

3 Modelo Matemático

3.1 Caracterização da Geometria Envolvida

Os níveis de interferência produzidos ou experimentados pelos diversos sistemas que compartilham a órbita de satélites geoestacionários e que operam em uma mesma faixa de frequências dependem das características técnicas dos sistemas e, em sua grande parte, da geometria envolvida no problema, ou seja, dos espaçamentos orbitais relativos entre os satélites, das localizações das estações terrenas e das direções para as quais suas antenas apontam. Sendo assim, a geometria e a notação utilizada constituem pontos importantes para a definição do modelo matemático que será utilizado.

A Figura 3.1 ilustra a geometria utilizada na definição da Razão Portadora Interferente de entrada única e agregada, as quais constituem indicadores dos níveis de interferência que afetam cada um dos sistemas.

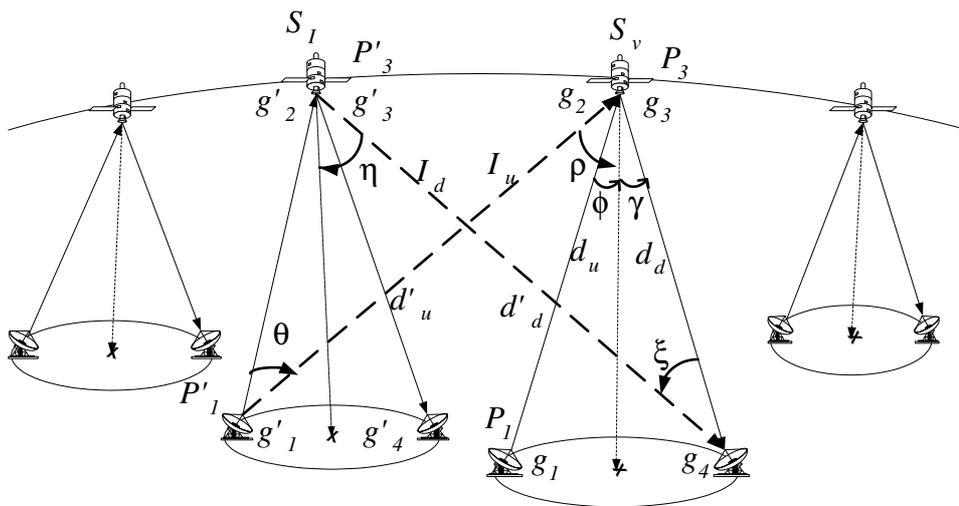


Figura 3.1: Geometria envolvida no cálculo da Razão Portadora Interferente. As setas pontilhadas ilustram a direção de apontamento da antena do satélite.

Na Figura 3.1, as quantidades assinaladas superiormente com o sinal \prime descrevem as características do sistema interferentes enquanto que as quantidades sem o sinal \prime estão associadas ao sistema vítima. Nesta mesma figura, P_1 representa a potência nos terminais das antenas da estação terrena de transmissão, g_1 representa o ganho da antena da estação terrena de transmissão, g_2 representa o ganho da antena receptora do satélite, P_3 representa a potência nos terminais da antena de transmissão do satélite, g_3 representa o ganho da antena de transmissão do satélite e g_4 representa o ganho da antena da estação terrena receptora. Além disso, I_d e I_u representam a interferência no lance de descida (down-link) e no lance de subida (up-link), respectivamente. Note que I_d , I_u , θ , η , ρ , ξ dependem das posições dos satélites e das estações terrenas. Os ângulos θ , η , ρ , ξ são definidos mais adiante.

Considerando os enlaces interferente e interferido ilustrados na Figura 3.1 a razão C/I de entrada única no terminal da antena de recepção do satélite da rede interferida S_V (Razão Portadora-Interferente no lance de subida) se escreve

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{up} = \frac{\frac{P_1 g_1(0) g_2(\phi)}{\ell_{su}}}{\frac{P'_1 g'_1(\theta) g_2(\rho)}{\ell_{su'}}} = \frac{P_1 g_1(0) g_2(\phi) \ell_{su'}}{P'_1 g'_1(\theta) g_2(\rho) \ell_{su}} \quad (3-1)$$

onde P_1 e P'_1 representam respectivamente as potências nos terminais das antenas das estações terrenas transmissoras das redes interferidas e interferentes. Os ganhos das antenas que aparecem em (3-1) correspondem a: $g'_1(\theta)$ o ganho da antena da estação terrena transmissora do sistema interferente numa direção que forma um ângulo θ com a direção de apontamento da antena, $g_1(0)$ o ganho máximo da antena da estação terrena transmissora do sistema interferido, $g_2(\phi)$ o ganho da antena receptora do satélite da rede interferida numa direção que forma um ângulo ϕ com a direção de apontamento do feixe e $g_2(\rho)$ o ganho da antena receptora do satélite da rede interferida numa direção que forma um ângulo ρ com a direção de apontamento do feixe.

A razão C/I de entrada única no terminal da antena da estação terrena receptora da rede interferidas (Razão Portadora-Interferência no lance de

descida) se escreve:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{down} = \frac{\frac{P_3 g_4(0) g_3(\gamma)}{\ell_{sd}}}{\frac{P'_3 g'_3(\eta) g_4(\xi)}{\ell_{sd'}}} = \frac{P_3 g_3(\gamma) g_4(0) \ell_{sd'}}{P'_3 g'_3(\eta) g_4(\xi) \ell_{sd}} \quad (3-2)$$

onde P_3 e P'_3 representam respectivamente as potências nos terminais das antenas transmissoras dos satélites das redes interferidas e interferentes. Os ganhos das antenas que aparecem em (3-2) correspondem a: $g'_3(\eta)$ o ganho da antena transmissora do satélite interferente numa direção que forma um ângulo η com a direção de apontamento do feixe, $g_4(\xi)$ o ganho da antena da estação terrena receptora numa direção que forma um ângulo ξ com a direção de apontamento da antena, $g_4(0)$ o ganho máximo da antena da estação terrena receptora e $g_3(\gamma)$ o ganho da antena transmissora do satélite da rede interferida numa direção que forma um ângulo γ com a direção de apontamento.

Em (3-1) e (3-2) ℓ_{su} e ℓ_{sd} representam as perdas de espaço livre associadas aos percursos do sinal desejado nos lances de subida e descida, respectivamente. As quantidades $\ell_{su'}$ e $\ell_{sd'}$ representam as perdas de espaço livre associadas aos percursos da interferência nos lances de subida e descida, respectivamente. Estas perdas são calculadas utilizando-se a expressão:

$$\ell = \left(\frac{4\pi d \cdot f_u}{3}\right)^2 \cdot 10^8$$

onde d é a distância percorrida pelo sinal, dada em Km e f_u é a frequência utilizada na transmissão, dada em GHz.

