as equações (B-44), (B-24) em (B-39) $\dfrac{\partial B}{\partial x_1}$ está determinado. Substituindo as equações (B-39) e (B-42) em (B-41) $\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial x_1}$ está determinado.

Voltando a equação (B-19)percebe-se que $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_1}$ está determinado e conseqüentemente $\dfrac{\partial G'_3(\eta)}{\partial x_1}$ também está.

Voltando a equação (B-8), falta determinar o último termo: $\dfrac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_1}$. Pode-se escrever:

$$\frac{\partial G_4}{\partial x_1} \;=\; \frac{\partial G_4}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} \tag{B-48}$$

Conforme o diagrama de radiação da estação, temos:

$$\frac{\partial G_4}{\partial \varepsilon} \;=\; \begin{cases} -5 \times 10^{-3}(\dfrac{D}{\lambda}\varepsilon) & \text{, se } 0 < \varepsilon < \varepsilon_m \\ 0 & \text{, se } \varepsilon_m \leq \varepsilon < \varepsilon_r \\ -\dfrac{25}{\log(10)\varepsilon} & \text{, se } \varepsilon_r \leq \varepsilon < 36.3^o \\ 0 & \text{, se } 36.3^o \leq \varepsilon < 180^o \end{cases} \tag{B-49}$$

onde ε_m e ε_r estão definidos na Seção 3.2.1

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V}{\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|}\right)\frac{180}{\pi} \quad \text{(B-50)}$$

$$D = \left(\frac{\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V}{\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|}\right) \quad \text{(B-51)}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_1} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial x_1}\frac{180}{\pi} \quad \text{(B-52)}$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial D} = \frac{2D(x)D'(x)}{\sqrt{1-D(x)^2}} \quad \text{(B-53)}$$

onde $\mathbf{w}_I = \mathbf{p}_I - \mathbf{E_T}$ e $\mathbf{w}_V = \mathbf{p}_V - \mathbf{E_T}$, $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Terrena receptora do sistema vítima, $\mathbf{p}_I$ é o vetor posição do satélite interferente, $\mathbf{p}_V$ é o vetor posição do satélite vítima. Percebe-se que $\mathbf{w}_V$ não depende de x_1.

Temos:

$$\frac{\partial D(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'(\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|) - (\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)(\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|)'}{(\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|)^2} \quad \text{(B-54)}$$

desenvolvendo:

$$(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)' = (\mathbf{w}_I^T)'\mathbf{w}_V + \mathbf{w}_I^T(\mathbf{w}_V)' \quad \text{(B-55)}$$

e

$$(\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|)' = \| \mathbf{w}_I \|'\| \mathbf{w}_V \| + \| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|' \quad \text{(B-56)}$$

$\| \mathbf{w}_I \|'$ e $\| \mathbf{w}_V \|'$ podem ser determinado pela formula descrita no Apêndice B.3. Como neste caso:

$$\mathbf{w}_I' = \mathbf{p}' \quad \text{(B-57)}$$

$$\mathbf{w}_V' = \mathbf{0} \quad \text{(B-58)}$$

Onde $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite interferente. Desta forma, substituindo as equações (B-57), (B-58) e (B-55) em (B-54) determinamos $\frac{\partial D}{\partial x_1}$. Substituindo as equações (B-54)e (B-53) em (B-52) $\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_1}$ está determinado. Substituindo (B-52) e (B-50) $\frac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_1}$ está determinado. Voltando a equação (B-8), determinamos $\frac{\partial[(C/I)_d|_{db}]}{\partial x_1}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Voltando a equação (B-7), falta determinar $\dfrac{\partial[(C/I)_u|_{db}]}{\partial x_1}$
Seja

$$\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_1} = \ln(10)(10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{db}})\frac{\partial(C/I)_u|_{db}}{\partial x_1} \tag{B-59}$$

Onde $(C/I)_u|_{db}$ é dado pela equação (B-3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial[(C/I)_u|_{db}]}{\partial x_1} &= \frac{\partial G_2(\phi)}{\partial x_1} + \frac{\partial G_1'(0)}{\partial x_1} - \frac{\partial l_{su}}{\partial x_1} \\ &\quad -\frac{\partial G_1'(\theta)}{\partial x_1} - \frac{\partial G_2(\rho)}{\partial x_1} + \frac{\partial l_{su'}}{\partial x_1}\end{aligned} \tag{B-60}$$

Vamos desenvolver todos os termos acima separadamente. Pela geometria do problema, percebe-se que: $\dfrac{\partial l_{su}}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial l_{su'}}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial G_1'(0)}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial G_2(\phi)}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial G_2(\rho)}{\partial x_1}$ são nulas, as quantidades que queremos derivar não dependem da posição do sistema interferente. Sendo assim nos resta determinar $\dfrac{\partial G_1'(\theta)}{\partial x_1}$. A determinação deste último termo é igual a desenvolvida para $\dfrac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_1}$ com a ressalva que $\mathbf{w}_I' = -\mathbf{p}'$, $\mathbf{w}_V' = 0$ e $\mathbf{p}_I$ é o vetor posição do satélite interferente. $\mathbf{w}_I$ e $\mathbf{w}_V$ neste caso possuem sinais oposto ao anterior e $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Terrena do sistema interferente. Desta forma (B-60) está determinado, $\dfrac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1}$ está determinado e conseqüentemente $\dfrac{\partial G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1}$ está resolvida. Observa-se pelo Apêndice B.2 que a $\dfrac{\partial G_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ também está determinado, pois possui a mesma expressão analítica de $\dfrac{\partial G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1}$ se trocarmos as informações do sistema interferente com as do sistema vítima.

Para completar o conjunto de derivadas primeiras da razão Portadora-Interferência falta determinar $\dfrac{\partial G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_2}$. $G_{21}(\mathbf{x})$ esta definido na equação (B-5). Seja $\Lambda(\mathbf{x})$ definido por (B-6). Sendo assim, a variação em função do sistema vitima:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_2} &= \frac{10}{\Lambda(\mathbf{x})\ln(10)}\frac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_2} &= [\Lambda(\mathbf{x})]^2\left\{[(C/I)_d]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_2} + [(C/I)_u]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_2}\right\}\end{aligned} \tag{B-61}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Seja

$$\begin{aligned}\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left[(10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{db}})\right] \\ &= \ln(10)(10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{db}})\frac{\partial(C/I)_d|_{db}}{\partial x_2}\end{aligned}$$

Onde $(C/I)_d|_{db}$ é dado pela equação (B-2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial[(C/I)_d|_{db}]}{\partial x_2} &= \frac{\partial G_3(\gamma)}{\partial x_2} + \frac{\partial G_4(0)}{\partial x_2} - \frac{\partial l_{sd}}{\partial x_2} + \frac{\partial G'_3(0)}{\partial x_2} \\ &- \frac{\partial G'_3(\eta)}{\partial x_2} - \frac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_2} + \frac{\partial l_{sd'}}{\partial x_2} - \frac{\partial G_3(0)}{\partial x_2} \qquad \text{(B-62)}\end{aligned}$$

Vamos desenvolver todos os termos acima separadamente. Pela geometria do problema, tem-se que: $\frac{\partial l_{sd'}}{\partial x_2}$, $\frac{\partial G_4(0)}{\partial x_2}$,$\frac{\partial G'_3(0)}{\partial x_2}$,$\frac{\partial G_3(0)}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial G'_3(\eta)}{\partial x_2}$ são nulas, uma vez que essas quantidades não dependem da posição do sistema vitima. Sendo assim nos resta determinar $\frac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial l_{sd}}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial G_3(\gamma)}{\partial x_2}$.

