Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Carlos Henrique Lima de Castro

Instabilidade e Comportamento Dinâmico Não Linear de Estruturas Multiestáveis

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Co-orientador: Prof. Diego Orlando

Rio de Janeiro,

Março de 2024

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Carlos Henrique Lima de Castro

Instabilidade e Comportamento Dinâmico Não Linear de Estruturas Multiestáveis

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Paulo Batista Gonçalves
Orientador
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Diego Orlando
Co-orientador
UERJ

Prof. José Manoel Balthazar
UNESP

Prof. Pedro Leal Ribeiro
Universidade do Porto

Prof. Guilherme Rosa Franzini
USP

Prof. Samuel da Silva
UNESP

Prof. Frederico Martins Alves da Silva
UFG

Rio de Janeiro, 14 de março de 2024

Carlos Henrique Lima de Castro

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (UFPA), na cidade de Belém/PA, em 2012, com mobilidade acadêmica no Instituto Superior Técnico – Universidade Técnica de Lisboa, em Portugal, através do programa Erasmus Mundus (2010/2011). Possui mestrado em Engenharia Civil pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio (2014) e especialização em Docência para a Educação Profissional, Científica e Tecnológica pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (2018). Atualmente é Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará.

Ficha Catalográfica

Castro, Carlos Henrique Lima de

Instabilidade e comportamento dinâmico não linear de estruturas multiestáveis / Carlos Henrique Lima de Castro; orientador: Paulo Batista Gonçalves; co-orientador: Diego Orlando. – 2024.
206 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2024.
Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil e Ambiental - Teses. 2. Estruturas multiestáveis. 3. Estabilidade. 4. Dinâmica não linear. 5. Coleta de energia. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Orlando, Diego. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. IV. Título.

CDD: 624

Ao meu pai, Marcos Castro (in memorian),
que sempre me apoiou e encorajou.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e oportunidade concedida na realização deste trabalho.

Ao Professor Paulo Batista Gonçalves, por todo apoio, paciência e compreensão dedicados durante todo o processo de orientação, pelo olhar humano comigo diante das adversidades impostas pela vida, com quem aprendo desde o mestrado e seguirá sendo uma referência.

Ao Professor Diego Orlando, por sua orientação e ajuda essenciais no decorrer de toda a pesquisa, sempre disponível com presteza com minhas dúvidas e inquietações.

Aos professores que participaram da banca avaliadora, pela disponibilidade e valiosas contribuições.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio, por toda dedicação na condução do curso, considerando ainda os desafios impostos pela pandemia de COVID 19.

Aos meus pais, Marcos e Jane, por todo amor e confiança em mim depositados, os quais infelizmente partiram no decorrer desta pesquisa, mas que sempre estarão presentes em mim e em minha memória.

Aos meus irmãos, Aline, Deborah e Lourival, pelo amor, amizade e companheirismo de sempre.

A minha Esposa, Kadja, pelo seu amor incondicional e por tudo que representa em minha vida, sendo uma verdadeira fortaleza em todos os momentos que enfrentamos juntos.

Ao meu filho, Dário, que chegou durante a realização desta pesquisa, mudando os rumos de nossas vidas e nos mostrando o real significado da palavra amor.

A minha sogra, Dona Nazaré, pelo suporte de sempre com minha família, além de me dedicar o mesmo cuidado e atenção que possui com seus filhos.

À minha família, base sólida onde encontrei e encontro apoio para seguir adiante, meus avós (in memorian), tios, primos e sobrinhos, sempre presentes na minha caminhada.

Aos amigos e colegas de curso, em especial André Rech, Felipe Rodrigues e Filipe Fonseca, pelo suporte e auxílio, especialmente considerando as dificuldades do isolamento social impostas pela pandemia de COVID 19.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

Ao IFPA, por sua política de incentivo à qualificação dos servidores e consequente concessão do afastamento imprescindível para realização desta pesquisa.

Enfim, a todos aqueles que direta ou indiretamente me ajudaram na realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Castro, Carlos Henrique Lima de; Gonçalves, Paulo Batista; Orlando, Diego. **Instabilidade e Comportamento Dinâmico Não Linear de Estruturas Multiestáveis.** Rio de Janeiro, 2024. 206p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nos últimos anos, tem-se observado um interesse crescente em estruturas multiestáveis. Sistemas com múltiplas configurações de equilíbrio estável geralmente são obtidos através de uma cadeia de unidades biestáveis conectadas por elementos rígidos ou flexíveis. Entretanto, pouco se sabe sobre seu comportamento estático e dinâmico não linear. Neste trabalho realiza-se uma análise não linear estática e dinâmica detalhada de sistemas multiestáveis formados por duas unidades biestáveis abatidas, especificamente, duas treliças de von Mises ou dois arcos, conectados em ambos os casos por elementos rígidos ou flexíveis. Para isto, as equações não lineares de equilíbrio e de movimento são obtidas através do princípio da energia potencial estacionária e do princípio de Hamilton, respectivamente, considerando um material elástico linear. Utilizando algoritmos de continuação, os caminhos de equilíbrio são obtidos e a estabilidade analisada utilizando o princípio da energia potencial mínima. Múltiplos caminhos de equilíbrio são identificados, levando a múltiplas soluções coexistentes, estáveis e instáveis, e vales potenciais intimamente ligados às simetrias dos sistemas. O efeito das inevitáveis imperfeições iniciais é também esclarecido. As oscilações não lineares e as bifurcações dos sistemas sob carregamento harmônico são estudadas através de diagramas de bifurcação, mapas de Poincaré e bacias de atração. Estuda-se também o efeito do pré-carregamento estático na dinâmica global. Observam-se, em virtude de sequências de bifurcações emergindo de cada posição de equilíbrio estável, um elevado número de soluções coexistentes, periódicas e aperiódicas, levando a bacias de atração complexas e com amplas regiões fractais. Por um lado, estes cenários podem ser valiosos em diversas aplicações. Por outro, múltiplos atratores e suas bacias fractais podem levar à perda da estabilidade e integridade dinâmica. Desta forma, o conhecimento do comportamento estático e dinâmico não linear de sistemas multiestáveis é imprescindível em qualquer aplicação em engenharia. Como exemplo de aplicação, se utiliza um sistema formado por treliças de von Mises no processo de coleta de energia através de elementos piezoelétricos. O comportamento altamente não linear resulta em movimentos de grande amplitude para largas faixas de excitação, aumentando sua eficiência e aplicabilidade.

Palavras-chave

Estruturas Multiestáveis; Estabilidade; Dinâmica Não Linear; Coleta de Energia.

Abstract

Castro, Carlos Henrique Lima de; Gonçalves, Paulo Batista; Orlando, Diego. **Instability and Nonlinear Dynamic Behavior of Multi-stable Structures.** Rio de Janeiro, 2024. 206p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the last years, an increasing interest in multistable structures has been observed. Multistable systems are generally attained by a chain of bistable units connected by rigid or flexible elements. However, little is known about their nonlinear static and dynamic responses. In this work, a detailed nonlinear static and dynamic analysis of multistable systems formed by two shallow bistable units is conducted, specifically, two von Mises trusses or two arches, connected in both cases by rigid or flexible elements. For this, the nonlinear equilibrium equations and equations of motion are obtained through the principle of stationary potential energy and Hamilton's principle, respectively, considering a linear elastic material. Using continuation algorithms, the nonlinear equilibrium paths are obtained, and stability analyzed using the principle of minimum potential energy. Multiple equilibrium paths are identified, leading to several stable and unstable coexisting solutions and potential wells with are closely linked to the systems symmetries. The effect of unavoidable initial imperfections is also clarified. The nonlinear dynamics and bifurcations of systems under harmonic forcing are studied using bifurcation diagrams, Poincaré maps and cross-sections of the basins of attraction. The effect of a static pre-load on global dynamics is also studied. Due to the bifurcation sequences emerging from each stable equilibrium configuration, a high number of coexisting solutions are observed, both periodic and aperiodic, leading to complex basins of attraction with broadening fractal regions. On the one hand, these scenarios can be valuable in several applications. On the other hand, multiple attractors and their fractal basins can lead to the loss of stability and dynamic integrity. Therefore, knowledge on the nonlinear static and dynamic behavior of multistable systems is primordial in any engineering application. As an application example, a system composed by two von Mises trusses is used in the process of energy harvesting through piezoelectric elements. The highly nonlinear behavior results in large amplitude oscillations for a wide range of excitation frequency, increasing its efficiency and applicability.

Keywords

Multistable Structures; Stability; Nonlinear Dynamics; Energy Harvesting.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de símbolos

K_c	:	rigidez da mola linear que conecta as unidades dos sistemas multiestáveis
V	:	energia potencial
κ	:	parâmetro adimensional que representa a rigidez da mola linear
λ	:	parâmetro adimensional da carga estática aplicada no nó superior ou no meio do vão quando em unidades isoladas ou na unidade superior do sistema multiestável
λ_{cr}	:	carga crítica de perda de estabilidade
T	:	energia cinética
ρ	:	massa específica do material dos sistemas multiestáveis
t	:	tempo
τ	:	tempo na forma adimensional
F	:	magnitude do carregamento harmônico
f	:	relação entre a magnitude do carregamento harmônico e a carga crítica de perda de estabilidade
Ω	:	frequência de excitação
$[K]$	:	matriz de rigidez adimensional
$[M]$	:	matriz de massa adimensional

Modelos de treliças

a, b	:	alturas das treliças acopladas
c	:	metade do comprimento de base das treliças
k, k_1, k_2	:	rigidezes axiais das barras das treliças
v, v_1, v_2	:	deslocamentos verticais dos nós centrais das treliças
P	:	carga estática aplicada no nó central superior do sistema multiestável

L_i, $L1_i$, $L2_i$: comprimento inicial das barras das treliças

L_f, $L1_f$, $L2_f$: comprimento final das barras das treliças

ε : deformação de engenharia

U, U_B, U_M : energia interna de deformação

Π : energia potencial total

δ, δ_1, δ_2 : parâmetro adimensional para o abatimento das treliças

α : parâmetro adimensional que relaciona as rigidezes axiais das barras das treliças superior e inferior, nos sistemas multiestáveis

χ, χ_1, χ_2 : parâmetro adimensional relativo aos deslocamentos dos nós centrais das treliças, graus de liberdade

$\chi_{,\tau}$, $\chi_{1,\tau}$, $\chi_{2,\tau}$: velocidades dos graus de liberdade

ξ, ξ_1, ξ_2 : parâmetro adimensional que representa o amortecimento viscoso linear

A, A_1, A_2 : áreas das seções transversais das treliças

ω_0, ω_{01}, ω_{02} : frequências naturais dos sistemas multiestáveis.

ψ : parâmetro adimensional que relaciona as áreas das seções transversais das treliças

Q : carregamento harmônico

N_{eq} : número de configurações de equilíbrio para estrutura formada por n treliças rigidamente conectadas e descarregadas

χ_{nT} : deslocamento total do nó da treliça, onde n = 1, 2

χ_{ni} : deslocamento estático do nó da treliça, onde n = 1, 2

$\chi_n(t)$: deslocamento dinâmico do nó da treliça, onde n = 1, 2

C_p : capacitância equivalente

R_l : resistência a carga elétrica

V : tensão

i_p : corrente elétrica total

i_1 : corrente elétrica que passa pelo capacitor

i_2	:	corrente elétrica que passa pelo resistor
θ	:	parâmetro do acoplamento piezoelétrico
q	:	carga elétrica
γ	:	recíproco da constante de tempo
φ	:	termo de acoplamento piezoelétrico na equação do circuito elétrico
V_{RMS}	:	tensão RMS
P_E	:	potência elétrica efetiva
P_M	:	potência mecânica efetiva
P_E^{ins}	:	potência elétrica instantânea
P_M^{ins}	:	potência mecânica instantânea
$\eta,\ \eta_1,\ \eta_2$	:	eficiência do sistema de colheita de energia

Modelos de arcos

L	:	comprimento do arco
E	:	módulo de elasticidade
A	:	área da seção transversal
I	:	momento de inércia
P	:	carga estática axial
P_{cr}	:	carga crítica de flambagem
Q	:	carga estática transversal
X	:	coordenada espacial nas funções dos arcos
$V_0(X)$	:	função de forma do arco
$V(X,t)$	:	função do deslocamento adicional do arco
$W(X,t)$	:	função do deslocamento total do arco
M	:	massa por unidade de comprimento
C	:	coeficiente de amortecimento
δ	:	função delta de Dirac
r	:	raio de giração da seção transversal da viga

x	:	coordenada espacial nas funções dos arcos adimensional
p	:	carga estática axial adimensional
p_c	:	carga crítica de flambagem adimensional
$c,\ c_1,\ c_2$	:	coeficiente de amortecimento adimensional
$v_0(x)$	:	função de forma do arco
$v(x,\tau)$	:	função do deslocamento adicional do arco
$w(x,\tau)$	:	função do deslocamento total do arco
$a,\ a_1,\ a_2$	:	amplitudes das funções de interpolação, deslocamentos no meio do vão do arco a partir da configuração de flambagem
$\dot{a}_1,\ \dot{a}_2$	:	velocidades no meio do vão do arco
$b,\ b_1,\ b_2$	:	deslocamento adimensional no meio do vão, abatimento dos arcos
$y(x)$	:	modos de flambagem
Mrl	:	massa da ligação rígida
μ	:	parâmetro de massa da ligação rígida adimensional
F_M	:	força elástica associada a mola que conecta os arcos

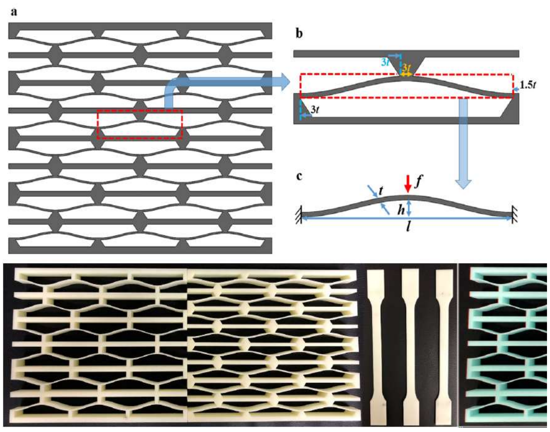
1
Introdução

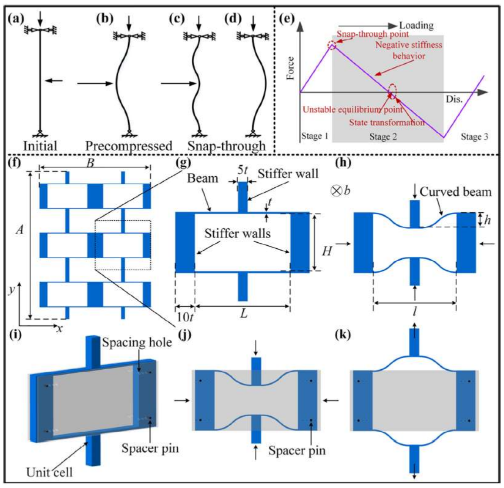
A análise de instabilidade de sistemas estruturais tem sido um campo de pesquisa prolífico desde os trabalhos seminais de Bernoulli e Euler sobre a elástica (Thompson & Hunt, 1984; Bazant & Cedolin, 2010). As pesquisas em estabilidade estrutural tiveram um forte desenvolvimento no século XX com base na teoria pós-flambagem de Koiter (1967), que estabeleceu o conceito de sensibilidade à imperfeição e sua relação com o comportamento pós-flambagem inicial. Este progresso foi impulsionado pelo desenvolvimento de estruturas espaciais, que tinham como uma das principais restrições o peso próprio, resultando em elementos estruturais leves e esbeltos, em particular cascas esbeltas extremante sensíveis a imperfeições (https://shellbuckling.com/index.php, Acesso em: 12 fev. 2024).

Tradicionalmente, do ponto de vista de projeto, os fenômenos de instabilidade têm sido considerados como um fator limitante que devem ser evitados por meio de especificações adequadas de projeto, pois levam à perda da capacidade de carga e, eventualmente, danos e colapso da estrutura (Galambos, 1998). No entanto, nos últimos anos, percebe-se uma mudança de paradigma, onde a instabilidade elástica passa a ser utilizada de forma favorável. A maioria das aplicações têm focado em sistemas multiestáveis capazes de assumir diferentes configurações de equilíbrio estável, sem a incidência de dano no material ou ruína da estrutura. Reis (2015) aborda essa mudança de paradigma, nomeando a mudança de um estágio anterior, denominado por ele de *buckiliphobia*, para uma nova abordagem, denominada *buckliphilia*. Champneys et al. (2019) também discutem este cenário, fazendo uma revisão do estado da arte destes diferentes pontos de vista, com foco na estabilidade elástica e no comportamento pós-flambagem. Desta forma, a multiestabilidade se revela como um novo campo de pesquisa, com aplicações para além da engenharia civil, como, por exemplo, na engenharia aeroespacial (Cherston et al., 2019), mecânica (Barnarino & Gandhi, 2014), robótica (Osorio et al., 2022) e bioengenharia (Kidambi et al., 2018). Recentemente, Hu & Burgueño (2015), Cao et al. (2021) e Fang et al. (2022) apresentaram revisões detalhadas da literatura sobre o uso da flambagem de forma benéfica em engenharia, incluindo atuadores, coletores de energia, sistemas micromecânicos (MEMS), robótica, absorsores de energia, bem como metamateriais. Estas revisões também destacam as estruturas e materiais associados a essas aplicações.

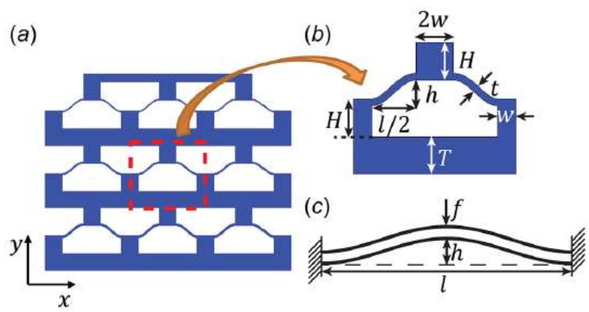
Neste contexto, a dinâmica não linear destes sistemas estruturais tem se mostrado uma área de grande interesse. Ao longo das últimas décadas muitos estudos foram dedicados à investigação de mecanismos capazes de apresentar múltiplas configurações de equilíbrio estável (Zanette, 1997; Kovacic et al., 2008; Arrieta et al., 2011; Cui & Santer, 2015). Contudo, o principal foco esteve voltado à necessidade de prevenção ao colapso estrutural (Hrinda, 2010).

Sistemas com múltiplas configurações de equilíbrio estável apresentam múltiplos vales potenciais, característica que conduz a um comportamento não linear extremamente complexo. Um importante exemplo de aplicação destes mecanismos hoje em dia é o desenvolvimento de novos materiais, tais como os metamateriais. A Figura 1.1 ilustra algumas pesquisas recentes envolvendo sistemas multiestáveis. Observam-se nestas aplicações, estruturas formadas por uma sequência de elementos biestáveis, o que gera um número crescente de configurações de equilíbrio, tanto estáveis quanto instáveis. A análise de alguns destes sistemas é o objetivo desta pesquisa.

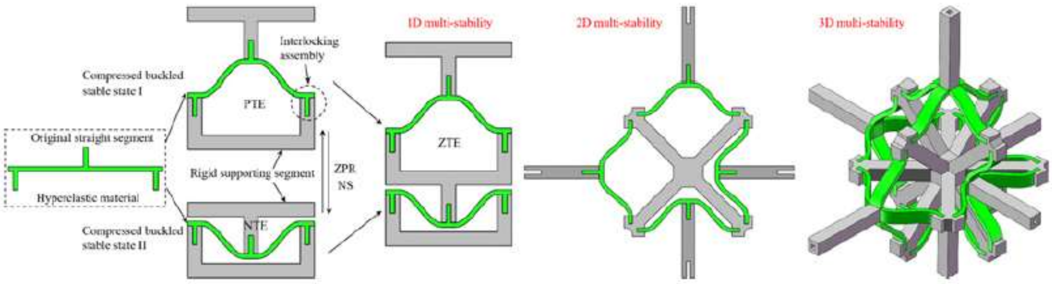




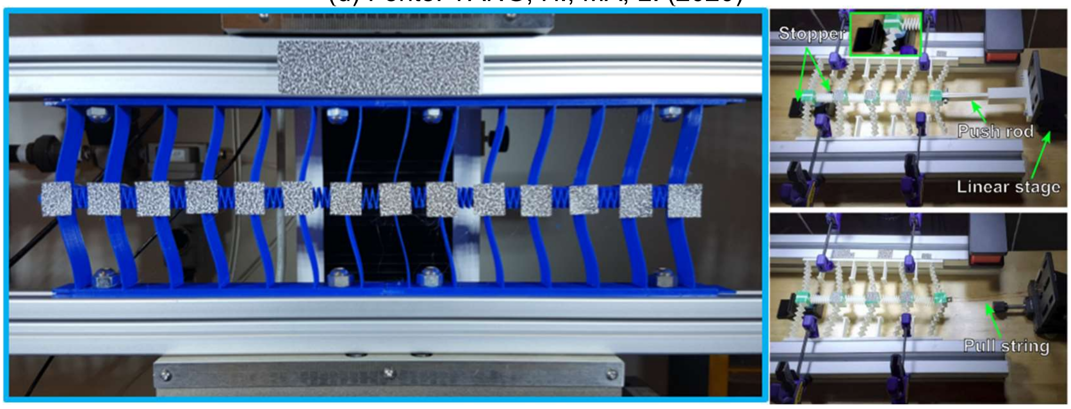
(a) Fonte: HUA, J. et al. (2020) (b) Fonte: TAN, X. et al. (2020)



(c) Fonte: CHE, K. et al. (2017)



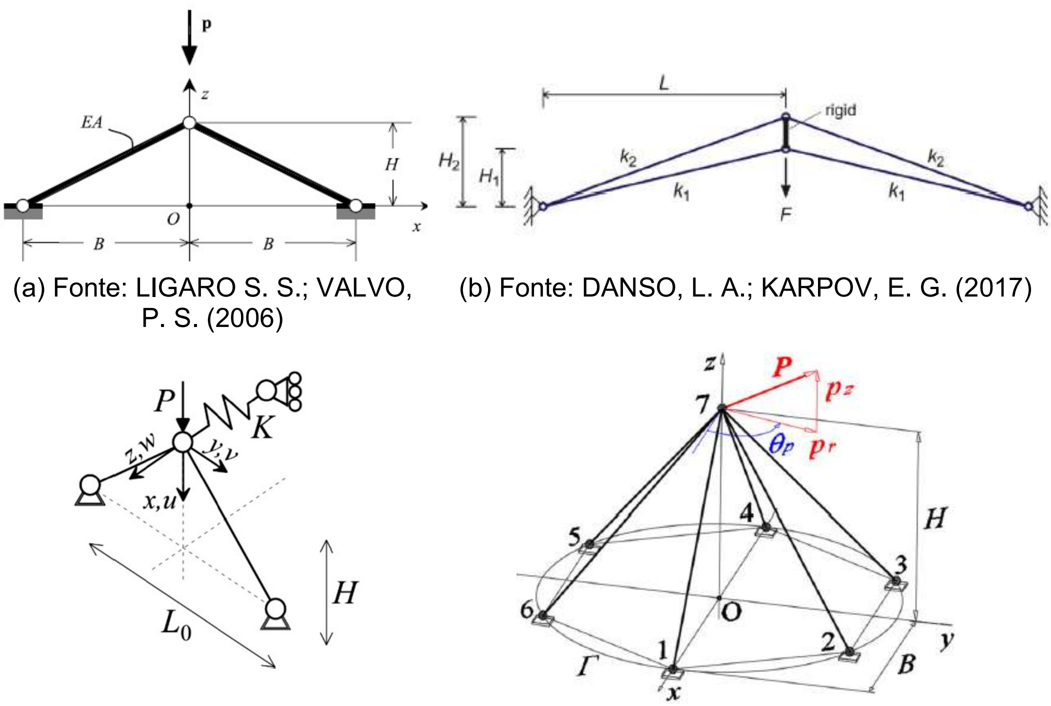
(d) Fonte: YANG, H.; MA, L. (2020)



(e) Fonte: HWANG, M.; ARRIETA, A. F. (2018, 2021)

Figura 1.1 - Exemplos de sistemas multiestáveis propostos na literatura técnica.

O mecanismo mais básico das estruturas multiestáveis é a clássica treliça de von Mises (Mises, 1923; Mises & Ratzersdorfer, 1925), que apresenta duas configurações de equilíbrio estável (Greco & Venturini, 2006; Savi & Nogueira, 2010). A estabilidade estática deste modelo foi estudada por diversos autores, como Pecknold et al. (1985), Ligaro & Valvo (2006), Schiøler & Pellegrino (2007), e Santana et al. (2019a, 2019b, 2021). O comportamento dinâmico não linear foi analisado por Orlando et al. (2018) e Orlando et al. (2019). Este modelo pode ser utilizado para constituir mecanismos de maior complexidade e com a presença de um número crescente de configurações estáveis, como ilustrado na Figura 1.1. Danso & Karpov (2017), por exemplo, analisaram um caso mais complicado da clássica treliça de von Mises, cujo modelo plano era formado por cinco barras, sendo uma destas rígida, responsável por conectar os nós centrais da estrutura, já o modelo tridimensional possuía a forma de um tetraedro, capaz de representar uma célula unitária de uma estrutura periódica. Ainda, inspirados pelas treliças de von Mises e de Bergan, Benedetti et al. (2020) estudaram um modelo representativo do comportamento de diversas estruturas de engenharia, com possibilidade de exibir instabilidade do tipo *snap-through* no plano, ou ainda, bifurcação instável do tipo *pitchfork* e/ou flambagem lateral, levando a uma função potencial com múltiplas configurações de equilíbrio. A Figura 1.2 ilustra alguns destes exemplos.



(a) Fonte: LIGARO S. S.; VALVO, P. S. (2006)

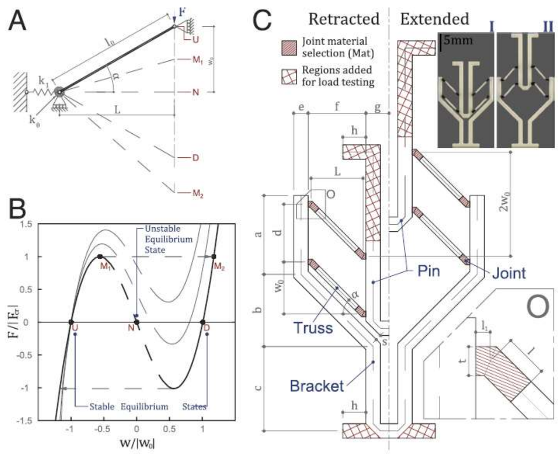
(b) Fonte: DANSO, L. A.; KARPOV, E. G. (2017)

(c) Fonte: BENEDETTI, K. C. B. et al. (2020)

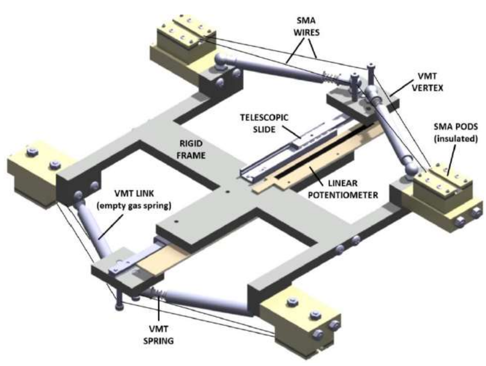
(d) Fonte: ORLANDO, D. et al. (2018) SANTANA, M. et al. (2019a, 2019b, 2021)

Figura 1.2 - Treliça de von Mises e estruturas reticuladas com o mesmo tipo de comportamento.

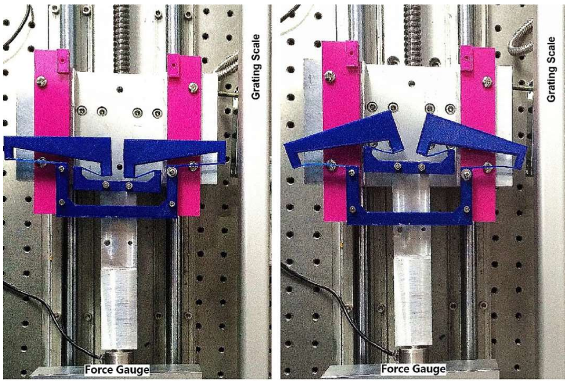
Dentre os estudos sobre mecanismos multiestáveis que têm relação com a presente pesquisa, Casals-Terre & Shkel (2004) estudaram o comportamento dinâmico de um comutador (switch) de forma analítica e experimental, através de um micro mecanismo biestável, acionado por uma força eletrostática aplicada externamente. Haddab et al. (2018) analisaram o processo de fabricação de estruturas biestáveis a partir de duas tecnologias utilizadas atualmente: MEMS e manufatura aditiva FDM, no contexto de aplicações de microrrobótica e mesorobótica. Para isso utilizaram um modelo de barras curvas conectadas no meio do vão. Pham & Wang (2011) desenvolveram um mecanismo quadri-estável, cujas posições de equilíbrio se originam da compressão e flexão combinadas das estruturas de viga do modelo. Protótipos do mecanismo foram fabricados e testados e os resultados comparados com um modelo teórico. Han et al. (2017) desenvolveram dois modelos para mecanismos biestáveis e estudaram seu comportamento dinâmico. Chen et al. (2017) descreveram um atuador biestável como unidade básica de estruturas que assumem diferentes configurações estáveis ao longo da vida útil, gerando uma estrutura espacial tetraédrica com base em princípios hierárquicos. Che et al. (2017) estudaram a sequência de deformação em um metamaterial, a partir de pequenas imperfeições impostas às unidades interligadas. Hua et al. (2020) analisaram as propriedades mecânicas de um metamaterial a partir de parâmetros geométricos da célula unitária, considerando modelos teóricos e simulações numéricas. Tan et al. (2020) propuseram um metamaterial com rigidez negativa que consistia em vigas elásticas pré-comprimidas com possibilidade de programar as propriedades mecânicas através do confinamento lateral. Yang & Ma (2020) desenvolveram uma estratégia de projeto com base no método de montagem intertravada e segmentos de encaixe de fivela para as unidades biestáveis. Este método permitiu alcançar um mecanismo biestável/multiestável completamente simétrico, o que foi comprovado através de análises teóricas, simulações numéricas e verificações experimentais. A Figura 1.3 ilustra alguns dos trabalhos mencionados acima.

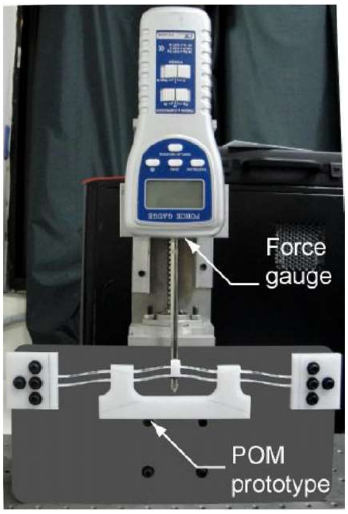


(a) Fonte: CHEN, T. et al. (2017)



(b) Fonte: BARBARINO, S.; GANDHI, F. S. (2014)

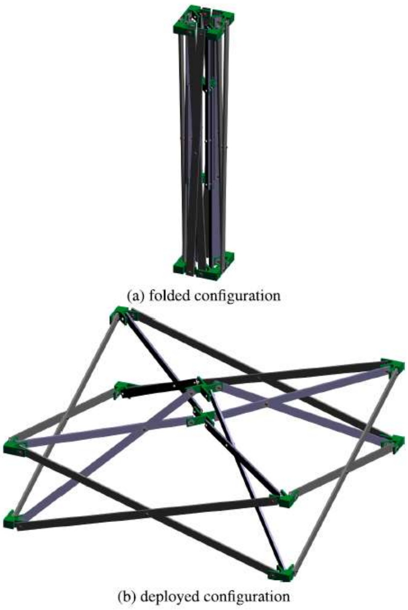


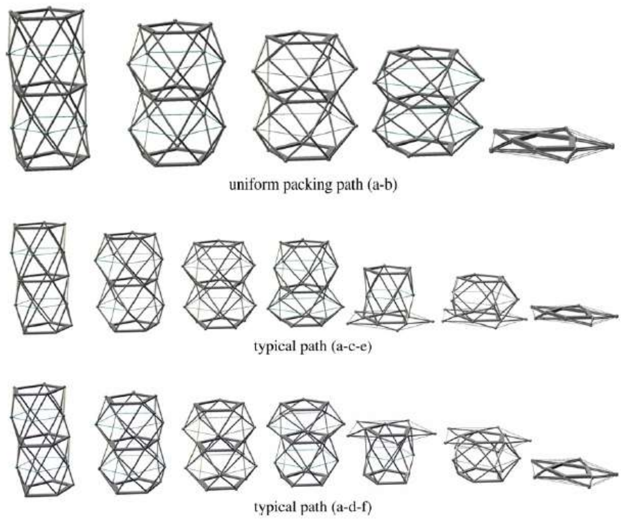


(c) Fonte: HAN, Q. et al. (2017) (d) Fonte: PHAM, H.; WANG, D. (2011)

Figura 1.3 - Outros exemplos de aplicação de elementos multiestáveis.

Dentre as estruturas multiestáveis, destacam-se em engenharia civil as estruturas desmontáveis e dobráveis (Santana et al., 2021), como as observadas na Figura 1.4, com capacidade de atingir grandes deslocamentos e rotações, sem a presença de danos estruturais. Estas estruturas podem apresentar diversas configurações estáveis ao longo de sua vida útil (Santer & Pellegrino, 2008).



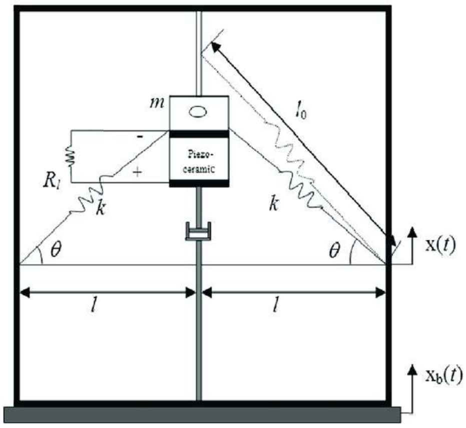


(a) Fonte: SANTANA, M. V. B. et al., 2021) (b) Fonte: FRIEDMAN, N. et al. (2013)

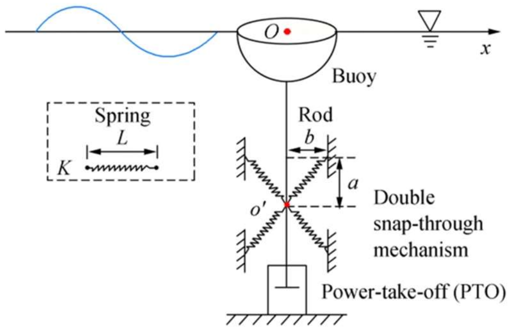
Figura 1.4 - Exemplos de aplicação de elementos multiestáveis em estruturas dobráveis.

Uma área de pesquisa relacionada com os sistemas multiestáveis é a análise dinâmica não linear de osciladores acoplados encontrados em diversas áreas de ciência e engenharia (Pikovsky & Rosenblum, 2015; Papangelo et al., 2019; Lenci, 2022; Rega, 1995). Os estudos já desenvolvidos para osciladores acoplados servem de guia para os possíveis comportamentos e fenômenos observados na presente pesquisa.

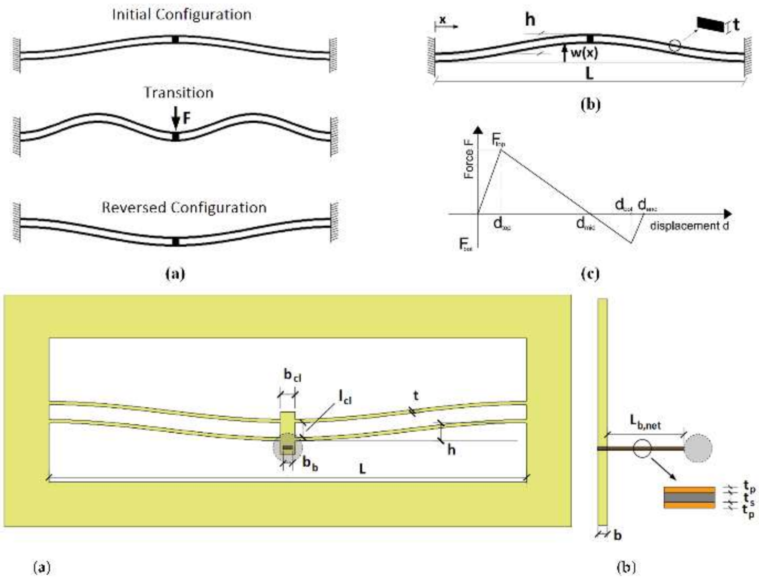
Outra área de aplicação, são os sistemas de colheita de energia, conhecido como *"energy harvesting"*. Estes mecanismos vêm recebendo bastante atenção nas últimas décadas, em consonância com a grande demanda por energia limpa e sustentável para equipamentos de pequeno porte ou redes de sensores sem fio autoalimentadas, levando a redução de custos de manutenção e poluição ambiental gerada por baterias convencionais (Erturk et al., 2009; Fang et al., 2019). Os sistemas piezoelétricos de colheita de energia vibratória têm sido uma forma eficaz de obter sistemas autoalimentados e são cada vez mais utilizados na engenharia. No entanto, a eficiência do armazenamento de energia é por vezes baixa e, em muitos casos, não consegue satisfazer a demanda. Uma forma possível de aumentar a eficiência é utilizar arranjos com diferentes frequências de ressonância, ampliando assim a banda de frequência ressonante e aumentando o número de unidades de coleta. Erturk et al. (2009) apresentam um mecanismo piezo-magnético para aprimorar a geração de energia piezoelétrica, considerando as limitações em relação as vibrações ambientes em condições ressonantes. Litak et al. (2012) estudaram um sistema de colheita de energia com dois osciladores magneto-piezoelétricos acoplados a um circuito elétrico e acionado por meio de um carregamento harmônico. O trabalho investiga a sincronização e escape de um vale potencial. Chiacchiari et al. (2017) analisaram numericamente um coletor de energia eletromagnético biestável e acoplado a um sistema primário diretamente excitado. O objetivo principal do estudo foi investigar o benefício do elemento biestável para a colheita de energia em banda larga, bem como da energia vibratória de baixa amplitude. Wang et al. (2018) realizaram uma investigação numérica e experimental de um sistema não linear de colheita de energia biestável com assimetria na função potencial sob várias excitações, com o objetivo de melhorar seu desempenho. Zhou & Zuo (2018) estudaram a dinâmica não linear de um coletor de energia assimétrico tri-estável para melhorar o desempenho de colheita de energia para diferentes excitações. Com o propósito de obter melhor desempenho na colheita de energia em banda larga, muitas soluções têm sido apresentadas. Os pesquisadores exploraram sucessivamente coletores de energia não lineares monoestáveis, biestáveis e triestáveis. Fang et al. (2019) propuseram um sistema de colheita de energia biestável assimétrico com excitação através de uma estrutura rotativa. Os autores afirmam que a conversão da excitação mecânica em força de impulso ajuda o sistema a saltar para a órbita de alta energia. Lan et al. (2019) investigaram as vantagens na utilização de um sistema com dois graus de liberdade (2GL) em comparação com um sistema de um grau de liberdade (1GL), para melhorar o desempenho de um coletor de energia piezoelétrico. Lopes et al. (2019) estudaram um sistema dinâmico não linear biestável piezo-magnético de colheita de energia com intuito de determinar a influência dos parâmetros da força externa na resposta do sistema. Ma et al. (2022) investigaram as características não lineares e a performance de colheita de energia em mecanismos tri-estáveis e assimétricos. Comparando com o equivalente simétrico, o modelo estudado apresentou maior eficiência. Dentre diversas pesquisas na área, a Figura 1.5 apresenta alguns exemplos com base nas referências citadas neste parágrafo.



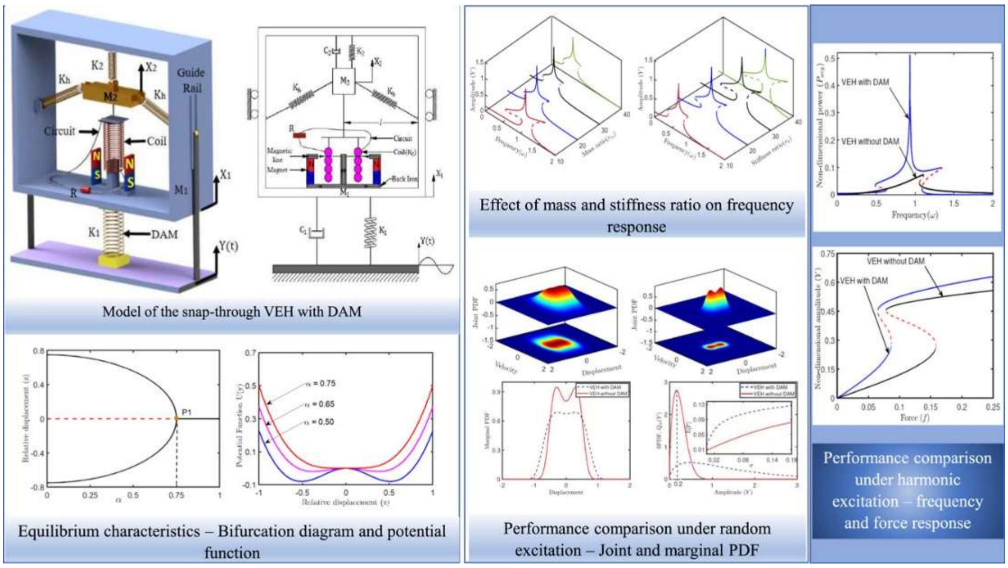
(a) Jiang, W.; Chen, L. (2014)



(b) LIU, B. et al. (2021)



(c) Fonte: Fonte: SPECIALE, A. et al. (2020)



(d) Fonte: DEVARAJAN, K.; B. SANTHOSH, B. (2023)

Figura 1.5 - Aplicações de estruturas multiestáveis na área de colheita de energia.

Apesar deste número crescente de publicações sobre estruturas multiestáveis, poucos estudos têm sido dedicados a estabilidade destas estruturas considerando todos os possíveis caminhos de equilíbrio e suas bifurcações, bem como o efeito de imperfeições, usando a teoria da estabilidade de sistemas não lineares e suas ferramentas numéricas (Thompson & Hunt, 1973; Brush & Almroth, 1975; Thompson & Hunt, 1984; Allgower & Georg, 2003; Bazant & Cedolin, 2010). A mesma inexistência de informações é verificada quanto ao comportamento dinâmico não linear destas estruturas, tanto no que se refere à dinâmica local e suas bifurcações quanto à global, apesar dos grandes progressos observados em termos teóricos e numéricos na área de dinâmica não linear (Guckenheimer & Holmes, 1983; Thompson & Stewart, 1986; Seydel, 1988; Parker & Chua, 1989; Kuznetsov, 1995; Nayfeh & Mook, 2008; Lenci & Rega, 2019; Piqueira et al., 2024).

1.1. Objetivo e Motivação

O objetivo desta tese de doutorado é analisar o comportamento estático e a dinâmica não linear de modelos estruturais formados por uma sequência de estruturas biestáveis que exibem múltiplas configurações de equilíbrio estável. Sua motivação tem por base o crescente interesse na dinâmica não linear de estruturas multiestáveis, identificada a partir da ampla variedade de aplicações em diversos ramos da engenharia, que empregam estruturas capazes de suportar, sem danos, grandes deslocamentos e rotações ao longo de sua vida útil, como ilustrado no item anterior. Estes sistemas podem ser explorados na proteção de estruturas, no controle de vibrações, na colheita de energia, na construção de estruturas dobráveis, em sistemas com a possibilidade de assumirem diversas configurações estáveis ao longo de sua vida útil (*morphing)*, dentre outros. Cabe ressaltar que, apesar do crescente número de publicações nesta área, poucos são os estudos que aprofundam a análise da estabilidade e, em particular, a análise dinâmica não linear destas estruturas usando as ferramentas da teoria da estabilidade elástica e de sistemas dinâmicos, como mencionado anteriormente.

Primeiramente são apresentados dois modelos formados por uma sequência de treliças de von Mises, cada um com dois graus de liberdade (2GL), através dos quais será estabelecida a base teórica e as ferramentas computacionais necessárias ao estudo desta classe de estruturas. Estuda-se o efeito de uma ligação rígida e uma flexível. Posteriormente apresentam-se estruturas com comportamento análogo, compostas por arcos e como exemplo de aplicação, faz-se um estudo de colheita de energia (*energy harvesting*) a partir do modelo multiestável formado por treliças conectadas de forma rígida.

1.2. Escopo do Trabalho

Esta tese está inserida na linha de pesquisa de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas da PUC-Rio e se divide em sete capítulos, incluindo este primeiro relativo à introdução e revisão bibliográfica.

O Capítulo 2 apresenta a formulação dos sistemas estruturais multiestáveis formados por treliças, onde são descritos dois modelos, um com conexão rígida e outro com conexão flexível, sendo as equações de movimento obtidas a partir da função de Lagrange e do princípio de Hamilton.

O Capítulo 3 apresenta a análise dos modelos formados por treliças. Na parte estática, investiga-se o comportamento não linear através da obtenção dos caminhos não lineares de equilíbrio e suas bifurcações, bem como, dos perfis de energia potencial identificados em cada caso. No estudo das vibrações livres, são obtidas as frequências naturais e relação não linear frequência-amplitude. Estuda-se ainda as soluções não lineares nos planos de fase, respostas no tempo e bacias de atração para o problema com amortecimento. No estudo da vibração forçada com carregamento harmônico, apresenta-se uma análise paramétrica com diagramas de bifurcações, planos de fase e bacias de atração das soluções coexistentes, onde os parâmetros de controle utilizados são a frequência e a magnitude de excitação.

O Capítulo 4 apresenta a formulação dos sistemas estruturais multiestáveis formados por arcos obtidos a partir da flambagem de vigas esbeltas considerando, como no Capítulo 2, uma conexão rígida ou flexível.

O Capítulo 5 apresenta uma detalhada análise do comportamento estático e dinâmico não linear dos modelos formados por arcos, seguindo a mesma metodologia e usando as mesmas ferramentas que no Capítulo 3.

O Capítulo 6 traz uma aplicação possível para a classe de estruturas analisadas. Especificamente estuda-se como os modelos acoplados podem ser utilizados na colheita de energia, empregando o modelo estrutural formado por treliças conectadas rigidamente.

Finalmente, no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2
Sistemas Estruturais Formados por Treliças de von Mises

Neste capítulo são descritos os modelos multiestáveis formados por treliças, bem como as equações de movimento, obtidas pelo princípio de Hamilton.

2.1.
Treliças Conectadas por Elemento Rígido

O primeiro modelo estrutural a ser analisado consiste em uma sequência de duas treliças de von Mises conectadas por intermédio de barras rígidas, conforme apresenta a Figura 2.1. A treliça superior possui apoios do 1º gênero posicionados de forma a permitir o deslocamento vertical, transferindo, assim, o carregamento aplicado no nó central para o ponto equivalente da subestrutura seguinte. Por sua vez, a treliça inferior possui deslocamentos de base restringidos por apoios do 2º gênero. Cabe ressaltar que a simetria é mantida, não sendo a perda de simetria considerada na análise.

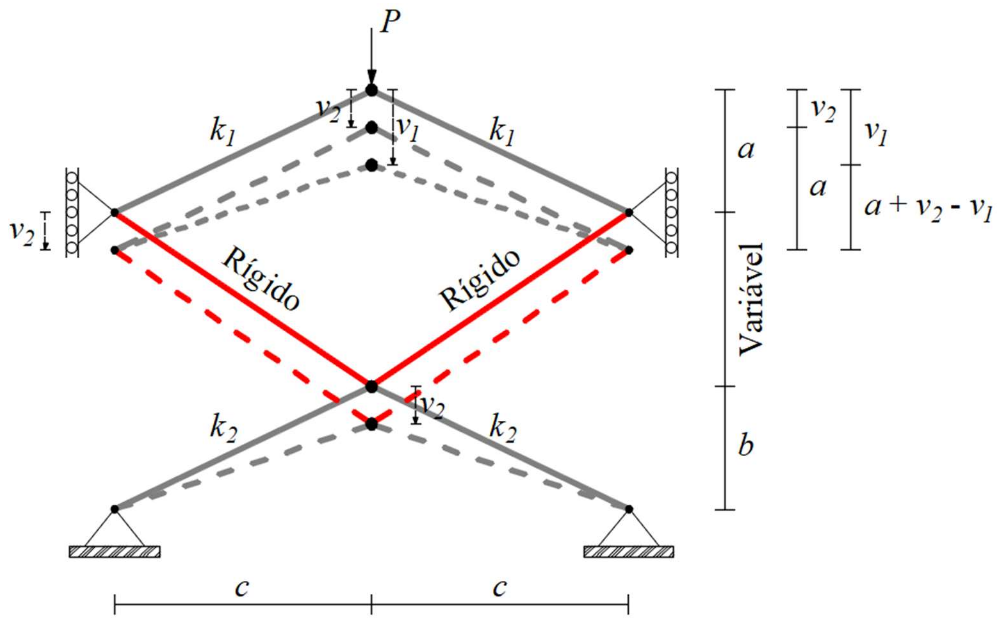


Figura 2.1 - Modelo de duas treliças de von Mises conectadas através de barras rígidas.

Na Figura 2.1, a representa a altura da treliça superior, b, a altura da treliça inferior, c, a metade do comprimento da base, k_1, a rigidez axial das barras da treliça superior, k_2, a rigidez axial das barras da treliça inferior, v_1, o deslocamento vertical do nó central da treliça superior, v_2, o deslocamento vertical do nó central da treliça inferior e P a carga estática aplicada à estrutura. Na representação do modelo, as linhas contínuas denotam a posição indeformada da estrutura, e as tracejadas, a posição deformada, sendo que a cor cinza representa as treliças, e vermelho, os elementos rígidos.