A partir de (3-1) e (3-2) obtém-se a Razão Portadora-Interferência total no terminal da antena da estação terrena receptora da rede interferida, dada por:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{total} = \left[\frac{P'_1 g'_1(\theta) g_2(\rho) \ell_{su}}{P_1 g_1(0) g_2(\phi) \ell_{su'}} + \frac{P'_3 g'_3(\eta) g_4(\xi) \ell_{sd}}{P_3 g_3(\gamma) g_4(0) \ell_{sd'}} \right]^{-1} \quad (3-3)$$

A expressão em (3-3) fornece a razão entre a potência da portadora desejada e da interferência total (lances de subida e descida). Uma outra forma de expressar esta razão seria:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{total} = \left[\frac{E'_1 g'_1(\theta) g_2(\rho) \ell_{su}}{E_1 g_1(0) g_2(\phi) \ell_{su'}} + \frac{E'_3 g'_3(\eta) g_4(\xi) g_3(0) \ell_{sd}}{E_3 g_3(\gamma) g_4(0) g'_3(0) \ell_{sd'}} \right]^{-1} \quad (3-4)$$

onde:

$$\begin{aligned} E_1 &= P_1 g_1(0) \\ E'_1 &= P'_1 g'_1(0) \\ E_3 &= P_3 g_3(0) \\ E'_3 &= P'_3 g'_3(0) \end{aligned} \quad (3-5)$$

E_1 representa a potência isotrópica efetiva radiada (*effective isotropic radiated power*) pela antena da estação terrena transmissora do sistema interferido, E'_1 representa a potência isotrópica efetiva radiada pela antena da estação terrena transmissora do sistema interferente, E_3 representa a potência isotrópica efetiva radiada pela antena de transmissão do satélite do sistema interferido e E'_3 representa a potência isotrópica efetiva radiada pela antena de transmissão do satélite do sistema interferente.

Para interferência de entrada agregada, a Razão Portadora-Interferência é dada por:

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{agi} = \left(\sum_j \left(\frac{C_i}{I_j}\right)^{-1}\right)^{-1} \quad (3-6)$$

onde $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$; $j \neq i$ e n é o número de sistemas considerados. Dado um ponto do sistema vítima i , a interferência de entrada agregada é um somatório do inverso da interferência de entrada única para todos os possíveis pares de sistema (i, j) onde $i \neq j$.

O cálculo da razão Portadora-Interferente em (3-3) e (3-6) requer o conhecimento dos diagramas de radiação das estações terrenas, das localizações geográficas das estações terrenas, do diagrama de radiação das antenas dos satélites e das posições orbitais dos satélites. Cada um desses itens serão abordados nas seções seguintes.

3.2

Diagrama de Radiação das Antenas

Os diagramas de radiação adotados neste trabalho se baseiam nas recomendações do Setor de Radiocomunicações da União Internacional Telecomunicações (UIT-R). As subseções 3.2.1 e 3.2.2 apresentam os diagramas de radiação das antenas da estação terrena e do satélite, respectivamente.

3.2.1

Diagrama de Radiação da Antena da Estação Terrena

Para as antenas de transmissão das estações terrenas adotou-se o diagrama de radiação contido no Apêndice 30B do Regulamento de Radiocomunicações [6]. Considerou-se o caso particular de antenas com padrão de lóbulo lateral melhorado de $29 - 25 \log(\Phi)$. Esse diagrama é definido por:

$$G(\Phi) = \begin{cases} G_{max} - 2.5 \times 10^{-3} \left(\frac{D}{\lambda} \Phi\right)^2 & ; 0 < \Phi < \Phi_m \\ -1 + 15 \log\left(\frac{D}{\lambda}\right) & ; \Phi_m \leq \Phi < \Phi_r \\ 29 - 25 \log(\Phi) & ; \Phi_r \leq \Phi < 36.3^\circ \\ -10 & ; 36.3^\circ \leq \Phi < 180^\circ \end{cases}$$

onde $G(\Phi)$ está em dB. D é o diâmetro da antena e vale 3m. Para a banda de operação Ku, frequência de 12GHz, o comprimento de onda (λ) vale 0.025m. O ângulo Φ é o desvio angular da direção de apontamento da antena, dado em graus.

$$G_{max} = 10 \log\left[\eta \left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2\right] \quad ; \text{ganho na direção de apontamento da antena}$$

$$\Phi_m = \frac{20\lambda}{D} \sqrt{G_{max} - G_1} \quad ; \text{ângulo expresso em graus}$$

$$G_1 = -1 + 15 \log\left(\frac{D}{\lambda}\right) \quad ; \text{ganho do primeiro lóbulo lateral}$$

$$\Phi_r = 15.85 \left(\frac{D}{\lambda}\right)^{-0.6} \quad ; \text{ângulo expresso em graus}$$

A eficiência da antena é dada por η e vale 0.6. O valor de G_{max} é de 49.308 dB, Φ_m vale 0.73° , Φ_r vale 0.90° e o valor de G_1 é de 30.188 dB, conforme as equações abaixo.

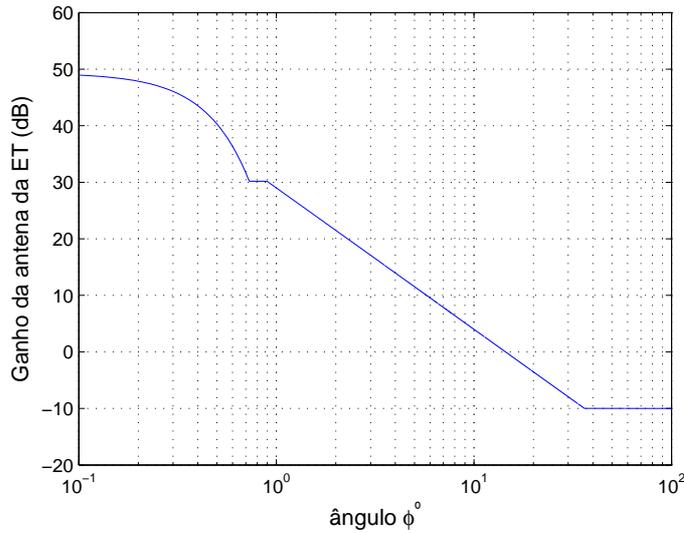


Figura 3.2: Diagrama de radiação da Estação Terrena para $G_{max} = 49.31$.

3.2.2 Diagrama de Radiação da Antena do Satélite

Para definir o diagrama de radiação da antena do satélite deve-se, primeiramente, apresentar o ângulo ψ . O ângulo ψ é dado por Φ/Φ_0 , conforme a Figura 3.3.

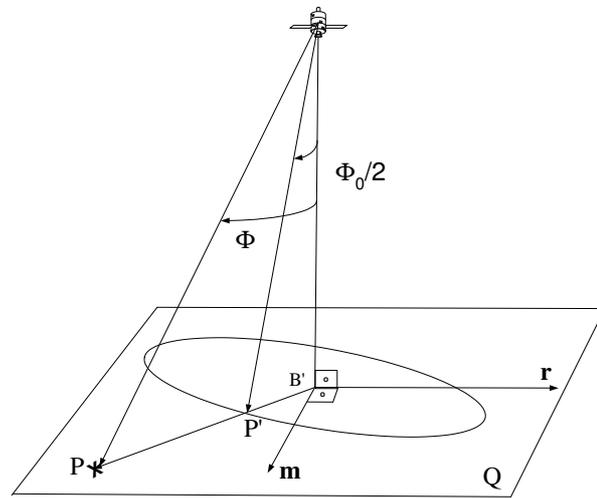


Figura 3.3: Ângulos de referência para o diagrama de radiação do satélite.