Pela geometria do problema, tem-se que a forma de determinar de $\frac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_2}$ é igual a desenvolvida para $\frac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_1}$ com a ressalva que agora $\mathbf{w}'_I = 0$, $\mathbf{w}'_V = -\mathbf{p}'$ e $\mathbf{p}_V$ é o vetor posição do satélite vítima.

O desenvolvimento de $\frac{\partial l_{sd}}{\partial x_2}$ é igual ao desenvolvimento de $\frac{\partial l_{sd'}}{\partial x_1}$ sendo que $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Terrena no sistema vítima, $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite vítima, ou seja, x_1 é substituído por x_2.

O desenvolvimento de $\frac{\partial G_3(\gamma)}{\partial x_2}$ é análogo ao desenvolvimento de $\frac{\partial G'_3(\eta)}{\partial x_1}$. Sendo as informações do sistema interferente substituídas pelo sistema vítima. Neste caso as informações de $\mathbf{p}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{E_T}$ são respectivamente as informações do vetor posição do sistema vítima, o vetor que determina o ponto onde o plano $\mathcal{Q}$ intercepta a direção de apontamento do satélite vítima e posição da estação terrena receptora do sistema vítima.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Desta forma $\dfrac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_2}$ está determinado. Vamos ao *uplink*, seja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{db}}\right] \\ &= \ln(10)\left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{db}}\right]\frac{\partial(C/I)_u|_{db}}{\partial x_2}\end{aligned} \tag{B-63}$$

Onde $(C/I)_u|_{db}$ é dado pela equação (B-3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial[(C/I)_u|_{db}]}{\partial x_2} &= \frac{\partial G_2(\phi)}{\partial x_2} + \frac{\partial G_1'(0)}{\partial x_2} - \frac{\partial l_{su}}{\partial x_2} \\ &\quad - \frac{\partial G_1'(\theta)}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2(\rho)}{\partial x_2} + \frac{\partial l_{su'}}{\partial x_2}\end{aligned} \tag{B-64}$$

Vamos desenvolver todos os termos acima separadamente. $\dfrac{\partial G_1'(0)}{\partial x_2}$ é nulo, pois não depende da posição do satélite vítima.

O desenvolvimento de $\dfrac{\partial l_{su}}{\partial x_2}$ é análogo ao desenvolvimento de $\dfrac{\partial l_{sd'}}{\partial x_1}$ sendo que $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Transmissora no sistema vítima e $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite vítima.

Já o desenvolvimento de $\dfrac{\partial l_{su'}}{\partial x_2}$ é também análogo ao desenvolvimento de $\dfrac{\partial l_{sd'}}{\partial x_1}$ sendo que $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Transmissora no sistema interferente e $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite vítima.

A forma de determinar de $\dfrac{\partial G_1'(\theta)}{\partial x_2}$ é análoga a desenvolvida para $\dfrac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_1}$ com a ressalva que $\mathbf{w}_I' = 0$, $\mathbf{w}_V' = -\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}_V$ é o vetor posição do satélite vítima e $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Terrena transmissora do sistema interferente.

O cálculo de $\dfrac{\partial G_2(\rho)}{\partial x_2}$ é análogo ao cálculo de $\dfrac{\partial G_3'(\eta)}{\partial x_1}$. Sendo que as informações do sistema interferente são substituídas pelo sistema vítima e vice-versa. Além disso $\mathbf{b_p}$ e $\mathbf{df}_{nmr}$ possuem sinais opostos ao no caso anterior.

Já o cálculo de $\dfrac{\partial G_2(\phi)}{\partial x_2}$ é também análogo ao cálculo de $\dfrac{\partial G_3'(\eta)}{\partial x_1}$. E além das informações do sistema interferente serem substituídas pelo sistema vítima e vice-versa, $\mathbf{b_p}$ e $\mathbf{df}_{nmr}$ possuem sinais opostos ao do caso anterior,$\mathbf{E_T}$ é a Estação Terrena Transmissora do sistema vítima.

Desta forma $\dfrac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_2}$ está determinado. Sendo assim, $\dfrac{\partial\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ está

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

determinado e conseqüentemente $\dfrac{\partial G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ está resolvida. Observa-se pelo Apêndice B.2 que a $\dfrac{\partial G_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_1}$ também está determinado, pois possui a mesma expressão analítica de $\dfrac{\partial G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_2}$ se trocarmos as informações do sistema interferente com as do sistema vítima. Conclui-se assim o conjunto de derivadas primeira da Razão Portadora-Interferente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

B.4 Desenvolvimento da Derivada Segunda da Razão Portadora-Interferência

Neste Apêndice define-se então as expressões para a segunda derivada da Razão Portadora-Interferência em função de $\mathbf{p}$, d, $\mathbf{c}$, diagramas de irradiação das antenas, ϕ_{o1}, ϕ_{o2}, γ e as primeiras derivadas da Razão Portadora-Interferência. Assim como foi feito para as derivadas primeiras, neste caso, defini-se:

$$\frac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{10}{\Lambda(\mathbf{x})\ln(10)}\frac{\partial \Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right]$$

onde $\Lambda(\mathbf{x})$ é dado por (B-7). Sendo Assim:

$$\frac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} = \frac{10}{\ln 10}\left[\frac{\Lambda(\mathbf{x})''\Lambda(\mathbf{x}) - (\Lambda(\mathbf{x})')^2}{\Lambda(\mathbf{x})^2}\right]$$

Todos os termos acima são conhecidos. Falta apenas determinar $\Lambda(\mathbf{x})''$.

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathbf{x})'' = & -2\Lambda(\mathbf{x})^3\Lambda(\mathbf{x})'[(C/I)_d]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_1} - 2\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_d]^{-3}\left[\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_1}\right]^2 \\ & +\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_d]^{-2}\frac{\partial^2[(C/I)_d]}{\partial x_1^2} - 2\Lambda(\mathbf{x})^3\Lambda(\mathbf{x})'[(C/I)_u]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_1} \\ & -2\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_u]^{-3}\left[\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_1}\right]^2 + \Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_u]^{-2}\frac{\partial^2[(C/I)_u]}{\partial x_1^2}\end{aligned} \quad \text{(B-65)}$$

Uma vez $\frac{\partial}{\partial x_1}[(C/I)_d]$ e $\frac{\partial}{\partial x_1}[(C/I)_u]$ foram determinados no Apêndice B.3. Os únicos termos da equação (B-65) que não são conhecidos são: $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[(C/I)_d]$ e $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[(C/I)_u]$. Vamos determinar cada um separadamente. Iniciaremos pelo lance de descida.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[(C/I)_d] = \ln(10)\Bigg[& \ln(10)10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{dB}}\frac{1}{10}\left[\frac{\partial(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_1}\right]^2 \\ & +10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{dB}}\frac{\partial^2(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_1^2}\Bigg]\end{aligned} \quad \text{(B-66)}$$

Dada a equação (B-66) o termo desconhecido é: $\frac{\partial^2(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_1^2}$. Onde pela equação (B-2), podemos escrever:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(C/I)_d|_{dB} &= +\frac{\partial^2 G_3(\gamma)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_4(0)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 l_{sd}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_3'(0)}{\partial x_1^2} \\ &- \frac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 l_{sd'}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 G_3(0)}{\partial x_1^2} \qquad \text{(B-67)}\end{aligned}$$