2.1.1. Energia Potencial Total

A partir da geometria do sistema estrutural, Figura 2.1, tem-se o comprimento inicial das barras:

$$L1_i = \sqrt{a^2 + c^2} \quad \text{e} \quad L2_i = \sqrt{b^2 + c^2} \tag{2.1}$$

O comprimento final, após a deformação do sistema decorrente da aplicação da carga estática P, é dado por:

$$L1_f = \sqrt{\left(a + v_2 - v_1\right)^2 + c^2} \quad \text{e} \quad L2_f = \sqrt{\left(b - v_2\right)^2 + c^2} \tag{2.2}$$

Para se obter a deformação axial das barras das treliças, utiliza-se a deformação de engenharia (ε), calculada através da razão entre a variação do comprimento das barras e seu comprimento inicial:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta Li}{Li_i}, \quad i = 1,2. \tag{2.3}$$

ou seja:

$$\varepsilon_1 = \frac{L1_f - L1_i}{L1_i} \quad \text{e} \quad \varepsilon_2 = \frac{L2_f - L2_i}{L2_i} \tag{2.4}$$

Assim, partindo do pressuposto que o material dos elementos estruturais possui comportamento linear-elástico, a energia interna de deformação (U) pode ser calculada a partir da integral:

$$U_i = \int_0^{Li} \frac{1}{2} k_i \left(\varepsilon_i\right)^2 dx, \quad i = 1,2. \tag{2.5}$$

onde dx é o comprimento infinitesimal da barra de comprimento Li e $k_i = A_iE_i$ a rigidez axial, com A_i representando a seção transversal das barras e E_i, o módulo de elasticidade do material que as compõem.

A energia interna de deformação total da estrutura é obtida então, a partir da contribuição de cada barra, ou seja:

$$U = k_1 L1_i \left(\frac{L1_f - L1_i}{L1_i} \right)^2 + k_2 L2_i \left(\frac{L2_f - L2_i}{L2_i} \right)^2 \tag{2.6}$$

Já a energia potencial é igual a menos o trabalho externo realizado pelas cargas aplicadas à estrutura ($V = -W$). Com isso, considerando o carregamento estático vertical aplicado no nó superior da treliça, tem-se que:

$$V = -Pv_1 \tag{2.7}$$

Portanto, tem-se para a energia potencial total da estrutura ($\Pi = U + V$):

$$\Pi = k_1 L1_i \left(\frac{L1_f - L1_i}{L1_i} \right)^2 + k_2 L2_i \left(\frac{L2_f - L2_i}{L2_i} \right)^2 - Pv_1 \tag{2.8}$$

Com o objetivo de facilitar as análises e comparações entre os resultados, são adotados os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\delta_1 = \frac{a}{c},\ \delta_2 = \frac{b}{c},\ \alpha = \frac{k_2}{k_1},\ \lambda = \frac{P}{k_1},\ \chi_1 = \frac{v_1}{a} \text{ e } \chi_2 = \frac{v_2}{b} \tag{2.9}$$

onde, δ_i representa o abatimento da treliça, α é o parâmetro adimensional da rigidez axial das barras da estrutura, λ é o parâmetro adimensional de carga e χ_i é o parâmetro adimensional relativo aos deslocamentos dos nós das treliças, ou seja, os graus de liberdade do problema.

Deste modo se obtêm a energia potencial total na forma adimensional:

$$\begin{aligned} \Pi = {} & k_1 c\sqrt{\delta_1^2+1}\left(\frac{\sqrt{(\delta_1 - \delta_1\chi_1 + \delta_2\chi_2)^2 + 1}}{\sqrt{\delta_1^2+1}} - 1 \right)^2 \\ & + \alpha k_1 c\sqrt{\delta_2^2+1}\left(\frac{\sqrt{(\delta_2 - \delta_2\chi_2)^2 + 1}}{\sqrt{\delta_2^2+1}} - 1 \right)^2 - \lambda k_1 \chi_1 \delta_1 c \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\bar{\Pi} = \sqrt{\delta_1^2 + 1}\left(\frac{\sqrt{(\delta_1 - \delta_1\chi_1 + \delta_2\chi_2)^2 + 1}}{\sqrt{\delta_1^2 + 1}} - 1\right)^2 + \alpha\sqrt{\delta_2^2 + 1}\left(\frac{\sqrt{(\delta_2 - \delta_2\chi_2)^2 + 1}}{\sqrt{\delta_2^2 + 1}} - 1\right)^2 - \lambda\chi_1\delta_1 \tag{2.11}$$

onde $\bar{\Pi} = \Pi / k_1 c$.

2.1.2. Energia Cinética

Para obtenção da energia cinética, *T,* do sistema estrutural, considera-se um comprimento infinitesimal ds_i da barra Li com massa por unidade de comprimento $dm_i = \rho A_i ds_i$ deslocando v_i', onde ρ representa a massa específica e A_i a área da seção transversal indeformada da barra. Assim tem-se que:

$$dT = \frac{dm_i}{2}\dot{v}_i'^2, \quad i = 1,2. \tag{2.12}$$

Os deslocamentos v_i' variam linearmente ao longo de cada barra, sendo dados por:

$$v_1' = v_2 + s_1\frac{v_1}{L1_i} \quad \text{e} \quad v_2' = s_2\frac{v_2}{L2_i} \tag{2.13}$$

Derivando-se os deslocamentos com relação ao tempo, tem-se as velocidades:

$$\dot{v}_1' = \dot{v}_2 + s_1\frac{\dot{v}_1}{L1_i} \quad \text{e} \quad \dot{v}_2' = s_2\frac{\dot{v}_2}{L2_i} \tag{2.14}$$

Assim, a energia cinética da estrutura pode ser calculada através da soma das contribuições de cada uma das quatro barras da estrutura, a saber:

$$T = 2\left[\frac{\rho A_1}{2}\int_0^{L1_i}\left(\dot{v}_2^2 + \frac{s_1^2\dot{v}_1^2}{L1_i^2}\right)ds_1\right] + 2\left(\frac{\rho A_2}{2L2_i^2}\int_0^{L2_i} s_2^2 ds_2 \dot{v}_2^2\right) \tag{2.15}$$

Integrando (2.15), tem-se:

$$T = \frac{\rho A_1\sqrt{a^2 + c^2}}{3}\dot{v}_1^2 + \left(\rho A_1\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{\rho A_2\sqrt{b^2 + c^2}}{3}\right)\dot{v}_2^2 \tag{2.16}$$

Substituindo os parâmetros adimensionais das Equações (2.9), tem-se:

$$T = \frac{\rho A_1 \delta_1^2 c^3 \sqrt{\delta_1^2+1}}{3} \dot{\chi}_1^2 + \rho \delta_2^2 c^3 \left(A_1 \sqrt{\delta_1^2+1} + \frac{A_2 \sqrt{\delta_2^2+1}}{3} \right) \dot{\chi}_2^2 \tag{2.17}$$

Considerando ainda o tempo na forma adimensional $\tau = \omega_0 t$, onde $\omega_0^2 = k_1 / \rho A_1 c^2$ e o parâmetro adimensional que relaciona as áreas das seções transversais das barras das treliças superior e inferior, $\psi = A_2/A_1$, tem-se a energia cinética na forma adimensional:

$$\overline{T} = \frac{\delta_1^2 \sqrt{\delta_1^2+1}}{3} \chi_{1,\tau}^{\ 2} + \delta_2^2 \left(\sqrt{\delta_1^2+1} + \frac{\psi \sqrt{\delta_2^2+1}}{3} \right) \chi_{2,\tau}^{\ 2} \tag{2.18}$$

onde $\overline{T} = T/k_1 c$.

Nas análises desenvolvidas neste trabalho foram consideradas áreas transversais iguais para as barras das duas treliças, ou seja, $A_1 = A_2$, desta forma o parâmetro adimensional ψ é unitário ao longo nas equações, sendo suprimido nos próximos capítulos.

2.1.3. Equações de Movimento

A partir da função de Lagrange, $L = T - \Pi$, e do princípio de Hamilton levando às equações de Euler-Lagrange, têm-se as equações de movimento em termos da coordenada generalizada v_i:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T)}{\partial \dot{v}_i} - \frac{\partial(T)}{\partial v_i} + \frac{\partial(\Pi)}{\partial v_i} = Q_i \tag{2.19}$$

onde Q_i representa as forças não conservativas.

A partir da Equação (2.19) e considerando os parâmetros adimensionais, obtêm-se as seguintes equações não lineares de movimento:

$$\begin{gathered} \frac{2\delta_1 \sqrt{\delta_1^2+1}}{3} \chi_{1,\tau\tau} + 2\xi_1 \delta_1 \chi_{1,\tau} \\ + \frac{2\left(\sqrt{(\delta_1 + \chi_2\delta_2 - \chi_1\delta_1)^2+1} - \sqrt{\delta_1^2+1}\right)(-\delta_1 - \chi_2\delta_2 + \chi_1\delta_1)}{\sqrt{\delta_1^2+1}\sqrt{(\delta_1 + \chi_2\delta_2 - \chi_1\delta_1)^2+1}} - \lambda = \overline{Q} \end{gathered} \tag{2.20}$$

$$2\delta_2\left(\sqrt{\delta_1^2+1}+\frac{\psi\sqrt{\delta_2^2+1}}{3}\right)\chi_{2,\tau\tau}+2\xi_2\delta_2\chi_{2,\tau}$$
$$+\frac{2\left(\sqrt{(\delta_1+\chi_2\delta_2-\chi_1\delta_1)^2+1}-\sqrt{\delta_1^2+1}\right)(\delta_1+\chi_2\delta_2-\chi_1\delta_1)}{\sqrt{\delta_1^2+1}\sqrt{(\delta_1+\chi_2\delta_2-\chi_1\delta_1)^2+1}} \tag{2.21}$$
$$+\frac{2\alpha\left(\sqrt{(\delta_2-\chi_2\delta_2)^2+1}-\sqrt{\delta_2^2+1}\right)(-\delta_2+\chi_2\delta_2)}{\sqrt{\delta_2^2+1}\sqrt{(\delta_2-\chi_2\delta_2)^2+1}}=0$$

onde $2\xi_i\delta_i\chi_{i,\tau}$ é o amortecimento viscoso linear e $\bar{Q}=Q/k_1$ o carregamento harmônico aplicado ao nó central da treliça superior.

Na análise das equações de movimento foram utilizadas as ferramentas computacionais desenvolvidas em teses na linha de pesquisa de Instabilidade e Dinâmica das Estruturas da PUC-Rio (Del Prado, 2001; Silva, 2008; Orlando, 2010), com a integração numérica realizada através do método de Kunge-Kutta de 4ª ordem, os desenvolvimentos algébricos utilizando o programa de álgebra simbólica MAPLE (2020) e as implementações computacionais através da linguagem de programação C++.

2.2. Treliças Conectadas por Elemento Flexível

O segundo modelo estrutural, também é formado por uma sequência de duas treliças de von Mises. No entanto, neste caso, a ligação entre as subestruturas ocorre através de uma mola linear de rigidez K_c que conecta os nós centrais das treliças. Deste modo, a mola é responsável pela transferência do carregamento e acoplamento entre as duas subestruturas, sendo os quatro apoios de 2º gênero, restringindo os deslocamentos das extremidades das barras das duas treliças. A Figura 2.2 mostra o sistema, considerando as mesmas variáveis utilizadas no primeiro modelo estrutural e mesmo esquema gráfico, com linhas contínuas identificando a posição indeformada, tracejadas, a posição deformada, sendo em cinza representado as treliças, e em vermelho, o elemento flexível.

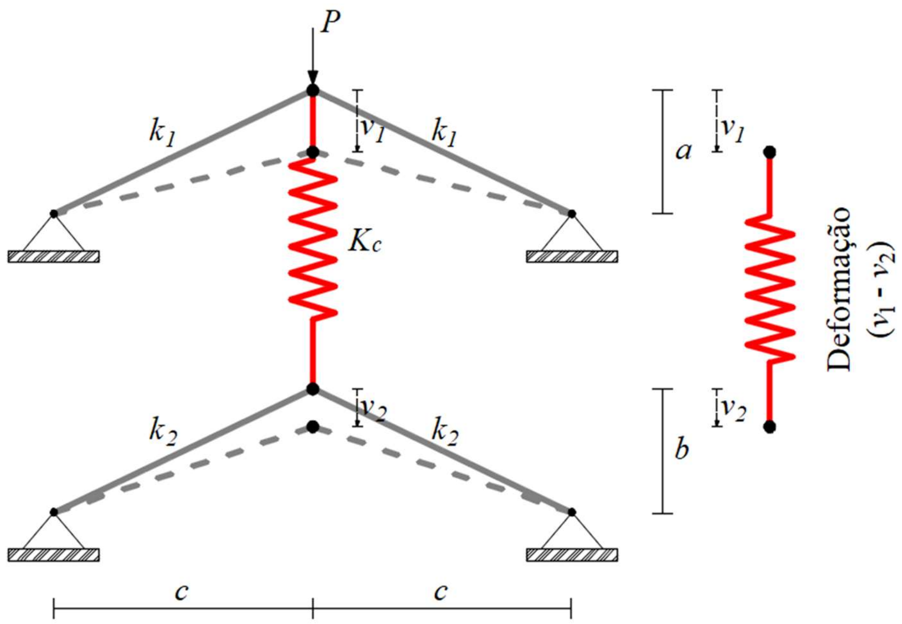


Figura 2.2 - Duas treliças de von Mises conectadas por uma mola linear de rigidez K_c.

2.2.1. Energia Potencial Total

Neste segundo modelo estrutural, os comprimentos iniciais e finais das barras das treliças são dados por:

$$L1_i = \sqrt{a^2 + c^2} \quad \text{e} \quad L2_i = \sqrt{b^2 + c^2} \tag{2.22}$$

$$L1_f = \sqrt{\left(a - v_1\right)^2 + c^2} \quad \text{e} \quad L2_f = \sqrt{\left(b - v_2\right)^2 + c^2} \tag{2.23}$$

Considerando que o material dos elementos estruturais tem comportamento linear-elástico, a energia interna de deformação das barras é dada por:

$$U_B = k_1 L1_i \left(\frac{L1_f - L1_i}{L1_i} \right)^2 + k_2 L2_i \left(\frac{L2_f - L2_i}{L2_i} \right)^2 \tag{2.24}$$

e a da mola, por:

$$U_M = \frac{1}{2} K_c \left(v_1 - v_2 \right)^2 \tag{2.25}$$

A energia potencial pode ser calculada a partir da Equação (2.7) e portanto, tem-se a energia potencial total da estrutura:

$$\Pi = \frac{1}{2} K \left(v_1 - v_2 \right)^2 + k_1 L1_i \left(\frac{L1_f - L1_i}{L1_i} \right)^2 + k_2 L2_i \left(\frac{L2_f - L2_i}{L2_i} \right)^2 - P v_1 \tag{2.26}$$

Utilizando os mesmos parâmetros adimensionais apresentados nas Equações (2.9) e acrescentando o parâmetro adimensional, que representa a rigidez da mola linear através da relação entre a rigidez da mola e a rigidez axial das barras da treliça superior:

$$\kappa = \frac{K_c}{k_1} \tag{2.27}$$

a energia de deformação do segundo modelo é dada na forma adimensional, por:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi} = {} & \frac{1}{2}\kappa\left(\chi_1\delta_1 - \chi_2\delta_2\right)^2 + \sqrt{\delta_1^{\,2}+1}\left(\frac{\sqrt{\left(\delta_1 - \delta_1\chi_1\right)^2+1}}{\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}} - 1\right)^2 \\ & + \alpha\sqrt{\delta_2^{\,2}+1}\left(\frac{\sqrt{\left(\delta_2 - \delta_2\chi_2\right)^2+1}}{\sqrt{\delta_2^{\,2}+1}} - 1\right)^2 - \lambda\chi_1\delta_1 \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.2.2. Energia Cinética

A energia cinética do segundo sistema estrutural pode ser calculada através da Equação (2.12), considerando:

$$v_1' = s_1\frac{v_1}{L1_i} \quad \text{e} \quad v_2' = s_2\frac{v_2}{L2_i} \tag{2.29}$$

Derivando-se os deslocamentos com relação ao tempo, tem-se para as velocidades:

$$\dot{v}_1' = s_1\frac{\dot{v}_1}{L1_i} \quad \text{e} \quad \dot{v}_2' = s_2\frac{\dot{v}_2}{L2_i} \tag{2.30}$$

A energia cinética do problema pode ser calculada através da soma das contribuições de cada barra da estrutura:

$$\begin{aligned} T &= 2\left(\frac{\rho A_1}{2L1_i^{\,2}}\int_0^{L_1} s_1^{\,2}ds_1\dot{v}_1^{\,2}\right) + 2\left(\frac{\rho A_2}{2L2_i^{\,2}}\int_0^{L_2} s_2^{\,2}ds_2\dot{v}_2^{\,2}\right) \\ &= \frac{\rho}{3}\left(A_1\sqrt{a^2+c^2}\,\dot{v}_1^{\,2} + A_2\sqrt{b^2+c^2}\,\dot{v}_2^{\,2}\right) \end{aligned} \tag{2.31}$$

Substituindo os parâmetros adimensionais das Equações (2.9), tem-se:

$$\overline{T} = \frac{1}{3}\left(\delta_1^{\,2}\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}\,\chi_{1,\tau}^{\;\;2} + \psi\delta_2^{\,2}\sqrt{\delta_2^{\,2}+1}\,\chi_{2,\tau}^{\;\;2}\right) \tag{2.32}$$

2.2.3. Equações de Movimento

A partir da Equação (2.19), considerando as parcelas de energias potencial total e cinética, Equações (2.28) e (2.32), e adicionando ainda a parcela de amortecimento $2\xi_i\delta_i\chi_{i,\tau}$, tem-se as duas equações de movimento para o segundo modelo estrutural:

$$\begin{aligned}&\frac{2\delta_1\sqrt{\delta_1^2+1}}{3}\chi_{1,\tau\tau}+2\xi_1\delta_1\chi_{1,\tau}+\kappa(\chi_1\delta_1-\chi_2\delta_2)\\&+\frac{2\left(\sqrt{(\delta_1-\chi_1\delta_1)^2+1}-\sqrt{\delta_1^2+1}\right)(-\delta_1+\chi_1\delta_1)}{\sqrt{\delta_1^2+1}\sqrt{(\delta_1-\chi_1\delta_1)^2+1}}-\lambda=\bar{Q}\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}&\frac{2\psi\delta_2\sqrt{\delta_2^2+1}}{3}\chi_{2,\tau\tau}+2\xi_2\delta_2\chi_{2,\tau}-\kappa(\chi_1\delta_1-\chi_2\delta_2)\\&+\frac{2\alpha\left(\sqrt{(\delta_2-\chi_2\delta_2)^2+1}-\sqrt{\delta_2^2+1}\right)(-\delta_2+\chi_2\delta_2)}{\sqrt{\delta_2^2+1}\sqrt{(\delta_2-\chi_2\delta_2)^2+1}}=0\end{aligned} \tag{2.34}$$

3
Análise de Sistemas Multiestáveis Formados por Treliças de von Mises

Nesta seção apresentam-se as análises estática e dinâmica dos sistemas estruturais definidos no capítulo anterior, que consistem nos modelos formados por treliças conectadas por elemento rígido ou flexível.

3.1. Análise Estática

Na análise estática o comportamento da estrutura pode ser estudado a partir dos caminhos não lineares de equilíbrio e das superfícies e curvas de energia potencial dos modelos, de modo a avaliar a sensibilidade do sistema a mudanças nos parâmetros geométricos e no carregamento estático aplicado e investigar a multiestabilidade.

As equações não lineares de equilíbrio são obtidas através do princípio da energia potencial mínima (teorema de Lagrange). Desta forma, deve-se derivar a energia potencial total com relação às coordenadas generalizadas:

$$\frac{d\overline{\Pi}}{d\chi_i} = 0, \quad i = 1,2. \tag{3.1}$$

Assim, as equações não lineares de equilíbrio dos modelos para o caso em que as treliças são conectadas rigidamente são:

$$-\frac{2\delta_1\left(\dfrac{\sqrt{(\delta_1-\delta_1\chi_1+\delta_2\chi_2)^2+1}}{\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}}-1\right)(\delta_1-\delta_1\chi_1+\delta_2\chi_2)}{\sqrt{(\delta_1-\delta_1\chi_1+\delta_2\chi_2)^2+1}}-\lambda\delta_1=0 \tag{3.2}$$

$$\frac{2\delta_2\left(\frac{\sqrt{\left(\delta_1-\delta_1\chi_1+\delta_2\chi_2\right)^2+1}}{\sqrt{\delta_1^2+1}}-1\right)\left(\delta_1-\delta_1\chi_1+\delta_2\chi_2\right)}{\sqrt{\left(\delta_1-\delta_1\chi_1+\delta_2\chi_2\right)^2+1}}
-\frac{2\delta_2\alpha\left(\frac{\sqrt{\left(\delta_2-\delta_2\chi_2\right)^2+1}}{\sqrt{\delta_2^2+1}}-1\right)\left(\delta_2-\delta_2\chi_2\right)}{\sqrt{\left(\delta_2-\delta_2\chi_2\right)^2+1}}=0 \tag{3.3}$$

e quando se utiliza um elemento flexível na conexão são:

$$\kappa\delta_1\left(\chi_1\delta_1-\chi_2\delta_2\right)-\frac{2\delta_1\left(\frac{\sqrt{\left(\delta_1-\delta_1\chi_1\right)^2+1}}{\sqrt{\delta_1^2+1}}-1\right)\left(\delta_1-\delta_1\chi_1\right)}{\sqrt{\left(\delta_1-\delta_1\chi_1\right)^2+1}}-\lambda\delta_1=0 \tag{3.4}$$

$$-\kappa\delta_2\left(\chi_1\delta_1-\chi_2\delta_2\right)-\frac{2\alpha\delta_2\left(\frac{\sqrt{\left(\delta_2-\delta_2\chi_2\right)^2+1}}{\sqrt{\delta_2^2+1}}-1\right)\left(\delta_2-\delta_2\chi_2\right)}{\sqrt{\left(\delta_2-\delta_2\chi_2\right)^2+1}}=0 \tag{3.5}$$

Em posse destas equações e utilizando o programa de álgebra simbólica MAPLE (2020), aplica-se o método de Newton-Raphson associado a técnicas de continuação, de modo a obter as configurações e caminhos de equilíbrio da estrutura. A estabilidade (equilíbrio estável ou instável) é definida utilizando-se o princípio da energia potencial mínima (teorema de Lagrange), a partir da análise dos autovalores da forma quadrática, sendo o equilíbrio estável quando esta é positiva definida, e instável, quando indefinida ou negativa definida. O caso crítico corresponde à forma quadrática positiva semi-definida.

3.1.1. Modelo Conectado por Elemento Rígido

Para condução da análise paramétrica, foram escolhidos sete conjuntos de parâmetros adimensionais representativos do comportamento estrutural. Os parâmetros selecionados são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Casos estabelecidos para análise paramétrica: Modelo de treliças conectadas por elementos rígidos.

Caso	α	δ_1	δ_2
01	1.0	0.050	0.050
02	1.0	0.075	0.075
03	1.0	0.100	0.100
04	1.0	0.050	0.051
05	1.0	0.051	0.050
06	0.9	0.050	0.050
07	1.1	0.050	0.050

Considerando que α estabelece uma relação entre a rigidez das barras k_1 e k_2, os cinco primeiros casos consideram o mesmo valor de rigidez para as duas treliças acopladas. Já os casos 06 e 07 apresentam uma diferença de 10% entre estes valores, primeiramente com $k_1 > k_2$, e depois com $k_1 < k_2$. Os coeficientes δ_1 e δ_2 correspondem à razão entre o comprimento da altura da treliça (a e b) e metade do comprimento de sua base (c), para as treliças superior e inferior, respectivamente. Deste modo, consideram-se estruturas onde a altura é menor que metade da base (valores de abatimento menores que 1/2), representando o caso de treliças abatidas. Quanto menor o valor adotado de δ_i, mais abatida é a treliça. Para os casos de 01 a 03, bem como, 06 e 07, é considerado que as treliças (superior e inferior) possuem mesmo valor de abatimento, enquanto nos casos 04 e 05, se estabelece uma pequena diferença de 0.001. Isto, com base em aplicações de pesquisas anteriores, conforme apresentado na Introdução, onde a estrutura formada por uma sequência de elementos similares, pode apresentar diferenças oriundas de imperfeições construtivas.

3.1.1.1. Caminho Não Linear de Equilíbrio

Inicialmente, para um melhor entendimento dos resultados e do efeito da sequência de estruturas biestáveis no comportamento estrutural, a Figura 3.1 mostra as curvas equipotenciais para o sistema estrutural conectado por elementos rígidos, para o caso descarregado ($\lambda = 0.0$). Observa-se a existência de nove configurações de equilíbrio da estrutura, a saber: quatro configurações estáveis, representadas pelos pontos de mínimo (0,0), (2,0), (2,2) e (4,2), em azul, e cinco configurações instáveis, sendo um ponto de máximo, (2,1), em vermelho, e quatro pontos de sela (1,0), (1,1), (3,1) e (3,2), em preto.

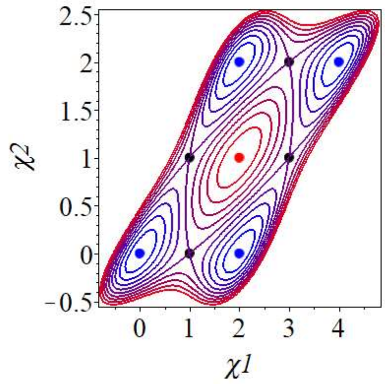
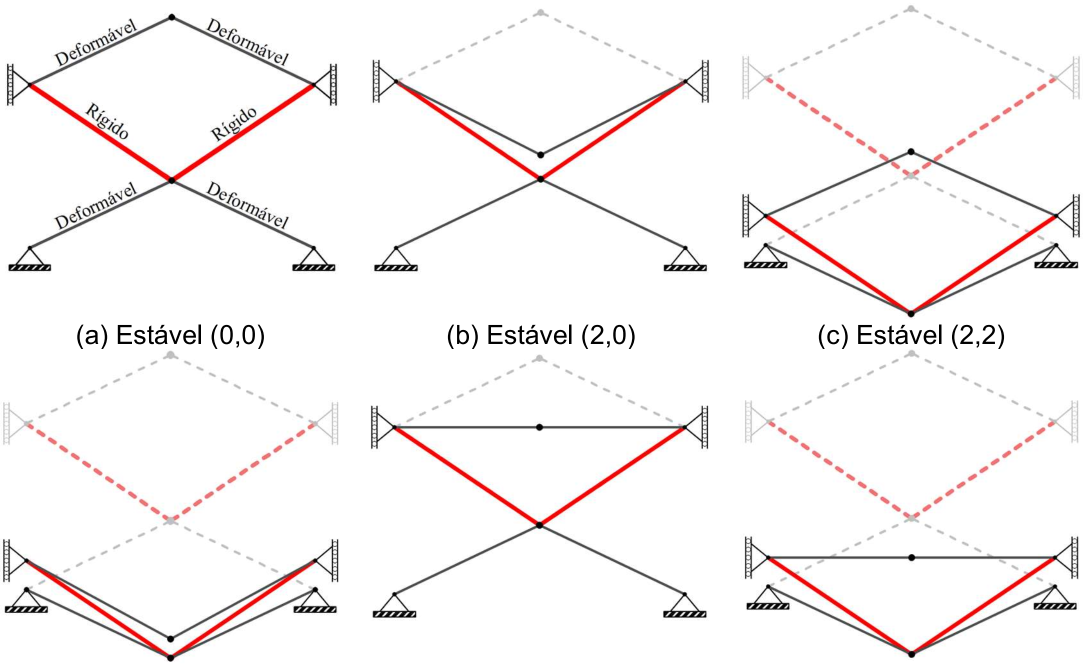


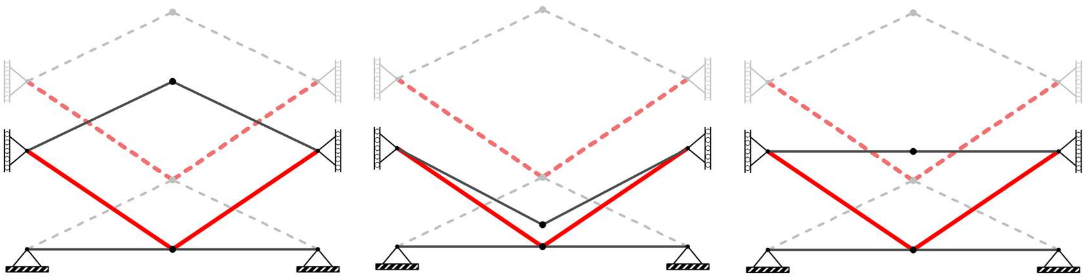
Figura 3.1 - Curvas de nível de energia potencial para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos, estrutura descarregada. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

A Figura 3.2 ilustra estas configurações de equilíbrio, onde representa-se em linha tracejada a configuração inicial da estrutura e em linha contínua a configuração de equilíbrio para o caso da estrutura descarregada, sendo em cinza as barras da treliça e em vermelho os elementos rígidos que conectam o sistema.



(a) Estável (0,0)　(b) Estável (2,0)　(c) Estável (2,2)

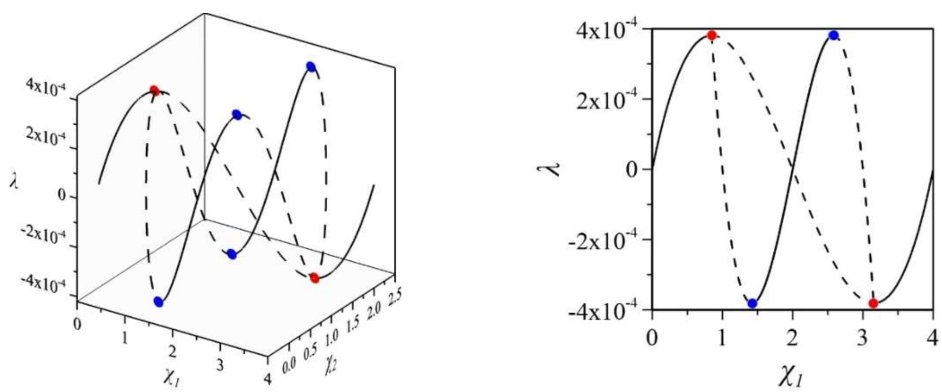
(d) Estável (4,2)　(e) Instável em χ_1 (1,0)　(f) Instável em χ_1 (3,2)



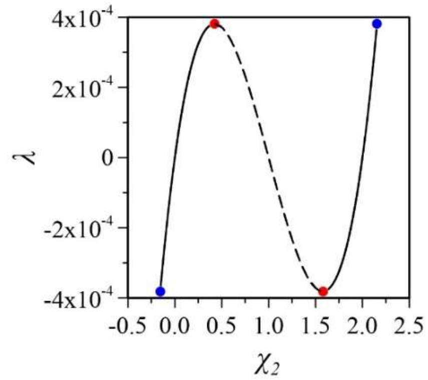
(g) Instável em χ_2 (1,1) (h) Instável em χ_2 (3,1) (i) Instável em χ_1 e χ_2 (2,1)

Figura 3.2 - Configurações de equilíbrio para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos, estrutura descarregada. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

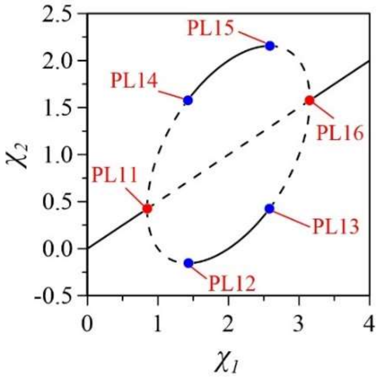
Para os caminhos não lineares de equilíbrio faz-se uso da representação clássica: segmentos contínuos identificam trechos estáveis, e tracejados, trechos instáveis. No caminho não linear ilustrado na Figura 3.3, são considerados os parâmetros $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ (duas treliças abatidas com mesma geometria e rigidez). Observa-se um comportamento típico de sistemas abatidos, com o caminho fundamental de equilíbrio apresentando dois pontos limite (bifurcações) destacados através dos pontos vermelhos no gráfico. O valor da carga crítica para este caso é igual a $\lambda_{cr} = \pm\, 3.81 \times 10^{-4}$. Nestes pontos, em função do acoplamento estrutural, ocorre uma bifurcação simétrica instável, com os caminhos resultantes conectando os dois pontos limites do caminho fundamental, e, cada ramo apresentando dois trechos estáveis onde pontos limites adicionais aparecem (em azul), com carga equivalente à observada no caminho fundamental. As Figura 3.3(b-d) apresentam projeções em três planos dos caminhos não lineares, evidenciando os pontos limite e a bifurcação simétrica instável.



(a) 3D (b) Plano $\chi_1 \times \lambda$



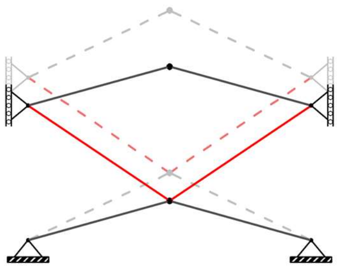
(c) Plano $\chi_2 \times \lambda$



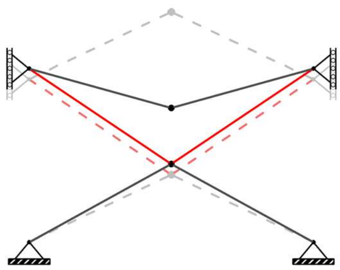
(d) Plano $\chi_1 \times \chi_2$

Figura 3.3 - Caminho não linear de equilíbrio em 3D e vistas nos planos, para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

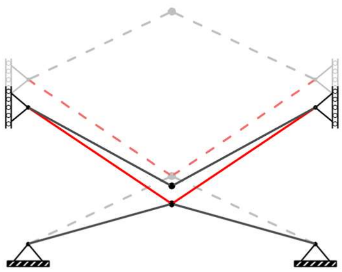
A Figura 3.4 ilustra a configuração da estrutura nos seis pontos limite identificados na Figura 3.3(d) como PL1i, com i variando de 1 a 6.



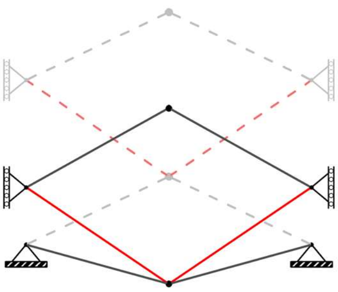
(a) PL11 (0.84, 0.42)



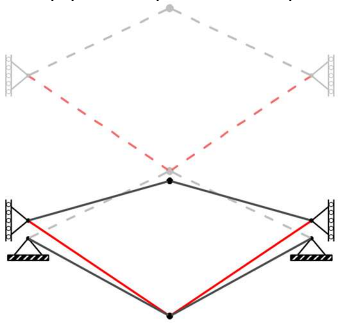
(b) PL12 (1.43, -0.16)



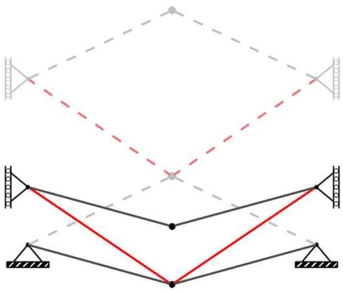
(c) PL13 (2.57, 0.41)



(d) PL14 (1.43, 1.58)



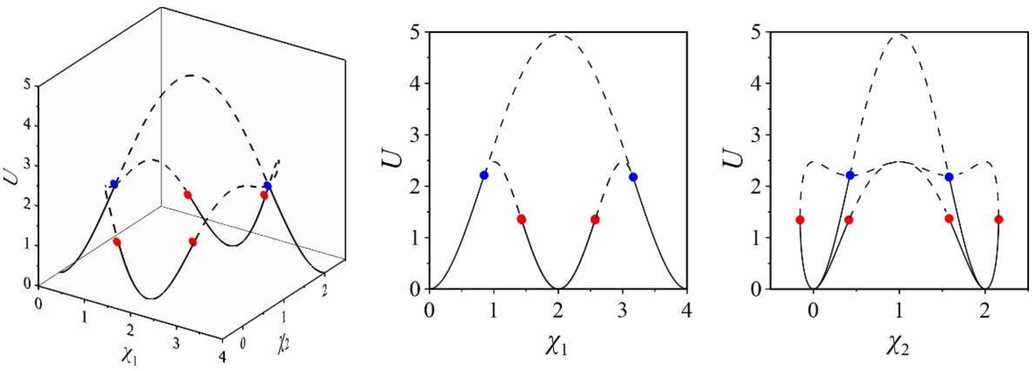
(e) PL15 (2.57, 2.16)



(f) PL16 (3.16, 1.58)

Figura 3.4 - Configurações de equilíbrio da estrutura nos pontos limites, para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

A Figura 3.5 mostra a variação da energia interna de deformação (U) ao longo do caminho não linear de equilíbrio representado na Figura 3.3. Percebe-se um aumento de energia ao longo dos ramos estáveis até que se atinge o ponto limite, onde ocorre o *snap-through*, e a energia armazenada é liberada. Embora as cargas críticas para uma determinada geometria tenham o mesmo valor absoluto, a energia de deformação nos pontos críticos ao longo do caminho fundamental é maior do que nos pontos críticos localizados nos caminhos bifurcados. Se, através do controle de deslocamento, a estrutura puder seguir os ramos instáveis, uma quantidade bem maior de energia poderá ser armazenada, atingindo um máximo na configuração onde as duas treliças encontram-se na posição horizontal (Figura 3.2(i)), momento em que a força normal compressiva atinge seu valor máximo.



(a) $U \times \chi_1 \times \chi_2$ (b) $\chi_1 \times U$ (c) $\chi_2 \times U$

Figura 3.5 - Variação da energia interna de deformação ao longo do caminho não linear de equilíbrio para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ ($U \times 10^5$).

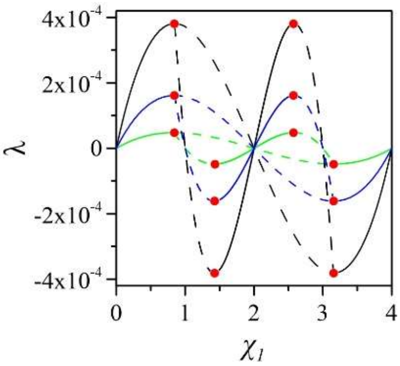
Estes resultados exemplificam a complexidade da resposta de sistemas multiestáveis e espera-se que o número de caminhos de equilíbrio e pontos limite aumente de forma constante com o número de elementos biestáveis associados. Deste modo, a energia potencial correspondente a n treliças seria uma hiper superfície, uma variedade n-dimensional inserida em um espaço dimensional (n + 1). Sabendo que a treliça de von Mises possui 3 configurações de equilíbrio, o número de configurações de equilíbrio (N_{eq}) para estrutura formada por n treliças rigidamente conectadas e descarregada, é dado por:

$$N_{eq} = 3^n \tag{3.6}$$

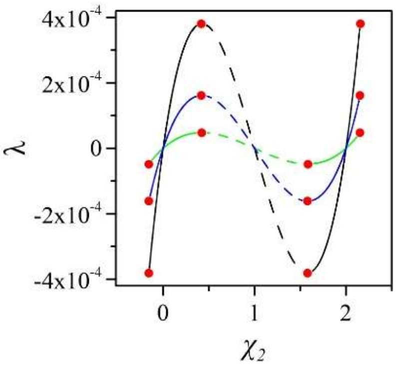
dos quais 2^n correspondem a configurações de equilíbrio estáveis (mínimos) no espaço de configuração n-dimensional, onde cada treliça está na posição estável inicial ou invertida, e $3^n - 2^n$ corresponde as posições de equilíbrio instáveis. Dentre as configurações instáveis existe um ponto de máximo, com todas as treliças na posição horizontal, e posições de sela, com as treliças nas posições inicial ou invertida e pelo menos uma na configuração horizontal. Por exemplo, quatro treliças conectadas possuem 81 configurações de equilíbrio, sendo 16 estáveis.

Na Figura 3.6 comparam-se os caminhos de equilíbrio variando o abatimento das treliças (em verde, $\delta_1 = \delta_2 = 0.050$, em azul, $\delta_1 = \delta_2 = 0.075$, e em preto, $\delta_1 = \delta_2$

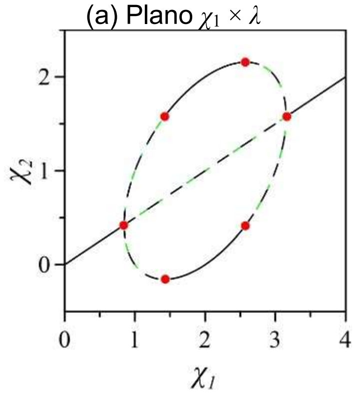
= 0.100). Percebe-se que o comportamento é o mesmo observado anteriormente, diferenciando apenas as cargas críticas identificadas em cada caso, sendo que crescem à medida que a altura da treliça aumenta (δ_i aumenta, $\lambda_{cr} \approx \delta^{3.41}$), como esperado. A Tabela 3.2 mostra os valores de carga crítica para cada caso. Na Figura 3.6(c), nota-se que todos os caminhos têm a mesma projeção no plano dos deslocamentos (Plano $\chi_1 \times \chi_2$), indicando que os pontos críticos ocorrem para o mesmo par de coordenadas. Neste plano, o caminho fundamental descreve uma linha reta, com $\chi_1 = \chi_2/2$, enquanto os ramos bifurcados exibem uma projeção elíptica. Os dois ramos bifurcados também apresentam uma forma de S (Figura 3.6(c)) com dois pontos limites que delimitam a região central estável ao longo dos caminhos secundários de equilíbrio. Ressalte-se que para treliças não abatidas, a hipótese de simetria não é válida (Fonseca & Gonçalves, 2022). A Figura 3.6(d) mostra ainda a variação da carga crítica com o abatimento das treliças ($\delta_1 = \delta_2$), os pontos em azul marcam as cargas críticas para os casos analisados nas Figura 3.6(a-c).



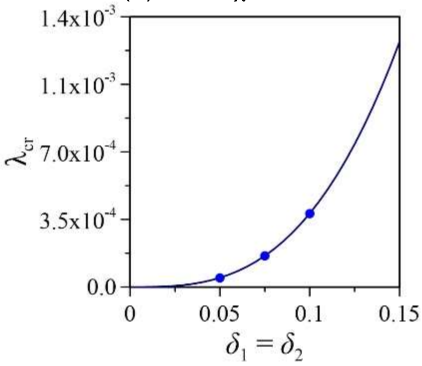
(a) Plano $\chi_1 \times \lambda$



(b) Plano $\chi_2 \times \lambda$



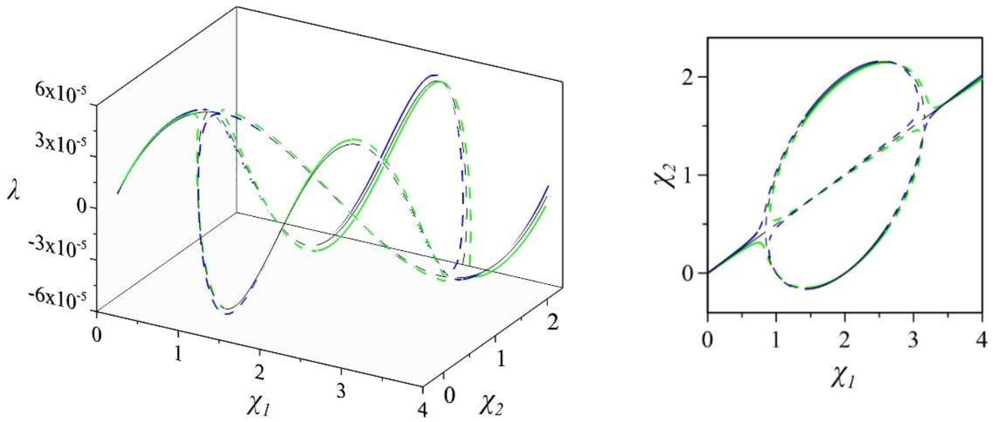
(c) Plano $\chi_1 \times \chi_2$



(d) Variação da carga crítica λ_{cr} com o abatimento $\delta_1 = \delta_2$

Figura 3.6 - Planos dos caminhos não lineares de equilíbrio para diferentes abatimentos ($\delta_1 = \delta_2$) e variação da carga crítica com o abatimento, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.050$ (verde), $\delta_1 = \delta_2 = 0.075$ (azul) e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ (preto).

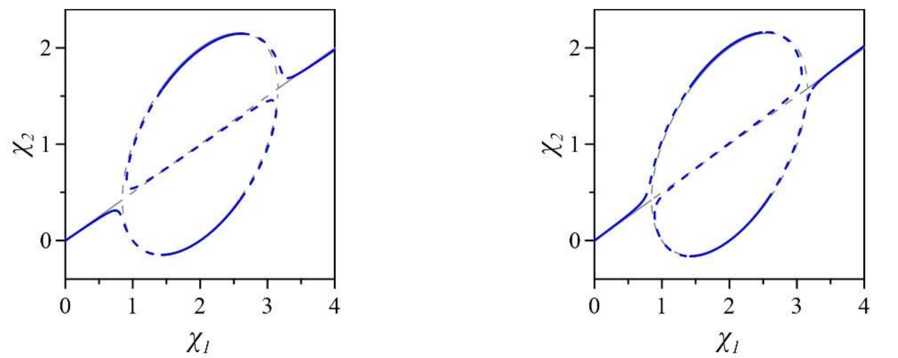
Investiga-se agora, o efeito de pequenas diferenças (imperfeições) entre as duas treliças, seja no abatimento ou na rigidez axial das barras. Na Figura 3.7, considera-se α = 1.0 e tem-se o caminho não linear de equilíbrio para o caso perfeito, $\delta_1 = \delta_2 = 0.050$, em preto, e com diferença de 0.1% nos abatimentos, com $\delta_1 = 0.050$ e $\delta_2 = 0.051$, em verde, e $\delta_1 = 0.051$ e $\delta_2 = 0.050$, em azul. A imperfeição (diferença entre os abatimentos) destrói as duas bifurcações simétricas instáveis, obtendo-se apenas pontos limites com o surgimento de um caminho preferencial de equilíbrio. A diferença entre os caminhos com a imperfeição imposta está na direção a ser seguida, estando os caminhos em lados opostos, como ilustrado na Figura 3.7(b) e nas Figura 3.8(a,b). Percebe-se que quando se obtêm um abatimento menor para a treliça superior o caminho preferencial tende à direita (verde) inicialmente, já quando este abatimento é menor na treliça inferior, o caminho tende à esquerda (azul). No entanto, a variação na carga crítica é muito pequena, indicando pequena sensibilidade a imperfeições (Thompson & Hunt, 1984).



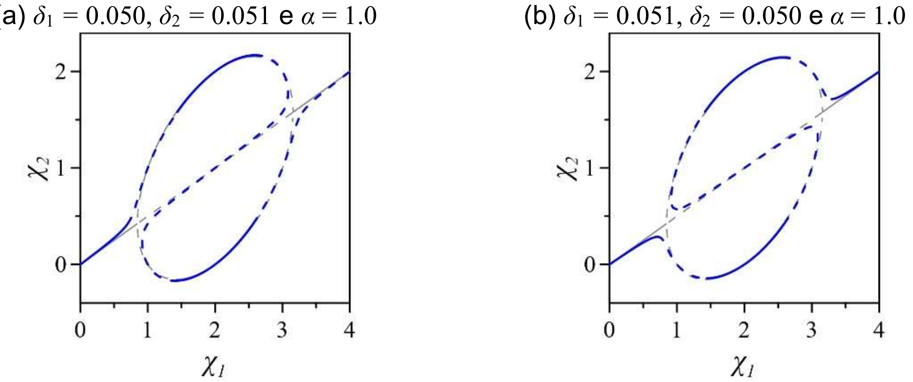
(a) 3D (b) $\chi_1 \times \chi_2$

Figura 3.7 - Caminhos não lineares de equilíbrio para casos com diferenças entre os abatimentos ($\delta_1 \neq \delta_2$), modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.050$ (preto), $\delta_1 = 0.050$ e $\delta_2 = 0.051$ (verde) e $\delta_1 = 0.051$ e $\delta_2 = 0.050$ (azul).

O mesmo efeito é observado quando se considera uma pequena diferença na rigidez das duas treliças, como mostra a Figura 3.8, onde se representa em azul os caminhos com imperfeições e em cinza o caso perfeito. Neste caso, o caminho preferencial dobra à esquerda para $k_1 > k_2$ ($\alpha = 0.9$, Figura 3.8(c)), e à direita, quando $k_1 < k_2$ ($\alpha = 1.1$, Figura 3.8(d)). Mostra-se ainda a solução do caso ideal em cinza para efeito comparativo.



(a) $\delta_1 = 0.050$, $\delta_2 = 0.051$ e $\alpha = 1.0$ (b) $\delta_1 = 0.051$, $\delta_2 = 0.050$ e $\alpha = 1.0$



(c) $\delta_1 = 0.050$, $\delta_2 = 0.050$ e $\alpha = 0.9$ (d) $\delta_1 = 0.050$, $\delta_2 = 0.050$ e $\alpha = 1.1$

Figura 3.8 - Caminhos não lineares de equilíbrio considerando imperfeições nos abatimentos ou nas rigidezes axiais, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Planos $\chi_1 \times \chi_2$. Em azul representa-se as imperfeições e em cinza o caso perfeito ($\delta_1 = \delta_2 = 0.050$ e $\alpha = 1.0$).

Observa-se na Tabela 3.2 uma mudança significativa da carga crítica apenas quando a treliça inferior possui menor rigidez. A Figura 3.9 mostra a variação da carga crítica com o parâmetro adimensional α, verifica-se um crescimento linear da carga crítica com α para $k_1 > k_2$. A partir de $k_1 = k_2$, $\alpha = 1$, ponto em vermelho, a carga crítica se mantém constante.

Tabela 3.2 - Cargas críticas para os casos definidos para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos.