O plano Q , apresentado na Figura 3.3, é o plano perpendicular a direção de apontamento da antena de transmissão do satélite. Sobre este plano, calcula-se o ganho da antena do satélite para determinados pontos sobre a Terra. Para tanto, necessita-se projetar os pontos da superfície da Terra para esse plano Q . Essa projeção é feita utilizando Perspectiva

Cônica e será apresentado mais adiante.

Uma outra característica pertinente aos feixes dos satélites é o seu formato elíptico. Isso significa que dado o plano perpendicular a direção de apontamento da antena de transmissão do satélite (plano \mathcal{Q}), os pontos onde a potência sofre um decréscimo de 3dB em relação a direção de apontamento descrevem uma elipse sobre este plano, conforme Figura 3.4. Sendo assim, a projeção sobre a Terra da elipse que representa o contorno de -3 dB apresenta-se com uma distorção devido aos efeitos da curvatura da Terra. Essa região projetada sobre a Terra delimita a área de cobertura do satélite.

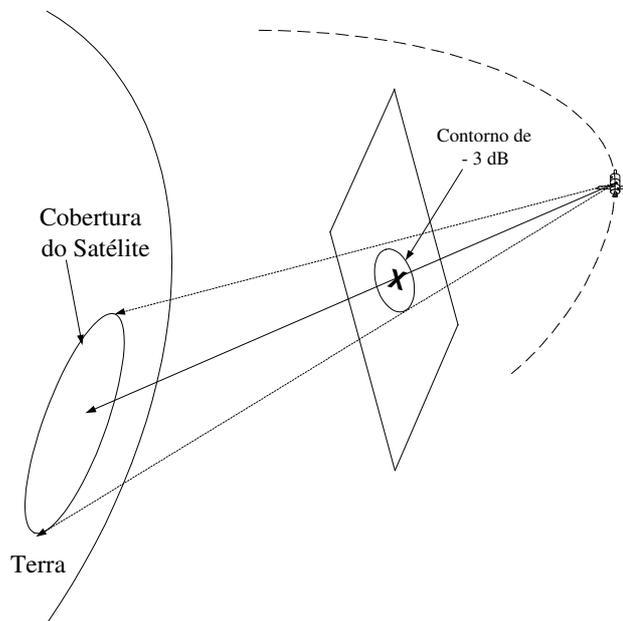


Figura 3.4: Feixe elíptico do Satélite

Nas seções seguintes definem-se os sistemas de coordenadas utilizados e a forma de projetar os pontos da superfície da Terra no plano \mathcal{Q} e vice-versa.

Sistemas de Coordenadas

Três tipos de sistema de coordenadas, são utilizados neste estudo, são eles:

- Sistema de Coordenadas Retangulares (x, y, z) : representação dos vetores na base $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$, com o referencial no centro da Terra.
- Sistema de Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ) : representação dos vetores na base $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$, com o referencial no centro da Terra.

- Sistema de Coordenadas (n, m, r) : representação dos vetores na base $[\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{r}]$ ¹ com o referencial no ponto B' , conforme a Figura 3.6.

Os pontos sobre a superfície da Terra são dados em coordenadas esféricas, onde θ é a latitude² e ϕ a longitude³, a transformação para coordenadas retangulares é feita da seguinte forma:

Seja a base $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ e os sistemas de coordenadas retangulares e esféricas, abaixo.

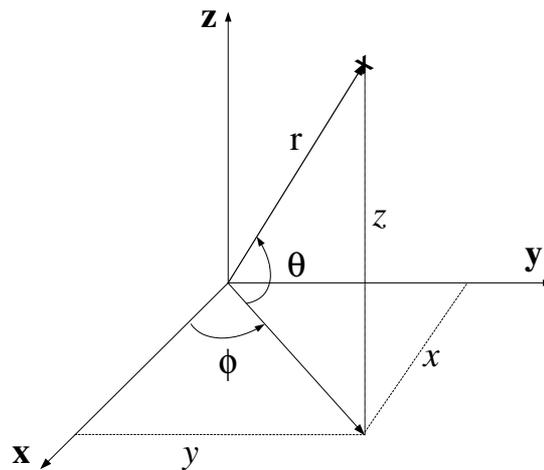


Figura 3.5: A base $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ e a representação dos sistemas de coordenadas esféricas e retangulares.

As equações que definem a transformação dos vetores em coordenadas esféricas para retangulares é:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \phi \\ y &= r \cos \theta \sin \phi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (3-7)$$

A transformação inversa é definida por :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi &= \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \\ \theta &= \arcsin \left(\frac{z}{r} \right) \end{aligned} \quad (3-8)$$

A definição do sistema de coordenadas (n, m, r) , a transformação do sistema de coordenadas retangulares para o sistema de coordenadas

¹As bases (x, y, z) e (n, m, r) estão definidas no Apêndice A.1.

²Ângulo medido sobre o meridiano local entre o plano do equador e o ponto desejado

³Ângulo medido sobre o equador entre o meridiano de Greenwich e o meridiano local

(n, m, r) e vice-versa é desenvolvida no Apêndice A.1.

Uma vez definido os sistemas de coordenadas, utiliza-se da Perspectiva Cônica, apresentada abaixo, para projetar os pontos da superfície da Terra no plano \mathcal{Q} e enfim calcular o ângulo ψ e o diagrama de radiação da antena do satélite.

Perspectiva Cônica

A Perspectiva Cônica (PC) é uma forma de representar os pontos que estão sobre a Terra no plano perpendicular a semi-reta que representa a direção de apontamento do satélite, e vice-versa. O ponto de fuga desta perspectiva encontra-se na posição orbital do satélite do sistema considerado. Conforme Figura 3.6.

Nesta seção, determinam-se as equações que permitem obter as coordenadas de um ponto P na base $[\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{r}]$ a partir de suas coordenadas retangulares na base $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$. E, também, para um ponto sobre o plano \mathcal{Q} representado na base $[\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{r}]$, definem-se as equações que determinam sua representação sobre a Terra em coordenadas (r, θ, ϕ) .