Sendo a equação (B-67), sabe-se que os termos: $\frac{\partial^2 G_3(0)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 G_3'(0)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 G_4(0)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 G_3(\gamma)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 l_{sd}}{\partial x_1^2}$ são nulos pois suas derivadas primeiras também são. Para o termo $\frac{\partial^2 l_{sd}}{\partial x_1^2}$ tem-se:

$$\frac{\partial^2 l_{sd'}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{20}{d^* \ln(10)}\frac{\partial d^*}{\partial x_1}\right] = \frac{20}{\ln 10}\left[\frac{d^{*\prime\prime} d^* - (d^{*\prime})^2}{(d^*)^2}\right]$$

O cálculo de $d^{*\prime\prime}$ é dado por:

$$\begin{aligned}d^{*\prime\prime} &= \frac{\partial}{\partial x_1} d^{*\prime} \\ &\quad \text{seja } d^{*\prime} \text{ dado pela equação (B-16).} \\ &= -d^{*(-2)} d^{*\prime}\left[(E_{T1} - p_1)\sin(x_1 k)k - (E_{T2} - p_2)\cos(x_1 k)k\right] \\ &\quad + d^{*(-1)}\left[(E_{T1} - p_1)\cos(x_1 k)k^2 + (E_{T2} - p_2)\sin(x_1 k)k^2\right]\end{aligned}$$

Onde d^* é dado por (B-10). Para o termo $\frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1^2}$ tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_4}{\partial^2 x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial G_4}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}\right] \\ &= \frac{\partial^2 G_4}{\partial x_1 \partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial G_4}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1^2} \qquad \text{(B-68)}\end{aligned}$$

Os termos desconhecidos são: $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1^2}$ e $\frac{\partial^2 G_4}{\partial x_1 \partial \varepsilon}$ pois $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial G_4}{\partial x_1}$ estão definidos no Apêndice (B.3). Sendo Assim:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial x_1}\right] \\ &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1 \partial D}\frac{\partial D}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial D}\frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} \qquad \text{(B-69)}\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

onde D é definido pela equação (B-51), $\dfrac{\partial D}{\partial x_1}$ é dado pela equação (B-54) e $\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial D}$ é dado por (B-53). Logo, os termos desconhecidos são: $\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial D \partial x_1}$ e $\dfrac{\partial^2 D}{\partial x_1^2}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 D}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial D(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right] \\
&= \frac{[(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)]'(\|\ \mathbf{w}_I\ \|^2\|\ \mathbf{w}_V\ \|^2)}{(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)^4} + \\
&\quad -\frac{[(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)](\|\ \mathbf{w}_I\ \|^2\|\ \mathbf{w}_V\ \|^2)'}{(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)^4} + \\
&\quad -\frac{[(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)']'(\|\ \mathbf{w}_I\ \|^2\|\ \mathbf{w}_V\ \|^2)}{(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)^4} + \\
&\quad +\frac{[(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)'](\|\ \mathbf{w}_I\ \|^2\|\ \mathbf{w}_V\ \|^2)'}{(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)^4}
\end{aligned}
\tag{B-70}
$$

Como $(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'$ é dado pela equação (B-55) e $(\|\ \mathbf{w}_I\ \|^2\|\ \mathbf{w}_V\ \|^2)'$ é determinado pela equação (B-56). Os termos desconhecidos de (B-70) são:

$$
\begin{aligned}
(\|\ \mathbf{w}_I\ \|^2\|\ \mathbf{w}_V\ \|^2)' &= 2\ \|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_I\ \|'\|\ \mathbf{w}_V\ \|^2 \\
&\quad +2\ \|\ \mathbf{w}_V\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|'\|\ \mathbf{w}_I\ \|^2
\end{aligned}
\tag{B-71}
$$

onde $\|\ \mathbf{w}_I\ \|'$ e $\|\ \mathbf{w}_I\ \|'$ são determinados pelas formulas do Apêndice **??**.

$$
\begin{aligned}
[(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)]' &= [(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)''(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)] + \\
&\quad +[(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'(\|\ \mathbf{w}_I\ \|\|\ \mathbf{w}_V\ \|)']
\end{aligned}
\tag{B-72}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'' &= \frac{\partial}{\partial x_1}[(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'] \\
&\quad \text{conforme a equação (B-55)} \\
&= (\mathbf{w}_I^T)''\mathbf{w}_V + (\mathbf{w}_I^T)'\mathbf{w}_V' + (\mathbf{w}_I')^T\mathbf{w}_V' + \mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V'' \\
&\quad \text{como } \mathbf{w}_V' = 0 \text{ conforme (B-58),temos:} \\
(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'' &= (\mathbf{w}_I^T)''\mathbf{w}_V
\end{aligned}
\tag{B-73}
$$

onde

$$
\mathbf{w}_I'' = \mathbf{p}'' = (-RS\cos(x_1k)k^2,\ -RS\sin(x_1k)k^2,\ 0)^T \tag{B-74}
$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\begin{aligned}[(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)(\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|)']' &= (\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)'(\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|)' + \\ &\quad (\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)(\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|)'' \end{aligned} \qquad \text{(B-75)}$$

$$\begin{aligned}(\| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|)'' &= \| \mathbf{w}_I \|''\| \mathbf{w}_V \| +2 \| \mathbf{w}_I \|'\| \mathbf{w}_V \|' \\ &\quad + \| \mathbf{w}_I \|\| \mathbf{w}_V \|'' \end{aligned} \qquad \text{(B-76)}$$

Substituindo as equações (B-76) e (B-55) em (B-75), substituindo as equações (B-73) e (B-56) em (B-72) e substituindo (B-75), (B-72) e (B-71) na equação (B-68) $\dfrac{\partial^2 D}{\partial x_1^2}$ está determinado. Voltando a equação (B-69), vamos determinar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1 \partial D} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial D}\right], \text{ como sabemos que} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial D} &= \frac{-1}{\sqrt{1-D^2}}, \text{ temos} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1 \partial D} &= \frac{-D.D'}{(1-D^2)^{-3/2}} \end{aligned} \qquad \text{(B-77)}$$

onde D' é dado pela equação (B-54). Logo determinamos $\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1^2}$. Voltando a equação (B-68), vamos determinar $\dfrac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_1 \partial \varepsilon}$.

$$\frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1 \partial \varepsilon} = \begin{cases} 0 & , \varepsilon \geq \Phi_m \text{ e } \varepsilon \leq \Phi_r \\ \frac{25}{\ln 10}\left[\dfrac{\varepsilon'' - (\varepsilon')^2}{\varepsilon^2}\right] & , \varepsilon \geq \Phi_r \text{ e } \varepsilon \leq 36.3 \\ 0 & , \varepsilon \geq 36.3 \text{ e } \varepsilon \leq 180 \end{cases} \qquad \text{(B-78)}$$

onde $\dfrac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$, Φ_m e Φ_r estão definidos em (B-49). ε' e ε'' são determinados por (B-52) e (B-69) respectivamente. Logo, determinamos $\dfrac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1 \partial \varepsilon}$ e substituindo as equações (B-78) e (B-69) em (B-68) $\dfrac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1^2}$ está determinado. Voltando a equação (B-67), falta determinar $\dfrac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1^2}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\frac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial G_3'(\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right]$$
$$= \frac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1 \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial G_3'(\eta)}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2}$$