Caso	α	δ_1	δ_2	λ_{cr} ($\times 10^{-4}$)
01	1.0	0.050	0.050	0.48
02	1.0	0.075	0.075	1.61
03	1.0	0.100	0.100	3.81
04	1.0	0.050	0.051	0.48
05	1.0	0.051	0.050	0.48
06	0.9	0.050	0.050	0.43
07	1.1	0.050	0.050	0.48

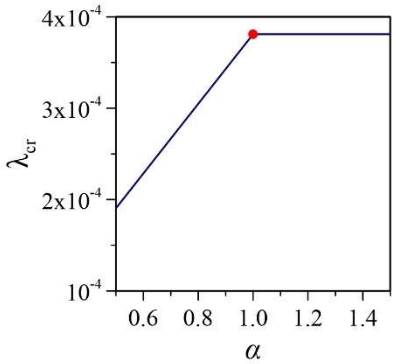
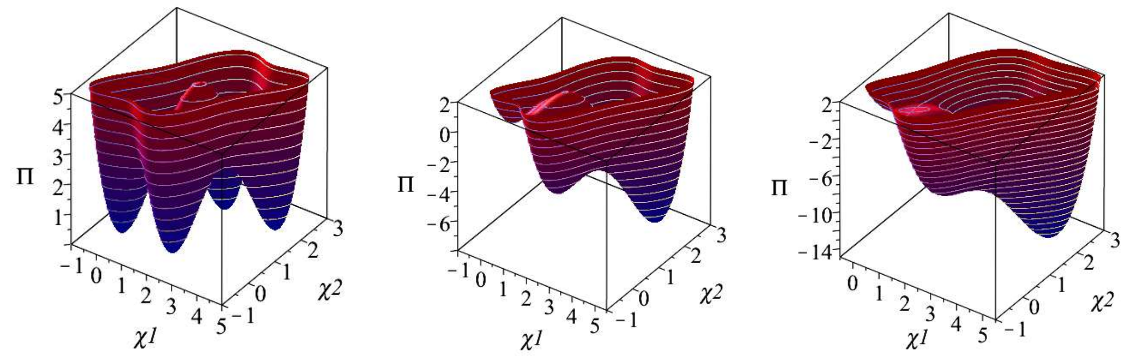


Figura 3.9 - Variação da carga crítica com o parâmetro adimensional que relaciona as rigidezes axiais das treliças α, considerando $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$. Modelo de treliças conectadas por elementos rígidos.

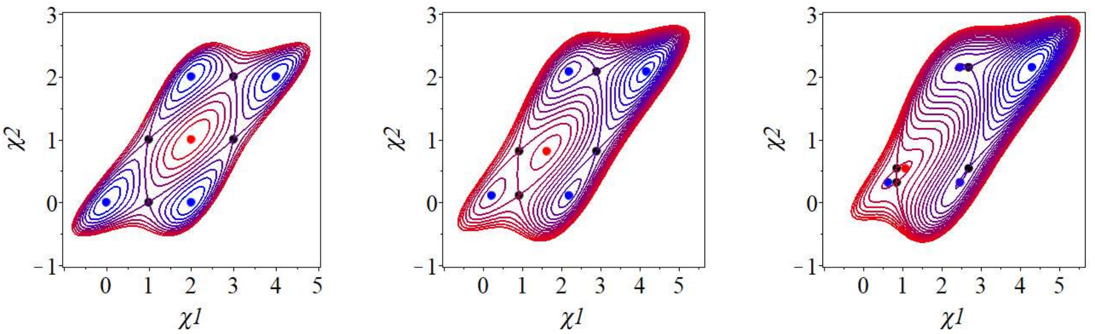
3.1.1.2.
Perfis de Energia

De acordo com Kochmann & Bertoldi (2017), instabilidades, sejam em nível micro ou macroestrutural, estão associadas a uma superfície de energia potencial não convexa, que pode levar a transições de domínio, localização, formação de padrões ou flambagem estrutural. Assim, para auxiliar o entendimento do comportamento estático não linear do sistema multiestável em análise, se conduz uma investigação da influência dos parâmetros adimensionais no comportamento global, utilizando as curvas de energia equipotencial e visualizações em 3D da energia potencial total.

A Figura 3.10 mostra a energia potencial para $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ (caso 03), através das superfícies de energia em 3D, Figura 3.10(a-c), e pelas curvas equipotenciais, Figura 3.10(d-f), considerando a estrutura descarregada e níveis crescentes de carregamento estático. Quando $\lambda = 0.0$, Figura 3.10(a,d), o caráter multiestável e as simetrias da função energia tornam-se evidentes ao se constatar a presença de quatro vales potenciais de igual profundidade e geometria, um ponto de máximo e quatro selas com o mesmo nível de energia, como já mostrado na Figura 3.1 e repetida na Figura 3.10(d), que revela as simetrias inerentes ao sistema descarregado, onde verifica-se a presença de quatro órbitas heteroclínicas que delimitam os quatro vales potenciais associados às quatro soluções estáveis. A carga estática leva à perda de simetria, como mostram as Figura 3.10(b,c) e Figura 3.10(e,f). O aumento do carregamento provoca uma redução gradativa da região vinculada à configuração de equilíbrio pré-crítica e um aumento da região associada à configuração pós-crítica (4,2), com dois vales potenciais intermediários relativos às duas treliças com concavidades opostas. Assim, à medida que a carga cresce, o vale potencial pré-crítico diminui em tamanho e profundidade com as selas que o delimitam se aproximando e, deste modo, aparecem órbitas que envolvem três soluções estáveis. No caso crítico as duas selas colidem com os pontos de máximo e mínimo, gerando a bifurcação múltipla observada na Figura 3.3. O mesmo ocorre com as duas selas restantes e os dois pontos de mínimo intermediários, indicando que para valores superiores à carga crítica resta apenas uma posição de equilíbrio estável, com as duas treliças com concavidade invertida.



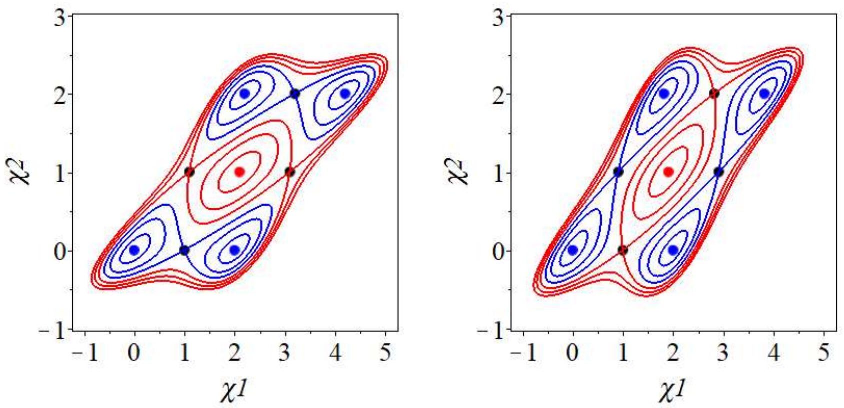
(a) $\lambda = 0.0$ (b) $\lambda = 1.8 \times 10^{-4}$ (c) $\lambda = 3.6 \times 10^{-4}$



(d) $\lambda = 0.0$ (e) $\lambda = 1.8 \times 10^{-4}$ (f) $\lambda = 3.6 \times 10^{-4}$

Figura 3.10 - Superfícies e curvas de nível de energia potencial para diferentes níveis de carga estática, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

A Figura 3.11 apresenta as curvas equipotenciais para quando $\delta_1 \neq \delta_2$, nestes casos percebe-se uma mudança no nível de energia dos pontos de sela, com surgimento de duas curvas homoclínicas no mesmo nível, e duas curvas heteroclínicas em outro. Esses múltiplos vales potenciais e suas variações, em decorrência da aplicação da carga estática, implicam em uma influência significativa na resposta dinâmica dos sistemas multiestáveis.



(a) $\delta_1 = 0.10$ e $\delta_2 = 0.11$ (b) $\delta_1 = 0.11$ e $\delta_2 = 0.10$

Figura 3.11 - Curvas de energia equipotenciais considerando a influência de pequenas variações na geometria do sistema, com $\delta_1 \neq \delta_2$ (imperfeição geométrica), evidenciando as conexões homoclínicas e heretoclínicas. Modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\lambda = 0.0$.

3.1.2.
Treliças Conectadas por Elemento Flexível

Para conduzir as análises do segundo modelo estrutural, foram estabelecidos quatorze casos específicos, sendo introduzido neste caso o parâmetro adimensional κ, devido a inserção da mola linear na estrutura, conforme Tabela 3.3 apresentada a seguir:

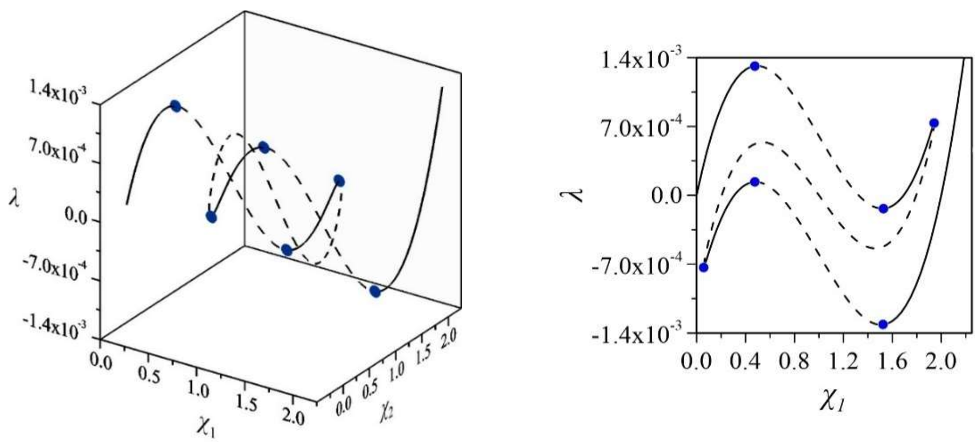
Tabela 3.3 - Casos estabelecidos para análise paramétrica: Modelo de treliças conectadas por elemento flexível.

Caso	α	δ_1	δ_2	κ
01	1.0	0.08	0.08	0.005
02	1.0	0.10	0.10	0.005
03	1.0	0.12	0.12	0.005
04	1.0	0.14	0.14	0.005
05	1.0	0.10	0.10	0.000
06	1.0	0.10	0.10	0.003
07	1.0	0.10	0.10	0.006
08	1.0	0.10	0.10	0.009
09	1.0	0.10	0.10	0.012
10	1.0	0.10	0.10	0.100
11	1.0	0.10	0.12	0.005
12	1.0	0.12	0.10	0.005
13	0.8	0.10	0.10	0.005
14	1.2	0.10	0.10	0.005

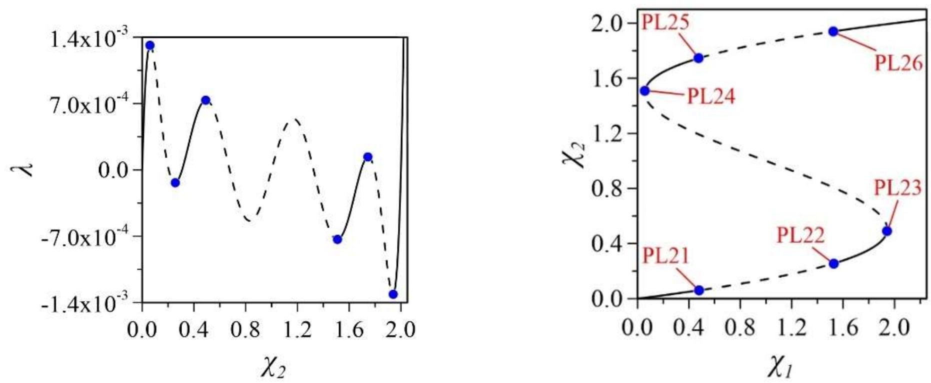
Os casos estabelecidos para o segundo modelo estrutural seguem o mesmo princípio estipulado anteriormente, fixando valores para os parâmetros e variando uma característica específica. Os primeiros casos, de 01 a 04, se propõem a comparar situações com abatimentos diferentes entre as treliças superior e inferior, considerando a estrutura sem imperfeições, com $\delta_1 = \delta_2$. Os casos de 05 a 10 buscam verificar o comportamento mediante valores de rigidez diferentes para a mola, através do parâmetro adimensional κ. Os casos de 11 a 14 são estabelecidos para verificar a influência de imperfeições, sendo que para 11 e 12 se estabelece abatimentos diferentes entre as treliças, e para 13 e 14 se define uma diferença de 20% entre as rigidezes das barras das subestruturas, primeiramente com $k_1 > k_2$, e depois com $k_1 < k_2$.

3.1.2.1. Caminho Não Linear de Equilíbrio

Para o modelo de treliças conectado através da mola de rigidez adimensional κ, a Figura 3.12 apresenta o caminho não linear de equilíbrio considerando os parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$ e $\kappa = 0.005$. Diferente do caso anterior, onde se tinha ligação através de barras rígidas, o acoplamento flexível não conduz a bifurcações simétricas. Se obtém um único caminho de equilíbrio com quatro trechos estáveis e três instáveis, delimitados por pontos limites (representados em azul) e um complexo comportamento não linear. Nas Figura 3.12(b-d), mostram-se projeções do caminho não linear, que permitem observar com maior clareza os trechos estáveis e instáveis e os deslocamentos dos nós das duas treliças com a aplicação do carregamento. A carga crítica neste caso é de $\lambda_{cr} = 1.315 \times 10^{-3}$. A Figura 3.13 ilustra a forma da estrutura nos seis pontos limites identificados na Figura 3.12(d) como PL2i, com i variando de 1 a 6.

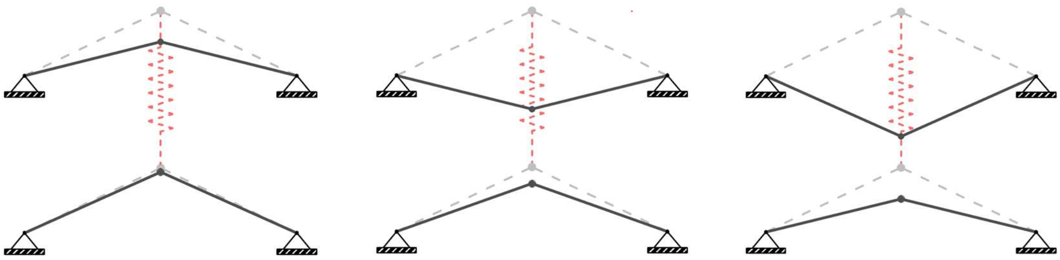


(a) 3D (b) Plano $\chi_1 \times \lambda$

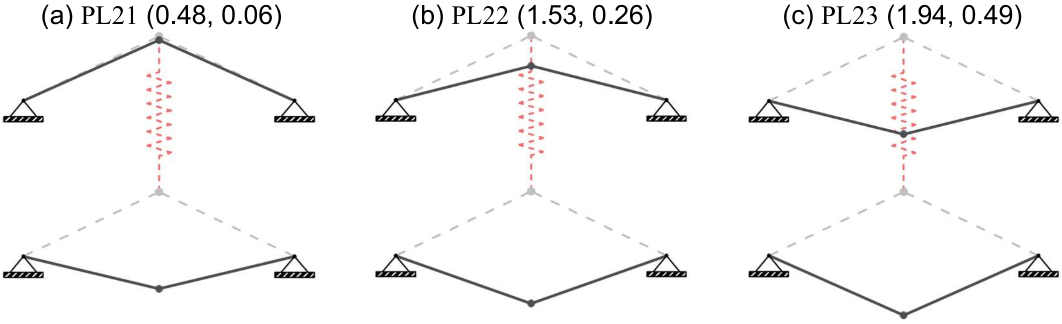


(c) Plano $\chi_2 \times \lambda$ (d) Plano $\chi_1 \times \chi_2$

Figura 3.12 - Caminho não linear de equilíbrio em 3D e vistas nos planos, para o modelo de treliças conectado por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$ e $\kappa = 0.005$.



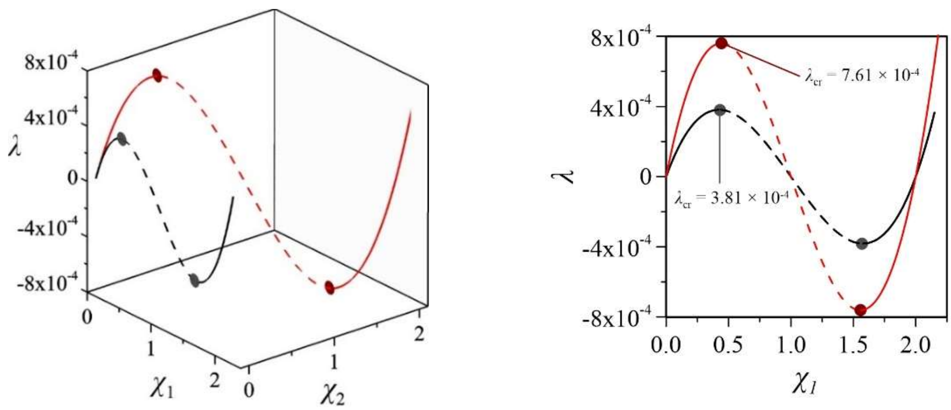
(a) PL21 (0.48, 0.06) (b) PL22 (1.53, 0.26) (c) PL23 (1.94, 0.49)



(d) PL24 (0.06, 1.51) (e) PL25 (0.47, 1.75) (f) PL26 (1.52, 1.94)

Figura 3.13 - Configurações de equilíbrio da estrutura nos pontos limites, para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$ e $\kappa = 0.005$.

A Figura 3.14 mostra o efeito da rigidez da mola, considerando $\kappa = 0.000$ (em preto) e $\kappa = 0.100$ (em vermelho), e mantendo os parâmetros $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$, nos caminhos não lineares de equilíbrio. Ao considerar a rigidez nula, as treliças tornam-se desacopladas, e desta forma, a treliça superior apresenta apenas o caminho não linear em $\chi_2 = 0$. Para $\kappa = 0.100$, a rigidez da mola é suficientemente alta e corresponde a uma conexão quase rígida entre as treliças, fazendo com que elas tendam a deslocar-se com mesma magnitude como uma única treliça com o dobro da rigidez, evidenciado nos carregamentos limites expressos na Figura 3.14(b), com $\lambda_{cr} = 3.81 \times 10^{-4}$ para $\kappa = 0.000$ e $\lambda_{cr} = 7.61 \times 10^{-4}$ para $\kappa = 0.100$.



(a) 3D (b) Plano $\chi_1 \times \lambda$

Figura 3.14 - Caminhos não lineares de equilíbrio em 3D e vistas nos planos, para valores de rigidez κ extremos, modelo de treliças conectado por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$ e $\kappa = 0.000$ (preto) e $\kappa = 0.100$ (vermelho).

A Figura 3.15 mostra a variação da carga crítica entre os limites estabelecidos acima. Pode-se notar inicialmente um aumento quase linear da carga limite à medida que κ aumenta. A partir de $\kappa \approx 0.01$ há uma variação não linear da carga tendendo a um patamar para valores elevados de κ, e a carga crítica se aproxima assintoticamente de 7.62×10^{-4} que é a carga crítica de uma treliça com o dobro da rigidez de um elemento isolado, Figura 3.14(b).

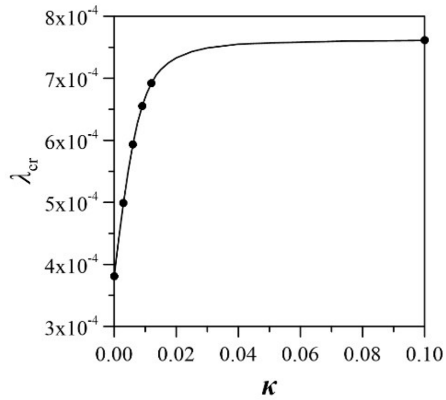
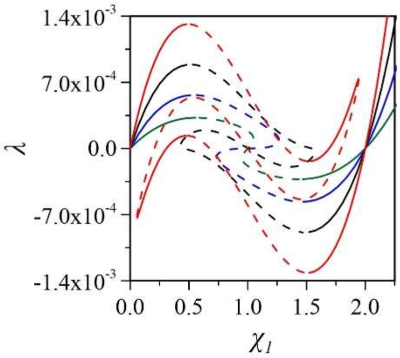
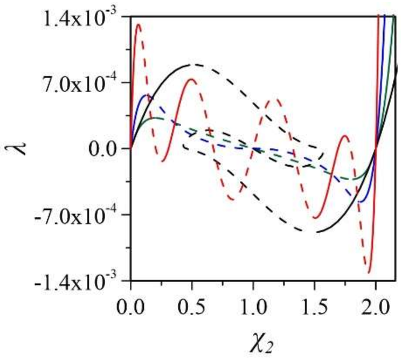


Figura 3.15 - Relação rigidez da mola linear e carga crítica de perda de estabilidade, modelo de treliças conectado por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$.

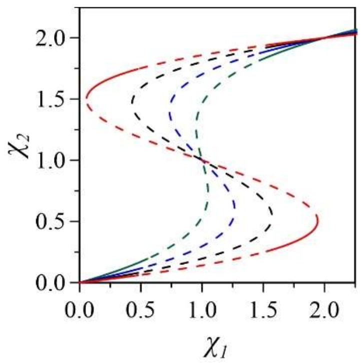
A Figura 3.16 ilustra a influência do abatimento das treliças na resposta não linear do sistema, considerando $\delta_1 = \delta_2$, mantendo $\kappa = 0.005$. À medida que a treliça se torna mais abatida (δ_i decresce), observa-se a esperada redução da carga crítica (Tabela 3.4) e os dois trechos estáveis intermediários identificados na Figura 3.12 desaparecem, restando apenas dois, o inicial e o final. A complexidade do caminho instável intermediário, ocasionada pelo movimento dos nós em sentidos opostos, diminui e o comportamento do sistema tende ao típico de uma treliça abatida.



(a) Plano $\chi_1 \times \lambda$



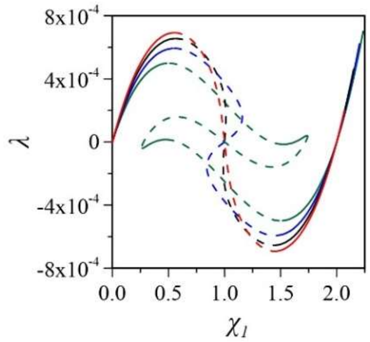
(b) Plano $\chi_2 \times \lambda$



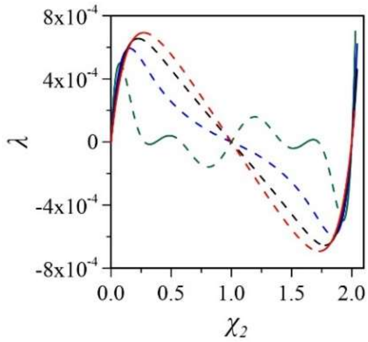
(c) Plano $\chi_1 \times \chi_2$

Figura 3.16 - Caminhos não lineares de equilíbrio para diferentes abatimentos, modelo de treliças conectado por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$ (verde), $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$ (azul), $\delta_1 = \delta_2 = 0.12$ (preto), e $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$ (vermelho)

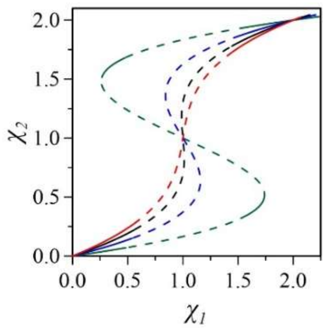
A Figura 3.17 apresenta os caminhos não lineares para diferentes valores do parâmetro adimensional κ (pontos pretos na Figura 3.15) selecionados entre os dois valores limites ($\kappa = 0.000$ e $\kappa = 0.100$). Nota-se que o aumento da rigidez da mola faz com que a não linearidade da resposta decresça à medida que o deslocamento relativo entre os nós decresce, tendendo ao caso em que os deslocamentos das duas treliças se igualam ($\chi_1 = \chi_2$), como já observado anteriormente.



(a) Plano $\chi_1 \times \lambda$



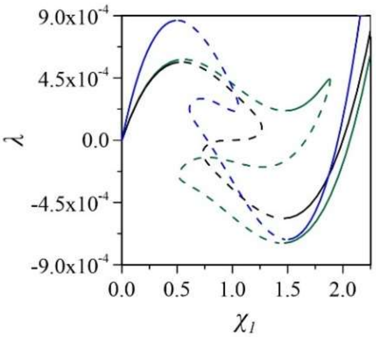
(b) Plano $\chi_2 \times \lambda$



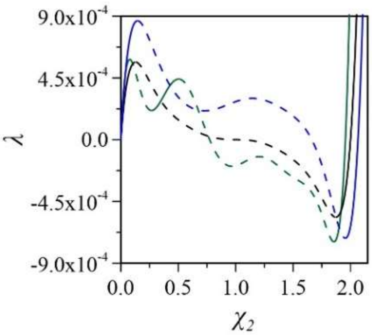
(c) Plano $\chi_1 \times \chi_2$

Figura 3.17 - Caminhos não lineares de equilíbrio para diferentes rigidezes da mola, modelo de treliças conectado por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$, $\kappa = 0.003$ (verde), $\kappa = 0.006$ (azul), $\kappa = 0.009$ (preto) e $\kappa = 0.012$ (vermelho).

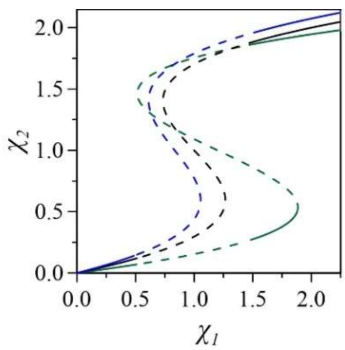
A Figura 3.18 mostra a influência de pequenas imperfeições na geometria do sistema, impostas através de diferenças nos abatimentos das treliças ($\delta_1 \neq \delta_2$), sendo representado em preto o comportamento para o caso perfeito, $\delta_1 = \delta_2$, para efeito comparativo. Quando se reduz o abatimento da treliça inferior (verde), aparece um trecho adicional de equilíbrio estável, associado à segunda configuração de equilíbrio estável da treliça superior (treliça invertida), com pouca variação na carga crítica. Já quando o abatimento da treliça inferior é maior (azul), se observa um aumento significativo na carga crítica do modelo e apenas dois trechos estáveis.



(a) Plano $\chi_1 \times \lambda$



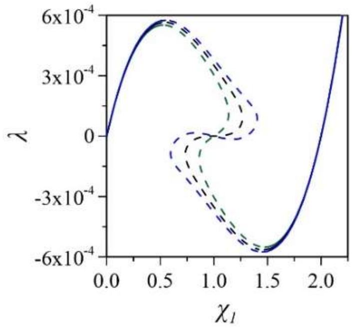
(b) Plano $\chi_2 \times \lambda$



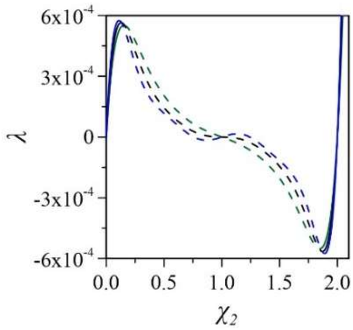
(c) Plano $\chi_1 \times \chi_2$

Figura 3.18 - Caminhos não lineares de equilíbrio para diferenças entre os abatimentos das treliças, modelo de treliças conectado por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = 0.10$ e $\delta_2 = 0.12$ (verde), $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$ (preto) e $\delta_1 = 0.12$ e $\delta_2 = 0.10$ (azul).

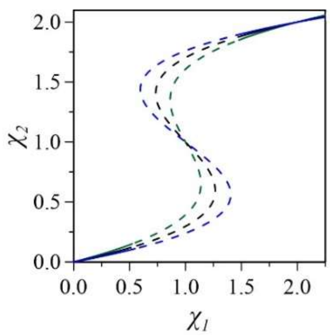
A Figura 3.19 mostra a influência da diferença de rigidez das treliças, $k_1 \neq k_2$. Percebe-se que quando $k_1 > k_2$ (verde) ocorre um pequeno decréscimo na carga crítica, já quando $k_1 < k_2$ (azul), há um pequeno aumento na capacidade de carga com relação ao caso perfeito, $k_1 = k_2$ (preto). A influência nos trechos estáveis é pequena, observando-se maior variação de comportamento no trecho instável. A Tabela 3.4 mostra os valores de carga crítica dos modelos analisados neste item.



(a) Plano $\chi_1 \times \lambda$



(b) Plano $\chi_2 \times \lambda$



(c) Plano $\chi_1 \times \chi_2$

Figura 3.19 - Caminhos não lineares de equilíbrio para diferenças entre as rigidezes axial das barras das treliças, modelo de treliças conectado por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$, $\kappa = 0.005$, $\alpha = 0.8$ (verde), $\alpha = 1.0$ (preto) e $\alpha = 1.2$ (azul).

Tabela 3.4 - Cargas críticas para os casos definidos para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível.

Caso	α	δ_1	δ_2	κ	λ_{cr} (× 10^{-4})
01	1.0	0.08	0.08	0.005	3.26
02	1.0	0.10	0.10	0.005	5.64
03	1.0	0.12	0.12	0.005	8.86
04	1.0	0.14	0.14	0.005	13.15
05	1.0	0.10	0.10	0.000	3.81
06	1.0	0.10	0.10	0.003	4.99
07	1.0	0.10	0.10	0.006	5.93
08	1.0	0.10	0.10	0.009	6.55
09	1.0	0.10	0.10	0.012	6.92
10	1.0	0.10	0.10	0.100	7.61
11	1.0	0.10	0.12	0.005	5.82
12	1.0	0.12	0.10	0.005	8.66
13	0.8	0.10	0.10	0.005	5.52
14	1.2	0.10	0.10	0.005	5.75

3.1.2.2.
Perfis de Energia

A Figura 3.20 mostra a energia potencial para os casos 01, 03 e 04 do modelo estrutural conectado por elemento flexível, através das superfícies de energia em 3D, Figura 3.20(a-c), e curvas equipotenciais, Figura 3.20(d-f), considerando a estrutura descarregada. Incialmente para $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, observam-se duas configurações estáveis (configuração pré-crítica (0.0, 0.0) e pós-crítica (2.0, 2.0), em azul), Figura 3.20(a,d), representadas pelos dois vales potenciais de mesma profundidade e uma sela separando os dois vales (configuração (1.0, 1.0), em preto). Posteriormente para $\delta_1 = \delta_2 = 0.12$ surgem dois pontos de sela e um ponto de máximo (em vermelho), Figura 3.20(d-f). À medida que δ_i aumenta o número de configurações estáveis sobe para quatro, como ilustra as Figura 3.20(d-f) para $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, onde se observam quatro pontos de mínimo (surgem as configurações (0.3,1.7) e (1.7,0.3), com vales de menor profundidade), quatro pontos de sela ((0.2,1.3), (1.3,0.2), (0.7,1.8) e (1.8,0.7)) e um ponto de máximo (1.0,1.0).

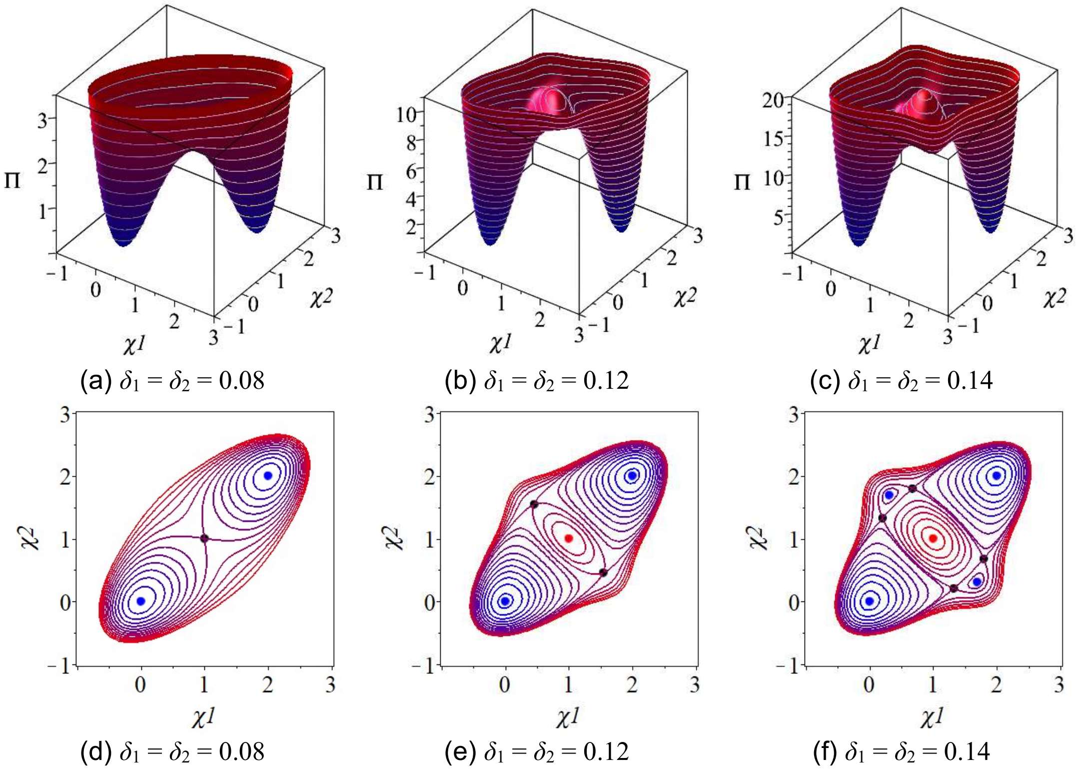


Figura 3.20 - Superfícies e curvas de nível de energia potencial com carga estática nula ($\lambda = 0.0$) e variando o abatimento da estrutura ($\delta_1 = \delta_2$), modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\kappa = 0.005$.

A Figura 3.21 ilustra a influência de níveis crescentes de carregamento estático na topologia da energia potencial total para o caso de dois vales potenciais

(α = 1.0, $\delta_1 = \delta_2$ = 0.08 e κ = 0.005, Figura 3.20(a,d)). Verifica-se inicialmente a quebra de simetria provocada pela introdução do carregamento estático e a redução da região associada a configuração de equilíbrio estável pré-crítica, bem como o aumento da região associada a configuração pós-crítica, com o ponto de sela se aproximando da posição de equilíbrio estável pré-crítica.

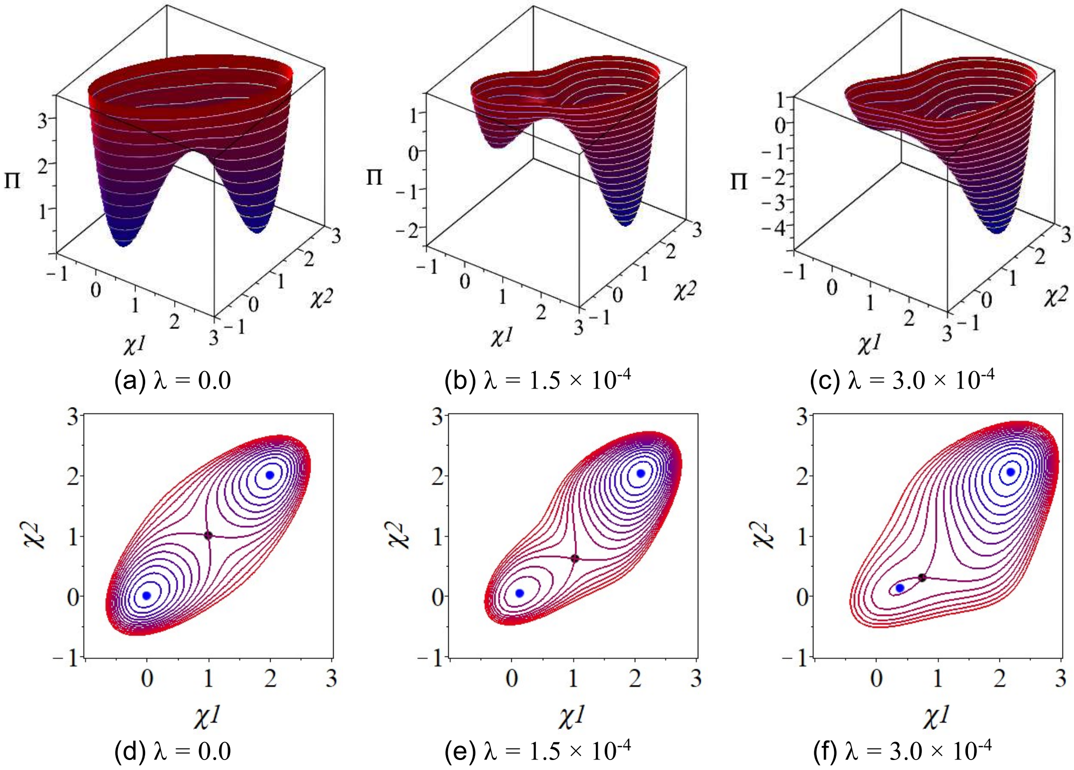


Figura 3.21 - Superfícies e curvas de nível de energia potencial para diferentes níveis de carga estática, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais α = 1.0, $\delta_1 = \delta_2$ = 0.08 e κ = 0.005.

A Figura 3.22 mostra a variação da superfície e curvas equipotenciais para o caso 04 (Figura 3.20(c,f)), com quatro configurações de equilíbrio estável, considerando níveis crescentes de carregamento estático. Neste caso, verifica-se que além da significativa quebra de simetria, com uma diferença expressiva entre χ_1 e χ_2 e da redução da região associada a configuração de equilíbrio estável pré-critica, a redução progressiva no número de vales potenciais à medida que a carga se aproxima do valor crítico.

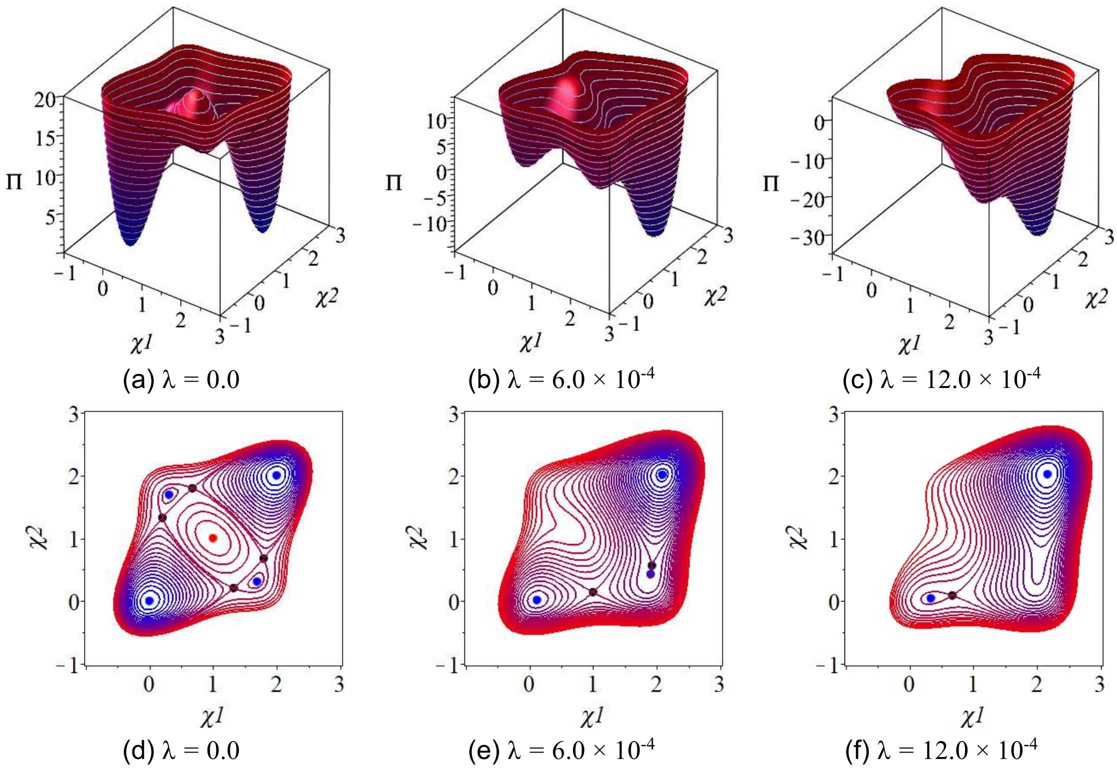


Figura 3.22 - Superfícies e curvas de nível de energia potencial para diferentes níveis de carga estática, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$ e $\kappa = 0.005$.

3.2. Análise Dinâmica em Vibração Livre

Inicialmente são obtidas as frequências naturais e os modos de vibração correspondentes. Expandindo as equações de movimento não lineares em séries de Taylor e considerando apenas os termos lineares de rigidez e massa obtém-se o problema de autovalor:

$$\left[[K]-\gamma[M]\right] X = 0 \qquad \text{onde } \gamma = \bar{\omega}^2 \text{ e } X = \{\chi_1 \quad \chi_2\}^T \tag{3.7}$$

sendo que $[K]$ representa a matriz de rigidez adimensional, $[M]$ a matriz de massa adimensional e $\bar{\omega}$ as frequências naturais.

Adicionalmente, para estudar a variação da frequência natural considerando o efeito da carga estática, considera-se que o deslocamento total (χ_{nT}) corresponde à soma dos deslocamentos estático (χ_{ni}) e dinâmico ($\chi_n(t)$):

$$\chi_{nT} = \chi_{ni} + \chi_n(t), \quad n = 1, 2 \tag{3.8}$$

Utiliza-se ainda, na análise dinâmica, o princípio da conservação da energia, onde tem-se que:

$$\overline{\Pi} + \overline{T} = C \tag{3.9}$$

sendo C uma constante associada a um dado nível de energia, obtido a partir das condições iniciais e carregamento estático específico. Escolhendo uma posição de equilíbrio estático como referência, a energia total é função dos deslocamentos e velocidades e tem-se, portanto, para o sistema com 2GL um espaço de fase de quatro dimensões, χ_1, $\chi_{1,\tau}$, χ_2 e $\chi_{2,\tau}$, que permite visualizar as diferentes classes de soluções do sistema estrutural conservativo e a fronteira de estabilidade.

Para a condução das análises das vibrações não lineares, as equações de movimento são manipuladas de modo a se obter um sistema de equações de primeira ordem (ver Apêndice A), onde as integrações numéricas são realizadas através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

3.2.1. Modelo Conectado por Elemento Rígido

3.2.1.1. Frequências Naturais

Após expansão em séries de Taylor, tem-se o problema de autovalor:

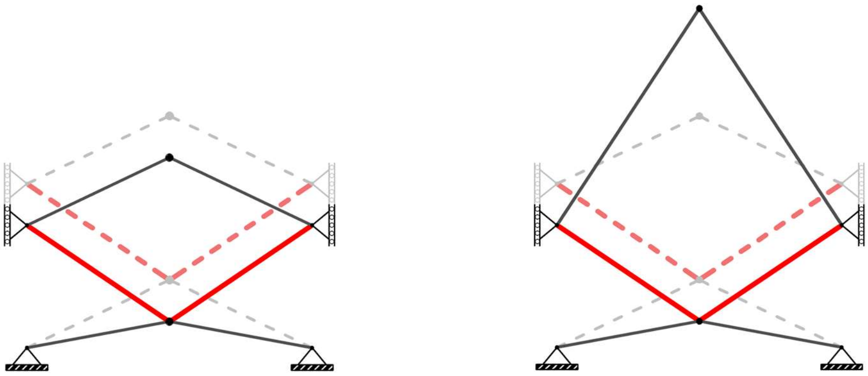
$$\frac{\delta_1^2\sqrt{\delta_1^2+1}}{3}\chi_{1,\tau\tau} + \frac{\delta_1^4}{\sqrt{\left(\delta_1^2+1\right)^3}}\chi_1 - \frac{\delta_1^3\delta_2}{\sqrt{\left(\delta_1^2+1\right)^3}}\chi_2 = 0 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} &\delta_2^2\left(\sqrt{\delta_1^2+1} + \frac{\sqrt{\delta_2^2+1}}{3}\right)\chi_{2,\tau\tau} - \frac{\delta_1^3\delta_2}{\sqrt{\left(\delta_1^2+1\right)^3}}\chi_1 \\ &+\left[\frac{\delta_1^2\delta_2^2}{\sqrt{\left(\delta_1^2+1\right)^3}} + \frac{\alpha\delta_2^4}{\sqrt{\left(\delta_2^2+1\right)^3}}\right]\chi_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A Tabela 3.5 mostra os resultados para as frequências naturais e modos de vibração da estrutura descarregada considerando os casos estudados anteriormente. O modo fundamental, associado à menor frequência, corresponde a um movimento síncrono com as treliças movendo-se na mesma direção e com a mesma intensidade, enquanto o segundo modo indica deslocamentos em direções opostas, com $\chi_1 > \chi_2$. A Figura 3.23 ilustra estes modos de vibração.

Tabela 3.5 - Frequências naturais e modos de vibração para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos.

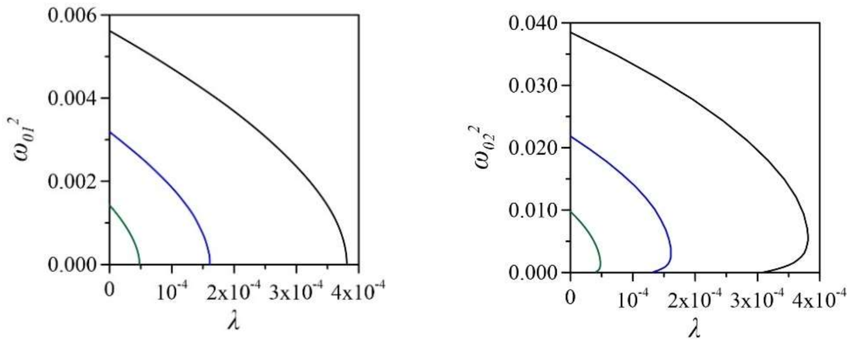
Caso	α	δ_1	δ_2	ω_{01}	*1º Modo*	ω_{02}	*2º Modo*	ω_{02}/ω_{01}
01	1.0	0.050	0.050	0.0378	[1.0 1.0]	0.0989	[-3.236 1.236]	2.6164
02	1.0	0.075	0.075	0.0565	[1.0 1.0]	0.1478	[-3.236 1.236]	2.6159
03	1.0	0.100	0.100	0.0749	[1.0 1.0]	0.1962	[-3.236 1.236]	2.6195
04	1.0	0.050	0.051	0.0385	[1.0 1.0]	0.0990	[-3.271 1.272]	2.5714
05	1.0	0.051	0.050	0.0378	[1.0 1.0]	0.1007	[-3.200 1.201]	2.6640
06	0.9	0.050	0.050	0.0360	[1.0 1.0]	0.0986	[-3.309 1.209]	2.7389
07	1.1	0.050	0.050	0.0395	[1.0 1.0]	0.0991	[-3.164 1.264]	2.5089



(a) Modo de vibração 1 (b) Modo de vibração 2

Figura 3.23 - Representação dos modos de vibração para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos.

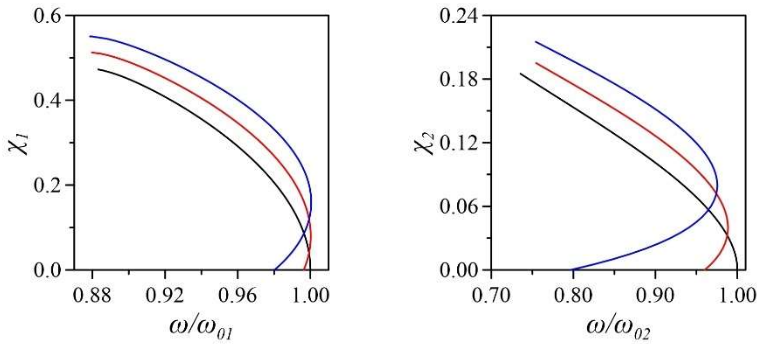
A partir da mudança de variáveis expressa na Equação (3.8) e considerando as posições pré-crítica como referência e níveis crescentes de carga estática, obtém-se a variação do quadrado das frequências com o parâmetro de carga, como mostra a Figura 3.24. É possível observar que ocorre uma redução para a frequência fundamental com a carga estática, Figura 3.24(a), sendo esta redução mais acentuada quando se aproxima do ponto limite, onde as frequências se anulam, Tabela 3.2. Na Figura 3.24(b), para a segunda frequência natural, a frequência só se anula após o ponto limite, ao longo do caminho instável.



(a) $\lambda \times \omega_{01}^2$ (b) $\lambda \times \omega_{02}^2$

Figura 3.24 - Variação das frequências naturais em função da carga estática ao longo do caminho fundamental para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.050$ (verde), $\delta_1 = \delta_2 = 0.075$ (azul) e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ (preto).

A Figura 3.25 ilustra a relação não linear frequência-amplitude considerando níveis crescentes de carregamento estático para os parâmetros $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$. Quando o carregamento estático é nulo, $\lambda = 0.0$ e $\omega_{01} = 0.0749$, a resposta (em preto) mostra um comportamento não linear com perda de rigidez (*softening*) característico de estruturas biestáveis abatidas. À medida que a carga estática aumenta e a frequência fundamental diminui, respostas em vermelho e azul, a resposta apresenta inicialmente um leve ganho de rigidez (*hardening*) que logo se transforma em *softening*.