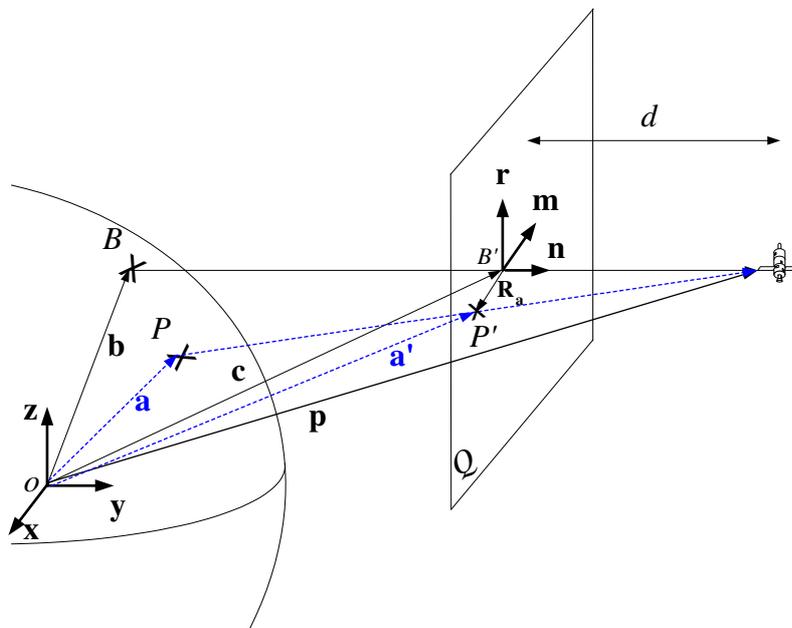


Figura 3.6: Geometria da Perspectiva Cônica.

Inicia-se com a primeira abordagem, onde o ponto P que está representado sobre a Terra e irá ser projetado em PC sobre o plano \mathcal{Q} . Os vetores

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ formam a base, posicionada no centro da Terra, onde as coordenadas retangulares estão definidas. O ponto P é dado em coordenadas polares $[r, \theta, \phi]$ e este pode ser escrito em coordenadas retangulares, conforme as equações (3-7).

$$P = [x_P, y_P, z_P]$$

O plano \mathcal{Q} possui a base formada pelos vetores $\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{r}$, de forma que R_a é a representação do vetor \overrightarrow{OP} na base $[\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{r}]$, ou seja, o ponto P' é a PC do ponto P .

Logo, deseja-se determinar as coordenadas (n, m, r) de P' , isto é, o vetor R_a dado:

- \mathbf{p} : vetor posição do satélite, $[x_p, y_p, z_p]^T$
- d : distância do satélite ao plano onde se encontra a projeção, dado em Km.
- B : ponto $[x_B, y_B, z_B]^3$ que indica para onde o satélite aponta.
- P : ponto em $[x_P, y_P, z_P]^3$ que se deseja fazer a PC.

Seja $\mathbf{R}_a = \mathbf{a}' - \mathbf{c}$. Inicialmente, define-se o vetor \mathbf{c} por:

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OB'} \quad (3-9)$$

ou seja,

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \alpha(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \quad (3-10)$$

onde α é uma constante de proporcionalidade que será determinada. Pela geometria da Figura 3.6, obtemos a relação:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c})^T (\mathbf{p} - \mathbf{c}) = d^2 \quad (3-11)$$

pode-se demonstrar, utilizando a equação (3-10), que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} - \mathbf{c}) &= \mathbf{p} - \mathbf{b} - \alpha\mathbf{p} + \alpha\mathbf{b} \\ &= (1 - \alpha)(\mathbf{p} - \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (3-12)$$

Substituindo (3-12) em (3-11) obtém-se:

$$(1 - \alpha)(\mathbf{p} - \mathbf{b})^T \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{b}) = d^2$$

ou seja

$$(1 - \alpha) = \frac{d^2}{\|\mathbf{p} - \mathbf{b}\|^2} \quad (3-13)$$

obtendo-se:

$$\alpha = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{d^2}{\|\mathbf{p} - \mathbf{b}\|^2}\right)}$$

como $0 < \alpha < 1$, tem-se, finalmente:

$$\alpha = 1 - \frac{d}{\|\mathbf{p} - \mathbf{b}\|} \quad (3-14)$$

Dado o valor de α por (3-14) pode-se determinar \mathbf{c} através da equação (3-10).

Agora define-se o vetor \mathbf{a}' :

$$\mathbf{a}' = \overrightarrow{OP'}$$

ou seja,

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \beta(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \quad (3-15)$$

Onde β é uma constante de proporcionalidade que será determinada. Pela Figura 3.6, obtém-se a relação:

$$(\mathbf{a}' - \mathbf{c})^T \cdot \mathbf{n} = 0$$

A equação (3-16) é válida uma vez que R_a pertence ao plano \mathcal{Q} . Substituindo (3-15) em (3-16), tem-se:

$$[\mathbf{a} + \beta(\mathbf{p} - \mathbf{a}) - \mathbf{c}]^T \cdot \mathbf{n} = 0$$

ou seja

$$\beta(\mathbf{p}^T \mathbf{n} - \mathbf{a}^T \mathbf{n}) = \mathbf{c}^T \mathbf{n} - \mathbf{a}^T \mathbf{n}$$

obtendo-se:

$$\beta = \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a})^T \mathbf{n}}{(\mathbf{p} - \mathbf{a})^T \mathbf{n}} \quad (3-16)$$

Dado o valor de β por (3-16) pode-se determinar o vetor \mathbf{a}' através de (3-15). Desta forma o vetor \mathbf{R}_a está definido em coordenadas retangulares. Para representa-lo em coordenadas (n, m, r) utiliza-se a matriz \mathbf{TB} descrita no Apêndice A.1, conforme equação (A-2).

Na segunda abordagem, é definida as equações que determinam o vetor \mathbf{a} e conseqüentemente as coordenadas (r, θ, ϕ) do ponto P , dado o vetor R_a , \mathbf{p} e \mathbf{b} .

Inicialmente transforma-se o vetor \mathbf{R}_a para coordenadas retangulares com a ajuda da matriz \mathbf{TB}^{-1} descrita no Apêndice A.1. Desta forma, obtém-se $\mathbf{a}' = \mathbf{R}_a + \mathbf{c}$. O vetor \mathbf{c} é dado por (3-10) e (3-14) em coordenadas (x, y, z) . Como:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{a})$$

Obtem-se

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}' - \gamma \mathbf{p}}{(1 - \gamma)} \quad (3-17)$$

Para determinar γ utiliza-se a seguinte propriedade:

$$R_T = \|\mathbf{a}\|$$

o que, utilizando-se (3-17), obtém-se:

$$\frac{\mathbf{a}'^T \mathbf{a}' - \mathbf{a}'^T \gamma \mathbf{p} - \gamma \mathbf{p}^T \mathbf{a}' + \gamma^2 \mathbf{p}^T \mathbf{p}}{(1 - \gamma)^2} - R_T^2 = 0 \quad (3-18)$$

Resolvendo (3-18) determina-se dois valores para γ . Como $0 < \gamma < 1$ deve-se optar pelo menor valor de γ . O vetor \mathbf{a} é determinado por (3-17) em coordenadas retangulares. Para representa-lo em coordenadas esféricas utilizam-se as equações (3-8).

Uma vez definido a PC para pontos sobre a superfície da Terra, pode-se definir o ângulo ψ e o diagrama de radiação da antena do satélite.