Onde $\frac{\partial G_3'(\eta)}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial x_1}$ são conhecidos da seção B.3. Vamos desenvolver os outros termos.

$$\frac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1 \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial G_3'(\eta)}{\partial \eta}\right]$$
$$= \begin{cases} -24\eta.\eta' & \text{,se } 0 < \eta < 1.45 \\ -\dfrac{20.\eta'}{\log(10)\eta} & \text{,se } \eta > 1.45 \end{cases}$$

onde $\eta' = \frac{\partial \eta}{\partial x_1}$.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \eta}{\partial x_1}\right]$$

substituindo a equação (B-19) , temos:

$$= \frac{[\Phi(x_1)'\Phi_0(x_1) - \Phi_0(x_1)'\Phi(x_1)]'[\Phi_0(x_1)]^2}{[\Phi_0(x_1)]^4} + \frac{[\Phi(x_1)'\Phi_0(x_1) - \Phi_0(x_1)'\Phi(x_1)]2.\Phi_0(x_1).\Phi_0(x_1)'}{[\Phi_0(x_1)]^4}$$

Desenvolve-se

$$[\Phi(x_1)'\Phi_0(x_1) - \Phi_0(x_1)'\Phi(x_1)]' = \Phi(x_1)''\Phi_0(x_1) - \Phi_0(x_1)''\Phi(x_1) \tag{B-79}$$

Sendo assim, falta determinar $\Phi(x_1)''$ e $\Phi_0(x_1)''$.

$$\Phi(x_1)'' = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial x_1}\right]$$
$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial A}\frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial A}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} \tag{B-80}$$

Desenvolvendo os termos desconhecidos, tem-se:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial A} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{-1}{\sqrt{1-A^2}}\right] \\ &= \frac{A.A'}{(1-A^2)^{(3/2)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = &\frac{[(\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})'(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)']'(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)^2}{(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)^4} - \\ &\frac{[(\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})'(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)'][(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)^2]'}{(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)^4}\end{aligned}$$

onde

$$[(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)^2]' = 2.[(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)].(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)'$$

e $[(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)]'$ é conhecido da seção B.3.

Tem-se

$$\begin{aligned}&[(\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})'(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)']' \\ &= \\ &(\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})''(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)''\end{aligned}$$

Desenvolvendo $(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)''$, tem-se:

$$(\| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|)'' = \| \mathbf{b_p} \|''\| \mathbf{df}_{nmr} \| + 2. \| \mathbf{b_p} \|'\| \mathbf{df}_{nmr} \|' + \| \mathbf{b_p} \|\| \mathbf{df}_{nmr} \|''$$

onde $\| \mathbf{b_p} \|''$ é determinado da seguinte forma

$$\| \mathbf{b_p} \|'' = - \| \mathbf{b_p} \|^{-3} (\mathbf{b_p}^T\mathbf{b_p}')^2 + \| \mathbf{b_p} \|^{-1} (\| \mathbf{b_p}' \|^2 + \mathbf{b_p}^T\mathbf{b_p}'') \quad \text{(B-81)}$$

e $\| \mathbf{d}_{nmr} \|''$ é determinado analogamente.

Desenvolvendo $(\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})''$, tem-se:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[(\mathbf{b_p}^T\mathbf{df}_{nmr})'] = (\mathbf{b_p}^T)''\mathbf{df}_{nmr} + 2.(\mathbf{b_p}^T)'\mathbf{df}'_{nmr} + (\mathbf{b_p}^T)\mathbf{df}''_{nmr} \quad \text{(B-82)}$$

Determinando-se $\mathbf{df}''_{nmr}$ tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{df}''_{nmr} &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\mathbf{df}'_{nmr}] \\ &= \mathbf{TB}''\mathbf{c} - \mathbf{TB}''\mathbf{p} - 2\mathbf{TB}'\mathbf{p}' - \mathbf{TBp}''\end{aligned} \quad \text{(B-83)}$$

Vamos determinar $\mathbf{TB}''$.

$$\mathbf{TB}'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 n_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 n_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 n_3}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 m_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 m_2}{\partial x_1^2} & 0 \\ \frac{\partial^2 r_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 r_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 r_3}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} \quad \text{(B-84)}$$

Conforme desenvolvimento anterior, precisa-se apenas calcular as derivadas em relação as componentes n_i e as outras serão determinadas pela Regra da Cadeia.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 n_1}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{p_1' \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel -(p_1-b_1) \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel'}{\parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel^2}\right] \\ &= \frac{[p_1' \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel -(p_1-b_1) \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel']' \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel^2}{\parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel^4} + \\ &\quad \frac{[p_1' \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel -(p_1-b_1) \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel']2. \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel [\parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel]'}{\parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel^4}\end{aligned}$$

$$[p_1' \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel -(p_1-b_1) \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel']' = p_1'' \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel -(p_1-b_1) \parallel \mathbf{p}-\mathbf{b} \parallel''$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Desenvolvendo os termos desconhecidos separadamente, temos:

$$\begin{aligned} p_1'' &= \frac{\partial}{\partial x_1}[p_1'] = -RSk^2\cos(kx_1) \\ \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|'' &= -\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^{-2} . \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|' . [(p_1-b_1)(-RS\,k\sin(x_1k)) + \\ &+\ (p_2-b_2)(RS\,k\cos(x_1k))] + \\ &\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^{-1} \left[p_1'(-RS\,k\sin(x_1k)) + (p_1-b_1)(-RS\,k^2\cos(x_1k))\right. \\ &+\ \left. p_2'(RS\,k\cos(x_1k))(p_2-b_2)(-RS\,k^2\sin(x_1k))\right] \qquad \text{(B-85)} \end{aligned}$$

Desta forma $\dfrac{\partial^2 n_1}{\partial x_1^2}$ está determinado.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n_2}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{p_2' \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \| - (p_2-b_2) \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|'}{\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^2}\right] \\ &= \frac{[p_2' \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \| - (p_2-b_2) \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|']' \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^2}{\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^4} + \\ &\frac{[p_2' \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \| - (p_2-b_2) \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|']2. \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \| [\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|]'}{\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^4} \end{aligned}$$

$$[p_2' \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \| - (p_2-b_2) \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|']' = p_2'' \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \| - (p_2-b_2) \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|''$$

Desenvolvendo separadamente, temos:

$$p_2'' = \frac{\partial}{\partial x_1}[p_2'] = -RSk^2\sin(kx_1)$$

Desta forma $\dfrac{\partial^2 n_2}{\partial x_1^2}$ está determinado. Vamos determinar $\dfrac{\partial^2 n_3}{\partial x_1^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 n_3}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{-(p_3-b_3) \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|'}{\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^2}\right] \\ &= \frac{-(p_3-b_3) \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|'' \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^2}{\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^4} + \\ &\frac{-(p_3-b_3) \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|'\ 2. \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \| \| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|'}{\| \mathbf{p}-\mathbf{b} \|^4} \end{aligned}$$