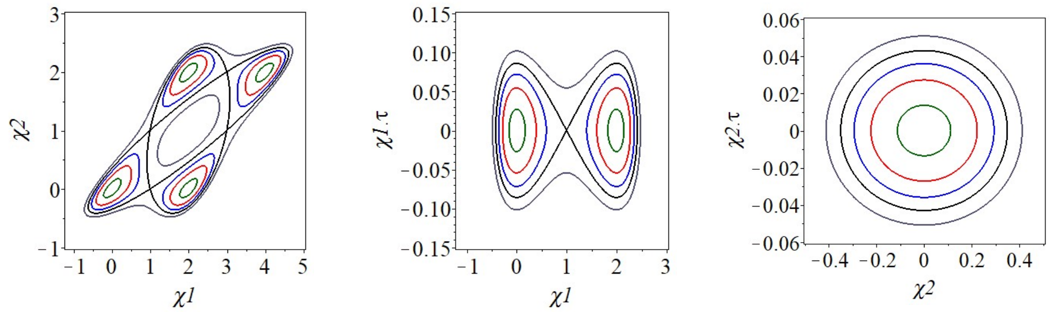


(a) $\chi_1 \times \omega/\omega_{01}$ (b) $\chi_2 \times \omega/\omega_{02}$

Figura 3.25 - Relação não linear frequência-amplitude considerando níveis crescentes de carregamento estático para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, e em preto, $\lambda = 0.0$, $\omega_{01} = 0.0749$ e $\omega_{02} = 0.1962$, em vermelho, $\lambda = 0.74 \times 10^{-4}$, $\omega_{01} = 0.0704$ e $\omega_{02} = 0.1866$, e em azul, $\lambda = 1.39 \times 10^{-4}$, $\omega_{01} = 0.0658$ e $\omega_{02} = 0.1767$.

3.2.1.2. Comportamento Global do Sistema Conservativo

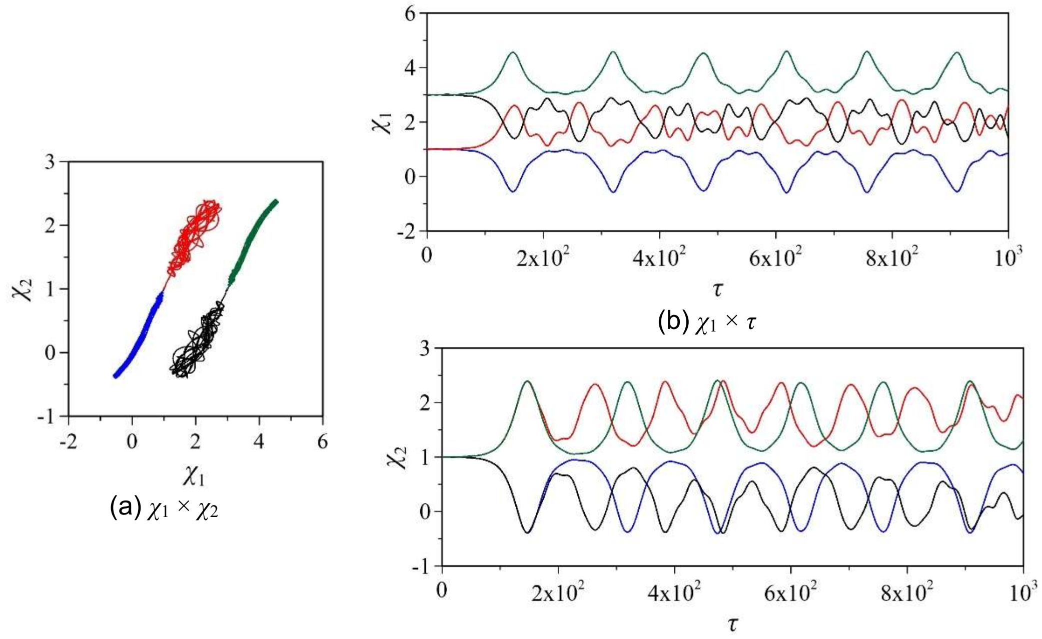
Considerando o princípio da conservação de energia (Equação (3.9)), a Figura 3.26 ilustra três seções transversais do espaço de fase de quatro dimensões (χ_1, $\chi_{1,\tau}$, χ_2 e $\chi_{2,\tau}$), para níveis crescentes de energia e os parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$. Os resultados concordam com as análises anteriores, incluindo a existência de quatro centros e quatro selas. Pode-se observar as órbitas heretoclínicas, conectadas selas adjacentes e separando diferentes tipos de movimento, incluindo movimentos dentro de cada vale potencial e movimentos de grande amplitude em torno dos vales.



(a) $\chi_1 \times \chi_2$ (b) $\chi_1 \times \chi_{1,\tau}$ (c) $\chi_2 \times \chi_{2,\tau}$

Figura 3.26 - Planos do espaço de fase do sistema conservativo com curvas de energia constante para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Órbitas com porcentagens da energia total dos pontos de sela, 10% (verde), 40% (vermelho), 70% (azul), 100% (preto) e 140% (cinza). Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ e $\lambda = 0.0$.

A Figura 3.27 mostra as soluções em vibração livre não amortecida do sistema não linear, no espaço configuração e no domínio do tempo com condições iniciais na vizinhança dos pontos de sela (1,1) e (3,1). As respostas partem da vizinhança dos pontos de sela (1,1) e (3,1).



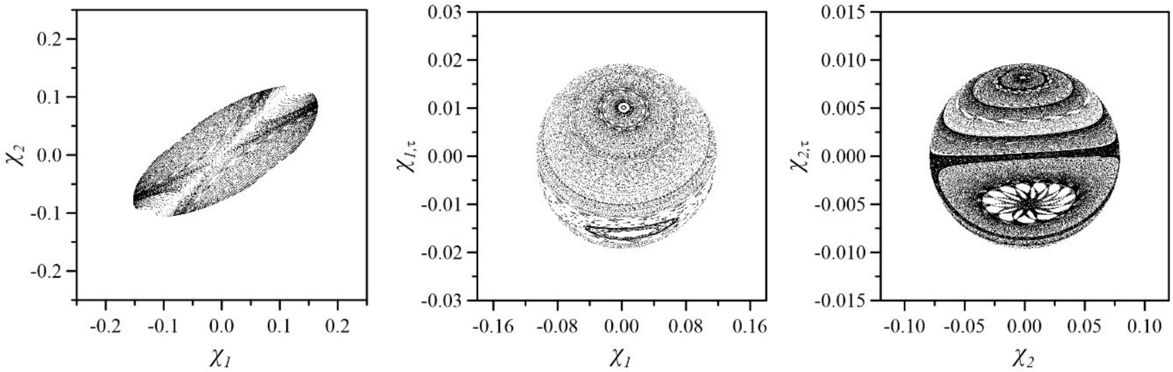
(a) $\chi_1 \times \chi_2$

(b) $\chi_1 \times \tau$

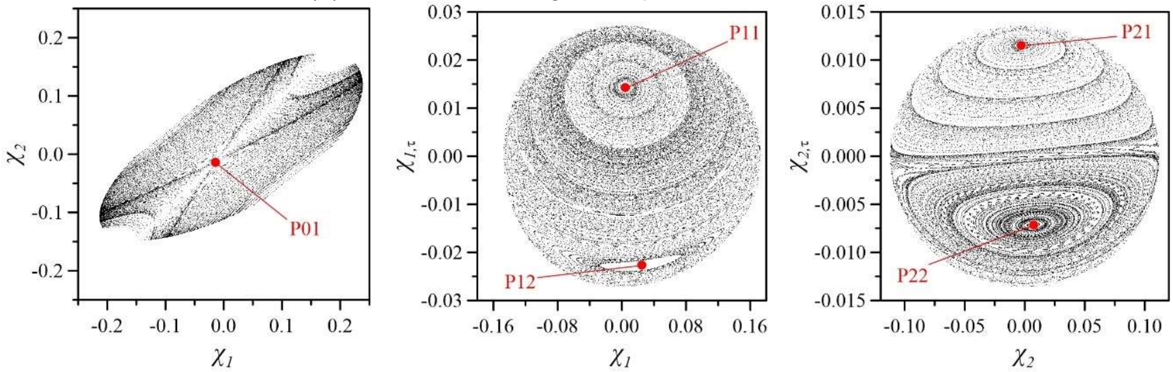
(c) $\chi_2 \times \tau$

Figura 3.27 - Plano de fase e respostas no tempo para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos, vibração livre sem amortecimento. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ e $\lambda = 0.0$.

A Figura 3.28 mostra as seções de Poincaré do sistema conservativo de 2GL obtido pelo procedimento numérico descrito por Orlando et al. (2013), para dois níveis de energia, onde centros e selas identificam, respectivamente, modos normais não lineares estáveis e instáveis, enquanto as nuvens de pontos estão associadas a movimentos caóticos do sistema Hamiltoniano. A multiplicidade de modos normais não lineares é uma característica de sistemas com simetrias inerentes. Os pontos P11, P12, P21 e P22 representam centros, correspondendo assim a soluções estáveis, enquanto P01 corresponde a uma sela.



(a) Para 5% da energia dos pontos de sela.



(b) Para 10% da energia dos pontos de sela.

Figura 3.28 - Seções de Poincaré para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

3.2.1.3. Comportamento Global do Sistema Amortecido

Como se sabe, todos os sistemas estruturais exibem certo grau de amortecimento que tem grande impacto na dinâmica da estrutura. Assim, considerando o sistema amortecido com uma taxa de 1% ($\xi_1 = \xi_2 = 0.01$), apresenta-se na Figura 3.29 as respostas para as mesmas condições iniciais da Figura 3.27 próximas aos pontos de sela (1,1) e (3,1). Verifica-se que o movimento oscilatório decresce em amplitude com o tempo, devido ao efeito do amortecimento, convergindo para uma das quatro configurações estáveis já identificadas anteriormente, (0,0) em azul, (2,0) em preto, (2,2) em vermelho e (4,2) em verde.

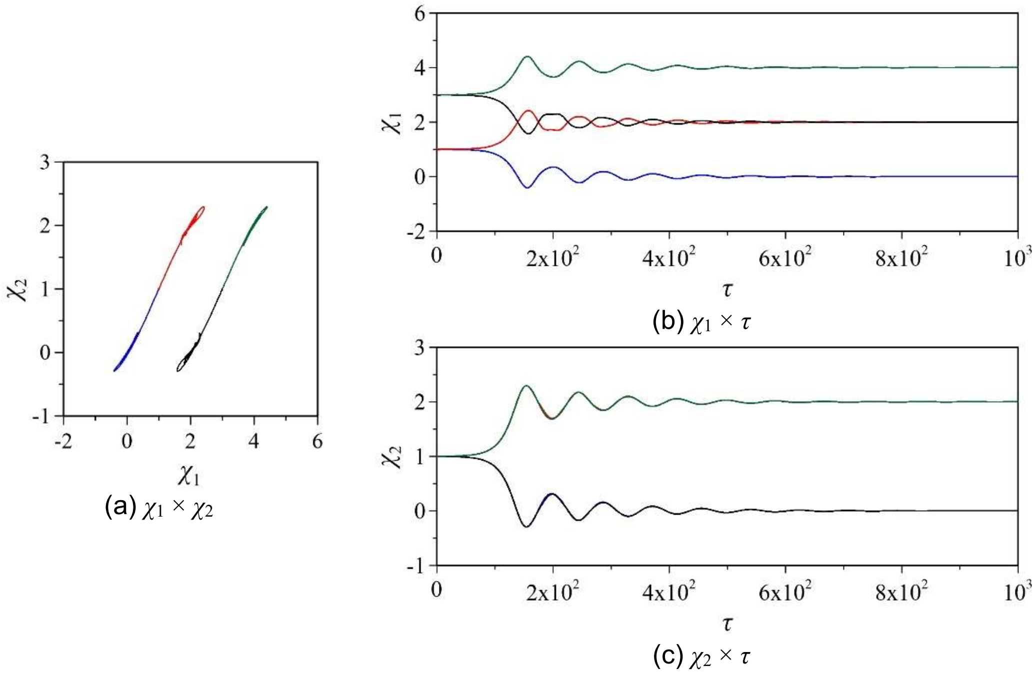
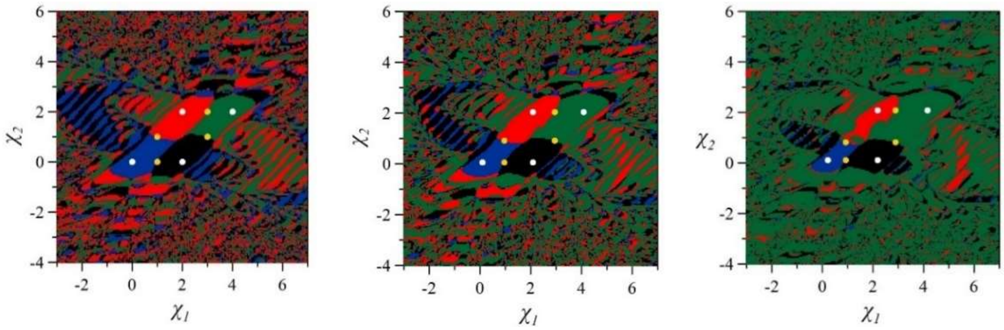
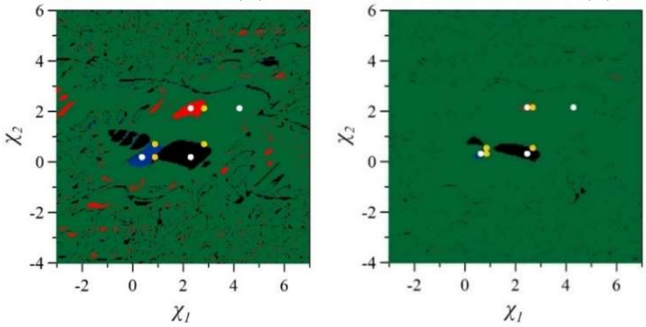


Figura 3.29 - Plano de fase e respostas no tempo para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos, vibração livre amortecida. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ e $\lambda = 0.0$.

A Figura 3.30 mostra as bacias de atração para as configurações de equilíbrio estável (atratores são representados por pontos brancos) e considerando valores crescentes de carregamento estático. Os pontos de sela são representados em amarelo, sempre na fronteira entre regiões definidas. Na impossibilidade de mostrar as bacias de atração, pois estão em um espaço de fase de quatro dimensões, todas as bacias de atração são estudadas através de seções transversais bidimensionais. Sem perda de generalidade, a definição para a bacia de atração aqui empregada é: "o conjunto de todas as condições iniciais no espaço de fase que são atraídas pelos pontos fixos estáveis de um vale potencial quando $t = \infty$", utilizando o método *cell-to-cell mapping* (Del Prado, 2001; Silva, 2008; Orlando, 2010), onde a janela de condições iniciais (espaço de fase) analisada é discretizada em 200X200 células e contêm todos os atratores relevantes. Na Figura 3.30(a), verifica-se que cada posição de equilíbrio do sistema descarregado ($\lambda = 0.0$) é rodeada por uma bacia contínua e de fronteira suave onde todas as condições iniciais convergem para um dado atrator, que pode ser mensurada através de medidas de integridade dinâmica (Rega & Lenci, 2005; Lenci & Rega, 2019). Para condições iniciais distantes das posições de equilíbrio, observa-se uma topologia complexa onde condições iniciais próximas levam a atratores distintos. A partir da Figura 3.30(b), mostra-se que, com o aumento do nível de carregamento estático, a região associada à configuração pré-crítica (em azul) diminui, paulatinamente, sendo a bacia dominada pela posição pós-crítica onde as duas treliças encontram-se na posição invertida, em verde. Os resultados estão em consonância com as Figura 3.10 e Figura 3.26. À medida que a bacia em torno de uma dada configuração desejada é erodida e as regiões fractais aumentam, torna-se cada vez mais difícil conservar o sistema nesta posição, requerendo muitas vezes mecanismos de controle não linear para aumento da bacia de atração (Lenci et al. 2012). Deve-se também levar em consideração a existência de incertezas e ruído na dinâmica global (Orlando et al. 2019; Benedetti et al. 2023).



(a) λ = 0.0 (b) λ = 0.9 × 10^{-4} (c) λ = 1.8 × 10^{-4}



(d) λ = 2.7 × 10^{-4} (e) λ = 3.6 × 10^{-4}

Figura 3.30 - Bacias de atração para as posições de equilíbrio estável, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

3.2.2. Modelo Conectado por Elemento Flexível

3.2.2.1. Frequências Naturais

Expandindo as equações não lineares (2.33) e (2.34) em séries de Taylor e linearizando-as, obtêm-se:

$$\chi_{1,\tau\tau} + \left(\frac{3\kappa}{2\sqrt{\delta_1^2 + 1}} + \frac{3\delta_1^2}{\left(\delta_1^2 + 1\right)^2} \right) \chi_1 - \frac{3\kappa\delta_2}{2\delta_1\sqrt{\delta_1^2 + 1}} \chi_2 = 0 \qquad (3.12)$$

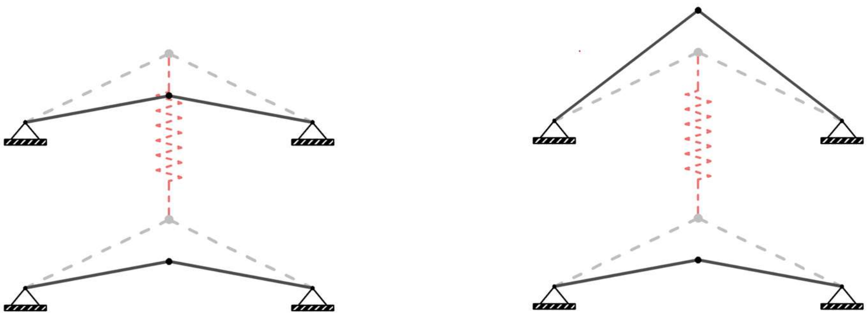
$$\chi_{2,\tau\tau} - \frac{3\kappa\delta_1}{2\delta_2\sqrt{\delta_2^{\,2}+1}}\chi_1 + \left(\frac{3\kappa}{2\sqrt{\delta_2^{\,2}+1}} + \frac{3\alpha\delta_2^{\,2}}{\left(\delta_2^{\,2}+1\right)^2}\right)\chi_2 = 0 \qquad (3.13)$$

Da solução do problema de autovalor, Equação (3.7), são obtidas as frequências naturais e os modos de vibração, Tabela 3.6, considerando os casos já estabelecidos anteriormente.

Tabela 3.6 - Frequências naturais e modos de vibração para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível.

Caso	α	δ_1	δ_2	κ	ω_{01}	*1º Modo*	ω_{02}	*2º Modo*	ω_{02}/ω_{01}
01	1.0	0.08	0.08	0.005	0.1378	[1.0 1.0]	0.1841	[-1.000 1.000]	1.3360
02	1.0	0.10	0.10	0.005	0.1715	[1.0 1.0]	0.2105	[-1.000 1.000]	1.2274
03	1.0	0.12	0.12	0.005	0.2049	[1.0 1.0]	0.2385	[-1.000 1.000]	1.1640
04	1.0	0.14	0.14	0.005	0.2378	[1.0 1.0]	0.2672	[-1.000 1.000]	1.1236
06	1.0	0.10	0.10	0.003	0.1715	[1.0 1.0]	0.1960	[-1.000 1.000]	1.1429
07	1.0	0.10	0.10	0.006	0.1715	[1.0 1.0]	0.2175	[-1.000 1.000]	1.2682
08	1.0	0.10	0.10	0.009	0.1715	[1.0 1.0]	0.2373	[-1.000 1.000]	1.3837
09	1.0	0.10	0.10	0.012	0.1715	[1.0 1.0]	0.2553	[-1.000 1.000]	1.4886
10	1.0	0.10	0.10	0.100	0.1715	[1.0 1.0]	0.5726	[-1.000 1.000]	3.3388
11	1.0	0.10	0.12	0.005	0.1828	[1.0 1.0]	0.2300	[-0.558 2.582]	1.2582
12	1.0	0.12	0.10	0.005	0.1828	[1.0 1.0]	0.2300	[-1.789 0.387]	1.2582
13	0.8	0.10	0.10	0.005	0.1609	[1.0 1.0]	0.2049	[-1.469 0.681]	1.2735
14	1.2	0.10	0.10	0.005	0.1783	[1.0 1.0]	0.2186	[-0.681 1.469]	1.2260

Analisando os resultados, percebe-se que o modo fundamental associado à menor frequência corresponde a um movimento síncrono com mesma direção e intensidade, enquanto o segundo modo indica deslocamentos em direções opostas, com $\chi_1 = -\chi_2$ nos casos sem imperfeições, e com $\chi_1 \neq \chi_2$ nos casos com imperfeição. A Figura 3.31 ilustra os modos de vibração.

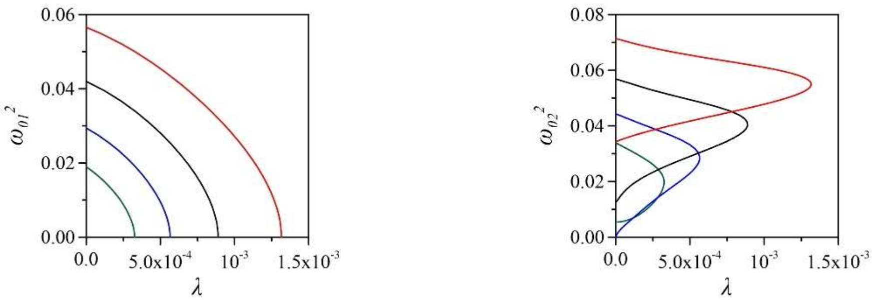


(a) Modo de vibração 1 (b) Modo de vibração 2

Figura 3.31 - Representação dos modos de vibração para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível.

A Figura 3.32(a) mostra a relação entre a carga estática e o quadrado da primeira frequência natural ω_{01}, com comportamento similar ao observado no modelo com ligação rígida. A Figura 3.32(b), para a segunda frequência natural

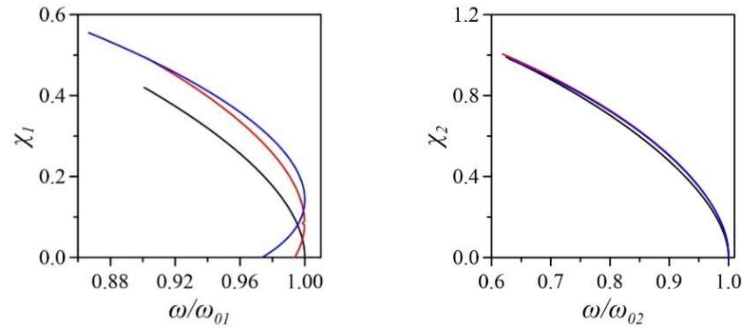
ω_{02}, revela um comportamento mais complexo, onde a frequência não se anula ao atingir o ponto limite de perda de estabilidade.



(a) $\lambda \times \omega_{01}^2$ (b) $\lambda \times \omega_{02}^2$

Figura 3.32 - Variação das frequências naturais em função da carga estática ao longo do caminho fundamental para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$ (verde), $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$ (azul), $\delta_1 = \delta_2 = 0.12$ (preto) e $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$ (vermelho).

A Figura 3.34 ilustra a relação não linear frequência-amplitude considerando níveis crescentes de carregamento estático para os parâmetros $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$. Percebe-se um comportamento similar ao do modelo anterior, quando o carregamento estático é nulo, a resposta (em preto) mostra o comportamento de perda de rigidez. À medida que a carga estática aumenta e a frequência fundamental diminui, a resposta apresenta inicialmente um leve comportamento com ganho de rigidez mudando logo a seguir para perda de rigidez. Estas curvas se constituem nas espinhas (*backbones*) das curvas de ressonância, governando o seu comportamento.



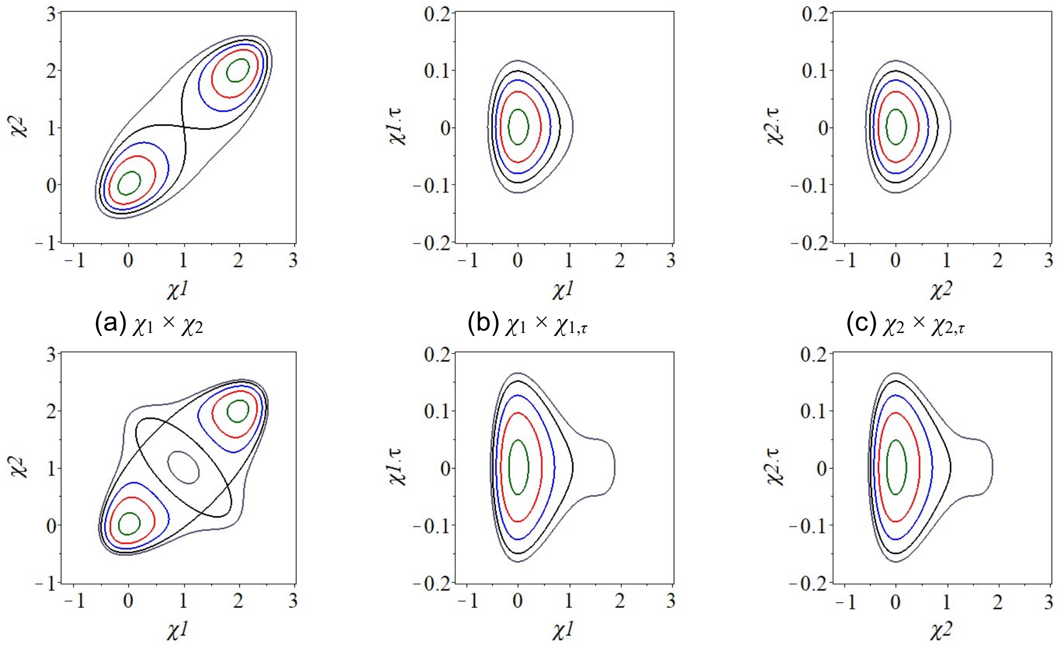
(a) $\chi_1 \times \omega/\omega_{01}$ (b) $\chi_2 \times \omega/\omega_{02}$

Figura 3.33 - Relação não linear frequência-amplitude considerando níveis crescentes de carregamento estático para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, e em preto, $\lambda = 0.0$, $\omega_{01} = 0.2378$ e $\omega_{02} = 0.2672$, em vermelho, $\lambda = 4.51 \times 10^{-4}$, $\omega_{01} = 0.2164$ e $\omega_{02} = 0.2567$, e em azul, $\lambda = 6.98 \times 10^{-4}$, $\omega_{01} = 0.1980$ e $\omega_{02} = 0.2524$.

3.2.2.2. Comportamento Global do Sistema Conservativo

Considerando o sistema conservativo e valores crescentes de energia, a Figura 3.34 mostra os resultados para os parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$ e λ

= 0.0, e os abatimentos de $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, Figura 3.34(a-c), e $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, Figura 3.34(d-f). Na Figura 3.34(a-c), a órbita homoclínica associada ao ponto de sela separa diferentes tipos de movimentos do sistema, como movimentos em cada vale potencial e movimentos que circundam os dois vales. Já na Figura 3.34(d-f), verifica-se a influência de quatro vales, divididos por órbitas heteroclínicas que conectam pontos de sela adjacentes.



(a) $\chi_1 \times \chi_2$ (b) $\chi_1 \times \chi_{1,\tau}$ (c) $\chi_2 \times \chi_{2,\tau}$

(d) $\chi_1 \times \chi_2$ (e) $\chi_1 \times \chi_{1,\tau}$ (f) $\chi_2 \times \chi_{2,\tau}$

Figura 3.34 - Planos do espaço de fase do sistema conservativo com curvas de energia constante para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Órbitas com porcentagens da energia total dos pontos de sela, 10% (verde), 40% (vermelho), 70% (azul), 100% (preto), e (a-c) com 140% (cinza), e (d-f) com 120% (cinza). Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\lambda = 0.0$, e (a-c) com abatimentos de $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, e (d-f) com $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$.

A Figura 3.35 apresenta soluções do sistema não linear em vibração livre sem amortecimento no espaço configuração e a resposta no tempo de χ_1 e χ_2, para os mesmos casos expressos na Figura 3.34. Quando o parâmetro de abatimento é $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, as respostas partem da vizinhança do ponto de sela (1.0, 1.0), e o sistema orbita em torno de uma das duas configurações de equilíbrio estático. Quando se considera $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, as respostas partem da vizinhança dos pontos de sela (0.68, 1.80) e (1.32, 0.20), e as respostas orbitam em torno das configurações de equilíbrio estático (0.0, 0.0), (0.3, 1,7), (1.7, 0.3) e (2.0, 2.0).

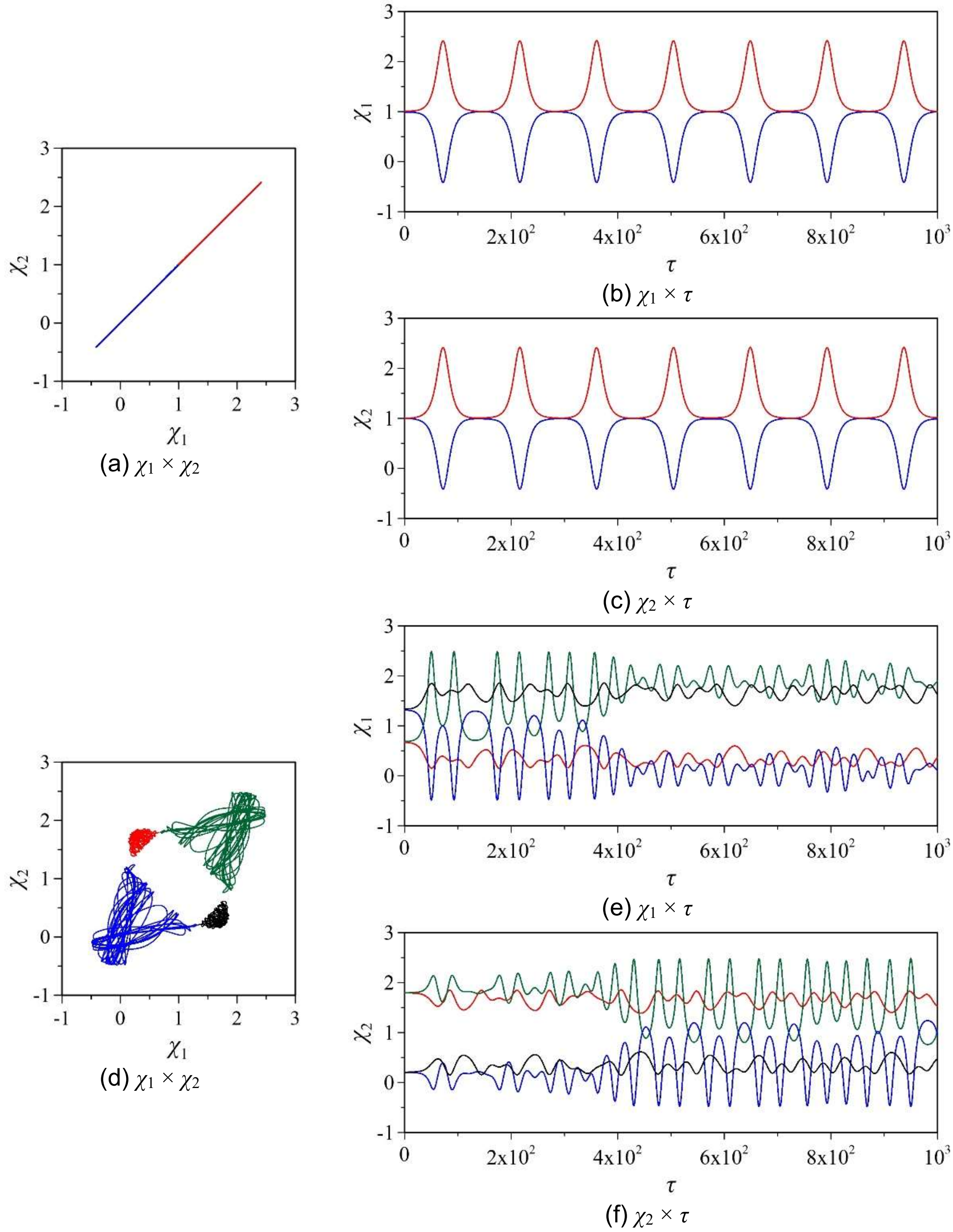
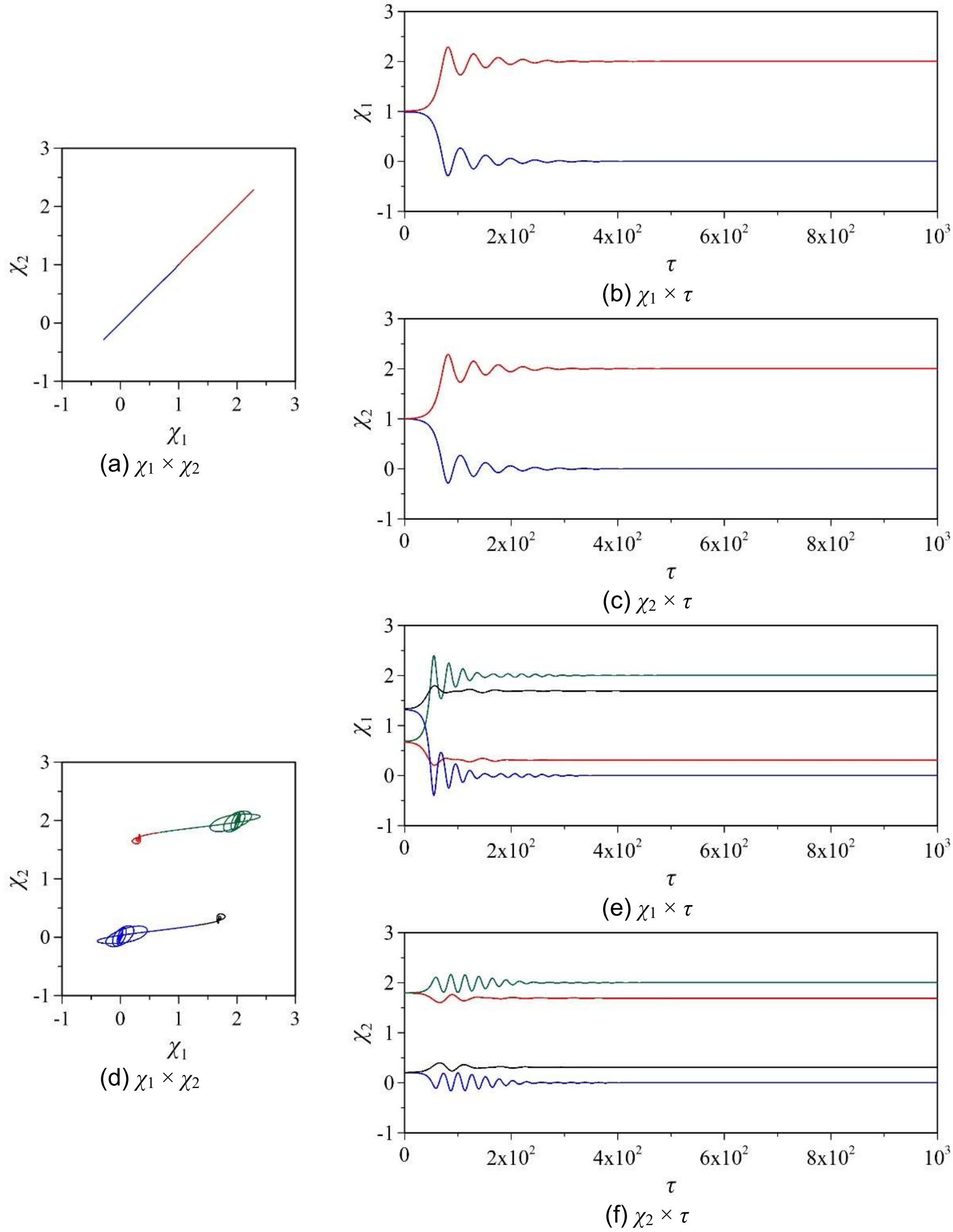


Figura 3.35 - Plano de fase e respostas no tempo para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível, vibração livre sem amortecimento. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\lambda = 0.0$, e (a-c) com $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, e (d-f) com $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$.

3.2.2.3. Comportamento Global do Sistema Amortecido

Considera-se agora o sistema amortecido com uma taxa de amortecimento de 1%, $\xi_1 = \xi_2 = 0.01$. Para $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, Figura 3.36(a-c), nota-se que o sistema converge para uma das duas configurações de equilíbrio estáveis já observadas anteriormente na Figura 3.21(d), (0,0) em azul, e (2,2) em vermelho. Já para $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, Figura 3.36(d-f), tem-se o movimento oscilatório partindo dos pontos de sela e convergindo para as quatro configurações estáveis (0.0, 0.0), em azul, (0.3, 1.7), em vermelho, (1.7, 0.3), em preto, e (2.0, 2.0) em verde, como mostra a Figura 3.21(f).



(a) $\chi_1 \times \chi_2$ (b) $\chi_1 \times \tau$ (c) $\chi_2 \times \tau$ (d) $\chi_1 \times \chi_2$ (e) $\chi_1 \times \tau$ (f) $\chi_2 \times \tau$

Figura 3.36 - Plano de fase e respostas no tempo para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível, vibração livre amortecida. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\lambda = 0.0$, e (a-c) com $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, e (d-f) com $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$.

A Figura 3.37 mostra as bacias de atração com o aumento gradativo da carga estática para $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$, onde se observa na Figura 3.37(a), sem carregamento aplicado, regiões simétricas e bem definidas, em consonância com os perfis de energia já apresentados nas Figura 3.21 e Figura 3.34. A partir da Figura 3.37(b), com o aumento da carga estática verifica-se a erosão da região associada à configuração pré-crítica, em azul, sendo que a bacia rapidamente passa a ser dominada pela posição de equilíbrio pós-crítica, em vermelho, chegando a uma situação extrema na vizinhança da carga limite, Figura 3.37(e).

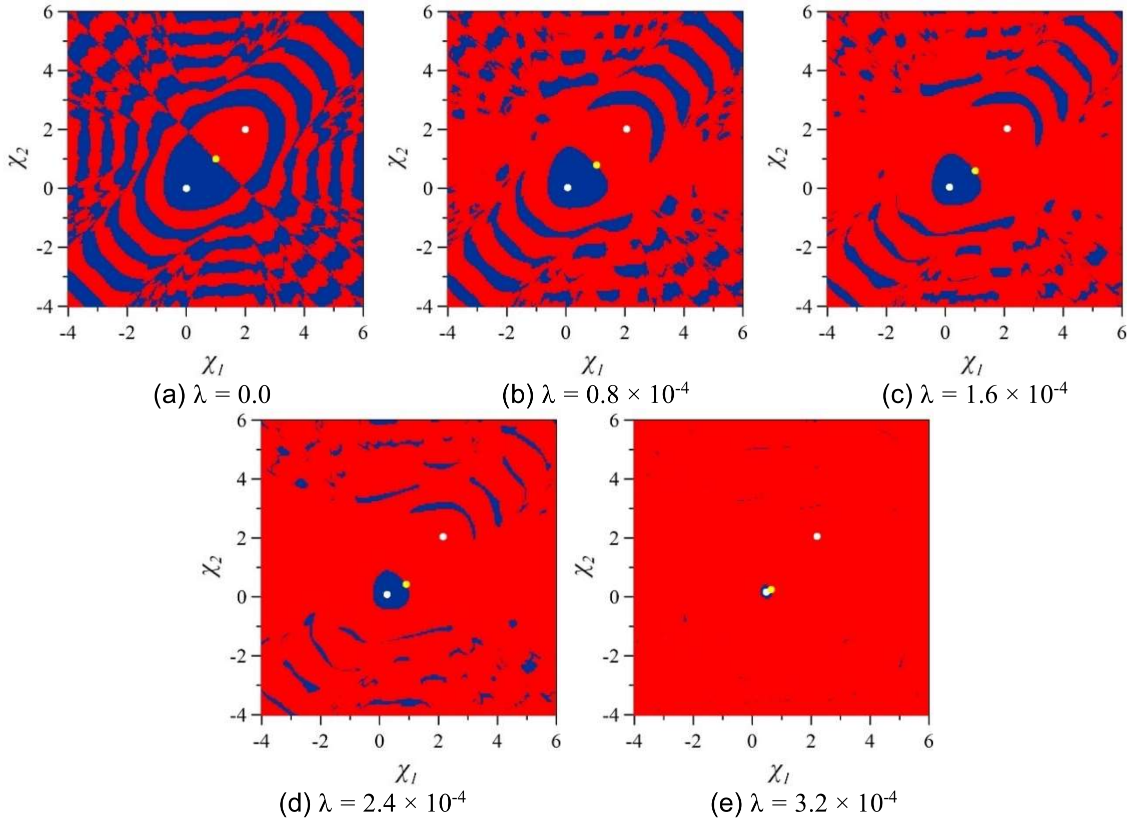


Figura 3.37 - Bacias de atração para as posições de equilíbrio estável, modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.08$.

A Figura 3.38 mostra um conjunto de bacias para $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$. Com o aumento gradual da carga estática, primeiramente tem-se o desaparecimento da região em vermelho, associada ao atrator (0.3, 1.7), depois ocorre a redução gradual da região em preto associada ao atrator (1.7, 0.3) até sua extinção, acompanhada da redução gradativa da região azul, associada a configuração pré-crítica e o crescente domínio da região verde, associada a configuração pós-crítica (2.0, 2.0). Esses resultados concordam com os apresentados nas Figura 3.22 e Figura 3.34.

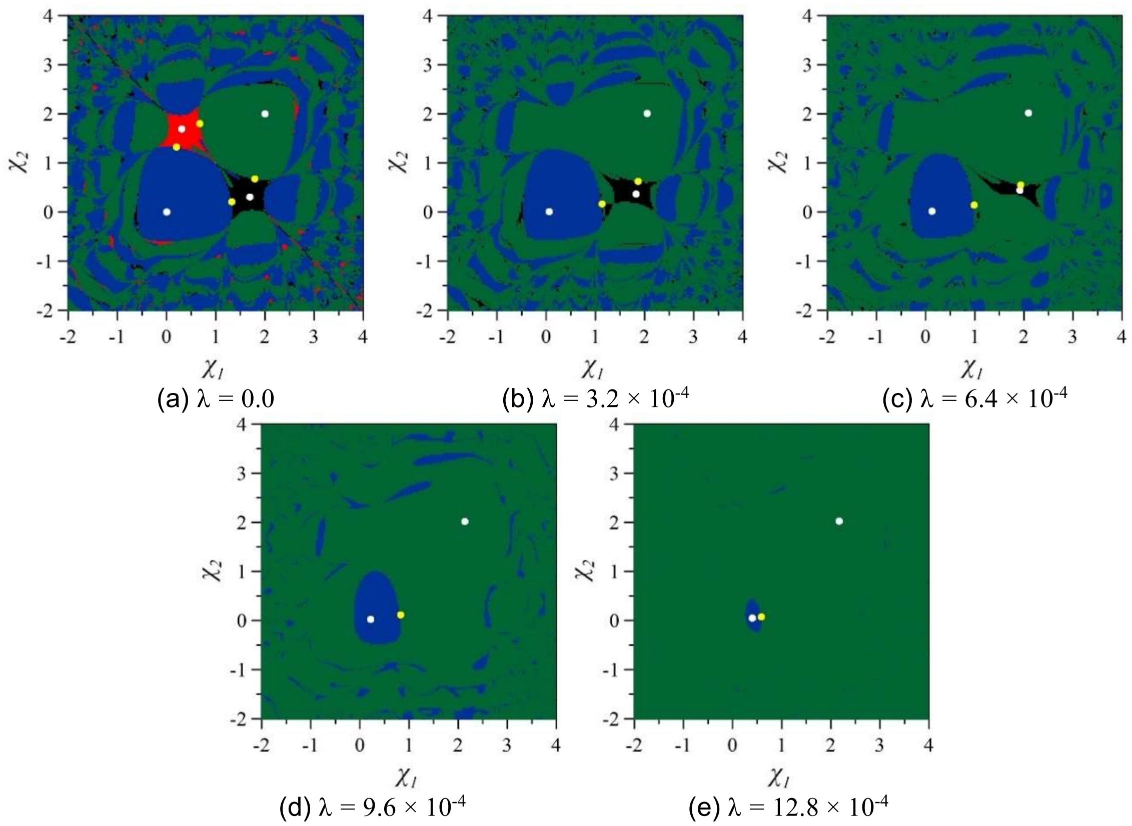


Figura 3.38 - Bacias de atração para as posições de equilíbrio estável, modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$.

3.3. Análise Dinâmica em Vibração Forçada

A existência de múltiplas configurações de equilíbrio estático tem grande impacto no comportamento dinâmico dos sistemas multiestáveis sob cargas dependentes do tempo. Deste modo, aplica-se à estrutura um carregamento harmônico na forma adimensional no nó central da treliça superior dos modelos analisados:

$$\bar{Q} = F\cos(\Omega\tau) \tag{3.14}$$

onde F é a magnitude da força de excitação e Ω a relação entre a frequência de excitação, ω_e, e a frequência de referência $\omega_0^2 = k_1 / \rho A_1 c^2$ ($\Omega = \omega_e / \omega_0$).

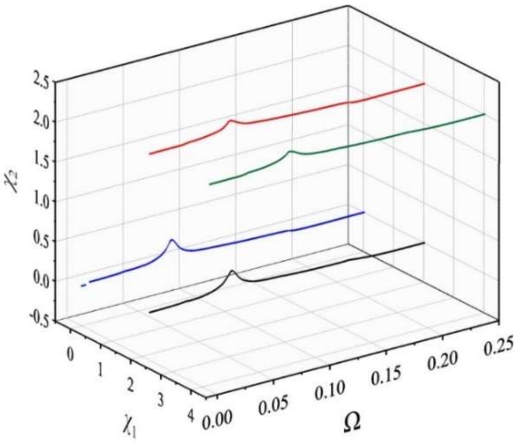
Num sistema multiestável a dinâmica pode estar associada a diferentes atratores, por vezes, após longos transientes caóticos. Assim, apesar das dificuldades numéricas na análise da dinâmica global de sistemas com vários graus de liberdade, esta tem sido reconhecida cada vez mais como uma importante ferramenta para projetos de engenharia, como se percebe nos trabalhos de Thompson (2019), Rega & Lenci (2005) e Rega & Settimi (2021).

Na análise dinâmica em vibração forçada são utilizados diagramas de bifurcação, para assim caracterizar o sistema. Os diagramas são obtidos utilizando o método da força bruta (Parker & Chua, 1989), que captam a sequência de soluções estáveis, periódicas e não periódicas, assim como saltos dinâmicos, à medida que o parâmetro de controle (frequência ou amplitude do carregamento harmônico) aumenta ou diminui. Sabendo ainda, que a dinâmica global de um determinado sistema pode ser analisada através da evolução de suas bacias de atração, são geradas bacias para diferentes níveis de carregamento, o que permite investigar a robustez dos atratores no plano de fase. Ainda, como forma de melhor compreender os resultados, nas análises a seguir, o parâmetro de carga será dividido pela respectiva carga crítica obtida na análise estática, $f = F/\lambda_{cr}$ (Tabela 3.2 e Tabela 3.4), para fornecer uma medida mensurável da magnitude do carregamento harmônico.

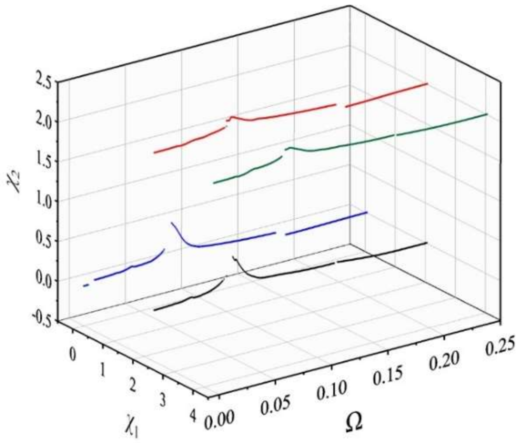
3.3.1. Modelo Conectado por Elemento Rígido

3.3.1.1. Diagramas de Bifurcação

A Figura 3.39 apresenta os diagramas de bifurcação considerando a frequência de excitação Ω como parâmetro de controle, para $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\lambda = 0.0$ e dois níveis de carregamento harmônico, $f = 0.26$ e $f = 0.42$. A projeção em 3D tem como objetivo obter uma visão clara das soluções coexistentes, ressaltando as sequências de bifurcações com início nas quatro configurações de equilíbrio estável apresentas anteriormente. Tem-se as soluções com início na configuração estática (0,0) em azul (com as duas treliças para cima), (2,0) em preto (treliça superior para cima e inferior para baixo), (2,2) em vermelho (treliça superior para cima e inferior para baixo) e (4,2) em verde (ambas para baixo), conforme exposto na Figura 3.2(a-d). As cores são as mesmas usadas na análise estática.



(a) $f = 0.26$



(b) $f = 0.42$

Figura 3.39 - Projeção 3D dos diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ e $\lambda = 0.0$.

A Figura 3.40 mostra projeções dos mesmos diagramas de bifurcação da Figura 3.39 nos planos $\chi_1 \times \Omega$ e $\chi_2 \times \Omega$, e, adicionando, um terceiro nível de carregamento harmônico, $f = 0.97$ bem próximo ao valor da carga limite. As frequências naturais são identificadas através de duas linhas verticais e contínuas, em vermelho, para auxiliar na análise. Para níveis de carga baixos ($f = 0.26$, Figura 3.39(a), Figura 3.40(a,d)) pequenos picos ressonantes aparecem nas proximidades das duas frequências naturais, $\omega_{01} = 0.0749$ e $\omega_{02} = 0.1962$, já exibindo em ambos os casos um leve comportamento de perda de rigidez. Para níveis de carga intermediários ($f = 0.42$, Figura 3.39(b), Figura 3.40(b,e)) o efeito de perda de rigidez aumenta e, à esquerda de $\omega_e = \omega_{01}$, as curvas de ressonância exibem um salto dinâmico da solução não ressonante para a ressonante, à medida que ω_e aumenta devido a uma bifurcação do tipo nó-sela. As amplitudes de vibração das soluções em azul e preto são maiores que as observadas nas outras duas. Comportamento semelhante é observado próximo a $\omega_e = \omega_{02}$, sendo o efeito de perda de rigidez maior nesta segunda região de ressonância. Para estes níveis de carregamento, os quatro diagramas de bifurcação coexistentes, conforme mostrado na Figura 3.40, são independentes, sem movimentos entre vales potenciais ou saltos entre eles. Em um sistema não linear, a ressonância pode ocorrer não apenas nas frequências naturais ω_{0i}, mas também nas frequências superharmônicas $n\omega_{0i}$ e nas frequências subharmônicas $n\omega_{0i}/m$ ($0 < m/n < 1$, onde n e m são inteiros positivos), além de ressonâncias combinadas devido a não linearidades pares e ímpares, Nayfeh & Mook (2008). Para níveis maiores de carga ($f = 0.97$, Figura 3.40(c, f)) um cenário complexo de bifurcação é observado ao longo de toda a faixa de frequência, com regiões ressonantes adicionais nas proximidades de $\omega_e = \omega_{01}/2$ e $\omega_e = \omega_{01}/3$. Além disso, soluções periódicas de período $2nTf$, onde Tf é o período da força, devido a bifurcações de duplicação de período, são observadas e amplas regiões caóticas intercaladas com janelas periódicas, incluindo soluções periódicas ímpares, como a solução bem conhecida de período três. As cascatas de duplicação de período aparecem ao longo dos ramos ressonantes em cada região de ressonância. Em muitos problemas não lineares com vários graus de liberdade, a frequência fundamental é a mais importante. No entanto, para o sistema multiestável, ambas as regiões apresentam relevância, com janelas caóticas nas proximidades de $\omega_e = \omega_{02}$ mais amplas do que nas proximidades de $\omega_e = \omega_{01}$. Para níveis de carga elevados, o caos também aparece nas proximidades de $\omega_e = \omega_{01}/2$.