Diagrama de Radiação da Antena do Satélite

Para o feixe elíptico do satélite adotou-se o diagrama de radiação contido no Apêndice 30B do Regulamento de Radiocomunicações [5]. Esse diagrama é definido por:

$$G(\psi) = \begin{cases} G_{max} - 12\psi^2 & ; 0 < \psi \leq 1.45 \\ G_{max} - (22 + 20 \log(\psi)) & ; 1.45 < \psi \leq 15 \\ G_{max} - (22 + 20 \log(15)) & ; \psi > 15 \end{cases} \quad (3-19)$$

onde G_{max} é dado por:

$$G_{max} = 44.45 - 10 \log(\phi_{01} \cdot \phi_{02})$$

com $G(\psi)$ em dB. O valor de G_{max} é o ganho na direção de apontamento da antena do satélite, os ângulos ϕ_{01} e ϕ_{02} são os ângulos que determinam o eixo maior e menor da elipse de 3dB que cobre a área de serviço do satélite, definidos conforme Apêndice A.2. O diagrama dado por (3-19) com $G_{max} = 35.085\text{dB}$ é ilustrado na Figura 3.7.

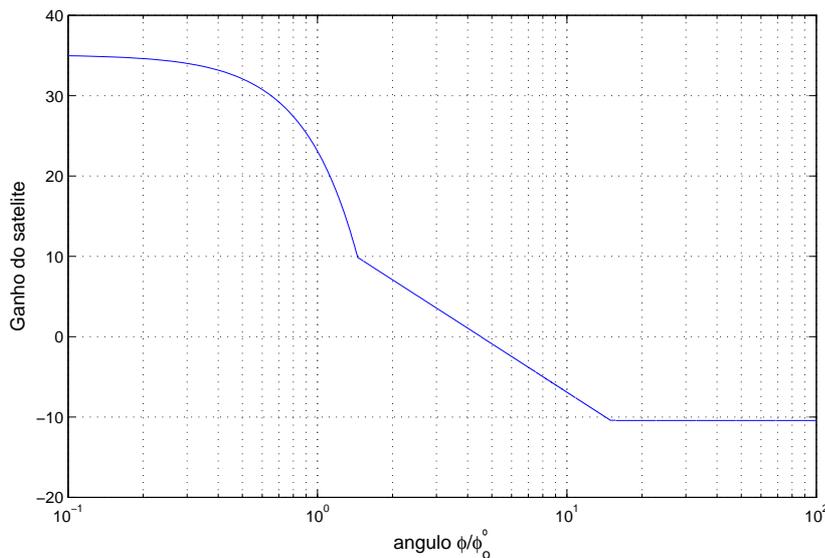


Figura 3.7: Diagrama de radiação do satélite.

A título de exemplo, a Figura 3.8 indica alguns valores do ganho de uma antena com feixe elíptico cobrindo a Venezuela. Nessa figura está ilustrado o contorno de -3dB e o valor dos ganhos em alguns pontos específicos (P_1, P_2, \dots, P_5), internos e externos ao contorno de -3dB, sobre a superfície da Terra. A elipse que representa o contorno de -3dB foi reproduzida utilizando a teoria descrita no Apêndice A.2.

As informações sobre o sistema VEN01 [5] utilizadas para gerar a Figura 3.8 são:

- posição orbital = -8.3° .
- longitude da direção de apontamento = -66.4° .
- latitude da direção de apontamento = 6.8° .
- $\phi_{01} = 2.8^\circ, \phi_{02} = 2.1^\circ, \gamma = 2.47^\circ$.⁴

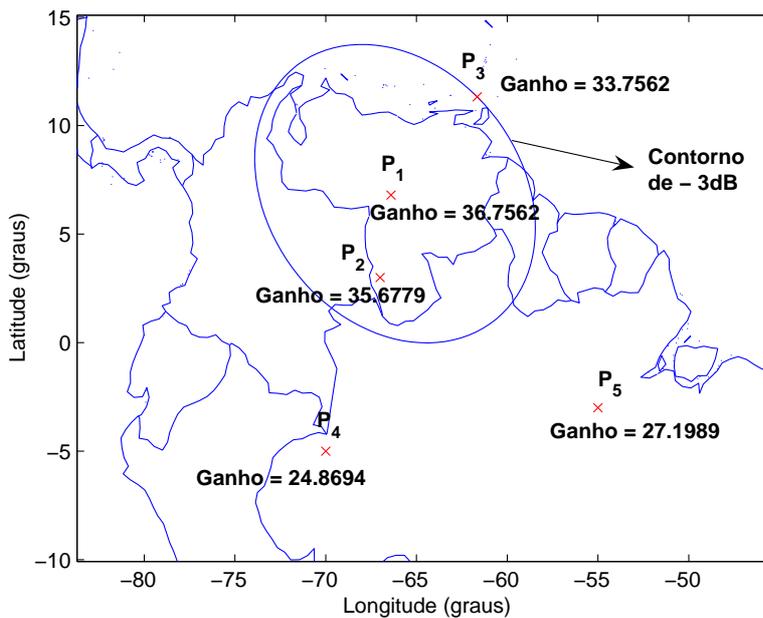


Figura 3.8: Ganho em diversos pontos sobre a superfície da Terra.

Verifica-se que o valor máximo do ganho ocorre na direção de apontamento da antena e vale 36.7562 dB, conforme os pontos se afastam do centro da elipse o valor do ganho diminui. Sobre o contorno da elipse o valor do ganho é 3dB a menos que na direção de apontamento.

⁴ângulo de orientação da elipse definido conforme Apêndice A.2.

3.3

Localização das Estações Terrenas e dos Satélites

Nesta seção são apresentados os critérios utilizados para a escolha das localizações geográficas (posições) das estações terrenas e as posições orbitais dos satélites envolvidos.

3.3.1

Localização das Estações Terrenas

O critério adotado para localização das estações terrenas de transmissão e recepção das redes de comunicação por satélites envolvidos consiste em escolher a posição mais desfavorável em termos da quantidade de interferência gerada (no caso da estação terrena transmissora-interferente) e a quantidade de interferência sofrida (no caso da estação terrena receptora-interferida).

Para a interferência de entrada única, a quantidade de interferência gerada pela estação terrena transmissora é dada por $\frac{P'_1 g'_1(\theta) g_2(\rho)}{\ell_{su'}}$, conforme (3-1). Note que os ganhos $g'_1(\theta)$ e $g_2(\rho)$ assim como a perda de espaço livre $\ell_{su'}$ dependem da posição geográfica da estação terrena de transmissão (ETT) do sistema interferente.

A escolha da localização da ETT do sistema interferente é feita de modo a maximizar esta interferência, conforme a geometria da Figura 3.9. Como P'_1 não depende da localização da ETT, o ponto de teste que está sujeito ao maior valor de interferência é definido por:

$$P_{desf} = \max_A^{-1} \left(\frac{g'_1(\theta(A)) g_2(\rho(A))}{\ell_{su'}(A)} \right) ; A \in \mathcal{S} \quad (3-20)$$

onde \mathcal{S} é o conjunto dos possíveis pontos de teste para a localização da estação terrena.

Uma outra abordagem para o critério da escolha da ETT consiste em aproximar o ângulo topocêntrico θ por um ângulo geocêntrico e considerando $\ell_{su'}$ constante, a razão (3-20) fica dependente apenas do fator $g_2(\rho)$.