Logo, o termo $\dfrac{\partial^2 n_3}{\partial x_1^2}$ está determinado. As derivadas segunda das componentes do vetor $\mathbf{m}$ são determinadas por:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 m_1}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial m_1}{\partial x_1}\right] \\
&= \frac{[-n_2'(n_1^2+n_2^2)^{1/2} + n_2'\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]']'(n_1^2+n_2^2)}{(n_1^2+n_2^2)^2} \\
& \quad \frac{[-n_2'(n_1^2+n_2^2)^{1/2} + n_2'\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]'](n_1^2+n_2^2)'}{(n_1^2+n_2^2)^2}
\end{aligned}
$$

$$
(n_1^2+n_2^2)' = 2.n_1.n_1' + 2.n_2.n_2'
$$

$$
\left[-n_2'(n_1^2+n_2^2)^{1/2} + n_2\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]'\right]' = -n_2''(n_1^2+n_2^2)^{1/2} + n_2\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]'' \quad \text{(B-86)}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]'' &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right](n_1.n_1' + n_2.n_2')\right] \\
&= \left[(n_1^2+n_2^2)^{-1/2}\right]'(n_1.n_1' + n_2.n_2') + \\
& \quad \left[(n_1^2+n_2^2)^{-1/2}\right](n_1'^2 + n_1.n_1'' + n_2.n_2'' + n_2'^2)
\end{aligned}
\quad \text{(B-87)}
$$

onde $\left[(n_1^2+n_2^2)^{-1/2}\right]'$, n_1'' e n_2'' são conhecidos.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 m_2}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{n_1'(n_1^2+n_2^2)^{1/2} - n_1'\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]'}{(n_1^2+n_2^2)}\right] \\
&= \frac{\left[n_1'(n_1^2+n_2^2)^{1/2} - n_1'\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]'\right]'(n_1^2+n_2^2)}{(n_1^2+n_2^2)^2} \\
& \quad \frac{\left[n_1'(n_1^2+n_2^2)^{1/2} - n_1'\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]'\right](n_1^2+n_2^2)'}{(n_1^2+n_2^2)^2}
\end{aligned}
$$

onde $\left[n_1'(n_1^2+n_2^2)^{1/2} - n_1'\left[(n_1^2+n_2^2)^{1/2}\right]'\right]'$ é desenvolvido analogamente ao desenvolvimento da equação (B-86). Para determinar todos os termos que compõem a matriz $\frac{\partial \mathbf{TB}}{\partial x_1}$ falta definir as derivadas segunda das componentes do vetor $\mathbf{r}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r_1}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right] = -m_2'' n_3 - m_2' n_3' - m_2 n_3'' \\
\frac{\partial^2 r_2}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial r_2}{\partial x_1}\right] = m_1'' n_3 + 2m_1' n_3' + m_1 n_3'' \\
\frac{\partial^2 r_3}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial r_3}{\partial x_1}\right] = m_2'' n_1 + 2.m_2' n_1' + m_2 n_1'' = -m_1 n_2'' - 2.m_1' n_2' - m_1'' n_2
\end{aligned}
$$

Como todos os termos acima são conhecidos, logo **TB** está determinado. Pela equação (B-74) $\mathbf{p}''$ também está determinado. Substituindo as equações (B-25), (B-15), (B-84) e (B-74) em (B-83) $\mathbf{df}''_{nmr}$ está determinado. Voltando a equação (B-82), falta determinar $\mathbf{bp}''$. Utilizando a equação (B-23)obtem-se:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b_p}'' &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\mathbf{b_p}'] = 2\mathbf{TB}''\mathbf{c} - 2\mathbf{TB}''\mathbf{p} - 2\mathbf{TB}'\mathbf{p}' - \mathbf{TB}''\mathbf{E_T} \\
&-\mathbf{TB}''\beta\mathbf{p} - 2.\mathbf{TB}'\beta'\mathbf{p} - 2.\mathbf{TB}'\beta\mathbf{p}' - \mathbf{TB}\beta''\mathbf{p} \\
&-2\mathbf{TB}\beta'\mathbf{p}' - \mathbf{TB}\beta\mathbf{p}'' + \mathbf{TB}''\beta\mathbf{E_T} + 2.\mathbf{TB}'\beta'\mathbf{E_T} \\
&+\mathbf{TB}\beta''\mathbf{E_T}
\end{aligned} \tag{B-88}
$$

O termo β'' é o único que falta determinar.

$$
\begin{aligned}
\beta'' &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\beta'] = \frac{[(\mathbf{c}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})]''[(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})][(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})]^2}{(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})^4} \\
&-\frac{[(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})]''[(\mathbf{c}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})][(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})]^2}{(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})^4} \\
&-\frac{2[(\mathbf{c}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})]'[(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})][(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})]'}{(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})^4} \\
&+\frac{2[(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})]'[(\mathbf{c}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})][(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})][(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})]'}{(\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n})^4}
\end{aligned}
$$

onde:

$$
[\mathbf{c}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n}]'' = \mathbf{c}^T\mathbf{n}'' - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n}''
$$

$$
[\mathbf{p}^T\mathbf{n} - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n}]'' = (\mathbf{p}^T)''\mathbf{n} + 2(\mathbf{p}^T)'\mathbf{n}' + \mathbf{p}^T\mathbf{n}'' - \mathbf{E_T}^T\mathbf{n}''
$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Desta forma β'' está determinado e voltando a equação (B-88), $\mathbf{b_p}''$, conseqüentemente $\dfrac{\partial A(\mathbf{x})^2}{\partial x_1^2}$ e $\dfrac{\partial \Phi(\mathbf{x})^2}{\partial x_1^2}$ estão determinados. Voltando a equação (B-79) determina-se $\dfrac{\partial \Phi_0(\mathbf{x})^2}{\partial x_1^2}$.

$$\Phi_0(x_1)'' = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial B}\frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial B}\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2} \tag{B-89}$$

Desenvolvendo os termos desconhecidos, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1 \partial B} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{-1}{\sqrt{1-B^2}}\right] \\ &= \frac{B.B'}{(1-B^2)^{(3/2)}} \end{aligned} \tag{B-90}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2} = & \frac{[(\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})'(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)']'(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)^2}{(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)^4} \\ & \frac{[(\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})'(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)'][(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)^2]'}{(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)^4} \end{aligned} \tag{B-91}$$

onde

$$[(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)^2]' = 2.[(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)].(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)'$$

e $[(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)]'$ é conhecido da seção B.3. Tem-se, também, que:

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})'(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)']' \\ & = \\ & (\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})''(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|) - (\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)'' \end{aligned}$$

Desenvolvendo $(\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)''$, tem-se:

$$\begin{aligned} (\| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|)'' &= \frac{\partial}{\partial x_1}[\| \mathbf{b_{po}} \|' \| \mathbf{df}_{nmr} \| + \| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|'] \\ &= \| \mathbf{b_{po}} \|'' \| \mathbf{df}_{nmr} \| + 2. \| \mathbf{b_{po}} \|' \| \mathbf{df}_{nmr} \|' + \| \mathbf{b_{po}} \| \| \mathbf{df}_{nmr} \|'' \end{aligned}$$

onde $\| \mathbf{b_{po}} \|''$ e $\| \| \mathbf{df}_{nmr} \|''$ são determinados analogamente conforme

(B-81).