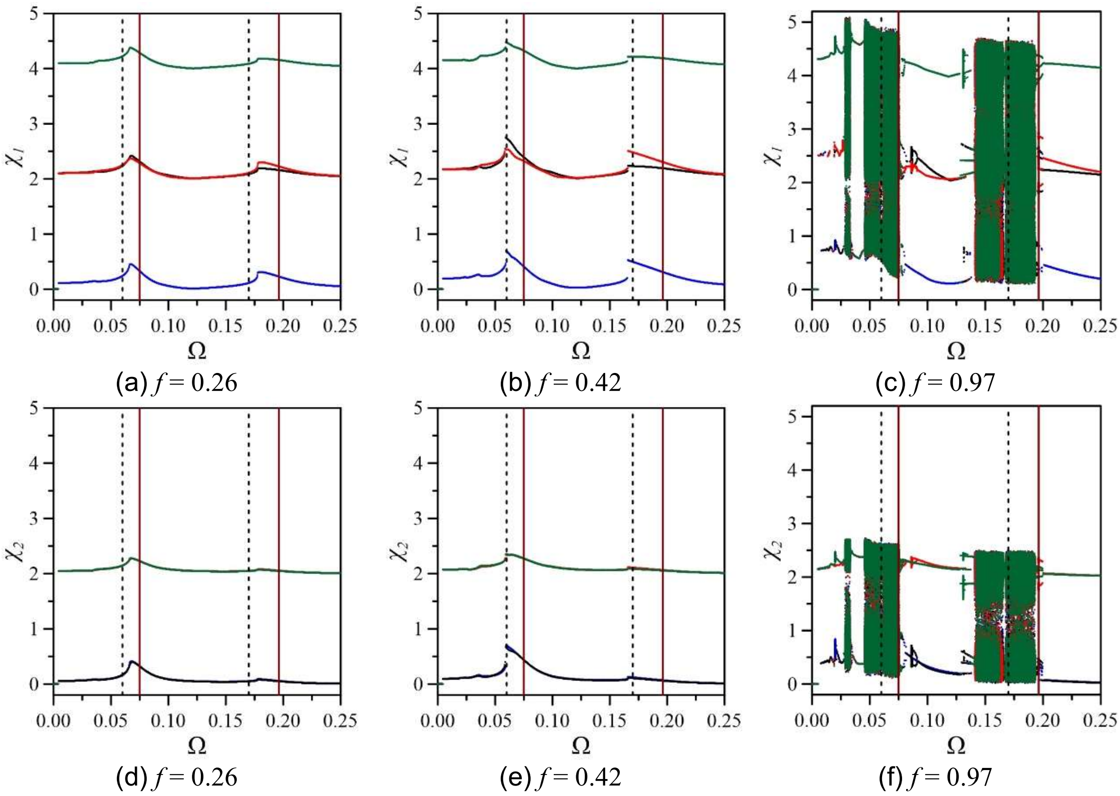
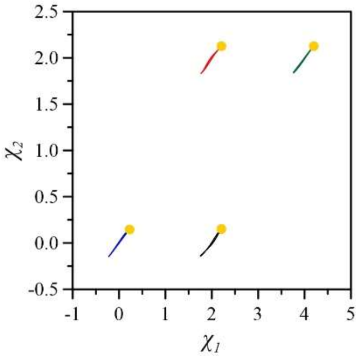
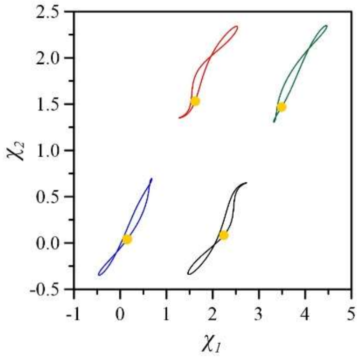


Figura 3.40 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ e $\lambda = 0.0$. (a-c) $\chi_1 \times \Omega$ e (d-f) $\chi_2 \times \Omega$.

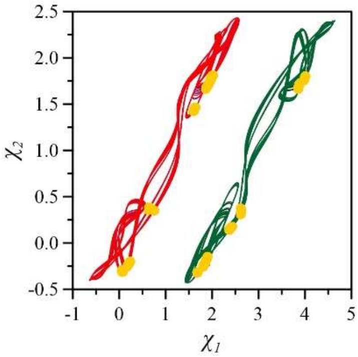
Na Figura 3.40 foram selecionados valores da frequência de excitação nas duas regiões de ressonância ($\Omega = 0.06$ e $\Omega = 0.17$), marcados através de linhas verticais tracejadas em preto, devido ao efeito da perda de rigidez, os valores escolhidos de Ω são ligeiramente menores que cada uma das duas frequências naturais. Para estas frequências, a Figura 3.41 apresenta três projeções dos planos de fase ($\chi_1 \times \chi_2$) das soluções coexistentes. Estão representados ainda, em amarelo, os pontos fixos do mapeamento de Poincaré, realizado através do mapa estroboscópico (Del Prado, 2001), tendo por medida o período da força no caso forçado e o período de vibração no caso livre (*shooting method*). Para pequenas amplitudes do carregamento harmônico ($f = 0.26$, Figura 3.41(a,d)), são observadas quatro soluções periódicas coexistentes de período 1 (1*Tf)*, cada uma dentro de um vale potencial (Figura 3.10). Para níveis intermediários ($f = 0.42$, Figura 3.41(b,e)), ainda são observadas as quatro soluções coexistentes, apresentando, no entanto, amplitudes maiores de vibração e, com isso, aproximando-se da borda dos respectivos vales potenciais (Figura 3.10). Suas projeções no espaço configuração estão em acordo com os modos de vibração em fase e fora-de-fase. Para níveis elevados de carregamento ($f = 0.97$, Figura 3.41(c,f)) são observados movimentos com grandes amplitudes envolvendo mais de um vale potencial (*cross-well motions*). Próximo de $\omega_e = \omega_{01}$, Figura 3.41(c), existem duas soluções periódicas coexistentes de grande amplitude com uma alta periodicidade associada a uma janela periódica estreita dentro da ampla região caótica, uma solução vibrando em torno das posições de equilíbrio (0,0) e (2,2), onde a treliça superior mantem a concavidade inicial e outra em torno das posições de equilíbrio (0,2) e (4,2), onde a treliça inferior mantem a concavidade inicial. Este nível de carga é suficientemente elevado para induzir um comportamento complexo, com saltos numa ampla faixa de frequência, nas proximidades da segunda frequência natural ($\omega_e = \omega_{02}$). O plano de fase na Figura 3.41(f) exibe movimentos caóticos de grande amplitude entre vales, onde a solução passa pelos quatro vales potenciais.



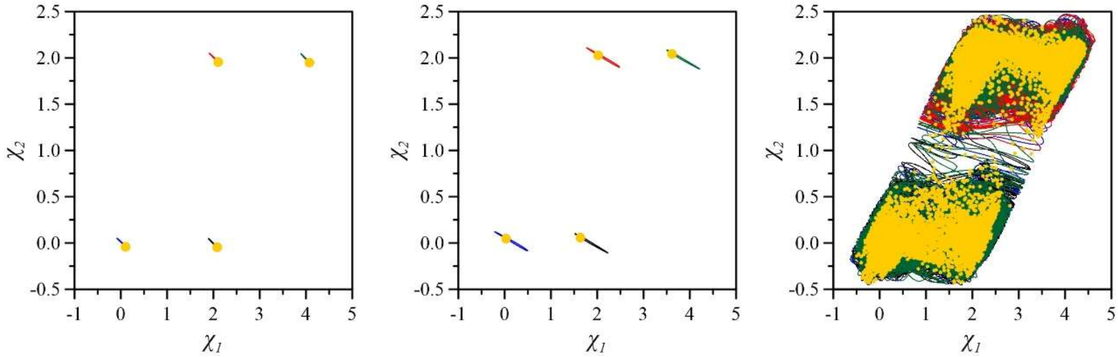
(a) $\Omega = 0.06$ e $f = 0.26$



(b) $\Omega = 0.06$ e $f = 0.42$



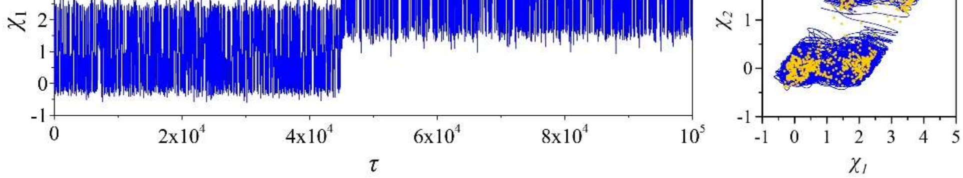
(c) $\Omega = 0.06$ e $f = 0.97$



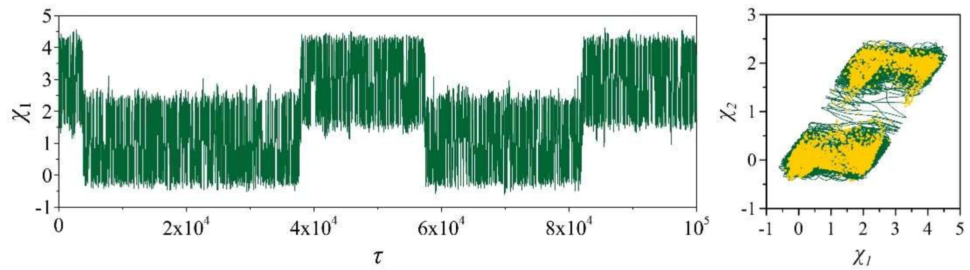
(d) $\Omega = 0.17$ e $f = 0.26$ (e) $\Omega = 0.17$ e $f = 0.42$ (f) $\Omega = 0.17$ e $f = 0.97$

Figura 3.41 - Projeções dos planos de fase das soluções coexistentes e seções de Poincaré nas regiões de ressonância, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ e $\lambda = 0.0$.

Para entender melhor o comportamento dinâmico nesta região da Figura 3.41(f), a Figura 3.42 mostra a resposta no domínio do tempo, com condições iniciais começando em $(\chi_1, \chi_{1,\tau}, \chi_2, \chi_{2,\tau}) = (0,0,0,0)$ e $(4,0,2,0)$, representadas em azul e verde respectivamente. As soluções em preto e vermelho na Figura 3.41(f) apresentam comportamento semelhante. Observa-se que em cada caso a estrutura apresenta um movimento caótico em torno das posições de equilíbrio (0,0) e (2,0) ou em torno das posições de equilíbrio (2,2) e (4,2) com sucessivos saltos entre essas duas soluções, o que explica o plano de fase complexo e seção de Poincaré mostrada na Figura 3.41(f). Estes resultados são particularmente importantes em aplicações que envolvem captação de energia ou controle de vibração. A complexidade crescente dos diagramas de bifurcação coexistentes em função da frequência de excitação Ω do sistema multiestável, nas proximidades das duas frequências naturais e para valores crescentes de f, pode se observar melhor nas visualizações 3D da Figura 3.43. Para $f > 0.42$ movimentos entre vales e caos já passam a ser observados.

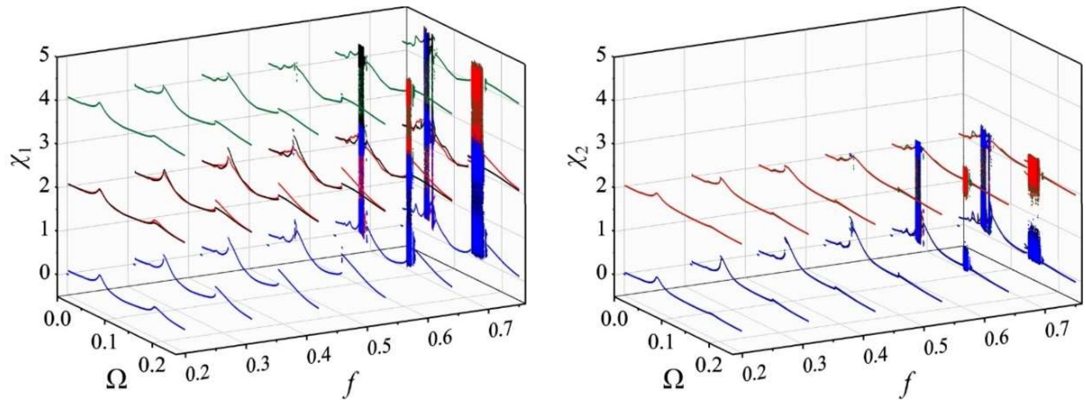


(a) condições iniciais $(\chi_1, \chi_{1,\tau}, \chi_2, \chi_{2,\tau}) = (0,0,0,0)$ em azul



(b) condições iniciais $(\chi_1, \chi_{1,\tau}, \chi_{2}, \chi_{2,\tau}) = (4,0,2,0)$ em verde

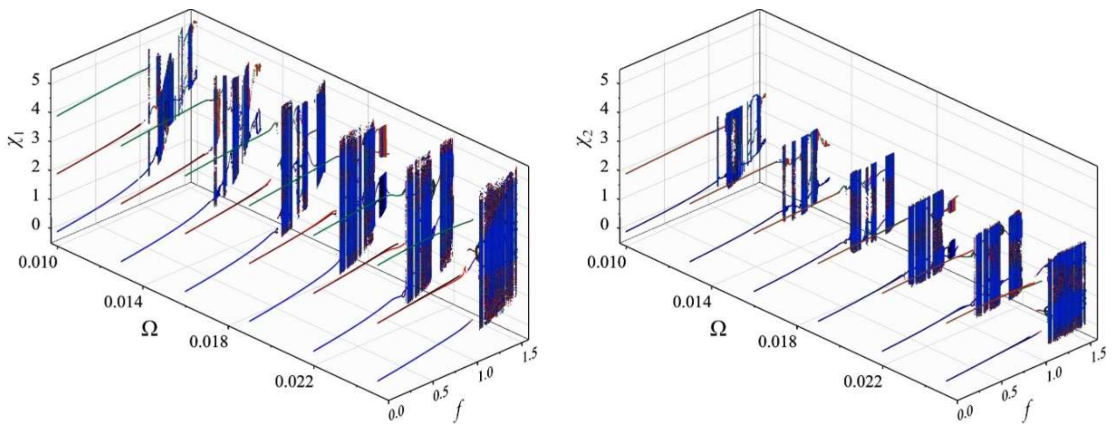
Figura 3.42 - Respostas no domínio do tempo, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\lambda = 0.0$, $\Omega = 0.17$ e $f = 0.97$.



(a) Deslocamento χ_1 (b) Deslocamento χ_2

Figura 3.43 - Sequência de diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\lambda = 0.0$ e, respectivamente, $f = 0.20, 0.31, 0.42, 0.53, 0.64, 0.75$.

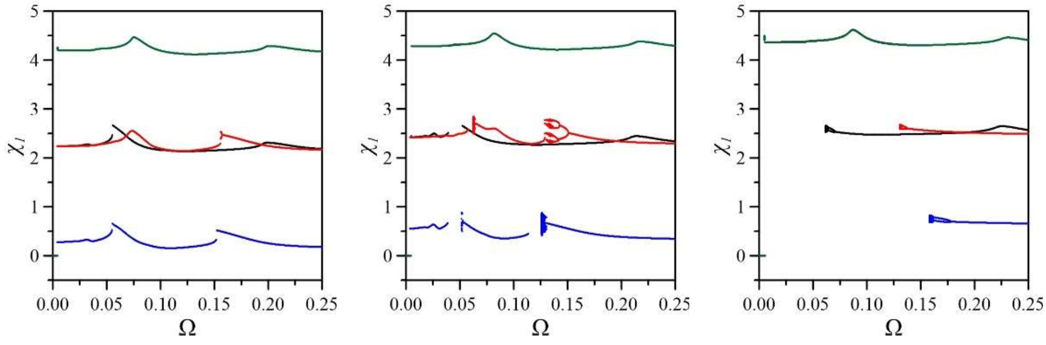
Os resultados apresentados até aqui demonstram que o sistema é altamente influenciado pela amplitude do carregamento harmônico. A Figura 3.44 mostra os diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a amplitude do carregamento harmônico f, para valores selecionados de frequência de excitação Ω. À medida que f aumenta, são observadas cascatas de duplicação de período que levam ao caos e à fusão de soluções de vales potenciais vizinhos, independentemente do valor de Ω. Este comportamento é seguido por regiões caóticas intersectadas por janelas de soluções periódicas.



(a) Deslocamento χ_1 (b) Deslocamento χ_2

Figura 3.44 - Sequência de diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a amplitude do carregamento harmônico f, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\lambda = 0.0$ e, respectivamente, $\Omega =$ 0.010, 0.013, 0.016, 0.019, 0.022, 0.025.

A Figura 3.45 ilustra a influência da carga estática, λ, nos diagramas de bifurcação para uma magnitude baixa de carregamento harmônico, $f = 0.26$ (comparar com a Figura 3.40(a) com $\lambda = 0.0$), e considerando $\alpha = 1.0$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$. São definidos três valores do pré-carregamento estático, $\lambda = 0.31\lambda_{cr}$, $\lambda = 0.63\lambda_{cr}$ e $\lambda = 0.94\lambda_{cr}$. Cada solução começa nas posições de equilíbrio estável obtidas na análise estática. Conforme observado na Figura 3.10, à medida que λ aumenta, o perfil da energia potencial do sistema muda radicalmente, com três vales potenciais diminuindo em tamanho e profundidade, enquanto o vale associado à configuração de equilíbrio com as duas treliças invertidas aumenta. Isso explica o motivo da curva de ressonância em verde, na Figura 3.45, quase não ser afetada pelo nível de carga estática, exibindo uma resposta quase linear. Por outro lado, a curva em azul, associada à posição original sem carga, cujo vale potencial é o primeiro a desaparecer, já apresenta uma elevada não linearidade com perda de rigidez para $\lambda = 0.31\lambda_{cr}$. As curvas em preto e vermelho apresentam diferentes graus de não linearidade, nas duas regiões de ressonância. Deve-se ressaltar que o efeito da quebra de simetria, que o carregamento estático introduz, atua de maneira diferente nos dois vales potenciais mais rasos (Figura 3.10(b,c)). Para $\lambda = 0.63\lambda_{cr}$ os ramos ressonantes exibem uma sequência de duplicação de período, levando a regiões onde nenhuma solução estável é detectada. Finalmente, para $\lambda = 0.94\lambda_{cr}$, as soluções em azul, preto e vermelho só existem em faixas de altas frequências onde, devido às forças inerciais, os deslocamentos são suficientemente pequenos. Os resultados também ilustram o efeito da quebra de simetria do carregamento estático nos diagramas de bifurcação, levando a diferentes sequências de bifurcação.

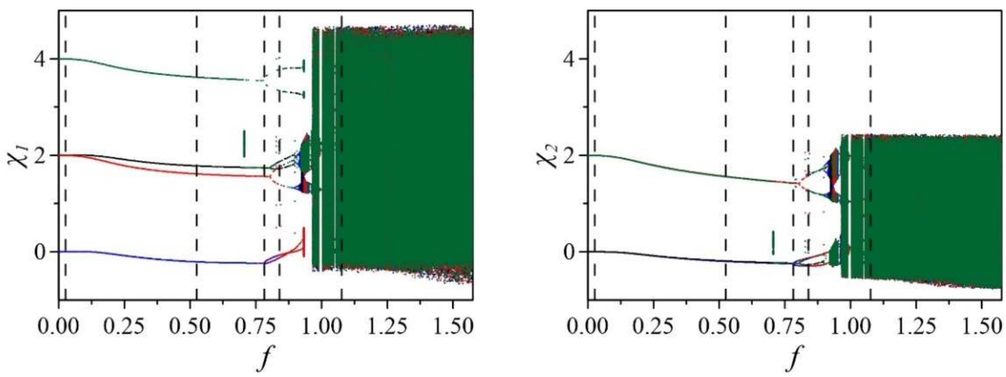


(a) $\lambda = 0.31\lambda_{cr}$ (b) $\lambda = 0.63\lambda_{cr}$ (c) $\lambda = 0.94\lambda_{cr}$

Figura 3.45 - Influência do nível de carregamento estático nos diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$ e $f = 0.26$.

3.3.1.2. Bacias de Atração

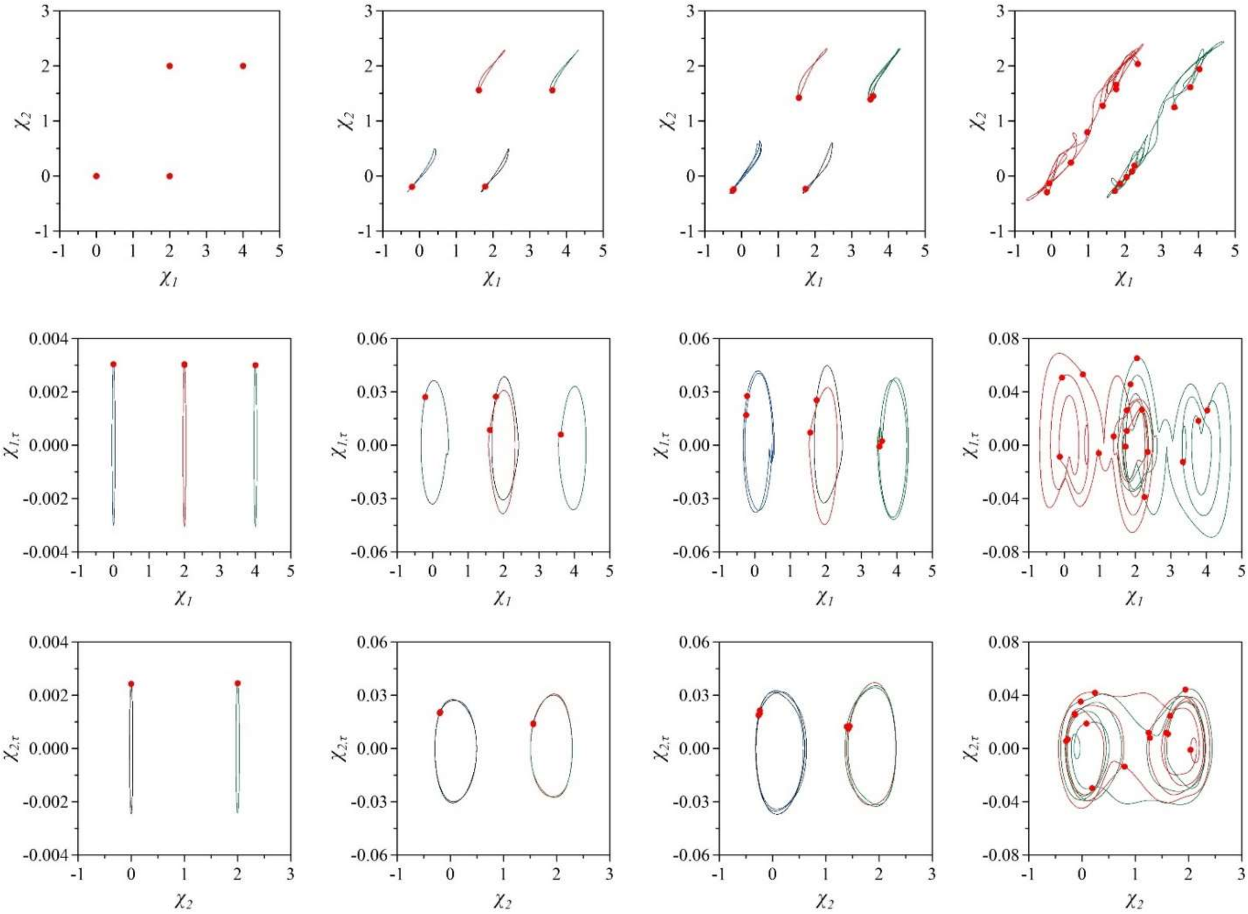
Conforme observado no item anterior, à medida que a amplitude do carregamento harmônico aumenta, as soluções periódicas coexistentes, inicialmente estáveis, sofrem uma série de bifurcações que levam ao caos. A Figura 3.46 mostra os diagramas de bifurcação para $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\Omega = 0.075$ e $\lambda = 0.0$ onde são selecionados cinco níveis de carregamento, identificados através de linhas verticais tracejadas, a saber, $f = 0.03$, 0.52, 0.78, 0.84 e 1.08. Estes valores são escolhidos para ilustrar diferentes comportamentos e estudar a evolução das bacias de atração.



(a) Deslocamento χ_1 (b) Deslocamento χ_2

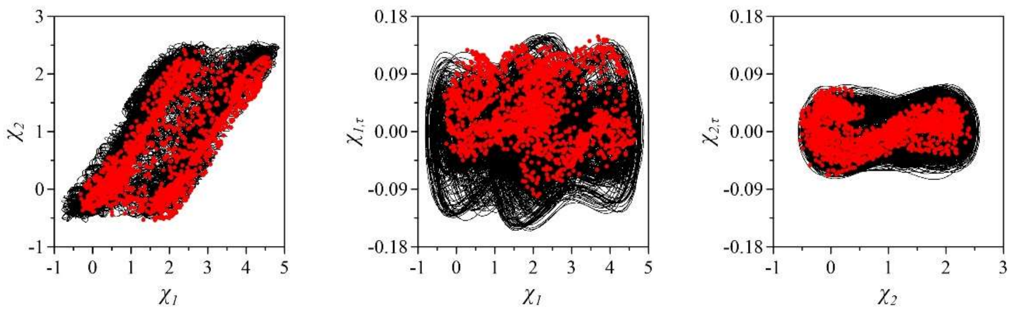
Figura 3.46 - Diagramas de bifurcação para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\Omega = 0.075$ e $\lambda = 0.0$, com cinco níveis de carregamento harmônico marcados através das linhas verticais tracejadas, $f = 0.03$, 0.52, 0.78, 0.84, 1.08.

A Figura 3.47 mostra em cada coluna três projeções dos atratores coexistentes para os primeiros quatro níveis de carregamento harmônico, sendo que os pontos em vermelho correspondem ao mapeamento de Poincaré, ilustrando assim a cascata de duplicação de período levando ao caos. Para o último nível de carga, $f = 1.08$, a Figura 3.48 mostra três projeções do atrator caótico.



(a) $f = 0.03$ (b) $f = 0.52$ (c) $f = 0.78$ (d) $f = 0.84$

Figura 3.47 - Projeções dos planos de fase e seções de Poincaré dos atratores coexistentes, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\Omega = 0.075$ e $\lambda = 0.0$, e quatro níveis de carregamento $f = 0.03, 0.52, 0.78, 0.84$.



(a) $\chi_1 \times \chi_2$ (b) $\chi_1 \times \chi_{1,\tau}$ (c) $\chi_2 \times \chi_{2,\tau}$

Figura 3.48 - Projeções dos planos de fase e seções de Poincaré do atrator caótico, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $f = 1.08$, $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\Omega = 0.075$ e $\lambda = 0.0$.

Estas soluções coexistentes e suas bifurcações têm um enorme impacto nas bacias de atração e na integridade dinâmica de cada solução, conforme ilustrado na Figura 3.49, onde são selecionadas seções transversais das bacias com 4 dimensões, considerando, α = 1.0, δ_1 = δ_2 = 0.100, λ = 0.0 e Ω = 0.075 (primeira região de ressonância). Estas seções correspondem ao plano de configuração $\chi_1 \times \chi_2$ e têm se mostrado as mais convenientes na análise da resposta acoplada. Lenci e Rega destacam em diversas publicações o papel da dinâmica global na análise e controle de sistemas não lineares e o conceito de integridade dinâmica, inicialmente introduzido por Thompson (2019), como uma perspectiva unificada para melhorar a capacidade de carga e a segurança dos sistemas de engenharia, através de um novo paradigma de projeto, Lenci & Rega (2005). A análise global também auxilia na interpretação e previsão de resultados experimentais em sistemas com soluções coexistentes, Lenci & Rega (2011).

Na Figura 3.49(a), f = 0.03 (nível de carga muito baixo), as quatro bacias coexistentes compartilham quase igualmente o espaço de fase, com uma região ampla bem definida e não corrompida circundando cada atrator. Longe dos atratores, as quatro bacias apresentam uma estrutura complexa com muitas regiões desconectadas, que se alternam repetidamente, até que finalmente uma estrutura fractal é observada para grandes perturbações, o que dificulta a previsão de comportamento na presença de ruídos ou incertezas bem como as possíveis imperfeições discutidas anteriormente. Uma topologia bem semelhante ainda é observada na Figura 3.49(b), para f = 0.52. Para f = 0.78, os aspectos fractais da bacia são realçados, com redução significativa das regiões contínuas, indicando que a resposta de sistemas reais, com condições iniciais incertas, torna-se imprevisível. O caráter fractal aumenta ainda mais para f = 0.84. Nestes casos, as duas tonalidades da mesma cor servem apenas para destacar a existência de soluções periódicas *2Tf*, conforme observado na Figura 3.47.

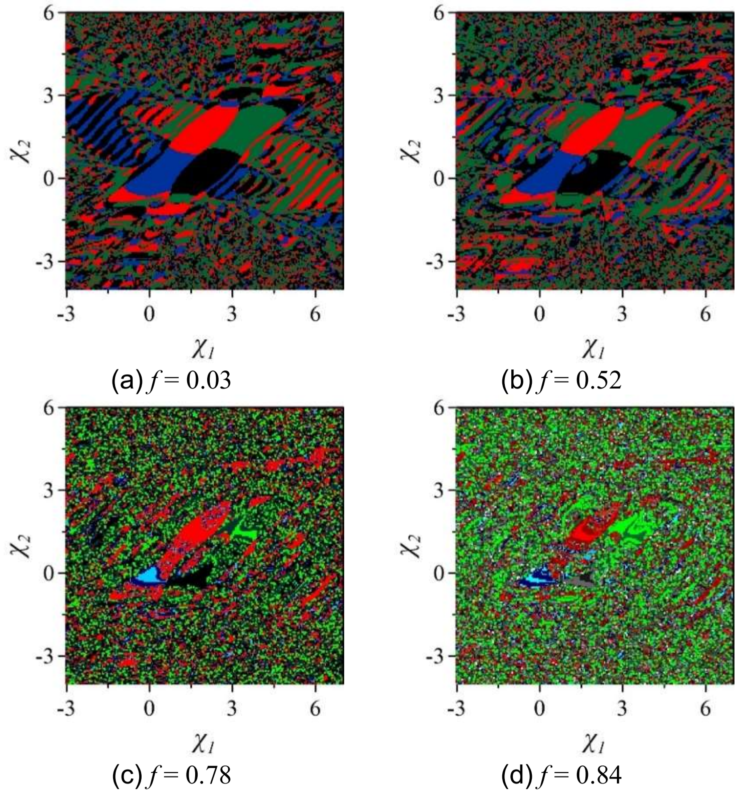


Figura 3.49 - Bacias de atração no plano de configuração para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\lambda = 0.0$ e $\Omega = 0.075$.

Seções transversais adicionais para o nível de carregamento $f = 0.03$ são mostradas na Figura 3.50, onde o efeito da velocidade nas soluções coexistentes pode ser verificado, bem como a complexidade da bacia com quatro dimensões. A Figura 3.50(a), correspondente à treliça carregada diretamente, mostra uma semelhança com aquelas exibidas pelo oscilador Duffing com dois vales potenciais, Virgin (2000) e Kovacic & Brennan (2011).

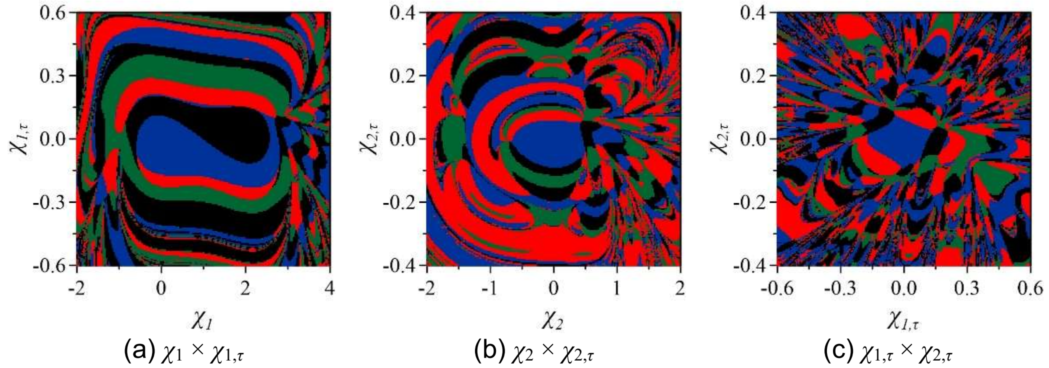
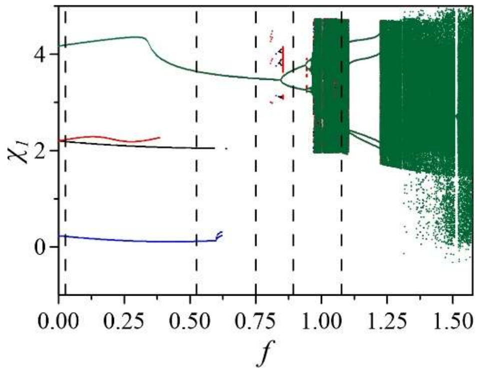
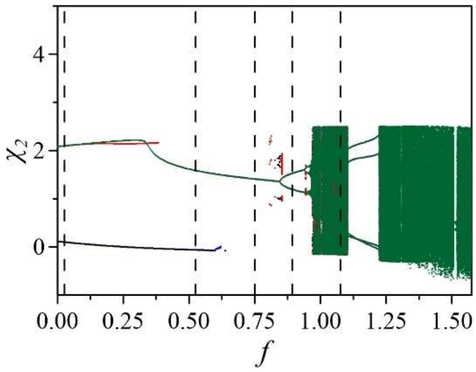


Figura 3.50 - Bacias de atração para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\lambda = 0.0$, $f = 0.03$ e $\Omega = 0.075$.

Ao avaliar o efeito da introdução de um pré-carregamento estático, nota-se que à medida que λ aumenta, bifurcações começam a ocorrer já para valores mais baixos de f, como mostrado nas Figura 3.45 e Figura 3.51, isto ocorre devido à perda de simetria no potencial de energia (Figura 3.10). Inicialmente a solução vermelha desaparece, seguida pelas soluções azul e preta, permanecendo apenas a solução verde que, à medida que a carga aumenta, exibe várias sequências de bifurcações.



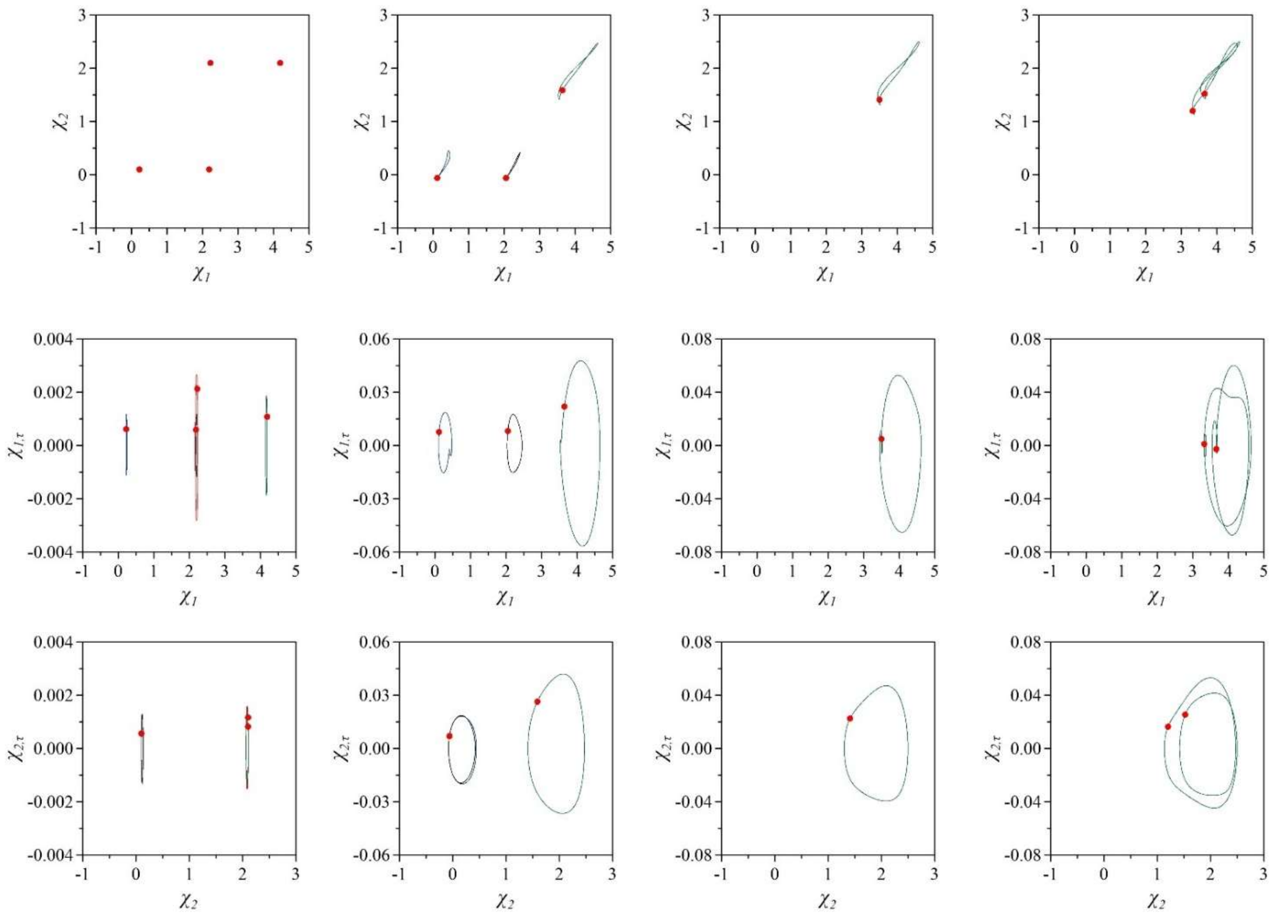
(a) Deslocamento χ_1



(b) Deslocamento χ_2

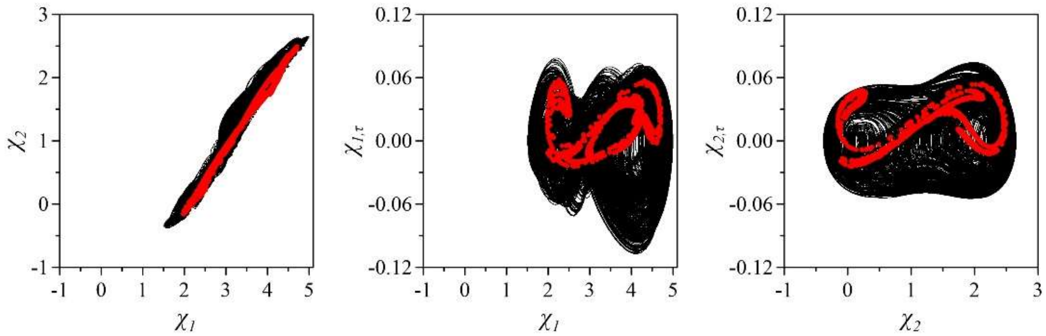
Figura 3.51 - Diagramas de bifurcação para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\Omega = 0.075$ e $\lambda = 0.50\lambda_{cr}$, com cinco níveis de carregamento harmônico marcados através das linhas verticais tracejadas, f = 0.03, 0.52, 0.75, 0.89, 1.08.

O comportamento observado na Figura 3.51 é ilustrado pelas três projeções no espaço de fase e seções de Poincaré correspondentes na Figura 3.52, para os valores de f estabelecidos acima. Para $f = 0.03$, a influência da carga estática é quase insignificante, como esperado, com quatro soluções periódicas de período um e pequena amplitude dentro de cada vale potencial. Para $f = 0.52$, aparecem apenas três soluções periódicas de período um com diferentes amplitudes de vibração, de acordo com a Figura 3.51. O número de soluções coexistentes diminui para uma solução periódica de período um, quando $f = 0.75$. Após este nível de carga, esta solução sofre uma bifurcação, duplicando o período, conforme ilustrado para f = 0.89 na Figura 3.52(d), iniciando a cascata que leva ao caos. Um atrator caótico típico é ilustrado ainda na Figura 3.53, para $f = 1.08$. A projeção do atrator no espaço de configuração mostra que as soluções visitam apenas dois vales potenciais.



(a) $f = 0.03$ (b) $f = 0.52$ (c) $f = 0.75$ (d) $f = 0.89$

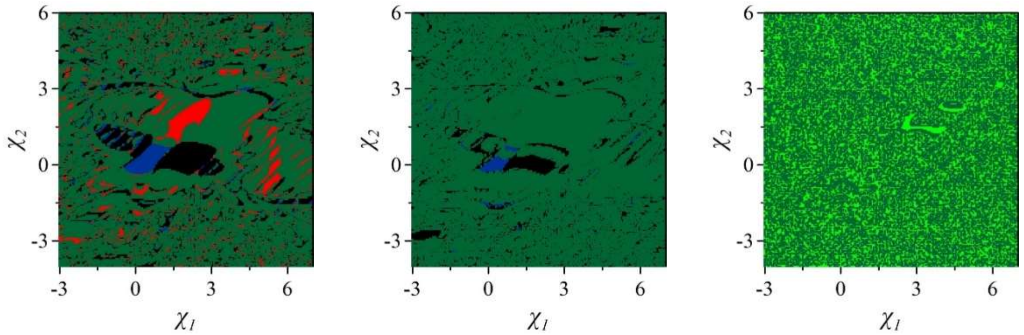
Figura 3.52 - Projeções dos planos de fase e seções de Poincaré dos atratores coexistentes, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\Omega = 0.075$ e $\lambda = 0.50\lambda_{cr}$, e quatro níveis de carregamento, $f = 0.03, 0.52, 0.75, 0.89$.



(a) $\chi_1 \times \chi_2$ (b) $\chi_1 \times \chi_{1,\tau}$ (c) $\chi_2 \times \chi_{2,\tau}$

Figura 3.53 - Projeções dos planos de fase e seções de Poincaré do atrator caótico, modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $f = 1.08$, $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\Omega = 0.075$ e $\lambda = 0.50\lambda_{cr}$.

A diminuição do número de atratores também é observada nas bacias apresentadas na Figura 3.54, onde a região verde aumenta gradativamente com *f*. Novamente, os dois tons de verde são usados para destacar a existência de soluções periódicas *2Tf*, conforme observado na Figura 3.52(d).



(a) $f = 0.03$ (b) $f = 0.52$ (d) $f = 0.89$

Figura 3.54 - Bacias de atração no plano de configuração para o modelo de treliças conectadas por elementos rígidos. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\lambda = 0.50\lambda_{cr}$ e $\Omega = 0.075$.

3.3.2. Modelo Conectado por Elemento Flexível

3.3.2.1. Diagramas de Bifurcação

Considerando agora o modelo conectado através da mola, a Figura 3.55 mostra diagramas de bifurcação para a estrutura sem carregamento estático ($\lambda = 0.0$) e tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, com $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$ e $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, correspondente ao caso com quatro atratores. Neste caso tem-se para a configuração descarregada $\omega_{01} = 0.2379$ e $\omega_{02} = 0.2672$. Nas Figura 3.55(a,d) para $f = 0.08$ são observados quatro ramos coexistentes de soluções, cada um ligado a uma das quatro configurações estáveis previamente identificadas (Figura 3.22(d)). Por consistência, é mantido o esquema de cores utilizado na análise de vibração livre. Considerando que este nível de carga é baixo, nenhuma bifurcação é observada nos ramos de soluções começando nos pontos de equilíbrio (χ_1, χ_2) = (0,0) e (2,2), correspondestes aos vales potenciais mais profundos na Figura 3.22(a), percebe-se apenas um leve aumento da amplitude de vibração próximo às regiões de ressonância. Para os ramos de soluções associadas aos vales maior sensibilidade já para este nível de carga, particularmente para a solução em vermelho com origem no ponto de equilíbrio (0.3, 1.7). Para a amplitude do carregamento harmônico de $f = 0.23$, Figura 3.55(b,e), nenhuma solução estável é detectada na faixa de baixas frequências de excitação para os ramos de soluções em vermelho e preto. No entanto, soluções começam a surgir na região de ressonância, através de uma cascata de duplicação de período reverso. Para os ramos de soluções associadas aos vales mais profundos, azul e verde, nota-se que a amplitude de vibração na região de ressonância aumenta quando comparada com o nível anterior. Como as frequências naturais são próximas, há uma interação entre os modos de vibração nesta região, com picos muito próximos. Para $f = 0.38$, Figura 3.55(c,f), os diagramas de bifurcação apresentam um cenário de bifurcação mais complexo. Os ramos principais, em azul e verde, mostram o comportamento *softening* típico de estruturas abatidas, na região de ressonância principal, com o ramo não ressonante exibindo um salto devido a bifurcação nó-sela. As soluções em vermelho e preto existem apenas para altas frequências de excitação, onde as forças inerciais são dominantes, levando a pequenas vibrações restritas a cada vale potencial. Novamente são observados bifurcações, descontinuidades e saltos.

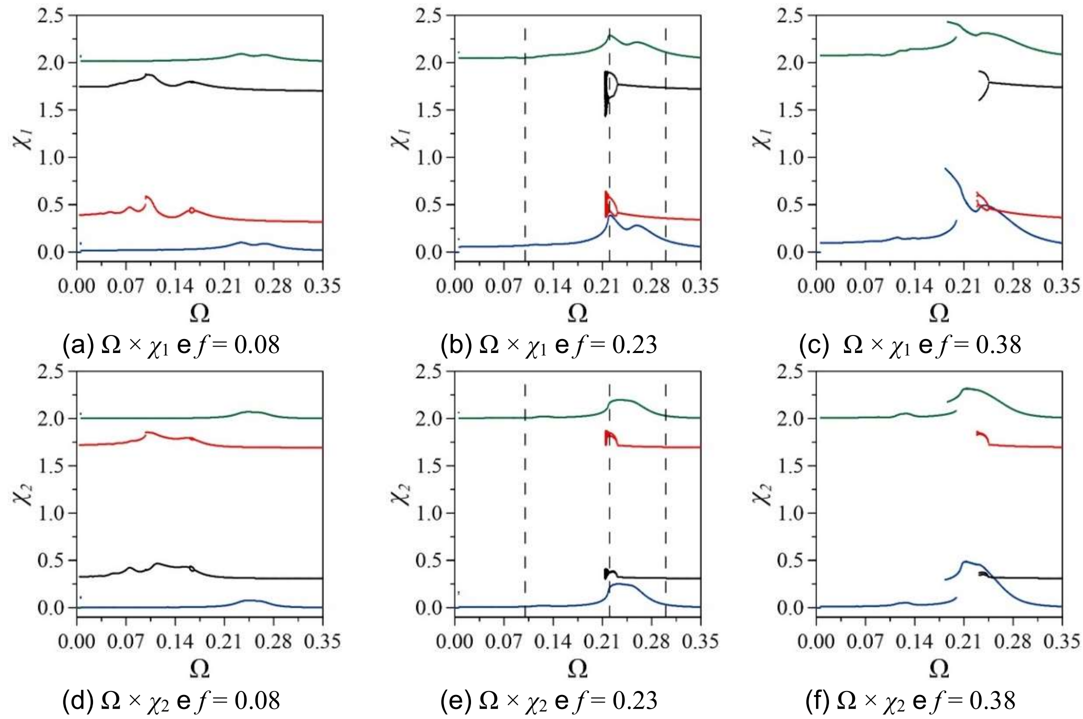
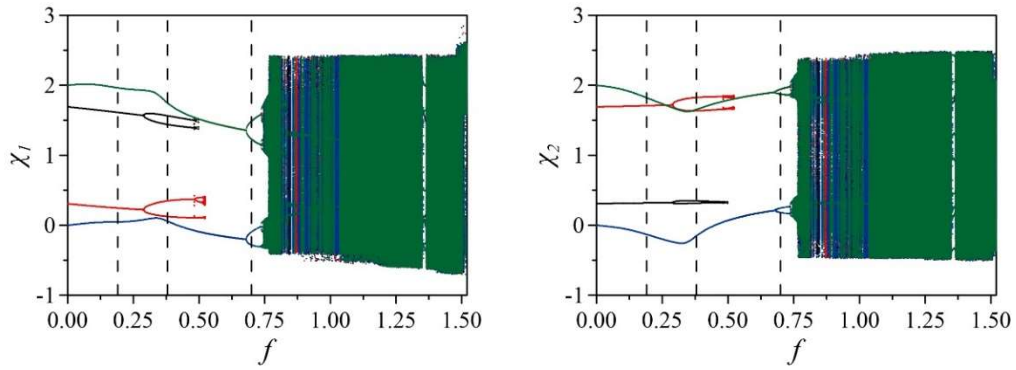


Figura 3.55 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$ e $\lambda = 0.0$. Em (b,e), com três frequências de excitação marcadas através das linhas verticais tracejadas, $\Omega = 0.10, 0.22, 0.30$.