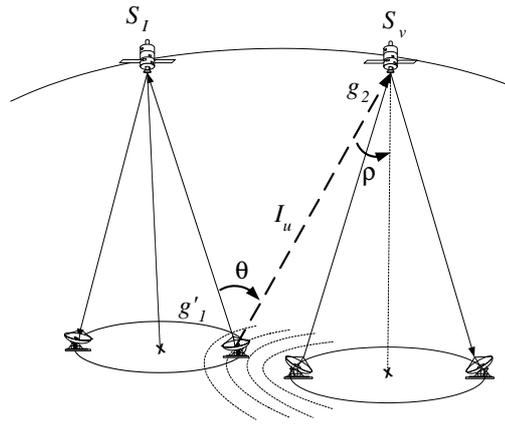


Figura 3.9: Posição mais desfavorável da ETT.

Para o caso da estação terrena receptora do sistema vítima, a quantidade de interferência recebida é dada por $\frac{P'_3 g'_3(\eta) g_4(\xi)}{\ell_{sd'}}$, conforme (3-2). Assim como para a ETT, os ângulos $g'_3(\eta)$ e $g_4(\xi)$ bem como a perda de espaço livre $\ell_{su'}$ dependem da posição geográfica da estação terrena de recepção (ETR) do sistema vítima.

A escolha da localização da ETR do sistema vítima é feita de modo a maximizar esta interferência, conforme a geometria da Figura 3.10. Como P'_3 não depende da localização da ETR, o ponto de teste que está sujeito ao maior valor de interferência é definido por

$$P_{desf} = \max_A^{-1} \left(\frac{g'_3(\eta(A)) g_4(\xi(A))}{\ell_{sd'(A)}} \right) ; A \in \mathcal{S} \quad (3-21)$$

onde \mathcal{S} é o conjunto dos possíveis pontos de teste para a localização da estação terrena.

Da mesma forma como foi feito para a ETT, pode-se definir uma outra abordagem para o critério da escolha da ETR ao aproximar o ângulo topocentrico ξ por um ângulo geocêntrico e considerar $\ell_{sd'}$ constante, assim, a razão (3-21) fica dependente apenas do fator $g'_3(\eta)$.

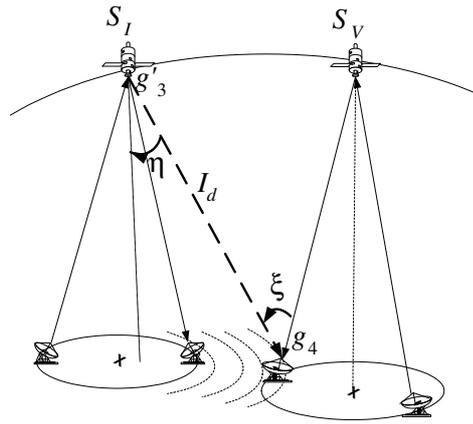


Figura 3.10: Posição mais desfavorável da ETR.

No caso do cálculo da interferência agregada produzida pelos diversos sistemas sobre o sistema vítima, a posição mais desfavorável da ETR não pode ser determinado pelo procedimento descrito acima. Isso ocorre porque a posição mais desfavorável da estação terrena de recepção para cada sistema interferente é distinta. Assim, define-se pontos de teste sobre toda a área de serviço e a métrica para escolha da posição mais desfavorável consiste em selecionar o ponto de teste que possui maior valor para o somatório das interferências geradas por todos os sistemas interferentes considerados.

Sejam p_1, p_2, \dots, p_k pontos de teste e n o número de sistemas considerados. A posição mais desfavorável é a posição em que:

$$P_{desf} = \max_{p_j}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} I_{ip_j} \right)$$

onde I_{ip_j} é a interferência produzida pelo sistema i no ponto de teste p_j , $j = 1, \dots, n$, $p_j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$ e $i \neq j$.

Como exemplo, foram selecionados três sistemas distintos [6], conforme Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Informações dos Sistemas utilizados a título de exemplo

Sistema	PRU	EQA	BOL
País	Peru	Equador	Bolívia
Posição do Satélite	-89.9°	-104.0°	-35.0°
longitude da direção de apontamento	-74.2°	-83.1°	-64.4°
latitude da direção de apontamento	-8.4°	-1.4°	17.1°
ϕ_{01}	3.6	3.1	2.7
ϕ_{02}	2.4	1.4	1.7
γ	111	174	129

A Figura 3.11 apresenta os pontos de testes dos 3 sistemas considerados no exemplo da Tabela 3.1. Optou-se por determinar pontos de testes situados apenas no contorno de -3dB .

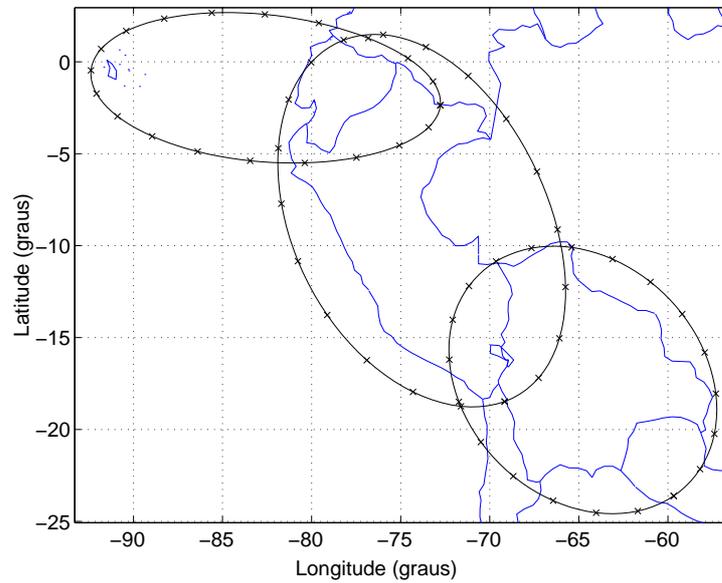


Figura 3.11: Pontos candidatos a posição mais desfavorável nos sistemas considerados.

As figuras de (3.12) a (3.17) ilustram a localização geográfica da posição da ETT e ETR para cada um dos casos da Tabela 3.2.

caso	Sistema Interferente	Sistema vítima
A	EQA	PRU
B	BOL	PRU
C	BOL	EQA
D	EQA, PRU	BOL
E	BOL, PRU	EQA
F	BOL, EQA	PRU

Tabela 3.2:

Nos casos A,B,C foram considerados apenas 2 sistemas e escolhida a posição mais desfavorável ETT e da ETR em termos da quantidade de interferência de entrada única. Já nos casos D,E,F foram considerados 3 sistemas e escolhida a posição mais desfavorável da ETT e da ETR em termos da quantidade de interferência agregada.