Desenvolvendo $(\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})''$, tem-se:

$$(\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})'' = \frac{\partial}{\partial x_1}[(\mathbf{b_{po}}^T\mathbf{df}_{nmr})'] = (\mathbf{b_{po}}^T)''\mathbf{df}_{nmr} + 2.(\mathbf{b_{po}}^T)'\mathbf{df}'_{nmr} + (\mathbf{b_{po}}^T)\mathbf{df}''_{nmr} \qquad \text{(B-92)}$$

Falta determinar $\mathbf{b_{po}}''$, uma vez que $\mathbf{df}''_{nmr}$ é determinado pela equação (B-83).

$$\begin{aligned} \mathbf{b_{po}}'' &= \mathbf{df}''_{nmr} + \mathbf{p_{ol}}'' && \text{(B-93)} \\ \mathbf{p_{ol}}'' &= [0,\ -e_M \cos\gamma \frac{\partial[\delta' \sin\delta]}{\partial x_1} - e_m \sin\gamma \frac{\partial[\delta' \cos\delta]}{\partial x_1}, \\ &\quad -e_M \sin\gamma \frac{\partial[\delta' \sin\delta]}{\partial x_1} + e_m \cos\gamma \frac{\partial[\delta' \cos\delta]}{\partial x_1}]^T && \text{(B-94)} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\delta' \sin\delta]}{\partial x_1} &= \cos(\delta)(\delta')^2 + \sin(\delta)\delta'' \\ \frac{\partial[\delta' \cos\delta]}{\partial x_1} &= -\sin(\delta)(\delta')^2 + \cos(\delta)\delta'' \end{aligned}$$

Pode-se mostrar que:

$$\delta'' = (1 - C^2)^{-3/2}.C.2C' + \delta'.\hbar \qquad \text{(B-95)}$$

onde C e C' são dados por (B-46) e (B-47). A quantidade $\hbar$ é dada por

$$\hbar = \frac{(a''b - ab'')b - (a'b - ab')2b}{b^3}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{E}(\mathbf{rot}\ .\mathbf{bp}).\mathbf{m} \\ b &= \parallel \mathbf{E}(\mathbf{rot}\ .\mathbf{bp}) \parallel \end{aligned}$$

todos os termos acima são conhecidos bem como suas derivadas.

Substituindo as equações (B-91) e (B-90) em (B-89) $\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_1^2}$ está determinado.

Substituindo as equações (B-80) e (B-89) em (B-79) $\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}$ e conseqüentemente $\frac{\partial^2 G'_3}{\partial x_1^2}$ também está.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Voltando a equação (B-65), falta analisar a derivada segunda do *uplink*.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[(C/I)_u] = \ln(10)\left[\ln(10)\left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{dB}}\right]\frac{1}{10}\left[\frac{\partial (C/I)_u|_{dB}}{\partial x_1}\right]^2 + \left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{dB}}\right]\frac{\partial^2 (C/I)_u|_{dB}}{\partial x_1^2}\right]$$

O termo da equação acima que é desconhecido é: $\frac{\partial^2 (C/I)_u|_{dB}}{\partial x_1^2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(C/I)_u|_{dB} = \frac{\partial^2 G_1'(0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G_2(\phi)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 l_{su}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 G_1'(\theta)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 G_2(\rho)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 l_{su'}}{\partial x_1^2}$$

Sabe-se que os termos: $\frac{\partial^2 G_1'(0)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 G_2(\phi)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 G_2(\rho)}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 l_{su}}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 l_{su'}}{\partial x_1^2}$ são nulos pois suas derivadas primeiras também são. Falta apenas calcular o termo $\frac{\partial^2 G_1'(\theta)}{\partial x_1^2}$. Esse termo é determinado de forma análoga ao $\frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1^2}$ com as mesmas ressalvas usadas nas derivadas primeiras. Desta forma $\frac{\partial^2 [(C/I)_u]}{\partial x_1^2}$ está determinado. E voltando a equação (B-65) $\Lambda''(\mathbf{x})$ também está e conseqüentemente $\frac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1^2}$ está determinado. Observa-se pelo Apêndice B.2 que $\frac{\partial^2 G_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_2^2}$ também está determinado, pois possui a mesma expressão analítica de $\frac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1^2}$ se trocarmos as informações do sistema interferente com as do sistema vítima. Para completar o conjunto de derivadas segunda da Razão Portadora-Interferência ainda falta determinar $\frac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_2^2}$. G_{21} está definido na equação (B-5). Seja $\Lambda(\mathbf{x})$ definido por (B-6). Sendo assim, a variação em função do sistema vítima:

$$\frac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} = \frac{10}{\ln 10}\left[\frac{\Lambda(\mathbf{x})''\Lambda(\mathbf{x}) - (\Lambda(\mathbf{x})')^2}{\Lambda(\mathbf{x})^2}\right]$$

Todos os termos acima são conhecidos, falta determinar $\Lambda(\mathbf{x})''$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$
\begin{aligned}
\Lambda(\mathbf{x})'' &= \frac{\partial}{\partial x_2}[\Lambda(\mathbf{x})'] \\
&= -2\Lambda(\mathbf{x})^3\Lambda(\mathbf{x})'[(C/I)_d]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_2} - 2\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_d]^{-3}\left[\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_1}\right]^2 \\
&\quad +\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_d]^{-2}\frac{\partial^2[(C/I)_d]}{\partial x_2^2} - 2\Lambda(\mathbf{x})^3\Lambda(\mathbf{x})'[(C/I)_u]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_2} \\
&\quad -2\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_u]^{-3}\left[\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_2}\right]^2 + \Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_u]^{-2}\frac{\partial^2[(C/I)_u]}{\partial x_2^2}
\end{aligned}
$$

Os únicos termos da equação acima que não são conhecidos são: $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[(C/I)_d]$ e $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[(C/I)_u]$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[(C/I)_d] &= \ln(10)\left[\ln(10)10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{dB}}\frac{1}{10}\left[\frac{\partial(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_2}\right]^2 + \right. \\
&\quad \left. 10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{dB}}\frac{\partial^2(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_2^2}\right]
\end{aligned}
$$

O termo da equação acima que é desconhecido é: $\frac{\partial^2(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_2^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(C/I)_d|_{dB} &= +\frac{\partial^2 G_3(\gamma)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G_4(0)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 l_{sd}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G_3'(0)}{\partial x_2^2} \\
&- \frac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 l_{sd'}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 G_3(0)}{\partial x_2^2}
\end{aligned}
$$

Sabe-se que os termos: $\frac{\partial^2 G_3(0)}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 G_3'(0)}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 G_4(0)}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_2^2}$, $\frac{\partial^2 l_{sd'}}{\partial x_2^2}$ são nulos pois suas derivadas primeiras também são.

Pela geometria do problema, tem-se que a forma de determinar de $\frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_2^2}$ é igual a forma de determinar $\frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_2^2}$ com a ressalva que agora $\mathbf{w}_I' = 0$, $\mathbf{w}_V' = -\mathbf{p}_V'$ e $\mathbf{p}_V$ é o vetor posição do satélite vítima, assim como foi feito para as primeiras derivadas.

O desenvolvimento de $\frac{\partial^2 l_{sd}}{\partial x_2^2}$ é igual ao desenvolvimento de $\frac{\partial^2 l_{sd'}}{\partial x_1^2}$ sendo que $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Terrena no sistema vítima, $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite vítima, ou seja, x_1 é substituído por x_2.