Para melhor compreender a influência da amplitude de excitação na resposta multiestável, a Figura 3.56 mostra os diagramas de bifurcação considerando como parâmetro de controle a amplitude do carregamento harmônico f e $\Omega = \omega_{01} = 0.2379$ (Tabela 3.6). Novamente, os quatro ramos de solução coexistentes são observados para baixos valores de f. À medida que f aumenta, os ramos de solução em vermelho e preto desaparecem, como esperado, após algumas bifurcações devido à pequena profundidade dos vales potenciais. As soluções associadas aos pontos de equilíbrio (χ_1, χ_2) = (0,0) e (2,2) sempre existem e exibem várias bifurcações, incluindo cascatas de duplicação de período, movimentos de grande amplitude entre vales potenciais, com amplas regiões caóticas e janelas periódicas, um cenário comum na dinâmica não linear.



(a) Deslocamento χ_1 (b) Deslocamento χ_2

Figura 3.56 - Diagramas de bifurcação para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, $\lambda = 0.0$ e $\Omega = 0.2379$, com três níveis de carregamento harmônico marcados através das linhas verticais tracejadas, $f = 0.19, 0.38, 0.70$.

3.3.2.2. Bacias de Atração

A Figura 3.57 mostra as seções transversais das bacias de atração no plano de configuração $\chi_1 \times \chi_2$ para três valores selecionados de Ω, identificados na Figura 3.55(b,e) pelas linhas verticais tracejadas. Para $\Omega = 0.10$, tem-se duas regiões, azul e verde, bem definidas que subdividem igualmente a bacia. Em $\Omega = 0.22$, aparecem duas bacias adicionais, associadas aos dois vales potenciais de menor profundidade, cada uma conectada a uma resposta harmônica de período dois. Por fim, em Ω = 0.30, identificam-se quatro soluções coexistentes de período *1Tf* compartilhando a bacia. Em todos os casos as bacias azul e verde são dominantes, com uma região não corrompida circundando o atrator. A geometria da bacia também demonstra as simetrias inerentes ao sistema.

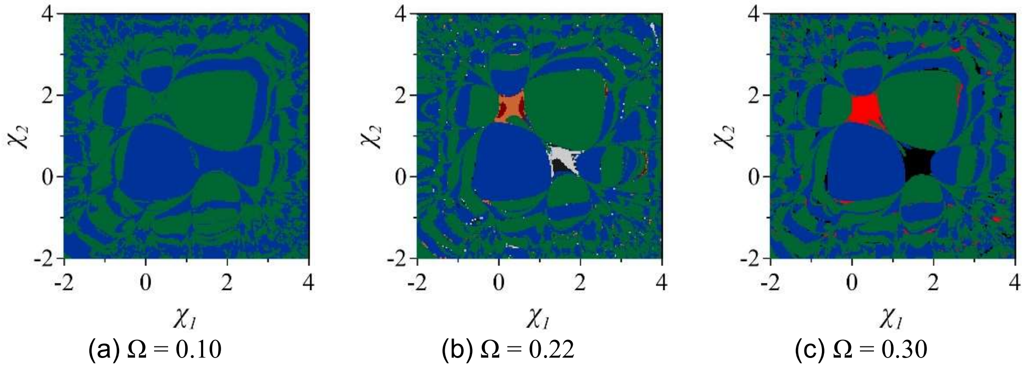


Figura 3.57 - Bacias de atração no plano de configuração para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, $\lambda = 0.0$ e $f = 0.23$.

A Figura 3.58 apresenta as seções transversais das bacias de atração para $\Omega = 0.2379$ e valores selecionados de f identificados por linhas verticais tracejadas na Figura 3.56. Primeiro, para $f = 0.19$, os quatro atratores periódicos estáveis são cercados por bacias contínuas e não corrompidas. Cada bacia corresponde a um atrator periódico dentro de cada vale potencial. Aumentando a força para $f = 0.38$, as regiões em vermelho e preto passam por uma bifurcação que leva a uma duplicação de período, mas as regiões azul e verde permanecem praticamente inalteradas. Finalmente, para $f = 0.70$, a integridade dinâmica diminui consideravelmente com as bacias altamente fractais.

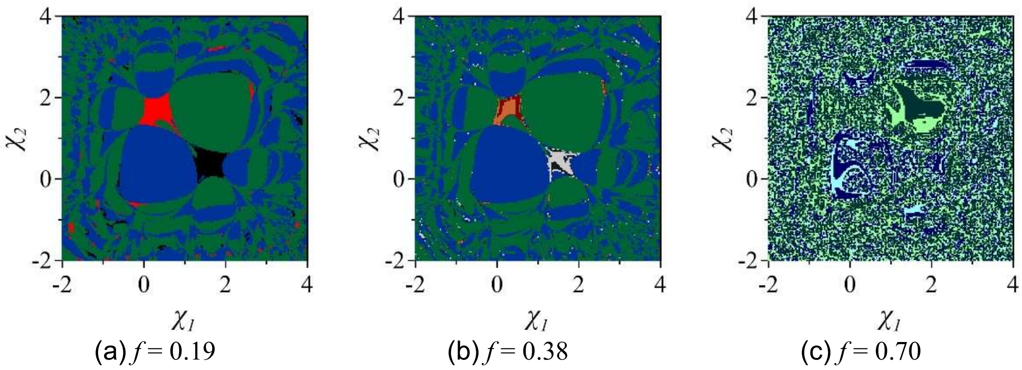
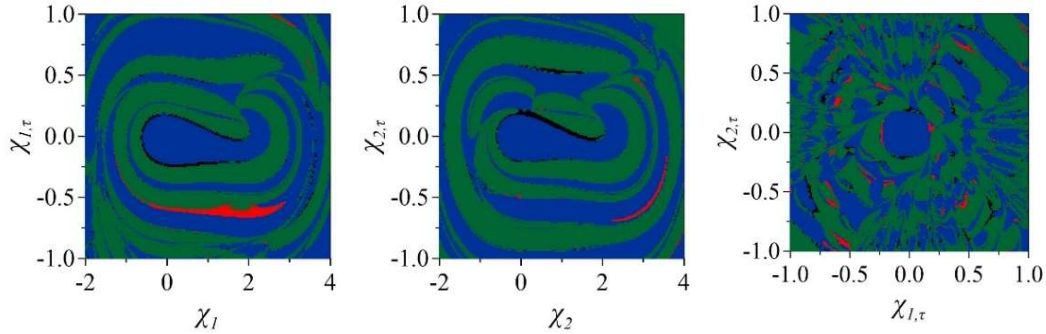


Figura 3.58 - Bacias de atração no plano de configuração para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, $\lambda = 0.0$ e $\Omega = 0.2379$.

Por fim, a Figura 3.59 apresenta as seções transversais adicionais das bacias de atração, para $\Omega = 0.2379$ e $f = 0.19$, onde pode ser observada a influência das velocidades e a complexidade da topologia das bacias com quatro dimensões.



(a) $\chi_1 \times \chi_{1,\tau}$ (b) $\chi_2 \times \chi_{2,\tau}$ (c) $\chi_{1,\tau} \times \chi_{2,\tau}$

Figura 3.59 - Bacias de atração para o modelo de treliças conectadas por elemento flexível. Parâmetros adimensionais $\alpha = 1.0$, $\kappa = 0.005$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.14$, $\lambda = 0.0$, $f = 0.19$ e $\Omega = 0.2379$.

4
Sistemas Estruturais Formados por Arcos

Como apresentado no Capítulo 1, muitos modelos de estruturas multiestáveis propõem uma sequência de arcos abatidos. Em muitos casos estes arcos são obtidos a partir da flambagem de barras esbeltas. Neste capítulo são utilizados como referências os trabalhos de Kreider & Nayfeh (1998) e Eman & Nayfeh (2004), onde se apresenta uma formulação não linear consistente e se estuda a resposta não linear de uma viga bi-engastada submetida a uma carga axial acima do limite de flambagem, resultando em uma estrutura em arco com a forma do modo de flambagem, estando esta posteriormente submetida a uma carga harmônica aplicada transversalmente ao eixo principal do arco. Os autores também estudaram arcos simplesmente apoiados, cujos modelos com um grau de liberdade apresentaram excelentes resultados para uma larga faixa de geometrias. Em Kreider & Nayfeh (1998), o objetivo foi apresentar resultados experimentais para diferentes configurações pós-flambagem. Eman & Nayfeh (2004) utilizaram modelos com dois ou mais modos para estudar a flambagem de arcos não abatidos, isto é, vigas sob cargas axiais relativamente altas. Para a presente pesquisa, é importante ressaltar que os modelos estudados apresentam grande abatimento, condição em que os modelos de 1GL são suficientemente precisos.

4.1.
Modelo de Arco Unitário

Inicialmente, seguindo os trabalhos de Kreider & Nayfeh (1998) e Eman & Nayfeh (2004) estuda-se um arco isolado para definir os passos da formulação adotada e os parâmetros necessários à análise dos modelos acoplados. Para isto, considera-se uma coluna de material elástico-linear, com comprimento L, massa por unidade de volume ρ, módulo de elasticidade E, área da seção transversal A e momento de inércia I. Inicialmente, após a aplicação de uma carga axial estática P, superior à carga crítica da barra, P_{cr}, ocorre o fenômeno da flambagem e a estrutura assume uma configuração estável com a forma do 1º modo de flambagem (modo simétrico), $V_0(X)$. A seguir, aplica-se uma carga Q transversalmente à estrutura e a nova configuração é descrita pelo deslocamento adicional $V(X,t)$, como ilustra a Figura 4.1. Assim, o deslocamento total com relação à posição inicial indeformada é dado por $W(X,t) = V_0(X) + V(X,t)$.

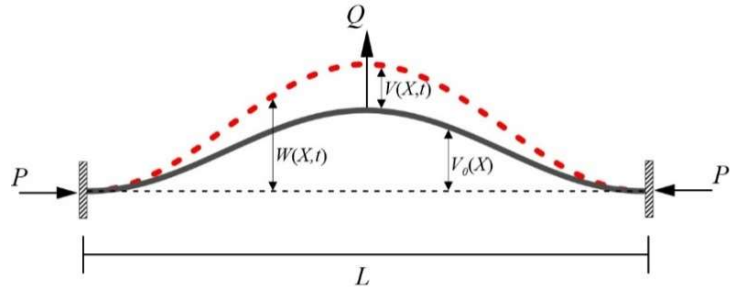


Figura 4.1 - Modelo de arco bi-engastado na posição inicial pós flambagem (curva contínua em cinza) e após a aplicação da carga Q (curva tracejada em vermelho).

A equação não linear que governa o comportamento dinâmico do arco é dada por (Kreider & Nayfeh, 1998; Eman & Nayfeh, 2004):

$$M\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}+P\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+C\frac{\partial W}{\partial X}-\frac{EA}{2L}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\int_0^L\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2 dX+Q\delta\left(X-\frac{L}{2}\right)=0 \quad (4.1)$$

onde $M = \rho A$ é a massa por unidade de comprimento, EI, a rigidez a flexão, P, o pré-carregamento axial, C, o coeficiente de amortecimento, EA, a rigidez axial, e δ, a função delta de Dirac.

As condições de contorno para o arco engastado nas duas extremidades são:

$$W(0)=W(L)=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial W(0)}{\partial X}=\frac{\partial W(L)}{\partial X}=0 \quad (4.2)$$

Para o desenvolvimento da formulação, definem-se os parâmetros adimensionais:

$$x=\frac{X}{L},\ v_0=\frac{V_0}{r},\ v=\frac{V}{r},\ \tau=t\sqrt{\frac{EI}{ML^4}},\ p=P\frac{L^2}{EI},\ c=C\frac{L^2}{\sqrt{MEI}},\ \lambda=Q\frac{L^4}{EIr} \quad (4.3)$$

onde $r=\sqrt{I/A}$ representa o raio de giração da seção transversal da viga.

Para o caso de seção retangular $A = b \times h$, o raio de giração é igual a:

$$r=\frac{h}{2\sqrt{3}} \quad (4.4)$$

Portanto, a flecha adimensional pode ser expressa por:

$$v=2\sqrt{3}\frac{V}{h} \quad (4.5)$$

Deste modo, a equação de movimento adimensional, onde o comprimento L torna-se unitário, toma a forma:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\int_0^1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx+\lambda\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad (4.6)$$

com as condições de contorno:

$$w(0)=w(1)=0 \text{ e } \frac{\partial w(0)}{\partial x}=\frac{\partial w(1)}{\partial x}=0 \qquad (4.7)$$

4.1.1.
Problema de Flambagem

Considerando o problema de flambagem apenas e, com isso, excluindo os termos com derivada no tempo e de amortecimento, as Equações (4.6) e (4.7) podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial^4 v_0}{\partial x^4}+p\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\int_0^1\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 dx+\lambda\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad (4.8)$$

$$v_0(0)=v_0(1)=0 \text{ e } \frac{\partial v_0(0)}{\partial x}=\frac{\partial v_0(1)}{\partial x}=0 \qquad (4.9)$$

onde v_0 corresponde a configuração estática imediatamente após a flambagem. Lembrando que a integral presente na Equação (4.8) corresponde a uma constante para uma dada configuração $v_0(x)$, tem-se, portanto, uma equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes (Eman & Nayfeh, 2004).

Resolvendo a Equação (4.8) para as condições de contorno (4.9) chega-se à configuração inicial em função da carga axial P, na sua forma adimensional:

$$v_0(x)=\frac{b}{2}\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right] \qquad 0\le x\le 1 \qquad (4.10)$$

onde b corresponde ao deslocamento adimensional em $x = 1/2$ e define, portanto, o abatimento do arco, sendo relacionado com a carga axial adimensional p por:

$$b^2=\frac{4\left(p-p_c\right)}{\pi^2} \qquad (4.11)$$

onde p_c é a carga crítica adimensional. Para a viga bi-engastada, tem-se $p_c = 4\pi^2$.

4.1.2.
Arco a partir da Coluna Flambada

Com objetivo de obter a equação não linear de movimento em torno da posição de equilíbrio $v_0(x)$, considera-se a parcela de deslocamento adicional em função do tempo, $v(x,\tau)$ e, assim, o deslocamento total com relação à configuração inicial indeformada, $w(x,\tau)$, é dado por (ver Figura 3.1):

$$w(x,\tau)=\frac{b}{2}\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right]+v(x,\tau) \quad 0\le x\le 1 \tag{4.12}$$

Substituindo a Equação (4.12) nas Equações (4.6) e (4.7), chega-se a:

$$\begin{aligned}&\ddot{v}+v^{iv}+c\dot{v}+4\pi^2 v''-2b^2\pi^3\cos\left(2\pi x\right)\int_0^1 v'\sin\left(2\pi x\right)dx\\&-b\pi^2\cos\left(2\pi x\right)\int_0^1 v'^2 dx-b\pi v''\int_0^1 v'\sin\left(2\pi x\right)dx\\&-\frac{1}{2}v''\int_0^1 v'^2 dx+\lambda\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$v\left(0\right)=v\left(1\right)=0 \;\text{ e }\; v'\left(0\right)=v'\left(1\right)=0 \tag{4.14}$$

onde a notação de Lagrange representa a derivada em função da coordenada espacial x e, o ponto acima da variável, a derivada em relação ao tempo adimensional τ.

Para a análise estática do arco submetido a uma carga transversal a Equação (4.13) se reduz a:

$$\begin{aligned}&v^{iv}+4\pi^2 v''-2b^2\pi^3\cos\left(2\pi x\right)\int_0^1 v'\sin\left(2\pi x\right)dx\\&-b\pi^2\cos\left(2\pi x\right)\int_0^1 v'^2 dx-b\pi v''\int_0^1 v'\sin\left(2\pi x\right)dx\\&-\frac{1}{2}v''\int_0^1 v'^2 dx+\lambda\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\end{aligned} \tag{4.15}$$

Sabe-se que $v(x,\tau)$ pode ser descrito por uma série de funções cinematicamente admissíveis, conhecidas como funções de interpolação. No entanto para arcos abatidos a aproximação:

$$v(x,\tau)=\frac{a}{2}\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right] \quad 0\le x\le 1 \tag{4.16}$$

onde a representa a amplitude da função de interpolação, é suficientemente precisa.

Substituindo a Equação (4.16) em (4.15), aplicando o método de Galerkin (Kreider & Nayfeh, 1998; Eman & Nayfeh 2004) tendo como função peso [1 – cos($2\pi x$)], obtém-se a equação não linear de equilíbrio. Explicitando o parâmetro de carga λ, tem-se o caminho não linear de equilíbrio na sua forma adimensional:

$$\lambda = -\frac{1}{8}\pi^4\left(a^3 + 3a^2 b + 2ab^2\right) \tag{4.17}$$

onde observa-se, como esperado, termos não lineares quadráticos e cúbicos.

Considerando uma carga axial pouco acima da carga crítica de flambagem $p = 4.1\pi^2$ e, portanto, $b = 0.63$, apresenta-se na Figura 4.2 o caminho não linear de equilíbrio em função do deslocamento no meio do vão ($w(1/2)$). Percebe-se um comportamento típico de estruturas abatidas, onde o arco reduz gradativamente sua rigidez efetiva (tangente à curva) até atingir uma carga limite, representado através do ponto em vermelho, onde ocorre a perda de estabilidade e salto para uma posição de equilíbrio da estrutura com concavidade invertida (*snap-through*). Se a estrutura for a seguir descarregada e, a seguir, a carga tiver a direção invertida chega-se ao ponto limite inferior onde, novamente, ocorre um salto com mudança de concavidade.

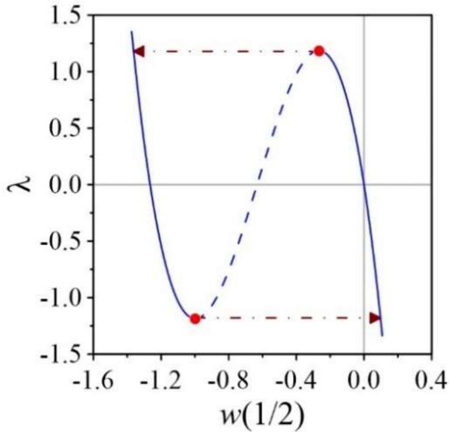


Figura 4.2 - Caminho não linear de equilíbrio para o modelo de arco unitário. Parâmetros adimensionais $p = 4.1\pi^2$ e $b = 0.63$.

Para o caso da estrutura descarregada (λ = 0.0), as posições de equilíbrio do sistema estrutural são:

$$w(1/2) = 0.0, -0.632, -1.265 \tag{4.18}$$

e a carga crítica relativa aos dois pontos limite é dada por:

$$\lambda_{cr} = \pm 1.186 \tag{4.19}$$

Com o objetivo de validar o modelo de 1 GL como representativo para o comportamento do arco unitário, faz-se uma análise considerando 2 GL, ou seja, utiliza-se a soma de duas funções de interpolação na discretização. Neste caso, foram utilizados os dois primeiros modos de flambagem simétricos:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(2n\pi x\right)\right] \qquad n = 1, 2. \tag{4.20}$$

Para se estudar a bifurcação com perda de simetria adiciona-se o primeiro modo assimétrico:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[1 - 2x - \cos\left(8.987x\right) + \frac{2}{8.987}\sin\left(8.987x\right)\right] \tag{4.21}$$

Estes modos estão representados na Figura 4.3.

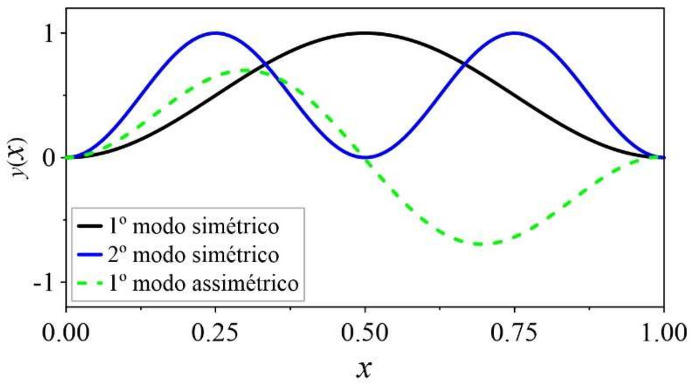


Figura 4.3 - Modos de flambagem do arco a partir da aplicação de uma carga estática axial P.

Primeiramente, considerando os modos simétricos, tem-se para os casos com 2 GL que o deslocamento a partir da configuração de equilíbrio pós flambagem é expresso pelas somas das funções:

$$v(x,\tau) = \frac{a_1}{2}\left[1 - \cos\left(2\pi x\right)\right] + \frac{a_2}{2}\left[1 - \cos\left(4\pi x\right)\right] \qquad 0 \le x \le 1 \tag{4.22}$$

onde a_1 e a_2 representam as amplitudes modais.

Na Figura 4.4 se comparam os caminhos não lineares para os casos com 1 e 2 graus de liberdade onde percebe-se uma convergência muito boa para valores de p próximo a carga crítica p_c.

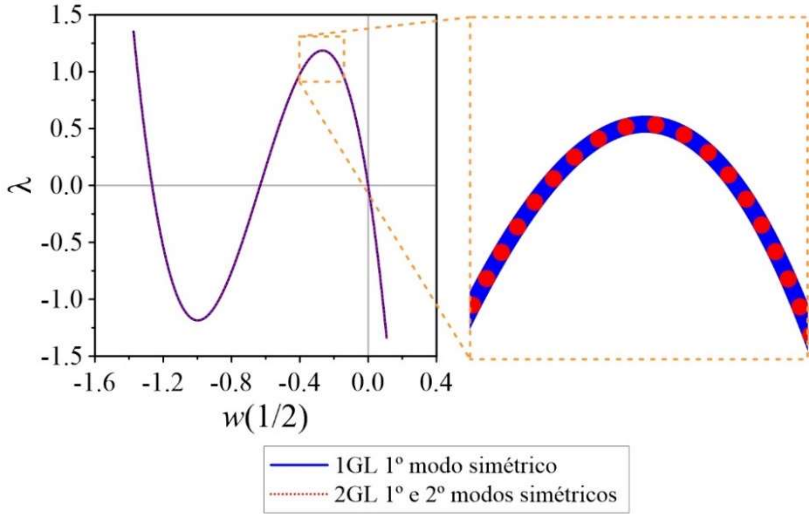


Figura 4.4 - Comparação entre os caminhos não lineares com 1 e 2 GL, $p = 4.1\pi^2$ e $b = 0.63$.

Para valores mais elevados da carga axial, ou seja, b mais elevado e consequentemente um menor abatimento (p = $8.5\pi^2$ e b = 4.24), percebe-se, conforme mostra a Figura 4.5, que o modelo com 1GL ainda apresenta ótimos resultados.

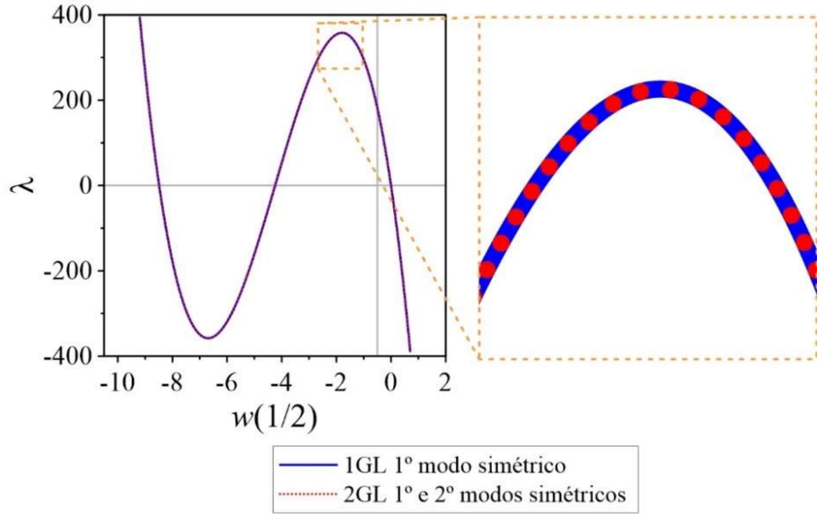


Figura 4.5 - Comparação entre os caminhos não lineares de 1 e 2 GL, $p = 8.5\pi^2$ e $b = 4.24$.

4.1.3. Arco Simplesmente Apoiado

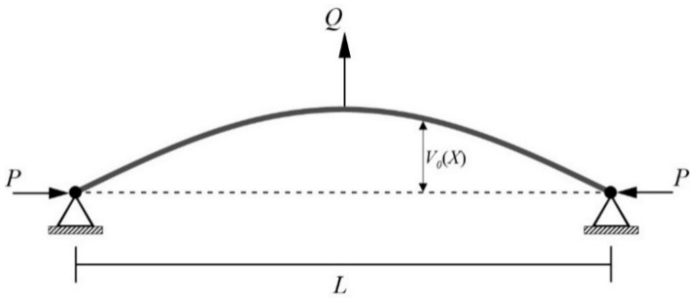


Figura 4.6 - Modelo de arco para o caso da estrutura simplesmente apoiada.

Caso se considere a estrutura simplesmente apoiada, o arco assume a configuração inicial senoidal (ver Figura 4.6):

$$v_0(x) = b\sin(\pi x) \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.23}$$

onde b corresponde ao deslocamento adimensional em x = 1/2 e define, portanto, o abatimento do arco, sendo relacionado com a carga axial adimensional p através da Equação (4.11). Neste caso tem-se $p_c = \pi^2$. Por conveniência, adotou-se nas equações a notação sin para representar a função seno.

As condições de contorno são, neste caso:

$$w(0) = w(1) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(1)}{\partial x^2} = 0 \tag{4.24}$$

A resposta dinâmica em torno da configuração de equilíbrio toma a forma:

$$w(x,\tau) = b\sin(\pi x) + v(x,\tau) \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.25}$$

Substituindo a Equação (4.25) nas Equações (4.6) e (4.24), chega-se a:

$$\begin{gathered}\ddot{v} + v^{iv} + c\dot{v} + \pi^2 v'' + b^2\pi^3 \sin(\pi x)\int_0^1 v' \cos(\pi x) dx \\ + \frac{1}{2} b\pi^2 \sin(\pi x)\int_0^1 v'^2 dx - b\pi v'' \int_0^1 v' \cos(\pi x) dx \\ -\frac{1}{2} v'' \int_0^1 v'^2 dx + \lambda\delta\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0\end{gathered} \tag{4.26}$$

$$v(0) = v(1) = 0 \ \text{ e } \ v''(0) = v''(1) = 0 \tag{4.27}$$

Para a análise estática do arco submetido a uma carga transversal a Equação (4.26) se reduz a:

$$v^{iv} + \pi^2 v'' + b^2 \pi^3 \sin(\pi x) \int_0^1 v' \cos(\pi x) dx$$
$$+ \frac{1}{2} b\pi^2 \sin(\pi x) \int_0^1 v'^2 dx - b\pi v'' \int_0^1 v' \cos(\pi x) dx \quad (4.28)$$
$$- \frac{1}{2} v'' \int_0^1 v'^2 dx + \lambda \delta \left(x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Com isso, considerando apenas uma função de interpolação, ou seja, para o caso de 1 GL tem-se:

$$v(x,\tau) = a(\tau) \sin(\pi x) \qquad 0 \le x \le 1 \quad (4.29)$$

onde $a(\tau)$ representa a amplitude de vibração ($a(\tau) = a$ no caso estático).

Novamente, aplicando o método de Galerkin com a função peso $\sin(\pi x)$, obtém-se a equação não linear de equilíbrio ($a(\tau) = a$ no caso estático). Obtém-se o mesmo caminho não linear de equilíbrio que para o caso bi-engastado, Equação (4.17), como ilustra a Figura 4.7, onde se considera o mesmo acréscimo de carga a partir da carga crítica que para o arco engastado ($p = 1.1\pi^2$ e $b = 0.63$). Na Figura 4.7, a resposta do arco engastado é representada pela linha contínua em azul e do simplesmente apoiado, pela linha tracejada em verde.

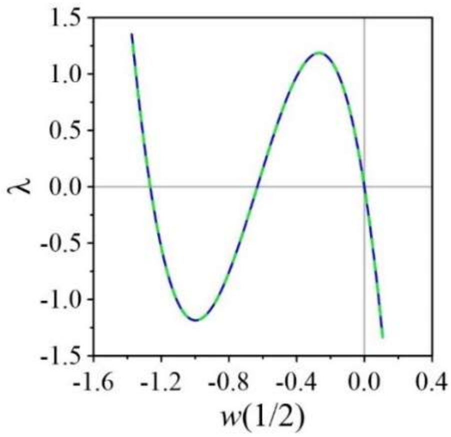


Figura 4.7 - Comparação entre os caminhos não lineares de 1 GL para condições de contorno bi-engastada e simplesmente apoiada.

4.1.4. Perda de Estabilidade do Arco Não Abatido

Como o objetivo da presente pesquisa é trabalhar com o comportamento simétrico do modelo, buscou-se definir um valor máximo de p onde a deformação do arco com comportamento assimétrico passa a ter relevância. Desta forma, realiza-se um estudo da bifurcação secundária no modelo bi-engastado consideradas como funções de interpolação o primeiro modo simétrico e o primeiro modo assimétrico, ou seja:

$$v(x,\tau)=\frac{a_1}{2}\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right]$$
$$+\frac{a_2}{2}\left[1-2x-\cos\left(8.987x\right)+\frac{2}{8.987}\sin\left(8.987x\right)\right]\qquad 0\le x\le 1 \tag{4.30}$$

onde a_1 e a_2 representam as amplitudes modais.

Através do caminho não linear de equilíbrio em função das duas amplitudes das funções de interpolação, verifica-se que para $p \approx 10.27\pi^2$ e $b \approx 5.01$ a bifurcação simétrica instável que caracteriza os arcos não abatidos coincide exatamente com ponto limite, conforme mostra a vista tridimensional e suas projeções na Figura 4.8, onde o ponto em vermelho representa a bifurcação simultânea.

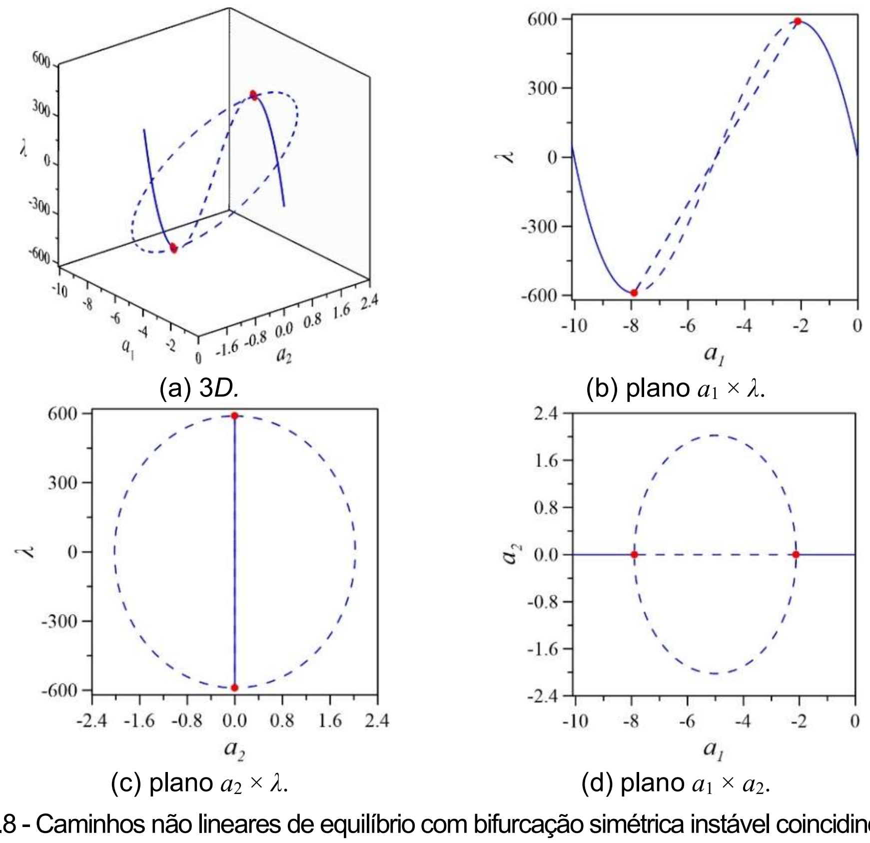


Figura 4.8 - Caminhos não lineares de equilíbrio com bifurcação simétrica instável coincidindo com o ponto limite.

Entretanto, para garantir a fidelidade do modelo, precisa-se definir para qual valor de p a bifurcação começa a existir ao longo do caminho fundamental de equilíbrio. Isto ocorre quando a bifurcação coincide com o ponto de equilíbrio instável. A projeção do caminho bifurcado no plano $a_1 \times \lambda$ (Figura 4.8(b)) é dada por:

$$\lambda = 203.73(a_1 + b) \tag{4.31}$$

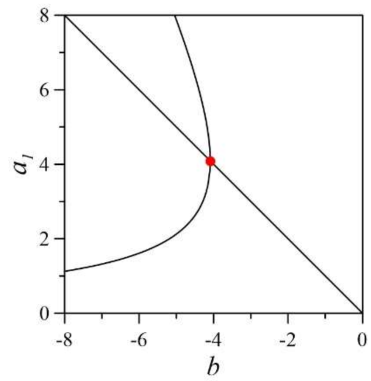
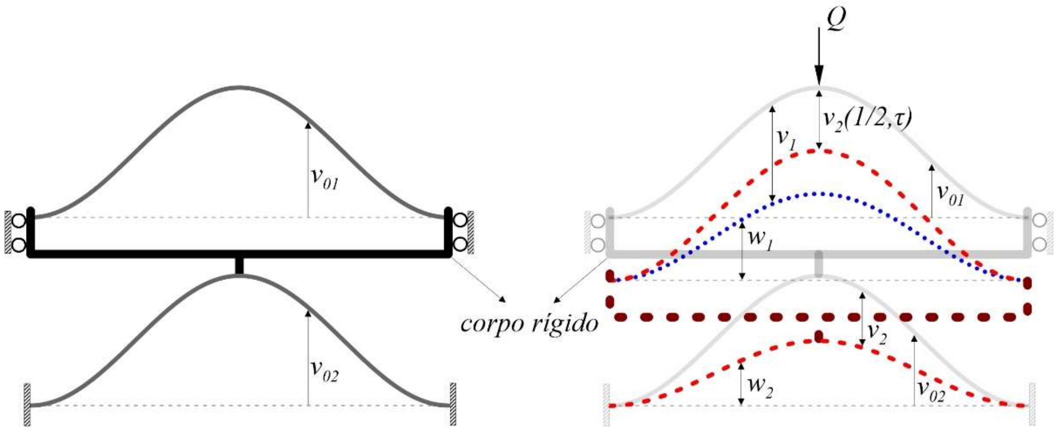


Figura 4.9 - Ponto de início de bifurcação no caminho não linear de equilíbrio, plano $a_1 \times b$.

Assim, igualando as Equações (4.17) e (4.31), obtém-se $b \approx 4.09$, (ponto em vermelho na Figura 4.9) que corresponde a $p \approx 8.18\pi^2$. Assim restringe-se o estudo dos arcos acoplados ao intervalo $4.0\pi^2 < p < 8.18\pi^2$.

4.2. Modelo de Arco Acoplado com Ligação Rígida

O modelo de arco acoplado conectado através de uma ligação rígida foi baseado no sistema analisado experimentalmente por Zhang et al. (2021). A estrutura consiste em uma sequência de dois arcos interligados por um corpo rígido, com uma carga estática Q transversal aplicada no arco superior, conforme ilustrado na Figura 4.10 que produz as deformações como ilustra a Figura 4.10(a), onde o arco superior pode se deslocar livremente na direção vertical. A Figura 4.10(b) mostra o sistema na configuração inicial em cinza e preto com linha contínua, e na configuração deformada, com a função de v_2 em vermelho, a função de v_1 em azul, e o elemento rígido em vermelho escuro, todos com linhas tracejadas.



(a) configuração inicial, pós-flambagem (b) configuração deformada

Figura 4.10 - Modelo de arco bi-engastado acoplado com ligação rígida e campo de deslocamentos após a aplicação da carga estática transversal *P*.

A função de forma do i-ésimo arco, v_{0i}, tem abatimento b_i e o deslocamento adicional do i-ésimo arco, v_i, tem amplitude a_i (i = 1,2). Deste modo, o deslocamento total observado no arco superior é dado por:

$$w_1(x,\tau) = \frac{b_1}{2}\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right] + \frac{a_1}{2}\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right] - a_2 \quad 0 \le x \le 1 \qquad (4.32)$$

onde o último termo, a_2, corresponde ao deslocamento máximo do arco inferior (deslocamento de corpo rígido do arco superior).

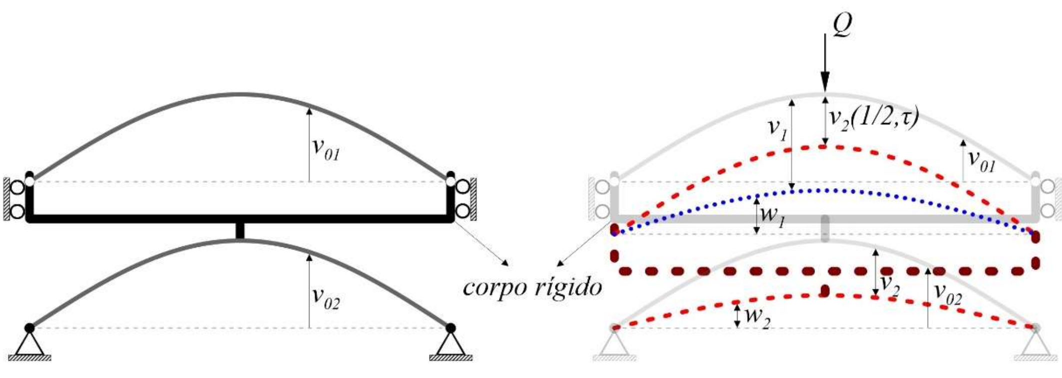
Para o arco inferior, tem-se:

$$w_2(x,\tau) = \frac{b_2}{2}\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right] + \frac{a_2}{2}\left[1-\cos\left(2\pi x\right)\right] \quad 0 \le x \le 1 \qquad (4.33)$$

O trabalho da carga estática Q é dado por:

$$V = -Qv_1(1/2,\tau) \qquad (4.34)$$

A Figura 4.11 apresenta o modelo de arcos simplesmente apoiados. A convenção adotada é a mesma da Figura 4.10.



(a) configuração inicial, pós-flambagem (b) configuração deformada

Figura 4.11 - Modelo de arco simplesmente apoiado acoplado com ligação rígida e campo de deslocamentos após a aplicação da carga estática transversal *P*.

Neste caso, tem-se que os deslocamentos totais são dados por:

$$w_1(x,\tau) = b_1\left[\sin\left(\pi x\right)\right] + a_1\left[\sin\left(\pi x\right)\right] - a_2 \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.35}$$

$$w_2(x,\tau) = b_2\left[\sin\left(\pi x\right)\right] + a_2\left[\sin\left(\pi x\right)\right] \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.36}$$

onde, considerando que os dois arcos são abatidos:

$$b_i^2 = \frac{4\left(p_i - p_c\right)}{\pi^2}; \quad i = 1,2 \tag{4.37}$$

4.2.1.
Equações Não Lineares de Equilíbrio

Para análise estática dos modelos acoplados, conectados através de ligação rígida, exclui-se os termos com derivadas no tempo da Equação (4.6), e as equações de equilíbrio adimensional tomam a forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\int_0^1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + \lambda\delta\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \tag{4.38}$$

Para o caso do modelo de arcos bi-engastado, considerando os deslocamentos totais nas Equações (4.32) e (4.33), substituindo os mesmos em (4.38), e empregando Galerkin tendo como função peso $[1 - \cos(2\pi x)]$, obtêm-se as equações de equilíbrio discretizadas:

$$\left[\frac{1}{4}a_1^{\,3} + \frac{3}{4}a_1^{\,2}b_1 + \frac{1}{2}a_1 b_1^{\,2}\right]\pi^4 + 2\lambda = 0 \tag{4.39}$$

$$\left[\frac{1}{4}a_2^{\,3} + \frac{3}{4}a_2^{\,2}b_2 + \frac{1}{2}a_2 b_2^{\,2}\right]\pi^4 + 2\lambda = 0 \tag{4.40}$$

Para o caso dos arcos acoplados com função de forma senoidal, repete-se o mesmo processo, considerando os deslocamentos totais (4.35) e (4.36), e a função peso $[\sin(\pi x)]$, obtendo-se novamente as mesmas equações discretizadas (4.39) e (4.40). Deste modo, tem-se um sistema não linear em a_1 e a_2 que é resolvido por Newton-Raphson com técnicas de continuação, como no caso das treliças de von Mises.

4.2.2.
Equações de Movimento do Sistema Formado por Arcos Senoidais

Considerando o comportamento equivalente entre os modelos com arcos com função de forma cosseno e seno, optou-se por realizar a análise dinâmica apenas para o segundo modelo. Para obtenção das equações de movimento da estrutura formada por arcos senoidais, é necessária a derivação dos termos de aceleração e velocidade. A energia cinética do modelo é dada por:

$$T = \frac{\rho A}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial \tau}\right)^2 dx + \frac{\rho A}{2}\int_0^1 \left(\frac{\partial w_2}{\partial \tau}\right)^2 dx + \frac{Mrl}{2}\dot{a}_2^{\,2} \tag{4.41}$$

onde ρ representa a massa específica do material, A, a área da seção transversal do arco, e w_1 e w_2 as parcelas dinâmicas dos deslocamentos expressos nas Equações (4.35) e (4.36), respectivamente e Mrl representa a massa da ligação rígida.

Com intuito de manter a formulação na forma adimensional, definem-se os parâmetros:

$$\overline{T} = \frac{T}{\rho A} \text{ e } \mu = \frac{Mrl}{\rho A} \tag{4.42}$$

Portanto, a energia cinética adimensional discretizada é dada por:

$$\overline{T} = \frac{1}{4\pi}\left(\pi \dot{a}_1^{\,2} + 2\pi \dot{a}_2^{\,2} + 8\dot{a}_1\dot{a}_2\right) + \frac{1}{4}\dot{a}_2^{\,2} + \frac{1}{2}\mu \dot{a}_2^{\,2} \tag{4.43}$$

Aplicando as derivadas:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{a}_1 \partial \dot{a}_1} & \dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{a}_1 \partial \dot{a}_2} \\ \dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{a}_2 \partial \dot{a}_1} & \dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \dot{a}_2 \partial \dot{a}_2} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

Chega-se aos termos de aceleração das equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{4}{\pi} \\ \dfrac{4}{\pi} & 3+2\mu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{a}_1 \\ \ddot{a}_2 \end{Bmatrix} \tag{4.45}$$

Para os termos de amortecimento, forças não conservativas, considerando amortecimento viscoso linear tem-se:

$$c_{\mathrm{i}}\frac{\partial w_{\mathrm{i}}}{\partial a_{\mathrm{i}}}, \quad \mathrm{i} = 1, 2. \tag{4.46}$$

Após a aplicação do método de Galerkin, tem-se os termos:

$$c_1\left(\dot{a}_1 + \frac{4}{\pi}\dot{a}_2\right) \text{ e } c_2\dot{a}_2 \tag{4.47}$$

Chega-se assim às equações de movimento do modelo:

$$\ddot{a}_1 + \frac{4}{\pi}\ddot{a}_2 + c_1\left(\dot{a}_1 + \frac{4}{\pi}\dot{a}_2\right) + \frac{1}{4}\pi^4 a_1^3 + \frac{3}{4}\pi^4 b_1 a_1^2 + \frac{1}{2}\pi^4 b_1^2 a_1 + 2\lambda = 0 \qquad (4.48)$$

$$\frac{4}{\pi}\ddot{a}_1 + (3+2\mu)\ddot{a}_2 + c_2\dot{a}_2 + \frac{1}{4}\pi^4 a_2^3 + \frac{3}{4}\pi^4 b_2 a_2^2 + \frac{1}{2}\pi^4 b_2^2 a_2 + 2\lambda = 0 \qquad (4.49)$$

4.3. Modelo de Arco Acoplado com Ligação Flexível

Além do modelo com ligação rígida apresentado no item anterior, foi analisado um modelo com ligação flexível, com a introdução de uma mola de rigidez K_c conectando os pontos médios de cada arco, como ilustra a Figura 4.12, neste caso, para os arcos bi-engastados.

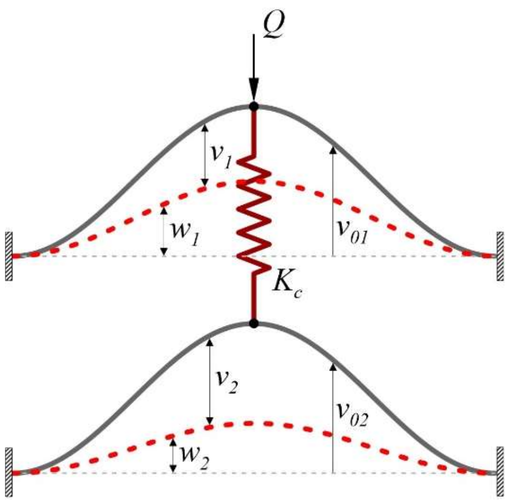


Figura 4.12 - Modelo de arco bi-engastado acoplado com ligação flexível (mola) e campo de deslocamentos após a aplicação da carga estática transversal Q.

Os deslocamentos totais para este modelo são dados por:

$$w_1(x,\tau) = \frac{b_1}{2}\left[1-\cos(2\pi x)\right] + \frac{a_1}{2}\left[1-\cos(2\pi x)\right] \quad 0 \le x \le 1 \qquad (4.50)$$

$$w_2(x,\tau) = \frac{b_2}{2}\left[1-\cos(2\pi x)\right] + \frac{a_2}{2}\left[1-\cos(2\pi x)\right] \quad 0 \le x \le 1 \qquad (4.51)$$

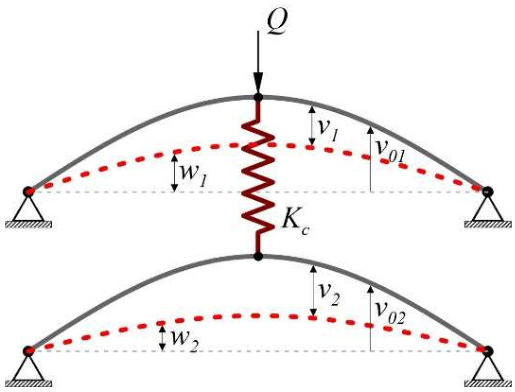


Figura 4.13 - Modelo de arco simplesmente apoiado acoplado com ligação flexível (mola) e campo de deslocamentos após a aplicação da carga estática transversal *P*.

Para o caso com arcos senoidais, Figura 4.13, os deslocamentos totais são dados por:

$$w_1(x,\tau) = b_1\left[\sin\left(\pi x\right)\right] + a_1\left[\sin\left(\pi x\right)\right] \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.52}$$

$$w_2(x,\tau) = b_2\left[\sin\left(\pi x\right)\right] + a_2\left[\sin\left(\pi x\right)\right] \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.53}$$

Ao considerar um elemento flexível acoplando os arcos é necessário incluir a força adicional associada à mola às equações de equilíbrio de cada arco:

$$F_M = K_c\left(v_1\left(1/2\right) - v_2\left(1/2\right)\right) \tag{4.54}$$

Adotando o parâmetro adimensional para a rigidez da mola, $\kappa = K_c/EA$, e considerando os deslocamentos no meio dos vãos, tem-se:

$$\overline{F_M} = \kappa\left(a_1 - a_2\right) \tag{4.55}$$

4.3.1. Equações Não Lineares de Equilíbrio

Para o caso de acoplamento entre os arcos com elemento flexível, a primeira equação de equilíbrio adimensional, referente ao arco superior, toma a forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx + \lambda\delta\left(\frac{1}{2}\right) + \kappa\left(a_1 - a_2\right)\delta\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \tag{4.56}$$

Considerando o modelo com arcos bi-engastados, substituindo (4.50) em (4.56), usando a função peso $[1 - \cos(2\pi x)]$ e empregando Galerkin, obtém-se a primeira equação discretizada:

$$\left[\frac{1}{4}a_1^3 + \frac{3}{4}a_1^2 b_1 + \frac{1}{2}a_1 b_1^2\right]\pi^4 + \kappa\left(a_1 - a_2\right) + 2\lambda = 0 \tag{4.57}$$

Para a segunda equação, referente ao arco inferior, a equação de equilíbrio adimensional toma uma forma similar a observada em (4.56), com mudança na consideração do carregamento observado no segundo arco:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\int_0^1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx+\kappa\left(a_2-a_1\right)\delta\left(\frac{1}{2}\right)=0 \qquad (4.58)$$

Seguindo o mesmo processo, obtém-se a segunda equação de equilíbrio.

$$\left[\frac{1}{4}a_1^{\,3}+\frac{3}{4}a_1^{\,2}b_1+\frac{1}{2}a_1b_1^{\,2}\right]\pi^4+\kappa\left(a_2-a_1\right)=0 \qquad (4.59)$$

Para o modelo com arcos senoidais, obtêm-se as mesmas equações discretizadas.

4.3.2. Equações de Movimento do Sistema Formado por Arcos Senoidais

Para o modelo com arcos conectados através de ligação flexível, considera-se as parcelas dependentes do tempo em w_1 e w_2, equações (4.52) e (4.53), tem-se para a energia cinética na forma adimensional:

$$\overline{T}=\frac{1}{4}\dot{a}_1^{\,2}+\frac{1}{4}\dot{a}_2^{\,2} \qquad (4.60)$$

o que leva aos seguintes termos de aceleração nas equações de movimento:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{a}_1\\ \ddot{a}_2\end{Bmatrix} \qquad (4.61)$$

Para o amortecimento viscoso linear, tem-se:

$$c_i\dot{a}_i,\quad \mathrm{i}=1,2. \qquad (4.62)$$

Chega-se assim às seguintes equações de movimento do modelo com ligação flexível:

$$\ddot{a}_1+c_1\dot{a}_1+\frac{1}{4}\pi^4a_1^3+\frac{3}{4}\pi^4b_1a_1^2+\frac{1}{2}\pi^4b_1^2a_1+2\lambda+\frac{4\kappa}{\pi}\left(a_1-a_2\right) \qquad (4.63)$$

$$\ddot{a}_2+c_2\dot{a}_2+\frac{1}{4}\pi^4a_2^3+\frac{3}{4}\pi^4b_2a_2^2+\frac{1}{2}\pi^4b_2^2a_2+\frac{4\kappa}{\pi}\left(a_2-a_1\right) \qquad (4.64)$$

5
Análise de Sistemas Multiestáveis Formados por Arcos

Nesta seção apresentam-se as análises estática e dinâmica dos sistemas estruturais definidos no capítulo anterior, que consistem em arcos conectados por elemento rígido ou flexível.