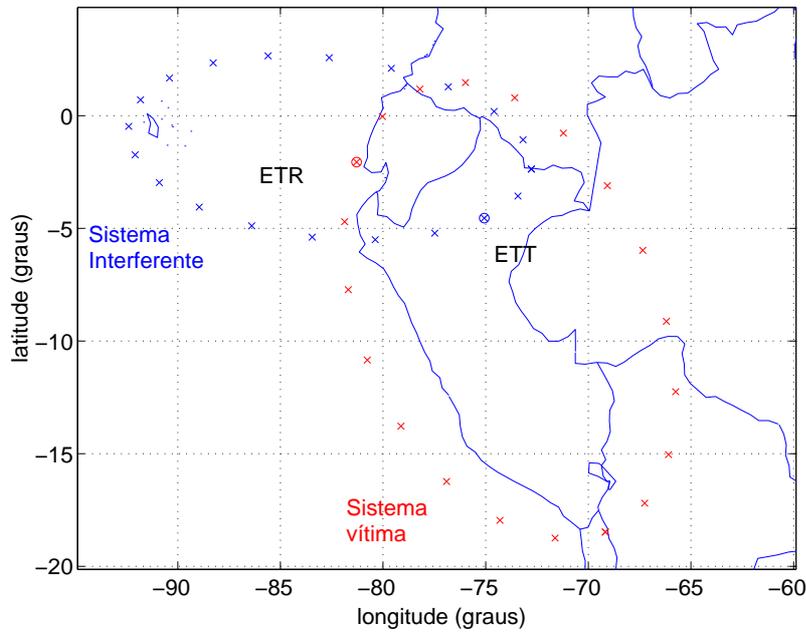


Figura 3.12: Localização da ETT e ETR para o caso A.

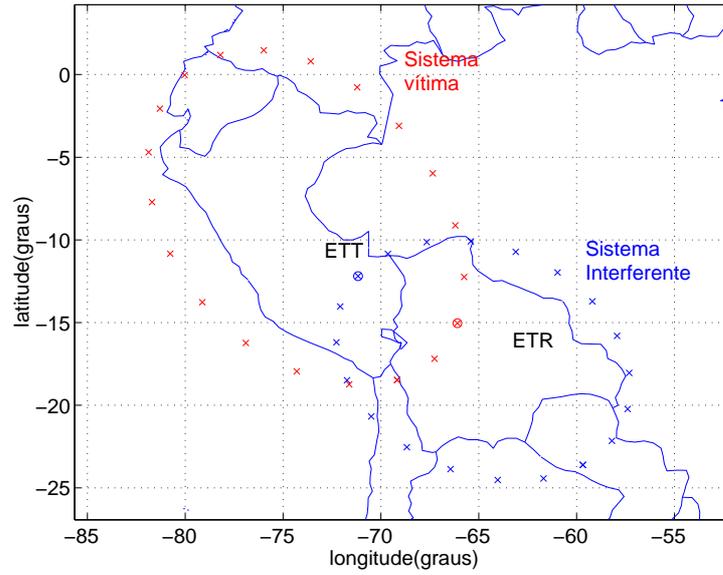


Figura 3.13: Localização da ETT e ETR para o caso B.

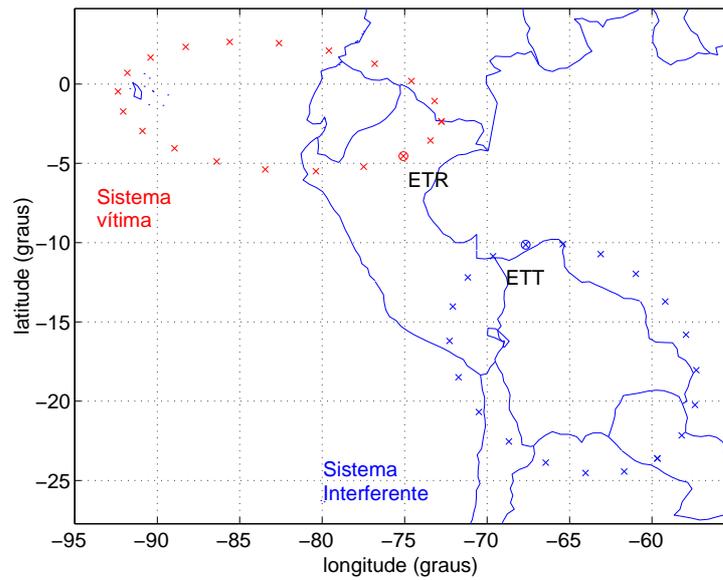


Figura 3.14: Localização da ETT e ETR para o caso C.

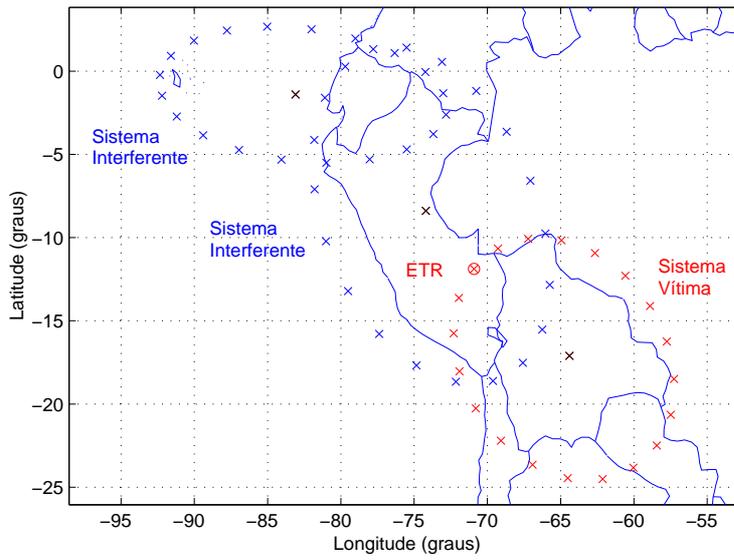


Figura 3.15: Localização da ETR para o caso D.

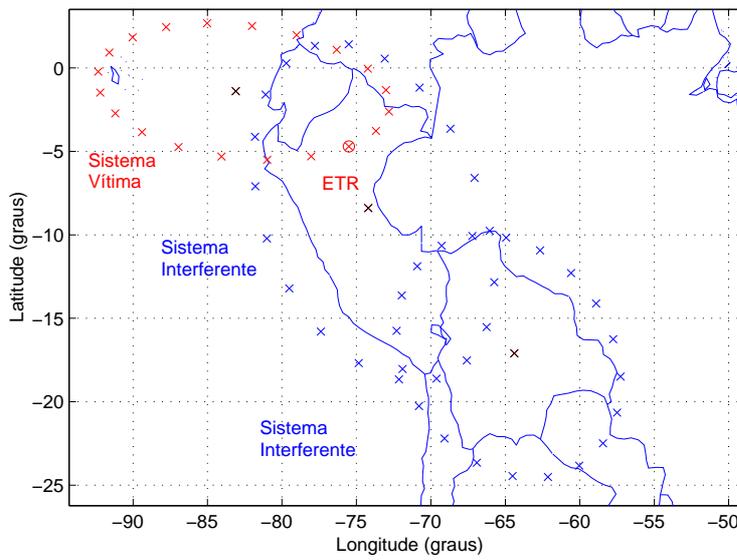


Figura 3.16: Localização da ETR para o caso E.