O desenvolvimento de $\frac{\partial^2 G_3(\gamma)}{\partial x_2^2}$ é análogo ao desenvolvimento de $\frac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1^2}$. Sendo as informações do sistema interferente substituídas pelo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

sistema vítima.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[(C/I)_u] = \ln(10)\left[\ln(10)\left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{dB}}\right]\frac{1}{10}\left[\frac{\partial (C/I)_u|_{dB}}{\partial x_2}\right]^2 + \left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{dB}}\right]\frac{\partial^2 (C/I)_u|_{dB}}{\partial x_2^2}\right]$$

O termo da equação acima que é desconhecido é: $\dfrac{\partial^2 (C/I)_u|_{dB}}{\partial x_2^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(C/I)_u|_{dB} &= \frac{\partial^2 G_1'(0)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G_2(\phi)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 l_{su}}{\partial x_2^2} \\ &- \frac{\partial^2 G_1'(\theta)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 G_2(\rho)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 l_{su'}}{\partial x_2^2}\end{aligned}$$

Vamos analisar os termos acima separadamente. Sabe-se que o termo: $\dfrac{\partial^2 G_1'(0)}{\partial x_2^2}$ é nulo pois $G_1'(0)$ é constante.

O desenvolvimento de $\dfrac{\partial^2 l_{su}}{\partial x_2^2}$ é análogo ao desenvolvimento de $\dfrac{\partial^2 l_{sd'}}{\partial x_1^2}$ sendo que $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Transmissora no sistema vítima e $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite vítima.

Já o desenvolvimento de $\dfrac{\partial^2 l_{su'}}{\partial x_2^2}$ é também análogo ao desenvolvimento de $\dfrac{\partial^2 l_{sd'}}{\partial x_1^2}$ sendo que $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Transmissora no sistema interferente e $\mathbf{p}$ é o vetor posição do satélite vítima.

A forma de determinar de $\dfrac{\partial^2 G_1'(\theta)}{\partial x_2^2}$ é análoga a desenvolvida para $\dfrac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1^2}$ com a ressalva que $\mathbf{w}_I' = 0$, $\mathbf{w}_V' = -\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}_V$ é o vetor posição do satélite vítima e $\mathbf{E_T}$ é a posição da Estação Terrena transmissora do sistema interferente.

O cálculo de $\dfrac{\partial^2 G_2(\rho)}{\partial x_2^2}$ é análogo ao cálculo de $\dfrac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1^2}$. Sendo que as informações do sistema interferente são substituídas pelo sistema vítima e vice-versa. Além disso $\mathbf{b_p}$ e $\mathbf{df}_{nmr}$ possuem sinais opostos ao no caso anterior.

Já o cálculo de $\dfrac{\partial^2 G_2(\phi)}{\partial x_2^2}$ é também análogo ao cálculo de $\dfrac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1^2}$. E além das informações do sistema interferente serem substituídas pelo sistema vítima e vice-versa, $\mathbf{b_p}$ e $\mathbf{df}_{nmr}$ possuem sinais opostos ao do caso anterior,$\mathbf{E_T}$ é a Estação Terrena Transmissora do sistema vítima.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Desta forma $\dfrac{\partial^2[(C/I)_u]}{\partial x_2^2}$ está determinado. Sendo assim, $\dfrac{\partial^2\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_2^2}$ está determinado e conseqüentemente $\dfrac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_2^2}$ está resolvida. Observa-se pelo Apêndice B.2 que a $\dfrac{\partial^2 G_{12}(\mathbf{x})}{\partial x_1^2}$ também está determinado, pois possui a mesma expressão analítica de $\dfrac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_2^2}$ se trocarmos as informações do sistema interferente com as do sistema vítima. Para Concluir o conjunto de segundas derivadas da Razão Portadora-Interferente precisamos ainda definir as derivadas mistas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_{21}(\mathbf{x})}{\partial x_1\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial G_{12}}{\partial x_2}\right] = \frac{10}{\ln 10}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{x})}\frac{\partial\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right]\\ &= \frac{10}{\ln 10}\left[\frac{1}{\Lambda(\mathbf{x})^2}\left(\frac{\partial^2\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1\partial x_2}\Lambda(\mathbf{x}) - \frac{\partial\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1}\frac{\partial\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right)\right] \quad \text{(B-96)}\end{aligned}$$

Todos os termos acima são conhecidos, falta determinar $\dfrac{\partial^2\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1\partial x_2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right]\\ &= -2\Lambda(\mathbf{x})^3\frac{\partial\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1}[(C/I)_d]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_2} - 2\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_d]^{-3}\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_1}\frac{\partial[(C/I)_d]}{\partial x_2}\\ &\quad +\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_d]^{-2}\frac{\partial^2[(C/I)_d]}{\partial x_1\partial x_2} - 2\Lambda(\mathbf{x})^3\frac{\partial\Lambda(\mathbf{x})}{\partial x_1}[(C/I)_u]^{-2}\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_2}\\ &\quad -2\Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_u]^{-3}\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_2}\frac{\partial[(C/I)_u]}{\partial x_1} + \Lambda(\mathbf{x})^2[(C/I)_u]^{-2}\frac{\partial^2[(C/I)_u]}{\partial x_1\partial x_2} \quad \text{(B-97)}\end{aligned}$$

Os únicos termos da equação acima que não são conhecidos são: $\dfrac{\partial^2[(C/I)_d]}{\partial x_1\partial x_2}$ e $\dfrac{\partial^2[(C/I)_u]}{\partial x_1\partial x_2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2[(C/I)_d]}{\partial x_1\partial x_2} &= \ln(10)\left[\ln(10)10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{dB}}\frac{1}{10}\frac{\partial(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_2}\frac{\partial(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_1}\right.\\ &\quad \left. + 10^{\frac{1}{10}(C/I)_d|_{dB}}\frac{\partial^2(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_1\partial x_2}\right]\end{aligned}$$

O termo da equação acima que é desconhecido é: $\dfrac{\partial^2(C/I)_d|_{dB}}{\partial x_1\partial x_2}$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (C/I)_d|_{dB}}{\partial x_1 \partial x_2} &= +\frac{\partial^2 G_3(\gamma)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 G_4(0)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 l_{sd}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 G_3'(0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &- \frac{\partial^2 G_3'(\eta)}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 l_{sd'}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 G_3(0)}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad \text{(B-98)}\end{aligned}$$

Todos os termos do lado direito da equação (B-98) são nulos exceto o termo $\frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1 \partial x_2}$. Pela geometria do problema, percebe-se que isso ocorre pois apenas esse termo depende da posição tanto do satélite vítima x_2 quanto do satélite interferente x_1. Vamos desenvolver este termo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_4}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial G_4(\varepsilon)}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial G_4}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}\right] \\ &= \frac{\partial^2 G_4}{\partial x_1 \partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial G_4}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad \text{(B-99)}\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial^2 G_4}{\partial x_1 \partial \varepsilon}$ é dado por (B-78). O termo desconhecido é: $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial x_2}\right] \\ &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1 \partial D}\frac{\partial D}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial D}\frac{\partial^2 D}{\partial x_2 \partial x_1} \qquad \text{(B-100)}\end{aligned}$$

onde D é definido pela equação (B-51). $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_1 \partial D}$ é conhecido pela equação (B-77). O termo desconhecido é $\frac{\partial^2 D}{\partial x_2 \partial x_1}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial D(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right] \\ &= \frac{1}{(\| \mathbf{w}_I \|^4 \| \mathbf{w}_V \|^4)}\left[\left(\frac{\partial^2(\mathbf{w}_I^T \mathbf{w}_V)}{\partial x_1 \partial x_2}(\| \mathbf{w}_I \| \| \mathbf{w}_V \|)\right.\right. \\ &+ \frac{\partial(\mathbf{w1}^T \mathbf{w}_V)}{\partial x_2}\frac{\partial(\| \mathbf{w}_I \| \| \mathbf{w}_V \|)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\mathbf{w1}^T \mathbf{w}_V)}{\partial x_1}\frac{\partial(\| \mathbf{w}_I \| \| \mathbf{w}_V \|)}{\partial x_2} \\ &- \left.(\mathbf{w1}^T \mathbf{w}_V)\frac{\partial^2(\| \mathbf{w}_I \| \| \mathbf{w}_V \|)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)(\| \mathbf{w}_I \|^2 \| \mathbf{w}_V \|^2) \\ &+ \left.\left(-\frac{\partial(\mathbf{w}_I^T \mathbf{w}_V)}{\partial x_2}(\| \mathbf{w}_I \| \| \mathbf{w}_V \|) + (\mathbf{w1}^T \mathbf{w}_V)\frac{\partial(\| \mathbf{w}_I \| \| \mathbf{w}_V \|)}{\partial x_2}\right)\frac{\partial \| \mathbf{w}_I \|^2 \| \mathbf{w}_V \|^2}{\partial x_1}\right]\end{aligned}$$