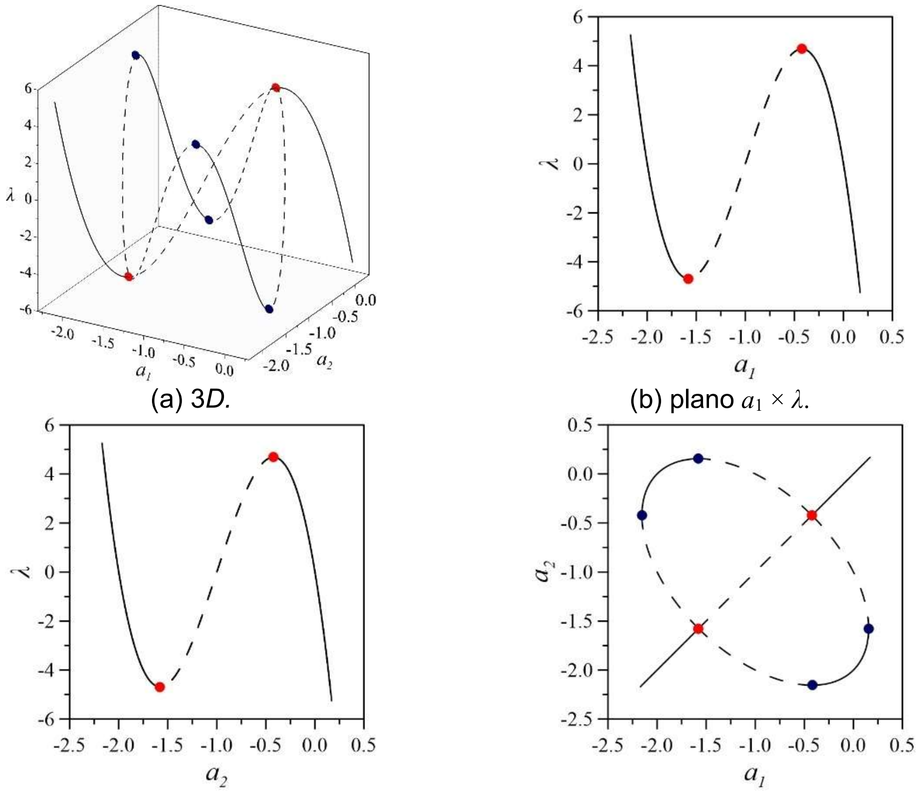
5.1.
Análise Estática

Na análise estática são mostrados os caminhos não lineares de equilíbrio dos modelos bi-engastado e simplesmente apoiado. Os caminhos não lineares foram gerados a partir das equações de equilíbrio estabelecidas no capítulo anterior, através do mesmo processo utilizado nos modelos formados por treliças de von Mises, com auxílio do programa de álgebra simbólica MAPLE (2020) e aplicando o método de Newton-Raphson. A representação gráfica segue também a mesma metodologia, com segmentos estáveis representados por linhas contínuas e instáveis por linhas tracejadas.

5.1.1.
Sistema Formado por Arcos com Função de Forma Cosseno

5.1.1.1.
Arcos Conectados por Elemento Rígido

A Figura 5.1 mostra o caminho não linear para o arco bi-engastado com ligação rígida, considerando os parâmetros $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$. Na Figura 5.1(a) tem-se uma vista tridimensional, onde se observa um comportamento semelhante ao verificado no modelo formado por treliças de von Mises com ligação rígida, com a existência de quatro trechos estáveis e cinco instáveis, separados através de pontos limites. No caminho principal, com $a_1 = a_2$, os pontos em vermelho representam os pontos de bifurcação para $\lambda_{cr} = \pm 4.69$, nos caminhos secundários, os pontos em azul delimitam os trechos estáveis adicionais com pontos limite de mesmo valor que os anteriores (λ_{cr} = ±4.69). Deste modo, o sistema estrutural apresenta nove configurações de equilíbrio para um dado nível de carregamento estático, como ilustrado a seguir na Figura 5.2. As Figura 5.1(b, c) mostram que as projeções nos planos $a_1 \times \lambda$ e $a_2 \times \lambda$ são idênticas, isto ocorre devido a origem dos deslocamentos em cada arco e as simetrias do sistema. A Figura 5.1(d) mostra a projeção dos caminhos no plano $a_1 \times a_2$, onde é possível verificar com mais clareza os trechos estáveis e instáveis no caminho principal, através da reta na diagonal, e nos caminhos bifurcados que descrevem uma elipse. A Tabela 5.1 apresenta os valores dos deslocamentos a_1 e a_2 para os pontos limites.



(a) 3*D*. (b) plano $a_1 \times \lambda$.

(c) plano $a_2 \times \lambda$. (d) plano $a_1 \times a_2$.

Figura 5.1 - Caminho não linear de equilíbrio da estrutura com arcos com função de forma cosseno e ligação rígida, considerando $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$.

Tabela 5.1 - Pontos de bifurcação e limites da estrutura com arcos com função de forma cosseno e ligação rígida, para $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$.

a_1	a_2	λ
-0.421	-0.421	4.69
-1.580	0.155	-4.69
-2.155	-0.420	4.69
0.155	-1.580	-4.69
-0.420	-2.155	4.69
-1.580	-1.580	-4.69

As Figura 5.2(a, b) ilustram as configurações de equilíbrio nos pontos de bifurcação (-0.42,-0.42) e (-1.58,-1.58) (Tabela 5.1), que correspondem ao momento imediatamente anterior a ocorrência do fenômeno de "*snap-through*". Ainda, nas Figura 5.2(c-f) tem-se as configurações de equilíbrio para os demais pontos limites observados no caminho não linear (pontos em azul).

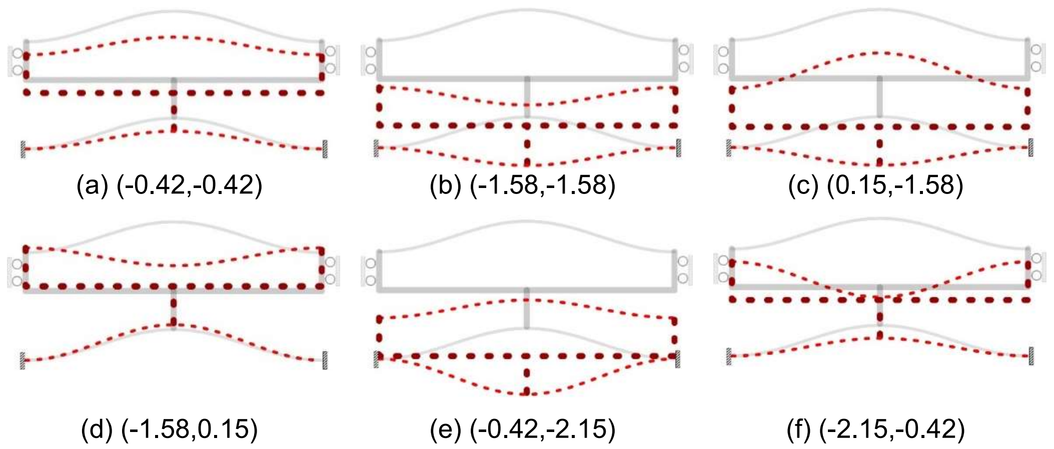
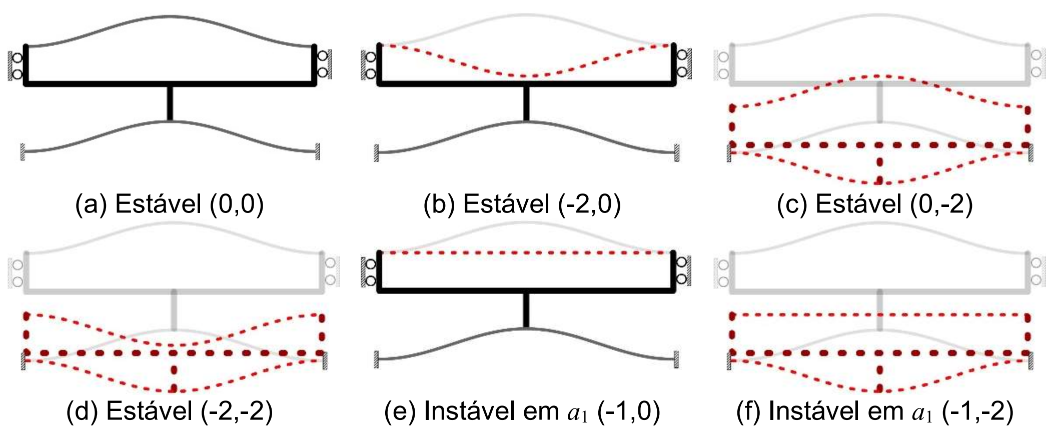
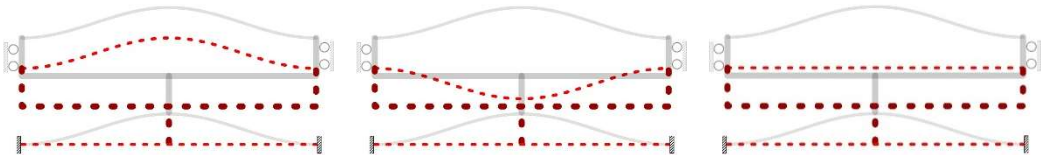


Figura 5.2 - Configurações de equilíbrio nos pontos de bifurcação ($\lambda = \pm 4.69$) e limites da estrutura com arcos com função de forma cosseno e ligação rígida, considerando $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$.

Considerando ainda um nível de carregamento estático nulo (λ = 0.0), as Figura 5.3(a-d) mostram as configurações de equilíbrio estável relacionadas aos arcos nas posições inicial e invertida. As Figura 5.3(e, f) mostram as configurações instáveis quando o arco superior se apresenta na posição horizontal quando a tensão axial atinge o valor máximo. As Figura 5.3(g, h) mostram as configurações instáveis quando o arco inferior se encontra na posição horizontal. Por fim, a Figura 5.3(i) mostra a configuração corresponde ao ponto de máximo com os dois arcos na posição horizontal.



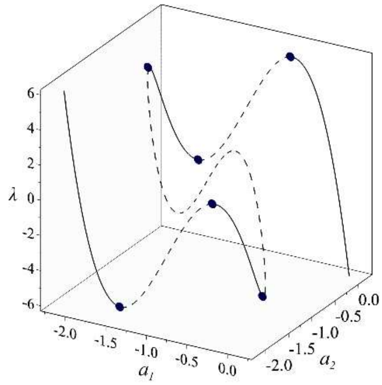


(g) Instável em a_2 (0,-1) (h) Instável em a_2 (-2,-1) (i) Instável em a_1 e a_2 (-1,-1)

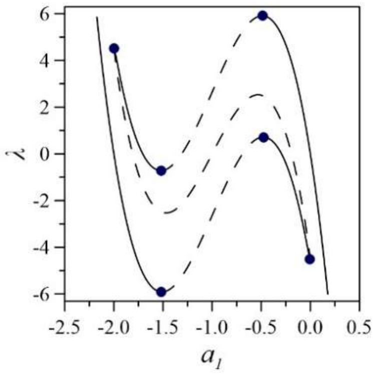
Figura 5.3 - Configurações de equilíbrio da estrutura com arcos com ligação rígida, sem carregamento estático ($\lambda = 0.0$), considerando $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$.

5.1.1.2. Arcos Conectados por Elemento Flexível

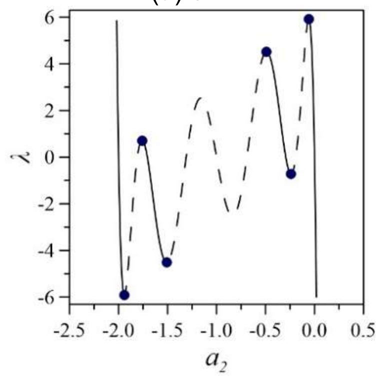
Para os arcos conectados com ligação flexível, a Figura 5.4(a) mostra a vista tridimensional e as Figura 5.4(b-d) projeções nos planos $a_1 \times \lambda$, $a_2 \times \lambda$ e $a_1 \times a_2$ do caminho não linear de equilíbrio considerando os parâmetros $p = 4.25\pi^2$, $b = 1.00$ e $\kappa = 6.10$. Neste caso não se identifica caminhos bifurcados, apenas um caminho principal com seis pontos limite separando os trechos estáveis e instáveis, representados pelos pontos em azul. A Tabela 5.2 mostra as coordenadas a_1 e a_2 para estes seis pontos limite. Como esperado, o comportamento observado é semelhante ao do modelo com treliças de von Mises e ligação flexível, com presença de quatro trechos estáveis e três instáveis. Tem-se assim nove configurações de equilíbrio para o sistema descarregado, $\lambda = 0.0$. A Figura 5.5 mostra as configurações de equilíbrio da estrutura nos pontos limites especificados na Tabela 5.2. Percebe-se que ao longo do caminho, conforme a carga estática oscila o comportamento descrito por a_1 varia, ora de forma crescente ora decrescente, o que faz com que o arco superior retorne a posição de concavidade inicial após já ter apresentado um salto para a segunda posição. Já o arco inferior apresenta um deslocamento crescente, com apenas um salto no meio do caminho não linear.



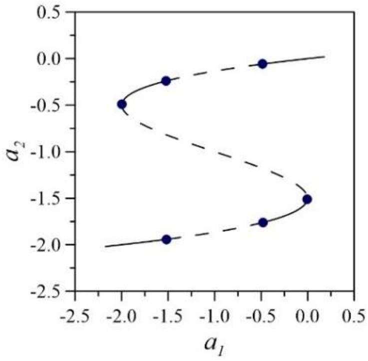
(a) 3*D*.



(b) plano $a_1 \times \lambda$.



(c) plano $a_2 \times \lambda$.

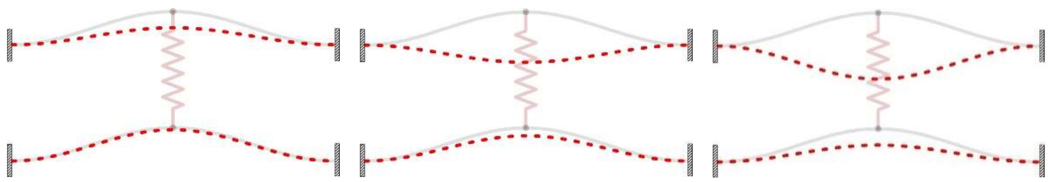


(d) plano $a_1 \times a_2$.

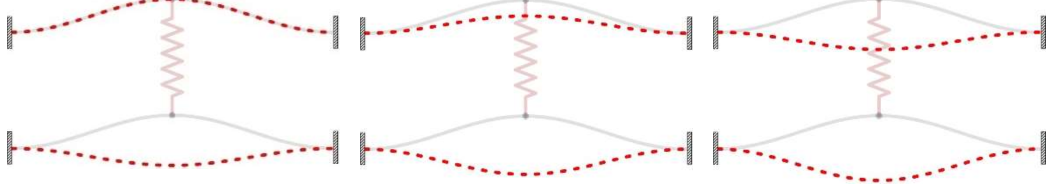
Figura 5.4 - Caminho não linear de equilíbrio da estrutura com arcos com função de forma cosseno e ligação flexível, considerando $p_i = 4.25\pi^2$, $b_i = 1.00$ e $\kappa = 6.10$.

Tabela 5.2 - Pontos limites da estrutura com arcos bi-engastados e ligação flexível, para $p_i = 4.25\pi^2$, $b_i = 1.00$ e $\kappa = 6.10$.

a_1	a_2	λ
-0.489	-0.059	5.91
-1.521	-0.240	-0.71
-1.997	-0.491	4.51
-0.004	-1.510	-4.51
-0.478	-1.760	0.71
-1.517	-1.942	-5.91



(a) (-0.49,-0.06) (b) (-1.52,-0.24) (c) (-2.00,-0.49)



(d) (0.00,-1.51) (e) (-0.48,-1.76) (f) (-1.52,-1.94)

Figura 5.5 - Configurações de equilíbrio nos pontos limites da estrutura com arcos com função de forma cosseno e ligação flexível, considerando $p_i = 4.25\pi^2$, $b_i = 1.00$ e $\kappa = 6.10$.

Considerando a carga estática nula, $\lambda = 0.0$, a Figura 5.6 mostra as diferentes configurações de equilíbrio, sendo quatro configurações de equilíbrio estável, Figura 5.6(a-d), e cinco configurações de equilíbrio instável, Figura 5.6(e-i).

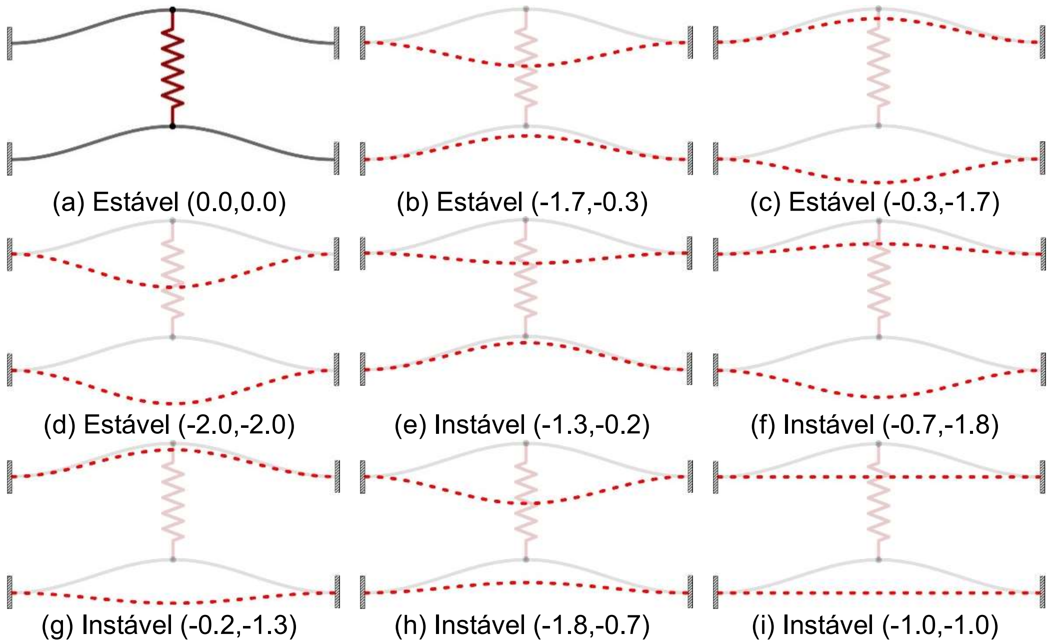
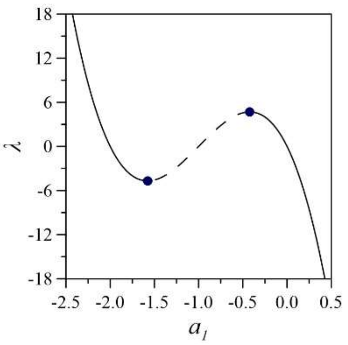
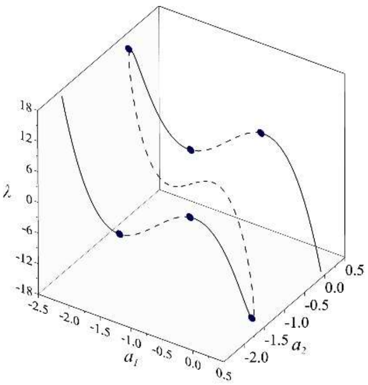


Figura 5.6 - Configurações de equilíbrio da estrutura com arcos com função de forma cosseno e ligação flexível, sem carregamento estático ($\lambda = 0.0$), considerando $p_i = 4.25\pi^2$, $b_i = 1.00$ e $\kappa = 6.10$.

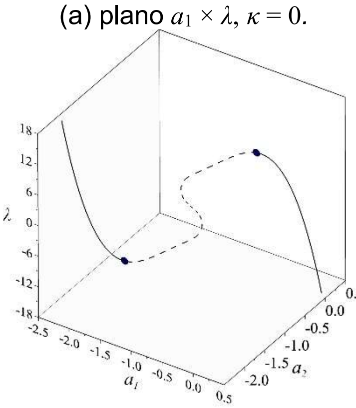
A rigidez da mola tem grande influência no caminho não linear de equilíbrio. A Figura 5.7 mostra os caminhos para diferentes valores do parâmetro adimensional de rigidez κ. Na Figura 5.7(a), quando $\kappa = 0$, tem-se um único caminho de equilíbrio para $a_2 = 0$ (arco inferior descarregado). Na Figura 5.7(b), $\kappa = 5$, os caminhos se conectam através dos pontos limites apresentando comportamento similar ao observado anteriormente na Figura 5.4. Ao aumentar o valor da rigidez, Figura 5.7(c, d), percebe-se que esse caminho vai se aproximando do comportamento não linear típico de arcos abatidos, nesse caso, com carga crítica tendendo ao dobro do caso inicial, ilustrado na Figura 5.7(a).



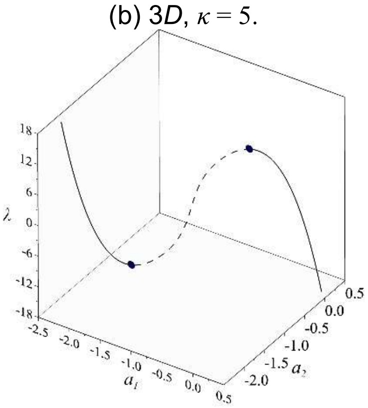
(a) plano $a_1 \times \lambda$, $\kappa = 0$.



(b) 3*D*, $\kappa = 5$.



(c) 3*D*, $\kappa = 10$.



(d) 3*D*, $\kappa = 20$.

Figura 5.7 - Caminho não linear de equilíbrio da estrutura com arcos com função de forma cosseno e ligação flexível, considerando $p_i = 4.25\pi^2$, $b_i = 1.00$ e diferentes valores de resistência da mola.

A Figura 5.8 mostra a variação da carga crítica à medida que a rigidez da mola aumenta. Observa-se inicialmente um aumento exponencial de λ_{cr} com κ tendendo ao infinito um limite superior que coincide com o dobro da carga crítica de um único arco, as linhas traço-ponto em vermelho marcam esses dois limites de carga crítica.

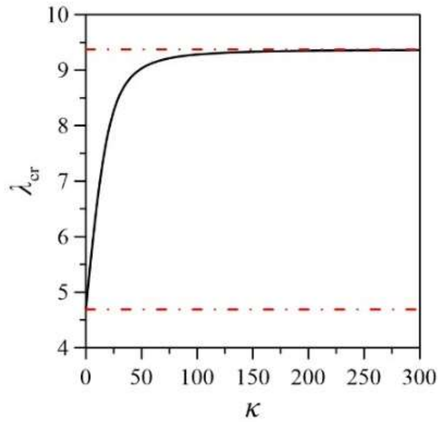
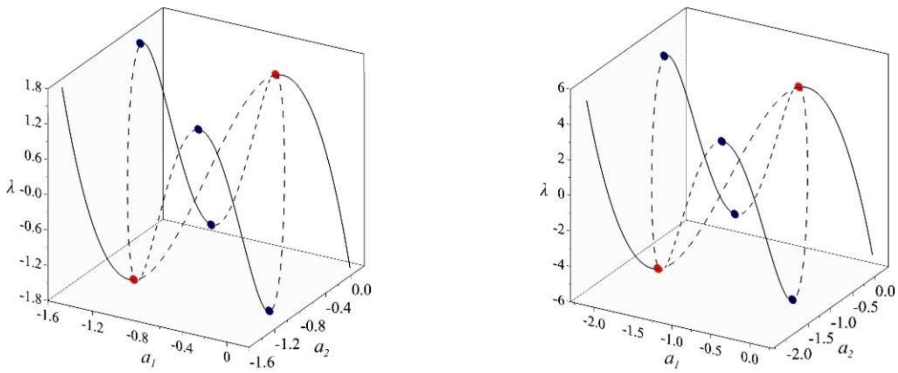


Figura 5.8 - Relação rigidez da mola linear e carga crítica de perda de estabilidade da estrutura com arcos com função de forma cosseno e ligação flexível, considerando $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$.

5.1.2.
Sistema Formado por Arcos Senoidais

5.1.2.1.
Arcos Conectados por Elemento Rígido

As Figura 5.9(a, b) mostram os caminhos não lineares considerando os parâmetros $p_i = 4.13\pi^2$ e $b_i = 0.70$ e $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$. Nestes casos, as cargas críticas são, respectivamente, $\lambda_{cr} = \pm1.61$ e $\lambda_{cr} = \pm4.69$, o que revela um comportamento idêntico aos observado quando se utilizam arcos com função de forma cosseno, replicando o mesmo comportamento quando da análise do arco unitário com 1GL. Quando se considera a carga estática nula, $\lambda = 0.0$, as configurações de equilíbrio estável para o exemplo da Figura 5.9(a) são (0.0,0.0), (0.0,-1.4), (-1.4,0.0) e (-1.4,-1.4), e para Figura 5.9(b), (0.0,0.0), (0.0,-2.0), (-2.0,0.0) e (-2.0,-2.0).

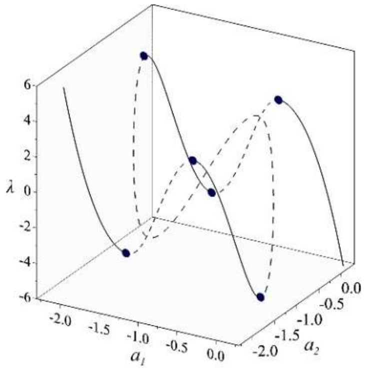


(a) $p_i = 4.13\pi^2$ e $b_i = 0.70$.

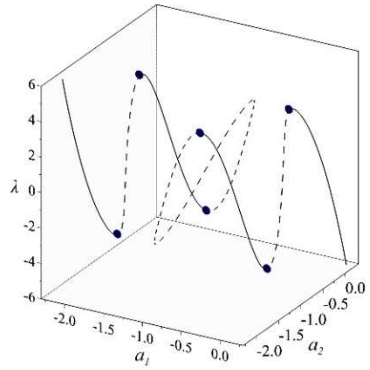
(b) $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$.

Figura 5.9 - Caminho não linear de equilíbrio da estrutura com arcos senoidais e ligação rígida.

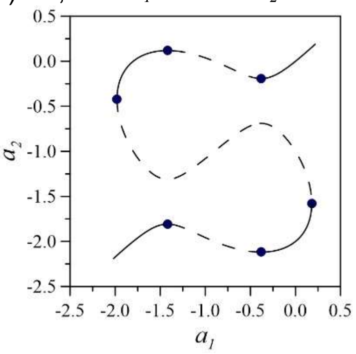
Quando os abatimentos são diferentes, $b_1 \neq b_2$, percebe-se na Figura 5.10 que a quebra de simetria elimina o ponto de bifurcação, e a estrutura apresenta um único caminho não linear apenas, semelhante aos observados para os sistemas formados por treliças de von Mises. Nota-se que os caminhos para $b_1 < b_2$ e $b_1 > b_2$, são complementares, um à direita outra à esquerda do caminho perfeito, como prediz a teoria da estabilidade (Thompson & Hunt, 1984; Bazant & Cedolin, 2010). A Tabela 5.3 mostra a carga crítica limite para valores selecionados de b_1 e b_2. Quanto mais abatida a estrutura menor é a carga crítica. Já a mudança de abatimento entre os arcos do mesmo modelo não altera o valor da carga crítica.



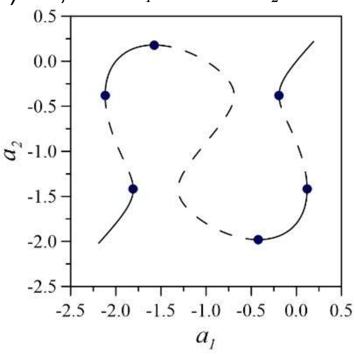
(a) 3D, com $b_1 = 0.90$ e $b_2 = 1.00$.



(b) 3D, com $b_1 = 1.00$ e $b_2 = 0.90$.



(c) plano $a_1 \times a_2$, $b_1 = 0.90$ e $b_2 = 1.00$.



(d) plano $a_1 \times a_2$, $b_1 = 1.00$ e $b_2 = 0.90$.

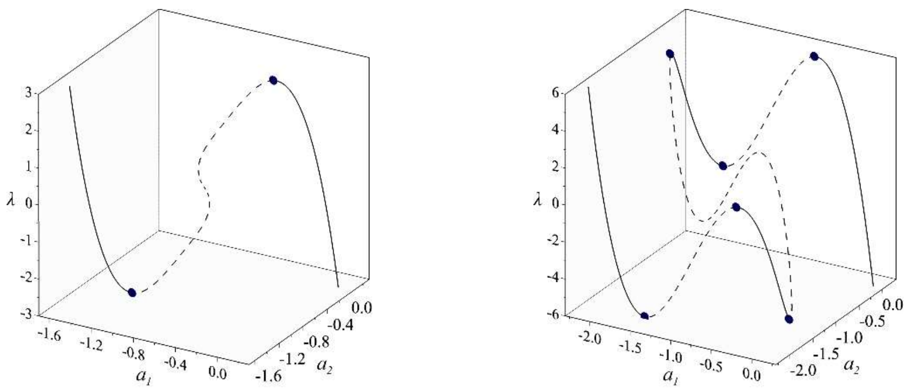
Figura 5.10 - Caminho não linear de equilíbrio da estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, considerando $b_1 \neq b_2$.

Tabela 5.3 - Cargas críticas para a estrutura com arcos senoidais e ligação rígida.

b_1	b_2	λ_{cr}
0.70	0.70	±1.61
1.00	1.00	±4.69
0.90	1.00	±3.42
1.00	0.90	±3.42

5.1.2.2. Arcos Conectados por Elemento Flexível

Para arcos senoidais e ligação flexível, as Figura 5.11(a, b) mostram os caminhos não lineares de equilíbrio considerando os parâmetros $\kappa = 4.7$, e dois diferentes abatimentos, $p_i = 4.13\pi^2$ e $b_i = 0.70$ e $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$, respectivamente. Estes exemplos revelam as duas situações já observadas nas treliças de von Mises. Para o arco mais abatido, Figura 5.11(a), tem-se apenas dois pontos limite e duas configurações de equilíbrio estável entre estes pontos, sendo $\lambda_{cr} = \pm 2.38$. No segundo caso, Figura 5.11(b), tem-se seis pontos limite delimitando os quatro trechos estáveis e há um aumento sensível da carga crítica, $\lambda_{cr} = \pm 5.89$.



(a) $p_i = 4.13\pi^2$ e $b_i = 0.70$. (b) $p_i = 4.25\pi^2$ e $b_i = 1.00$.

Figura 5.11 - Caminho não linear de equilíbrio da estrutura com arcos senoidais e ligação flexível, considerando $\kappa = 4.7$.

5.2. Análise Dinâmica para o Modelo Formado por Arcos Senoidais

Como o comportamento de arcos engastados e simplesmente apoiados é similar e levando em consideração que a solução com 2GL para arcos simplesmente apoiados leva a resultados precisos para uma maior gama de geometrias (Kreider & Nayfeh, 1998; Eman & Nayfeh, 2004), considera-se aqui apenas o caso simplesmente apoiado.

5.2.1. Arcos Conectados por Elemento Rígido

Considerando o sistema conectado através de elemento rígido e linearizando as equações de movimento (4.53) e (4.54) e considerando a carga estática e amortecimentos nulos ($\lambda = 0$ e $c_1 = c_2 = 0$), tem-se:

$$\ddot{a}_1 + \frac{4}{\pi}\ddot{a}_2 + \frac{1}{2}\pi^4 b_1^2 a_1 = 0 \tag{5.1}$$

$$\frac{4}{\pi}\ddot{a}_1 + \left(3 + 2\mu\right)\ddot{a}_2 + \frac{1}{2}\pi^4 b_2^2 a_2 = 0 \tag{5.2}$$

Considerando que a solução é harmônica, obtém-se o problema de autovalor:

$$\left[\left[K\right] - \bar{\omega}^2\left[M\right]\right] X = 0, \quad X = \left\{a_1 \quad a_2\right\}^T \tag{5.3}$$

onde, as matrizes de rigidez (K) e massa (M) são:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\pi^4 b_1^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\pi^4 b_2^2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{\pi} \\ \frac{4}{\pi} & 3 + 2\mu \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

A Tabela 3.5 apresenta as frequências naturais e modos de vibrações para valores selecionados de b_1 e b_2, que definem a geometria do arco, e o parâmetro de massa da ligação, μ.

Tabela 5.4 - Frequências naturais e modos associados para a estrutura com arcos senoidais e ligação rígida.

b_1	b_2	μ	ω_{01}	*1º Modo*	ω_{02}	*2º Modo*
0.7	0.7	2.0	1.8132	[1.0 4.9158]	5.6751	[1.0 -0.2034]
1.0	1.0	2.0	2.5903	[1.0 4.9158]	8.1073	[1.0 -0.2034]
1.3	1.3	2.0	3.3674	[1.0 4.9158]	10.5395	[1.0 -0.2034]
1.0	1.0	0.0	3.6685	[1.0 2.0569]	11.3062	[1.0 -0.4862]
1.0	1.0	0.5	3.3018	[1.0 2.7234]	9.5639	[1.0 -0.3672]
1.0	1.0	1.0	3.0114	[1.0 3.4329]	8.7988	[1.0 -0.2913]
1.0	1.0	4.0	2.0891	[1.0 7.9793]	7.6126	[1.0 -0.1253]
1.0	0.9	2.0	2.3399	[1.0 6.2011]	8.0773	[1.0 -0.1991]
0.9	1.0	2.0	2.5780	[1.0 3.8767]	7.3314	[1.0 -0.2089]

Para análise das vibrações não lineares, faz-se o desacoplamento das acelerações nas equações não lineares de movimento através da regra de Cramer, e as equações de movimento são transformadas em um sistema de equações de primeira ordem (ver Apêndice A) e integradas numericamente usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

A Figura 5.12 apresenta uma seção da bacia de atração da estrutura descarregada considerando $b_1 = b_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 0.01$, $\mu = 1.0$, $\lambda = 0.0$, $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0.0$. Observam-se (ver Figura 5.3) quatro regiões distintas correspondentes às quatro soluções estáveis de equilíbrio estático a saber (-2,-2), (-2,0), (0,-2) e (0,0), pontos em amarelo, um ponto de máximo (-1,-1) e os quatro pontos de selas (-2,-1), (-1,-2), (-1,0) e (0,-1), em branco. Comparando-se com a Figura 3.26(a) relativa às treliças rigidamente acopladas, nota-se o mesmo tipo de topologia com cada posição de equilíbrio do sistema descarregado rodeada por uma bacia contínua e de fronteira suave onde todas as condições iniciais convergem para um dado atrator. Para condições iniciais em torno do ponto de máximo e condições distantes das posições de equilíbrio, observa-se uma topologia fractal onde condições iniciais próximas levam a atratores distintos.

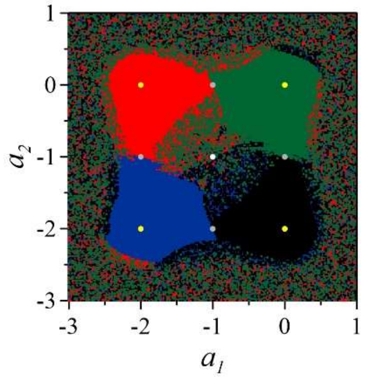


Figura 5.12 - Bacia de atração da estrutura com arcos senoidais e ligação rígida para os parâmetros $b_1 = b_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 0.01$, $\mu = 1.0$ e sem carregamento estático ($\lambda = 0.0$).

A Figura 5.13 mostra a influência do fator de massa μ nas bacias de atração. À medida que μ aumenta, a região contínua em torno dos atratores aumenta, ainda que de forma sutil, aumentado a integridade dinâmica de cada solução. A Figura 5.14 mostra seções das bacias de atração, considerando valores não nulos para as velocidades iniciais, mostrando a mesma topologia.

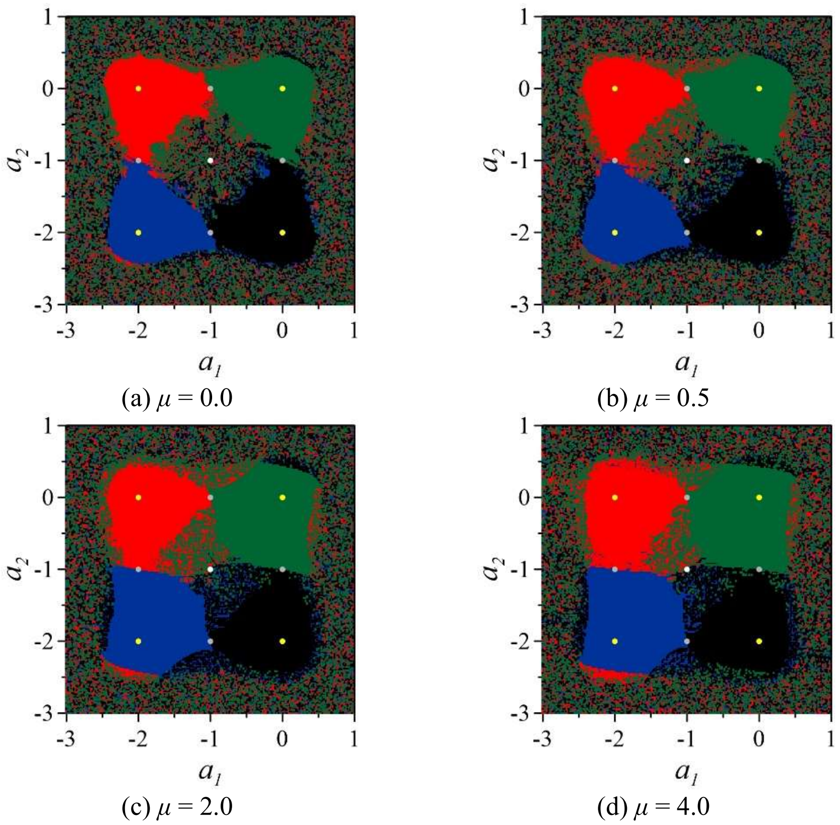
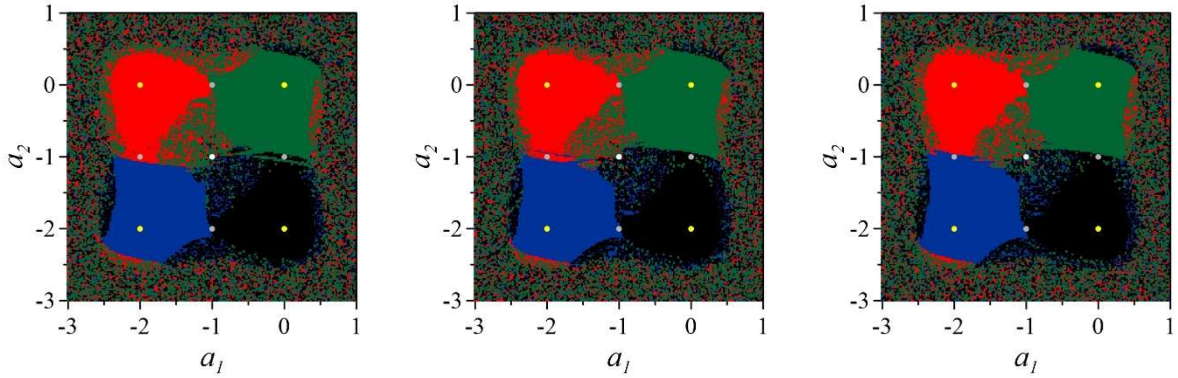


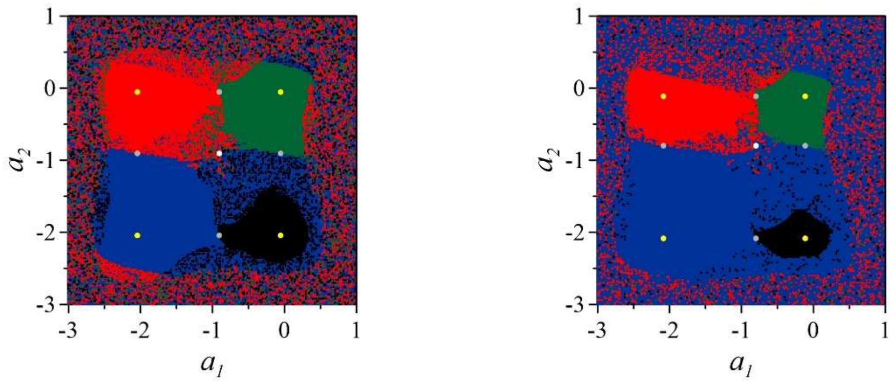
Figura 5.13 - Bacias de atração da estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, variando o fator de massa μ, para os parâmetros $b_1 = b_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 0.01$ e sem carregamento estático ($\lambda = 0.0$).



(a) $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0.1$ (b) $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = -0.1$ (b) $\dot{a}_1 = 0.1$ e $\dot{a}_2 = -0.1$

Figura 5.14 - Bacias de atração da estrutura com arcos senoidais e ligação rígida para valores não nulos das velocidades iniciais. $b_1 = b_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 0.01$, $\mu = 2.0$ e $\lambda = 0.0$.

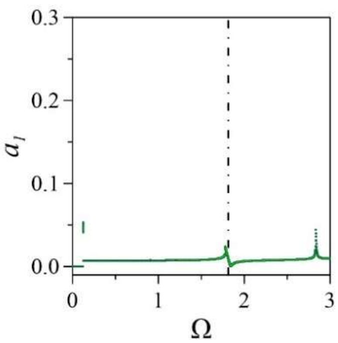
Tendo em vista que para os parâmetros de abatimento dos arcos $b_1 = b_2 = 1.0$, a carga crítica associada é $\lambda_{cr} = 4.69$, se estabelece níveis de carregamento de 25 e 50% de λ_{cr} ($\lambda = 0.25\ \lambda_{cr} \cong 1.17$ e $\lambda = 0.50\ \lambda_{cr} \cong 2.34$), e se verifica a variação da bacia para estes níveis de carregamento estático. A Figura 5.15 ilustra a influência do carregamento estático λ nas bacias de atração, onde observa-se um aumento gradativo da bacia em azul associada aos dois arcos com concavidade invertida e a diminuição gradativa das outras bacias.



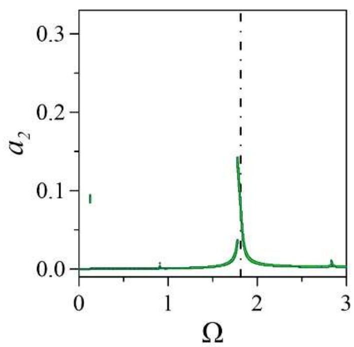
(a) $\lambda = 0.25\ \lambda_{cr}$ (b) $\lambda = 0.50\ \lambda_{cr}$

Figura 5.15 - Bacias de atração da estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, variando o carregamento estático λ, para os parâmetros $b_1 = b_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 0.01$ e $\mu = 2.0$.

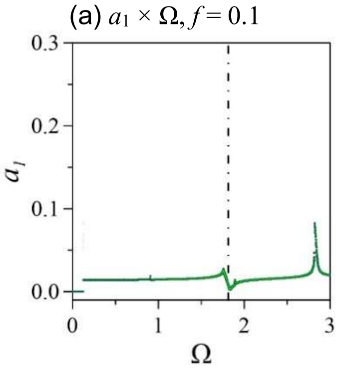
Considera-se agora a estrutura sob um carregamento harmônico na forma $F\cos(\Omega\tau)$. A Figura 5.16 apresenta as curvas de ressonância considerando os parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$, $\mu = 2.0$, para níveis crescentes da magnitude da excitação $f = 0.1$, 0.2, 0.6 e 0.9, onde $f = F/\ \lambda_{cr}$, tendo como origem a posição de equilíbrio estático (0,0). Considera-se o intervalo do parâmetro de controle Ω na vizinhança da primeira frequência natural do modelo ($0 < \Omega < 3$), $\omega_{01} = 1.8132$, representada nos gráficos pela reta traço-ponto em preto. Os diagramas de bifurcação são obtidos crescendo, em verde escuro, e decrescendo, em verde claro, o parâmetro de controle Ω para identificar os saltos dinâmicos. Para esclarecer os resultados, a variação tanto de a_1 (primeira coluna) quanto de a_2 (segunda coluna) com Ω é apresentada. Percebe-se para $f = 0.1$ e $f = 0.2$, que o arco superior (ver a_1) apresenta pequenas amplitudes de vibração em torno de $\Omega = \omega_{01}$, enquanto o segundo arco (ver a_2) já apresenta um pico de ressonância apreciável com comportamento com perda de rigidez e saltos entre os trechos ressonante e não ressonante nos pontos de bifurcação nó-sela. Observando a variação de a_1 com Ω nota-se uma região de ressonância importante próxima de Ω = 3.0 ($(3/2)\omega_{01}$ = 2.7198), com amplitude maior que a observada na região de $\Omega = \omega_{01}$, também apresentando comportamento com perda de rigidez e saltos entre os trechos ressonante e não ressonante, diferente do que ocorre para o arco inferior, ver a_2, onde a ressonância mais importante ocorre exatamente quando $\Omega = \omega_{01}$. À medida que f cresce surgem novos picos em virtude da não linearidade. Para $f = 0.9$, Figura 5.16(g, h), marcou-se também com retas traço-ponto em cinza as frações $(1/3)\omega_{01}$ = 0.6044, $(1/2)\omega_{01}$ = 0.9066, $(3/5)\omega_{01}$ = 1.08792, $(3/4)\omega_{01}$ = 1.3599, $(4/3)\omega_{01}$ = 2.4176 e $(3/2)\omega_{01}$ = 2.7198, que correspondem aos valores aproximados dos picos identificados.



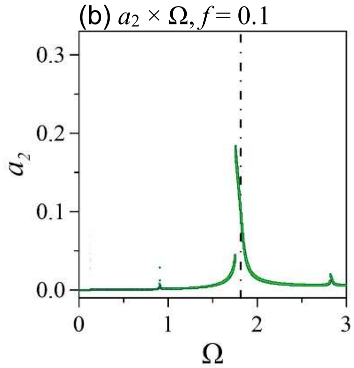
(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$



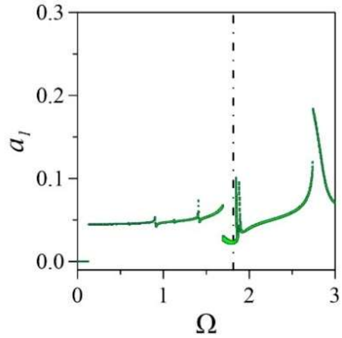
(b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$



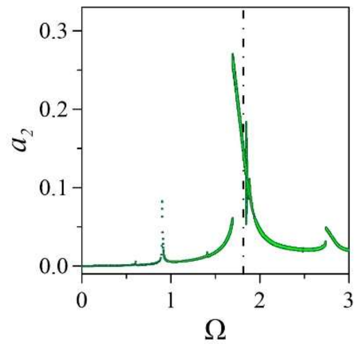
(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.2$



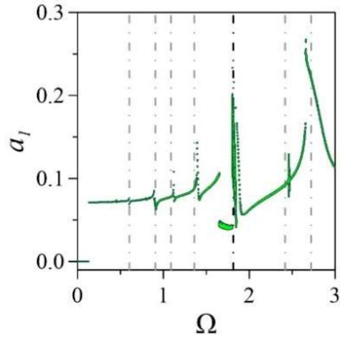
(d) $a_2 \times \Omega, f = 0.2$



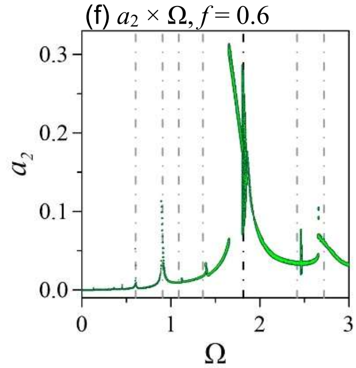
(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$



(f) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$



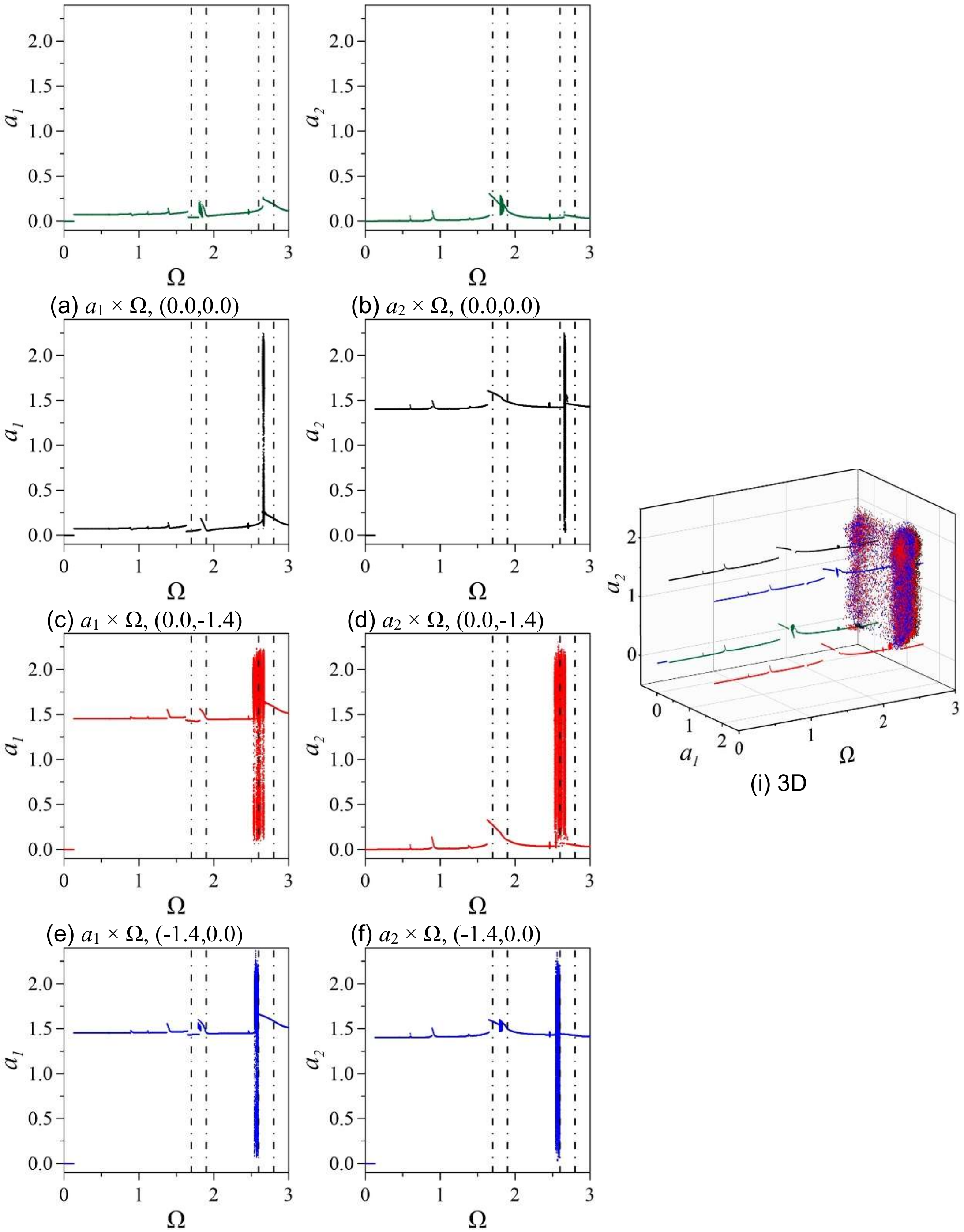
(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$



(h) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.16 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω. Estrutura com arcos senoidais e ligação rígida. $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.