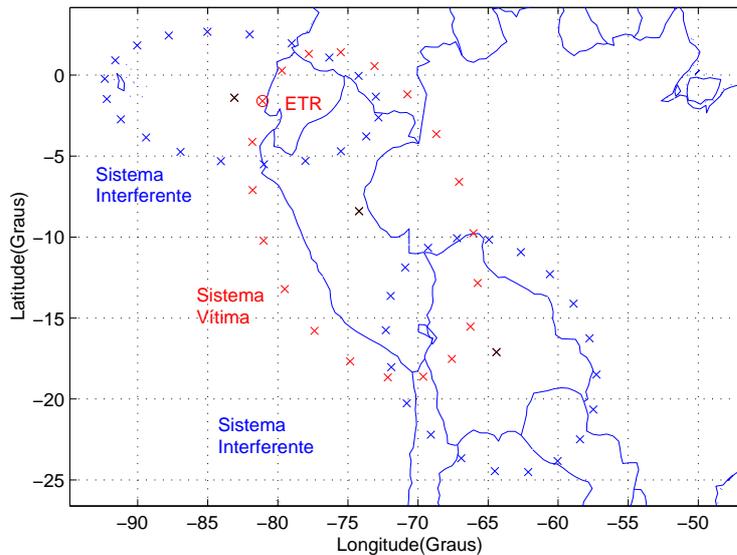


Figura 3.17: Localização da ETR para o caso F.

3.3.2 Localização dos Satélites

A posição orbital dos satélites geoestacionários é definida pela longitude de sua localização. A escolha da posição orbital de um determinado satélite deve ser feita considerando-se algumas limitações. Estas limitações são, geralmente, devido as restrições de propagação (eg. limite inferior de ângulo de elevação) e as restrições operacionais (eg. distribuição do tráfego a ser atendido, existência de um sistema na posição desejada, níveis máximos aceitáveis de interferência de entrada única e agregada, etc). A região orbital que respeita essas limitações e permitida para localização do satélite é conhecida como arco de serviço. O cálculo da região orbital que respeita a restrição operacional de ângulo de elevação foi desenvolvida conforme [12].

Num problema de otimização, a definição do domínio de otimização é crucial para convergência. No problema a ser examinado, esse domínio é definido em função do arco de serviço, distribuição do tráfego, diagrama de radiação, direção de apontamento do satélite, área de cobertura, etc.

3.4

Modelo Matemático para Otimização da Utilização da Órbita

Dado um conjunto de n redes $\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_n\}$, seja i ($i = 1, \dots, n$) o índice que caracteriza a rede interferida e j ($j = 1, \dots, n; i \neq j$) o índice que caracteriza a rede interferente. Considere a situação ilustrada na Figura 3.1, onde M redes de comunicações por satélite estão compartilhando o arco orbital. Deseja-se especificar as posições orbitais de cada uma dessas redes de modo a minimizar a parcela de arco orbital utilizada garantindo, ao mesmo tempo, que os níveis de interferência que afetam cada uma dessas redes estejam abaixo dos níveis máximos de interferência permitido e que a posição orbital do satélite de cada uma das redes pertença ao arco de serviço a ela associado.

Seja x_i ($i = 1, \dots, n$) a posição orbital do satélite S_i da i -ésima rede de comunicações por satélite. Deste modo o vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ define as posições orbitais dos satélites das redes envolvidas. A parcela do arco orbital utilizada se escreve:

$$\mathcal{P} = f(\mathbf{x}) = \max(x_1, \dots, x_n) - \min(x_1, \dots, x_n) \quad (3-22)$$

As seguintes restrições devem ser satisfeitas ao se minimizar (3-22):

$M(M - 1)$ restrições associadas aos níveis de Razão Portadora Interferência de entrada única.

$$\left(\frac{C}{I}\right)_{ij} \geq L_{se} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n, j \neq i \end{array} \quad (3-23)$$

onde $(C/I)_{ij}$ é a Razão Portadora Interferência de entrada única do sistema j no sistema i , conforme equação (3-4).

M restrições associadas aos níveis de Razão Portadora Interferência agregada sobre cada sistema.

$$\left(\frac{C}{I}\right)_i = \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{C}{I}\right)_{ij}^{-1} \right]^{-1} \geq L_{ag} \quad (3-24)$$

M restrições associadas aos arcos de serviço dos sistemas.

$$a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n \quad (3-25)$$

onde o intervalo $[a_i, b_i]$ é o arco de serviço que cada sistema deve respeitar.

Então o problema a ser resolvido é minimizar (3-22) sujeito a (3-23), (3-24) e (3-25).

Solucionar de maneira genérica esse problema de otimização pode não necessariamente fornecer a solução ótima e pode se tornar uma tarefa bastante difícil, uma vez que o número de variáveis envolvidas, não linearmente relacionadas, é muito grande.

A complexidade envolvida na busca de soluções para esse problema geral pode, em algumas situações específicas, ser reduzida. Em particular, este é o caso quando a ordem dos satélites na órbita é pré-estabelecida. Esta pré-fixação pode ser feita sem perda de generalidade, uma vez que a solução ótima do problema geral (sem a pré-fixação da ordem) pode ser obtida considerando-se todas as possíveis ordenações, comparando-se as soluções a elas associadas e escolhendo a que fornece menor função objetivo.

Desta forma, define-se

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$$

como o vetor de posições orbitais ordenadas, de modo que $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_n$. A parcela do arco orbital utilizada se escreve:

$$\tilde{\mathcal{P}} = f(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{x}_n - \tilde{x}_1 \quad (3-26)$$

O novo problema é então definido onde x^* é tal que:

$$x^* = \min_{\tilde{\mathbf{x}}}^{-1} \{f(\tilde{\mathbf{x}})\} \quad (3-27)$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n)^T \\ f(\tilde{\mathbf{x}}) &= [\tilde{x}_n - \tilde{x}_1]\end{aligned}$$

sujeito a (3-23), (3-24), (3-25) e, ainda, $n - 1$ restrições do tipo:

$$\tilde{x}_{i-1} < \tilde{x}_i \quad ; i = 1, \dots, n \quad (3-28)$$

devido a pré-fixação da ordem.

Seria interessante que o espaço dos valores de \tilde{x} que satisfazem às restrições (3-23), (3-24), (3-25) e (3-28) fosse convexo, o que garantiria a convergência do resultado para um mínimo global.

Note que as restrições em (3-25) e (3-28) definem regiões limitadas por hiperplanos. Se considerarmos que a razão $\left(\frac{C}{I}\right)_{ij}$ se mantém constante quando o espaçamento entre os satélites não varia (aproximação) $(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)$, as restrições (3-23) conduzirão também a regiões limitadas por hiperplanos. Assim, a região definida pelas restrições (3-25), (3-28) e (3-23) pode ser considerada convexa. (interseção de região limitada por hiperplanos).

No que diz respeito às restrições em (3-24) nada pode-se afirmar a priori. Entretanto, testes efetuados durante a realização deste trabalho indicam que, nos exemplos demonstrados, diferentes valores iniciais para \tilde{x}_0 , conduziram a um mesmo valor de \tilde{x}_{otimo}