Desenvolvendo os termos desconhecidos, temos:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

$$\frac{\partial^2(\mathbf{w}_I^T\mathbf{w}_V)}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mathbf{w}_I^T\frac{\partial \mathbf{w}_V}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial \mathbf{w}_I^T}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{w}_V}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2(\parallel \mathbf{w}_I^T \parallel . \parallel \mathbf{w}_V) \parallel)}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\parallel \mathbf{w}_I^T \parallel \frac{\partial \parallel \mathbf{w}_V \parallel}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial \parallel \mathbf{w}_I^T \parallel}{\partial x_1}\frac{\partial \parallel \mathbf{w}_V \parallel}{\partial x_2}$$

onde $\frac{\partial \parallel \mathbf{w}_I^T \parallel}{\partial x_1} = \mathbf{p}_I$ e $\frac{\partial \parallel \mathbf{w}_V^T \parallel}{\partial x_1} = \mathbf{p}_V$. Sendo assim $\frac{\partial^2 D}{\partial x_1\partial x_2}$ está determinado. Voltando a equação (B-100) $\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_1\partial x_2}$ também está determinado e ao verificar a equação (B-99) $\frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1\partial x_2}$ está determinado . Por fim, vamos analisar o *uplink*.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2[(C/I)_u]}{\partial x_1\partial x_2} &= \ln(10)\left[\ln(10)\left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{db}}\right]\frac{1}{10}\frac{\partial(C/I)_u|_{dB}}{\partial x_2}\frac{\partial(C/I)_u|_{dB}}{\partial x_1} + \right.\\ &\left. + \left[10^{\frac{1}{10}(C/I)_u|_{dB}}\right]\frac{\partial^2(C/I)_u|_{dB}}{\partial x_1\partial x_2}\right]\end{aligned}$$

O termo da equação acima que é desconhecido é:$\frac{\partial(C/I)_u|_{dB}}{\partial x1\partial x_2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(C/I)_u|_{dB}}{\partial x_1\partial x_2} &= \frac{\partial^2 G_1'(0)}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2 G_2(\phi)}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2 l_{su}}{\partial x_1\partial x_2}\\ &- \frac{\partial^2 G_1'(\theta)}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2 G_2(\rho)}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2 l_{su'}}{\partial x_1\partial x_2}\end{aligned} \quad \text{(B-101)}$$

Da mesma forma do que no *downlink* Todos os termos do lado direito da equação (B-101) são nulos exceto o termo $\frac{\partial^2 G_1'(\theta)}{\partial x_1\partial x_2}$. Percebe-se que isso ocorre pois pela geometria do problema apenas esse termo depende da posição tanto do satélite vítima x_2 quanto do satélite interferente x_1. O desenvolvimento de $\frac{\partial^2 G_1'(\theta)}{\partial x_1\partial x_2}$ é igual ao de $\frac{\partial^2 G_4(\varepsilon)}{\partial x_1\partial x_2}$ com a ressalva de que tanto $\mathbf{w}_I$,$\mathbf{w}_V$, $\mathbf{w}_I'$, $\mathbf{w}_V'$,$\mathbf{w}_I''$ e $\mathbf{w}_V''$ possuem sinais opostos ao do caso anterior.

Dessa forma, voltando as equações (B-97) e (B-96) $\frac{\partial G_{21}}{\partial x_1\partial x_2}$ está determinado e por simetria $\frac{\partial G_{21}}{\partial x_2\partial x_1}$ possui a mesma expressão e o mesmo valor. Pelas analogias no início deste apêndice termos $\frac{\partial G_{12}}{\partial x_1\partial x_2}$ e $\frac{\partial G_{12}}{\partial x_2\partial x_1}$ também estão definidos. Sendo assim todos os termos da Matriz Hessiana para o caso de 2 sistemas estão definidos. No Apêndice B.1 juntamente com

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

este pode-se estender estes desenvolvimentos para o caso de n sistemas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

C
Determinação das ordenações possíveis

Conforme apresentado no Capítulo 4 com a pre-fixação da ordem dos sistemas na órbita o problema de otimização se torna menos complexo, porém, o número de possíveis ordens é muito grande. Entretanto, muitas dessas ordens não são viáveis devido a restrições de arco de serviço a serem satisfeitas. Assim, dado um sistema qualquer, algumas das posições na ordenação não podem ser ocupadas por seu satélite, reduzindo, assim, o número de ordenações possíveis (isto é, que respeite as restrições de arco de serviço).

Sendo assim, foi desenvolvido um algoritmo que, dado um sistema qualquer, determina as posições que o satélite do sistema pode ocupar na órbita. Nesse algoritmo os sistemas são ordenados pelo limite inferior do arco de serviço e define-se uma Matriz de Relacionamentos Q baseada na existência ou não de interseções entre os arcos de serviço. Esta matriz é definida da seguinte forma: o elemento $q_{i,j} = 1$ se o arco de serviço do i-ésimo sistema possui interseção com o arco de serviço j-ésimo sistema e zero caso contrário.

Por essa regra percebe-se que todos os elementos da diagonal principal são sempre unitários. Esta matriz é simétrica e quadrada de dimensão $n \times n$. Em sua forma mais simples, a matriz Q é diagonal. Significando que nenhum arco de serviço possui interseção com outro e conseqüentemente apenas uma ordem é permitida. A forma mais complexa da matriz Q é quando todos os arcos de serviço possuem interseções entre si. Assim a matriz Q é unitária e $n!$ ordens são possíveis.

Essa matriz pode ser interpretada de duas formas:

– Dado o i-ésimo sistema identifica-se quais posições o sistemas i pode ocupar.

– Dada a k-ésima posição identifica-se quais sistemas podem ocupar esta posição.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA

Desta forma, dada a i-ésima linha determina-se

$$
\begin{aligned}
A_i &= \sum_{k=1}^{i-1} q_{ik} \\
&\quad i = 1, ..., n \\
B_i &= \sum_{k=i+1}^{n} q_{ik} \\
&\quad i = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

onde A_i e B_i representam, respectivamente, a quantidade de sistemas que podem ocupar uma posição anterior a do sistema i e a quantidade de sistemas que podem ocupar uma posição depois de i.

Sendo assim o i-ésimo sistema pode ocupar, por construção, a i-ésima posição e, ainda, as seguintes posições P_i:

$$i - A_i \quad < \quad P_i < i + B_i$$

A k-ésima posição pode ser ocupada pelos sistemas onde $i - A_i \leq k \leq i + B_i$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310459/CA