Para $f = 0.9$, a Figura 5.17 apresenta as curvas de ressonância considerando, além da configuração de equilíbrio inicial (0.0,0.0), Figura 5.17(a, b), as outras três configurações de equilíbrio estáveis, (0.0,-1.4), Figura 5.17(c, d), em preto, (-1.4,0.0), Figura 5.17(e, f), em vermelho, e (-1.4,-1.4), Figura 5.17(g, h), em azul. A Figura 5.17(i) mostra uma projeção tridimensional onde se observam os quatro ramos de soluções coexistentes. Todos mostram o mesmo tipo de comportamento global com as duas regiões de ressonância em torno de ω_{01} e $(3/2)\omega_{01}$, sendo esta última a que apresenta em todos os casos as maiores amplitudes de vibração com as respostas coalescendo em um único movimentos entre vales, como ilustra a Figura 5.17(i) – ver projeção da resposta permanente na Figura 5.18(c).



(a) $a_1 \times \Omega$, (0.0,0.0) (b) $a_2 \times \Omega$, (0.0,0.0)

(c) $a_1 \times \Omega$, (0.0,-1.4) (d) $a_2 \times \Omega$, (0.0,-1.4)

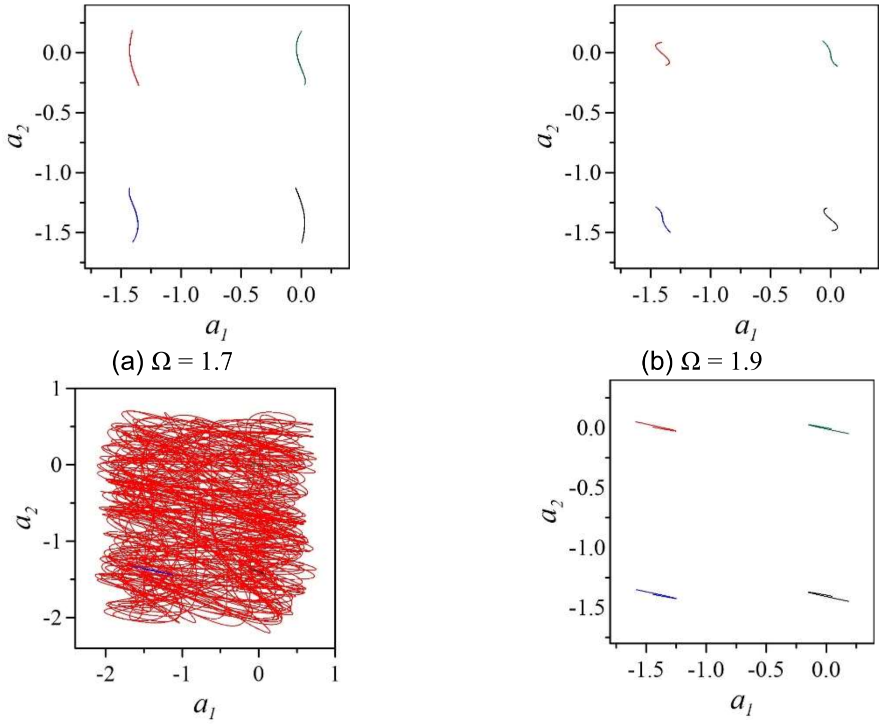
(e) $a_1 \times \Omega$, (-1.4,0.0) (f) $a_2 \times \Omega$, (-1.4,0.0)

(g) $a_1 \times \Omega$, (-1,4,-1,4) (h) $a_2 \times \Omega$, (-1.4,-1.4)

(i) 3D

Figura 5.17 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, para amplitude do carregamento harmônico $f = 0.9$. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.

A Figura 5.18 mostra planos de fase considerando f = 0.9 e valores selecionados da frequência de excitação, especificamente Ω = 1.7, 1.9, 2.6 e 2.8. Estes valores estão identificados pelas retas verticais na Figura 5.17. As cores utilizadas são as mesmas que nas curvas de ressonância. Os movimentos periódicos coexistentes encontram-se no entorno de cada configuração de equilíbrio, cada um no interior de um vale potencial (Figura 5.18(a, b, d)). A Figura 5.18 (c) ilustra o movimento caótico identificado na Figura 5.17, com o sistema visitando os quatro vales potenciais. A respectiva seção de Poincaré é mostrada na Figura 5.18. A estrutura típica do atrator caótico não pode ser observada na projeção, somente a aperiodicidade (objeto em 4 dimensões).



(a) Ω = 1.7 (b) Ω = 1.9

(c) Ω = 2.6 (d) Ω = 2.8

Figura 5.18 - Planos de fase para a estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, para amplitude do carregamento harmônico $f = 0.9$. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.

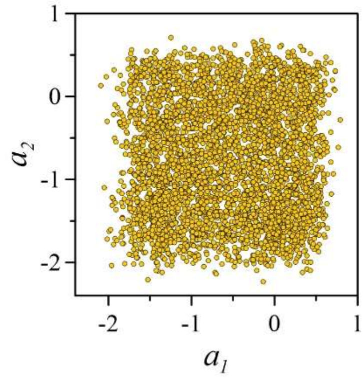
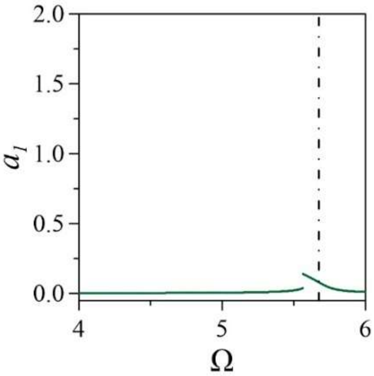


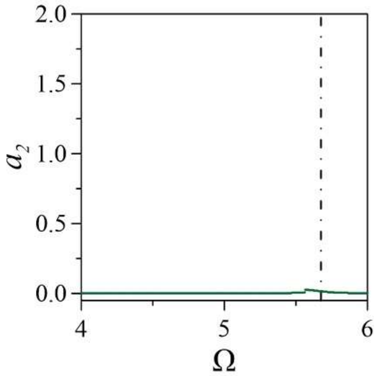
Figura 5.19 – Projeção da seção de Poincaré para a estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, para carregamento harmônico com $f = 0.9$ e $\Omega = 2.6$. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.

A Figura 5.20 apresenta as curvas de ressonância para a segunda região de interesse, na vizinhança da segunda frequência natural, ω_{02} = 5.6751, identificada através da reta traço-ponto em preto. Esta região de ressonância apresenta uma maior não linearidade, já aparecendo saltos dinâmicos à esquerda de ω_{02} para f =

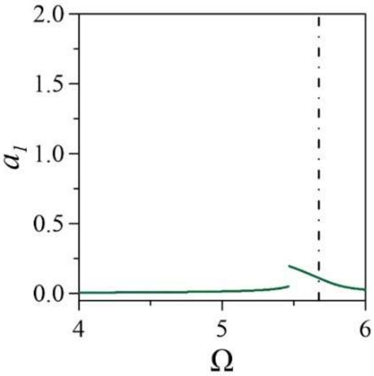
0.02 (Figura 5.20(a, b)) e uma janela caótica com escape e movimentos entre vales já para $f = 0.2$, Figura 5.20(g, h).



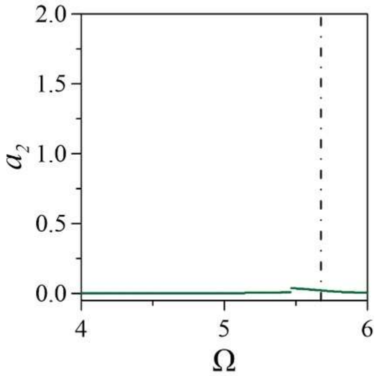
(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.02$



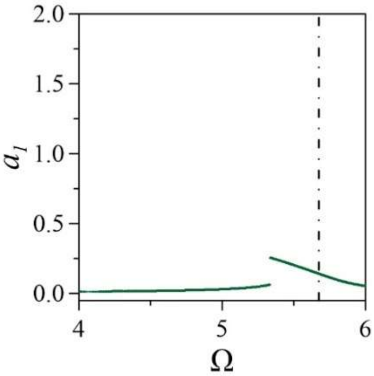
(b) $a_2 \times \Omega, f = 0.02$



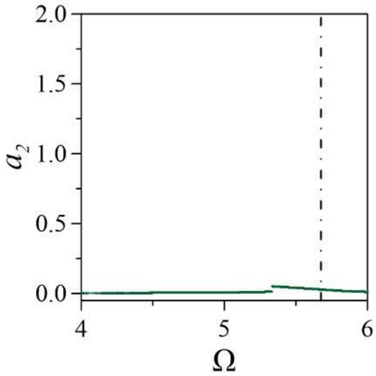
(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.05$



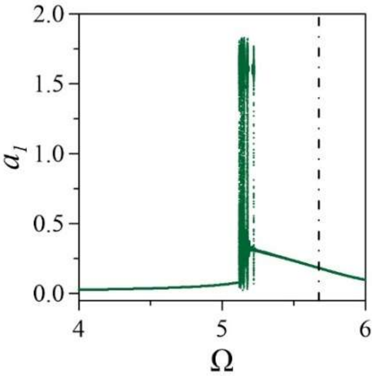
(d) $a_2 \times \Omega, f = 0.05$



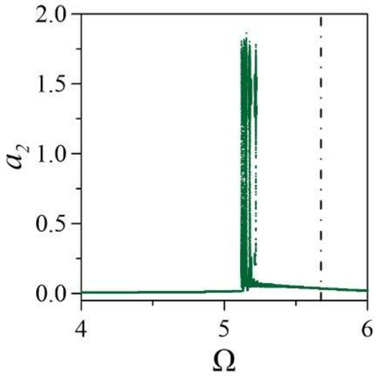
(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.10$



(f) $a_2 \times \Omega, f = 0.10$



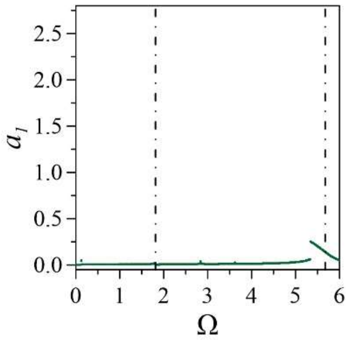
(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.20$



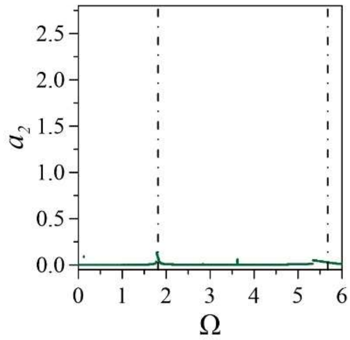
(h) $a_2 \times \Omega, f = 0.20$

Figura 5.20 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos com função de forma seno e ligação rígida, para segunda região de ressonância. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.

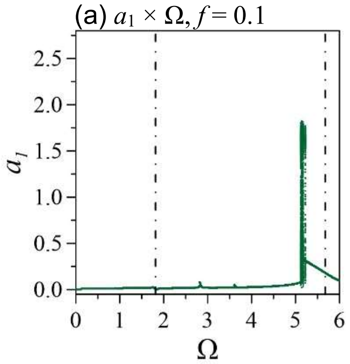
Para uma melhor visualização de toda a região de interesse, a Figura 5.21 mostra as curvas de ressonância incluindo as duas frequências naturais. Para níveis de carga baixos, quando f = 0.1, Figura 5.21(a, b), aparecem pequenos picos ressonantes, o maior próximo à região da segunda frequência natural. Ainda para um nível baixo de carga, f = 0.2, Figura 5.21(c, d), percebe-se o aparecimento da região caótica próxima a segunda frequência natural. Para um nível intermediário de carga, f = 0.6, Figura 5.21(e, f), essa região expande consideravelmente com o surgimento da segunda região de vibrações de grande amplitude em $3\omega_{01}/2$. Para um nível elevado de carga, f = 0.9, Figura 5.21(g, h), além de aumentar a região caótica, pode-se observar que o efeito de perda de rigidez aumenta na região próxima à primeira frequência natural.



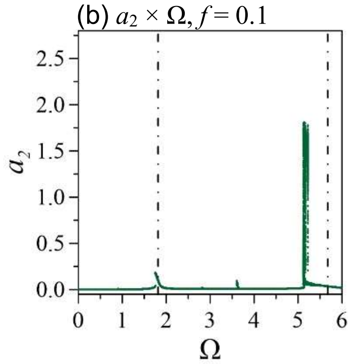
(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$



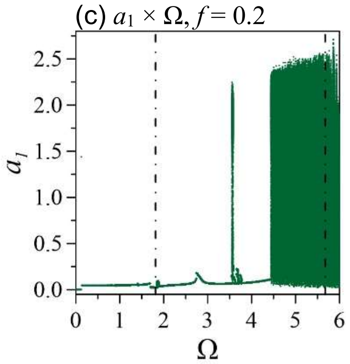
(b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$



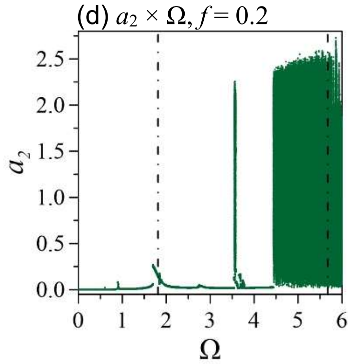
(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.2$



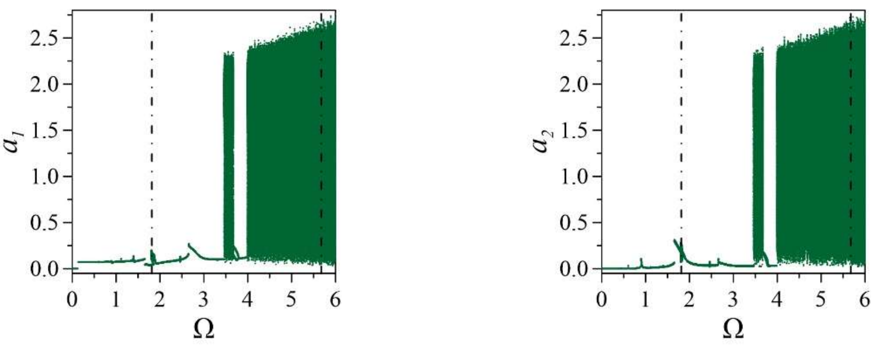
(d) $a_2 \times \Omega, f = 0.2$



(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$



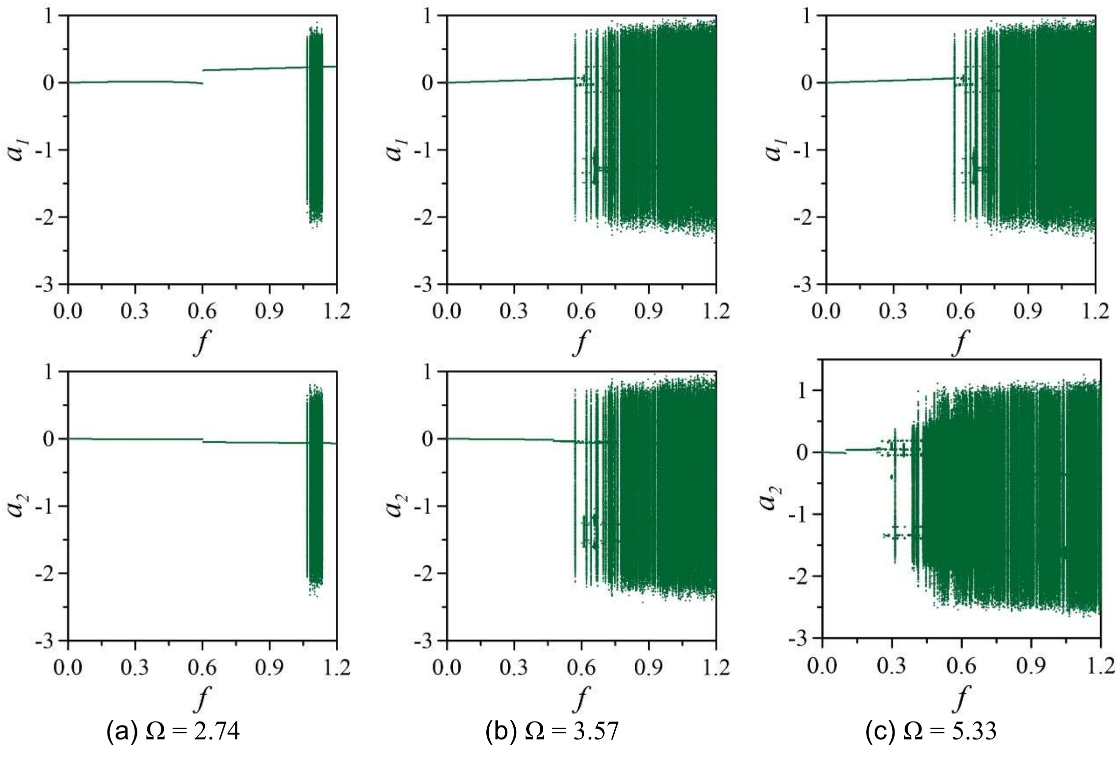
(f) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$



(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$ (h) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.21 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, para as duas regiões de ressonância. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.

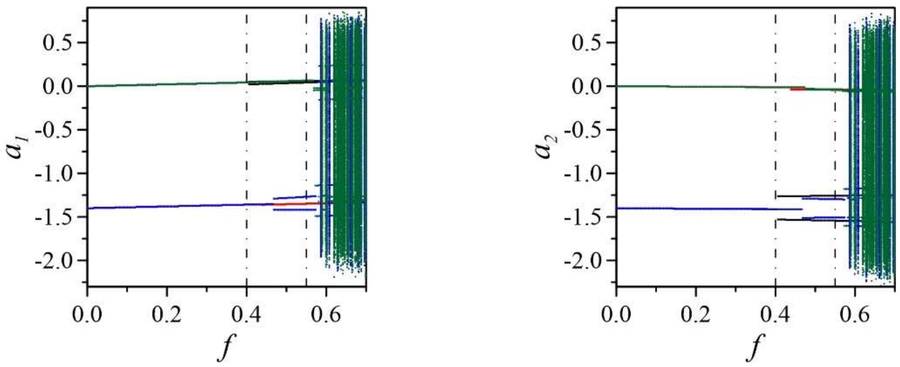
A Figura 5.22 apresenta os diagramas de bifurcação considerando como parâmetro de controle a amplitude do carregamento *f*, utilizando para condição inicial a configuração de equilíbrio estável (0.0, 0.0). Para valores pequenos de Ω, como já demonstrado através das curvas de ressonância, não aparecem mudanças significativas nos diagramas de bifurcação, sendo a resposta sempre periódica de período um até valores de *f* próximos ao valor da carga crítica estática. Para valores de Ω na segunda região de ressonância observam-se várias bifurcações e saltos para *f*<1 (Figura 5.22(b, c)), indicando ser esta a região mais sensível do sistema dinâmico.



(a) $\Omega = 2.74$ (b) $\Omega = 3.57$ (c) $\Omega = 5.33$

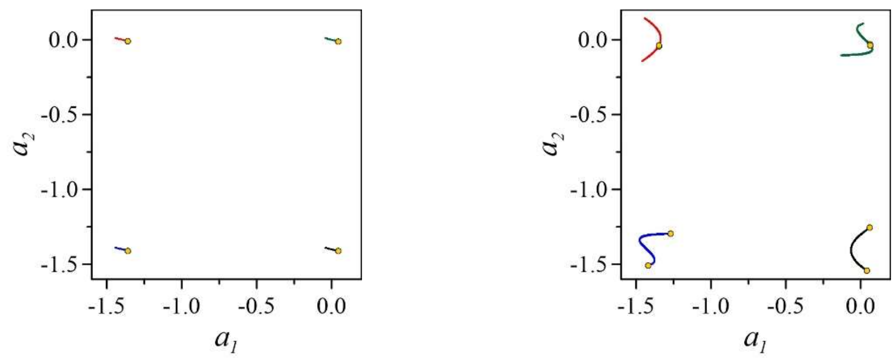
Figura 5.22 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a amplitude da força *f*, estrutura com arcos senoidais e ligação rígida. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$. $\omega_{01} = 1.8132$, $\omega_{02} = 5.6751$.

A Figura 5.23 mostra os diagramas de bifurcação para Ω = 3.57, Figura 5.22(b), considerando os diagramas de bifurcação associados aos outros 3 vales potenciais variando f de 0 a 0.7. Foram selecionadas as amplitudes $f = 0.40$ e 0.55, antes e após a duplicação de período, para geração de seções de Poincaré, apresentadas na Figura 5.24, com os atratores representados por pontos amarelos, onde é possível observar claramente a duplicação do período nas soluções em azul e preto.



(a) $a_1 \times f$ (b) $a_2 \times f$

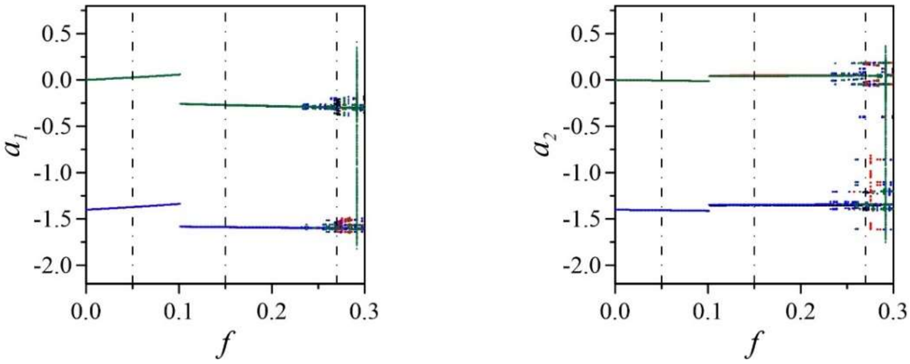
Figura 5.23 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a amplitude da força f, estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, para frequência de excitação $\Omega = 3.57$. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.



(a) $f = 0.40$ (b) $f = 0.55$

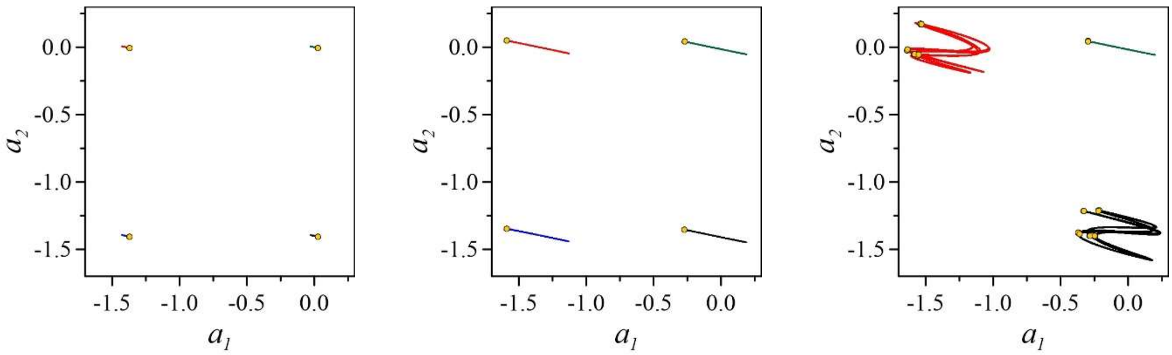
Figura 5.24 - Projeções dos planos de fase e seções de Poincaré dos atratores coexistentes, estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, para frequência de excitação $\Omega = 3.57$. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.

A Figura 5.25 mostra os diagramas de bifurcação considerando Ω = 5.33 e variando f de 0 a 0.3, neste caso foram selecionadas três amplitudes da força, f = 0.05, 0.15 e 0.2, para análise das órbitas e seções de Poincaré, Figura 5.26, onde percebe-se um aumento da magnitude do movimento oscilatório após o salto dinâmico, e, posteriormente, o desaparecimento da solução em azul, bem como o surgimento de atratores mais complexos.



(a) $a_1 \times f$ (b) $a_2 \times f$

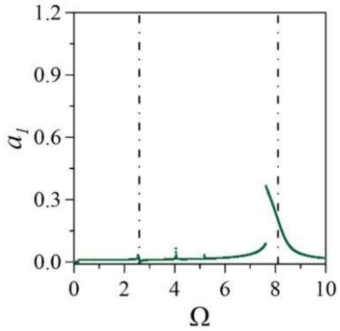
Figura 5.25 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a amplitude da força f, estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, para frequência de excitação $\Omega = 5.33$. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.



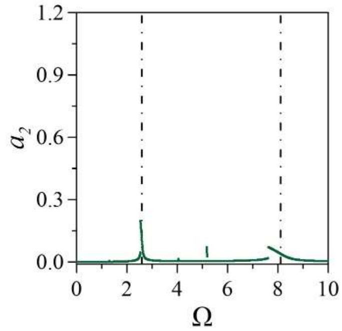
(a) $f = 0.05$ (b) $f = 0.15$ (b) $f = 0.27$

Figura 5.26 - Projeções dos planos de fase e seções de Poincaré dos atratores coexistentes, estrutura com arcos senoidais e ligação rígida, para frequência de excitação $\Omega = 5.33$. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$.

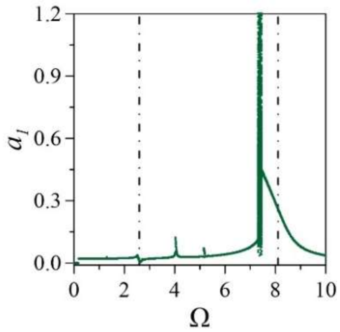
A Figura 5.27 mostra as curvas de ressonância considerando o arco menos abatido considerando os parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 1.0$ e $\mu = 2.0$. Neste caso as duas frequências naturais são: $\omega_{01} = 2.5903$ e $\omega_{02} = 8.1073$, identificadas pelas retas verticais. Com o aumento de b_i verifica-se um aumento da não linearidade. Verifica-se, entretanto, que o tipo de não linearidade, ressonâncias sub e superamônicas e regiões com janelas caóticas de grande amplitude são semelhantes ao do caso anterior com $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\mu = 2.0$, mostrando ser estas características deste sistema multiestável acoplado.



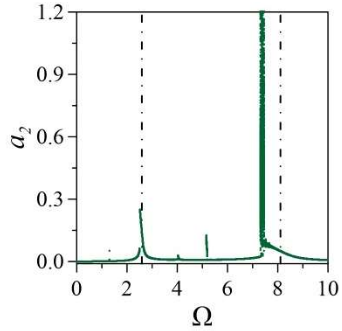
(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$



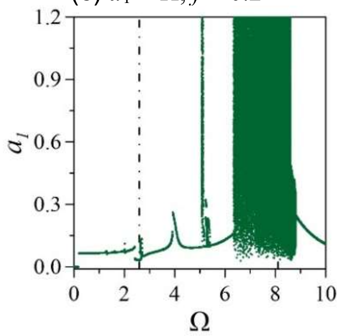
(b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$



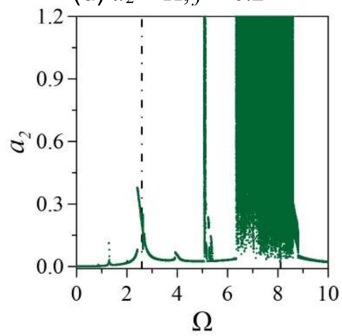
(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.2$



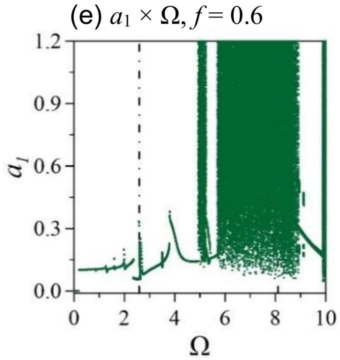
(d) $a_2 \times \Omega, f = 0.2$



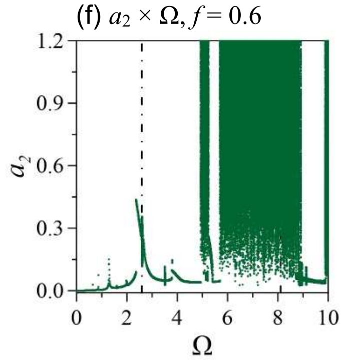
(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$



(f) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$



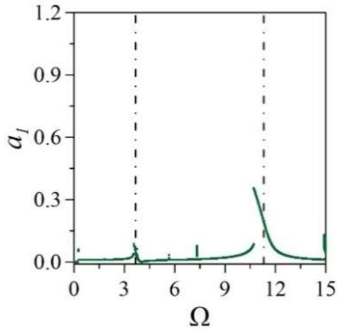
(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$



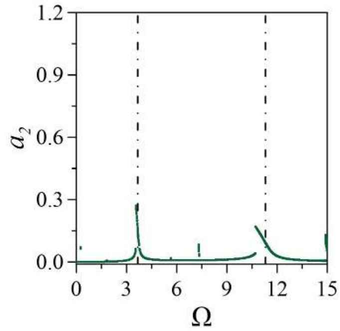
(h) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.27 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos com função de forma seno e ligação rígida. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 1.0$ e $\mu = 2.0$.

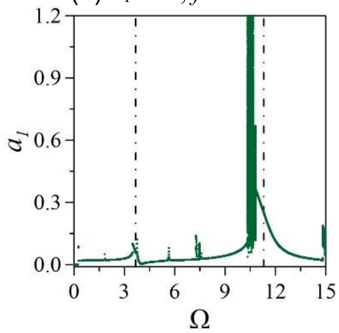
A Figura 5.28 mostra as curvas de ressonância considerando agora o caso com $\mu = 0.0$ (massa da ligação desprezível), sendo as frequências naturais dadas por $\omega_{01} = 3.6685$ e $\omega_{02} = 11.3062$. Comparando-se com a Figura 5.27 observa-se que a massa da ligação rígida tem um efeito estabilizante sobre o sistema diminuindo o número de regiões com vibrações de grande amplitude.



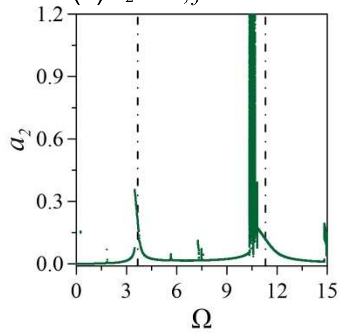
(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$



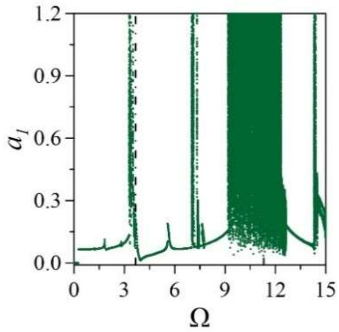
(b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$



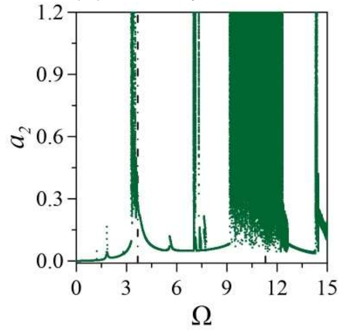
(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.2$



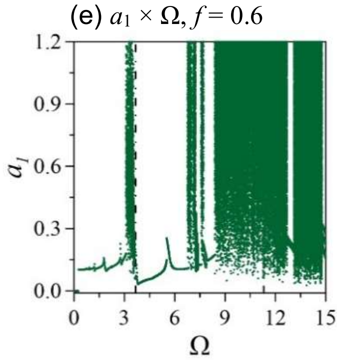
(d) $a_2 \times \Omega, f = 0.2$



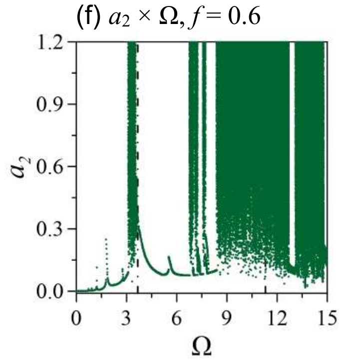
(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$



(f) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$



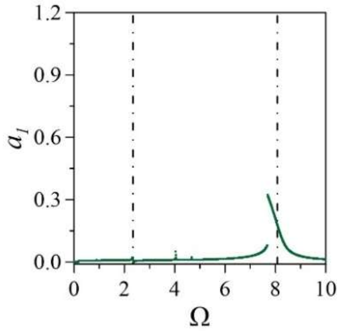
(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$



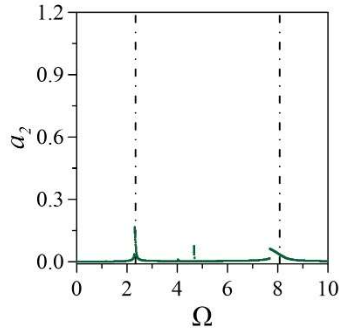
(h) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.28 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos com função de forma seno e ligação rígida. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 1.0$ e $\mu = 0.0$.

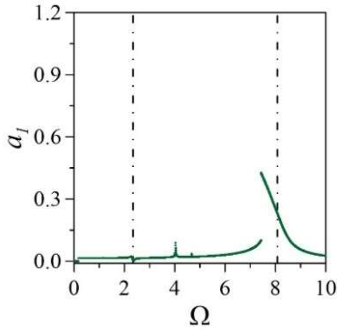
Por fim, analisa-se o efeito de pequenas variações de b_1 e b_2 nas curvas de ressonância. A Figura 5.29 mostra os resultados para $b_1 = 1.0$ e $b_2 = 0.9$ ($\omega_{01} = 2.3399$ e $\omega_{02} = 8.0773$) e a Figura 5.30 mostra os resultados considerando $b_1 = 0.9$ e $b_2 = 1.0$ ($\omega_{01} = 2.5780$ e $\omega_{02} = 7.3314$) ambas para $\mu = 2.0$. Verifica-se que pequenas variações, sempre existentes em estruturas reais, não têm efeito apreciável nos resultados.



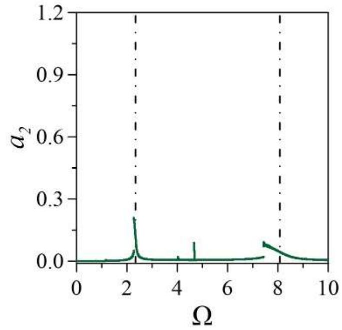
(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$



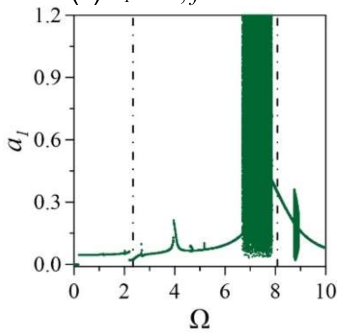
(b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$



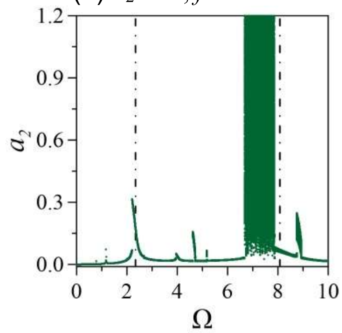
(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.2$



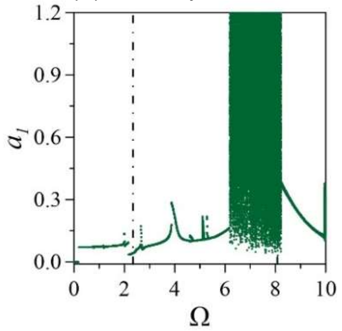
(d) $a_2 \times \Omega, f = 0.2$



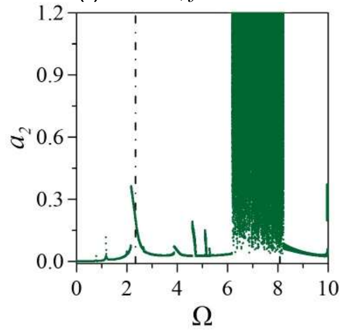
(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$



(f) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$

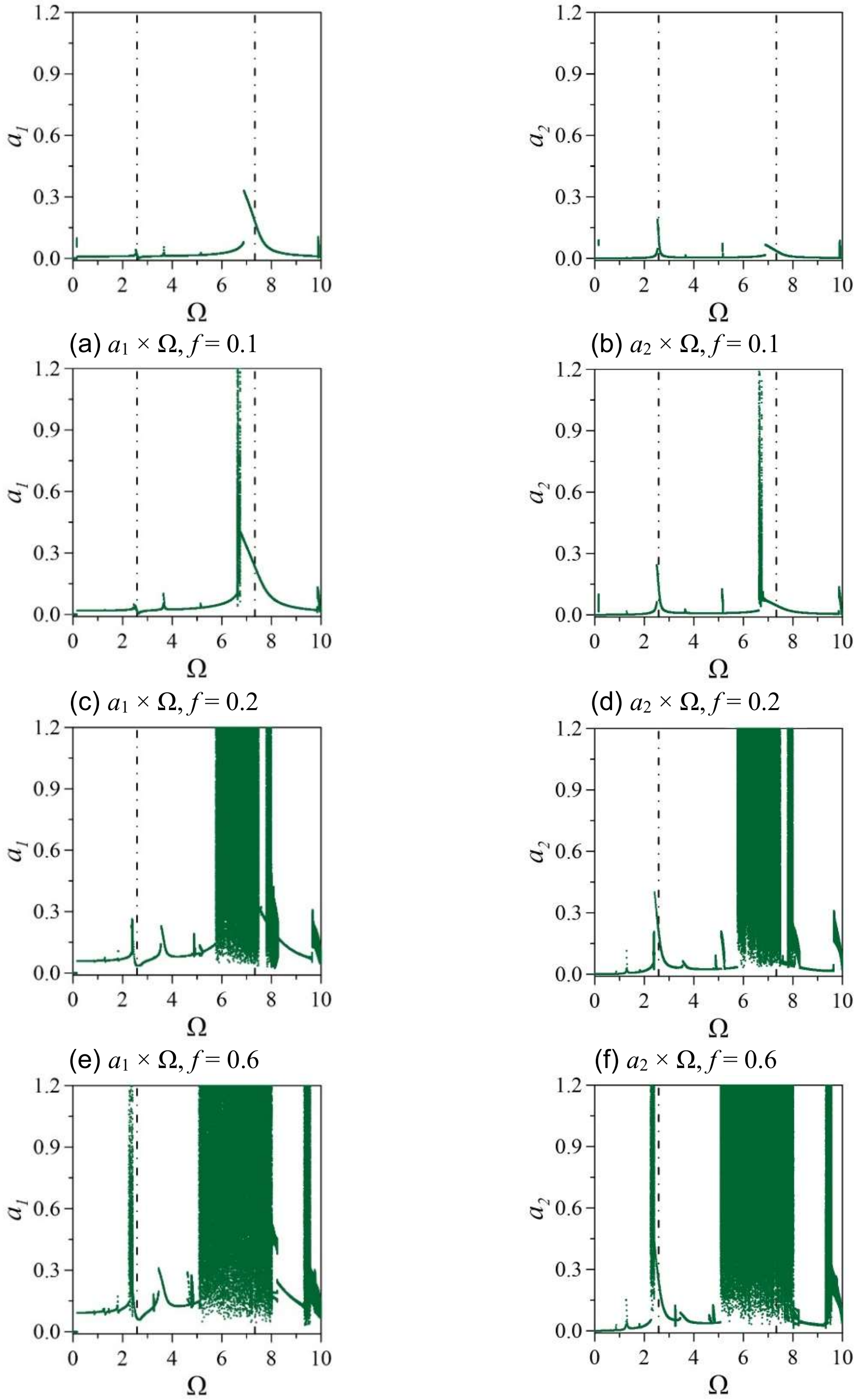


(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$



(h) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.29 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos com função de forma seno e ligação rígida. Parâmetros adimensionais $b_1 = 1.0$, $b_2 = 0.9$ e $\mu = 2.0$.



(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$ (b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$

(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.2$ (d) $a_2 \times \Omega, f = 0.2$

(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$ (f) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$

(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$ (h) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.30 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos com função de forma seno e ligação rígida. Parâmetros adimensionais $b_1 = 0.9$, $b_2 = 1.0$ e $\mu = 2.0$.

5.2.2.
Arcos Conectados por Elemento Flexível

Para os dois arcos conectados através de elemento flexível, linearizando as Equações (4.68) e (4.69) e considerando λ = 0 e $c_1 = c_2 = 0$, obtém-se:

$$\ddot{a}_1 + \frac{1}{2}\pi^4 b_1^2 a_1 + \frac{4\kappa}{\pi}\left(a_1 - a_2\right) \tag{5.5}$$

$$\ddot{a}_2 + \frac{1}{2}\pi^4 b_2^2 a_2 + \frac{4\kappa}{\pi}\left(a_2 - a_1\right) \tag{5.6}$$

Tem-se, portanto, as seguintes matrizes de rigidez (K) e massa (M):

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\pi^4 b_1^2 + \frac{4\kappa}{\pi} & -\frac{4\kappa}{\pi} \\ -\frac{4\kappa}{\pi} & \frac{1}{2}\pi^4 b_2^2 + \frac{4\kappa}{\pi} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

A Tabela 5.5 mostra as frequências naturais e modos de vibrações para valores selecionados de b_1 e b_2, que definem a geometria do arco, e o parâmetro de rigidez da ligação, κ.

Tabela 5.5 - Frequências naturais e modos associados para determinados parâmetros – Modelo com ligação flexível.

b_2	b_2	κ	ω_0	1º Modo	ω_1	2º Modo
0.7	0.7	4.7	4.8852	[1.0 1.0]	5.9861	[1.0 -1.0]
1.0	1.0	4.7	6.9789	[1.0 1.0]	7.7893	[1.0 -1.0]
1.3	1.3	4.7	9.0725	[1.0 1.0]	9.7097	[1.0 -1.0]
1.0	1.0	4.0	6.9788	[1.0 1.0]	7.6740	[1.0 -1.0]
1.0	1.0	4.5	6.9789	[1.0 1.0]	7.7565	[1.0 -1.0]
1.0	1.0	5.0	6.9789	[1.0 1.0]	7.8392	[1.0 -1.0]
1.0	1.0	5.5	6.9789	[1.0 1.0]	7.9190	[1.0 -1.0]
1.0	0.9	4.7	6.5190	[1.0 2.0372]	7.5912	[1.0 -0.4909]
0.9	1.0	4.7	6.5190	[1.0 0.4909]	7.5912	[1.0 -2.0372]

Para análise das vibrações não lineares, o sistema de equações de primeira ordem é apresentado no Apêndice A. A Figura 5.31 apresenta uma seção da bacia de atração considerando $b_1 = b_2 = 0.7$, $c_1 = c_2 = 0.01$, $\kappa = 4.7$ e $\lambda = 0.0$, para condições iniciais com velocidades nulas ($\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0.0$). Percebe-se neste caso, a existência de dois atratores (0,0) e (-1.4,-1.4), representados através de pontos amarelos e um ponto de sela (-0.7,-0.7), em cinza. Verifica-se a existência de duas regiões contínuas associadas aos atratores envolvidas por uma região fractal.

A Figura 5.31 mostra a influência do carregamento estático λ nas bacias de atração. Consideram-se dois níveis de carregamento: $\lambda = 0.25\ \lambda_{cr} \cong 0.60$ e $\lambda = 0.50\ \lambda_{cr} \cong 1.19$ (para $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\kappa = 4.7$, a carga crítica associada é $\lambda_{cr} = 2.38$). Observa-se, como esperado, a diminuição da bacia associada ao vale pré-critico (em vermelho).

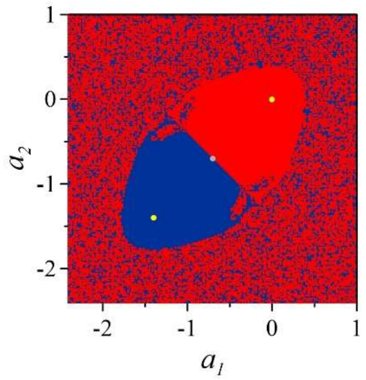
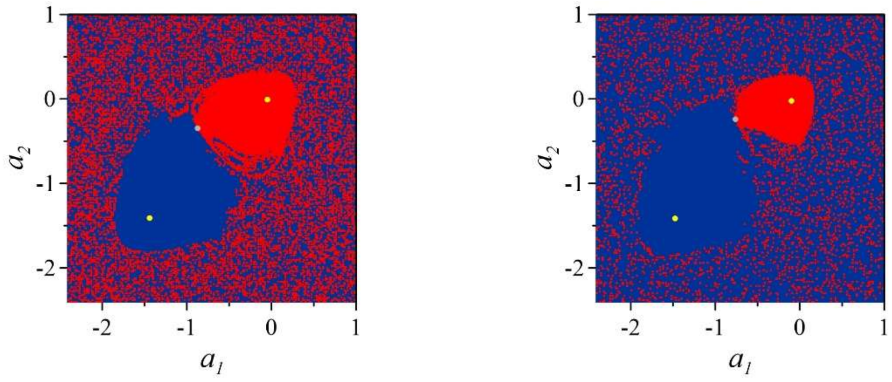


Figura 5.31 - Bacia de atração para os parâmetros $b_1 = b_2 = 0.7$, $c_1 = c_2 = 0.01$, $\kappa = 4.7$ e sem carregamento estático ($\lambda = 0.0$).



(a) $\lambda = 0.25\ \lambda_{cr}$ (b) $\lambda = 0.50\ \lambda_{cr}$

Figura 5.32 - Bacias de atração, variando o carregamento estático λ, para os parâmetros $b_1 = b_2 = 0.7$, $c_1 = c_2 = 0.01$ e $\kappa = 4.7$.

A Figura 5.33 apresenta a bacia de atração para o caso com 4 configurações de equilíbrio estável, considerando os parâmetros $b_1 = b_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 0.01$, $\kappa = 4.7$ e $\lambda = 0.0$, para condições iniciais com velocidades nulas ($\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0.0$). Observam-se os atratores (0,0), (-0.29,- 1.71), (-1.71, -0.29), e (-2,-2), representados através dos pontos amarelos, o ponto de máximo (-1,-1), em branco, e as selas (-1.30,-0.19), (-0.19,-1.30), (-1.81,-0.70) e (-0.70,-1.81), em cinza. Os vales associados aos pontos (0,0), posição inicial, e (-2,-2) com os dois arcos invertidos são bem mais profundos que os vales associados aos pontos (-0.29,- 1.71) e (-1.71, -0.29) que têm a mesma profundidade, o que explica o tamanho das regiões integras associadas a estes atratores.

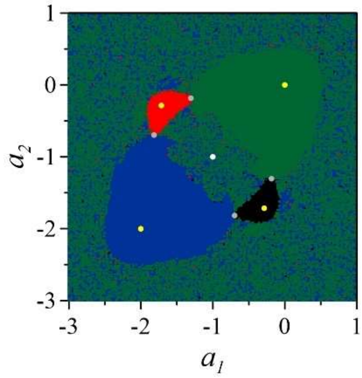
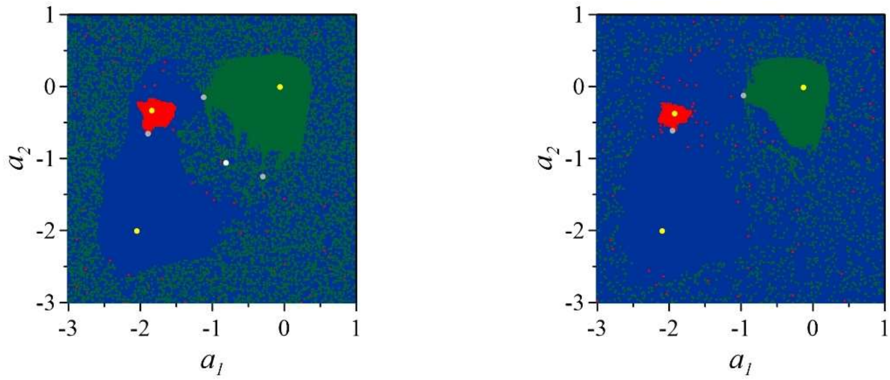


Figura 5.33 - Bacia de atração para os parâmetros $b_1 = b_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 0.01$, $\kappa = 4.7$ e $\lambda = 0.0$.

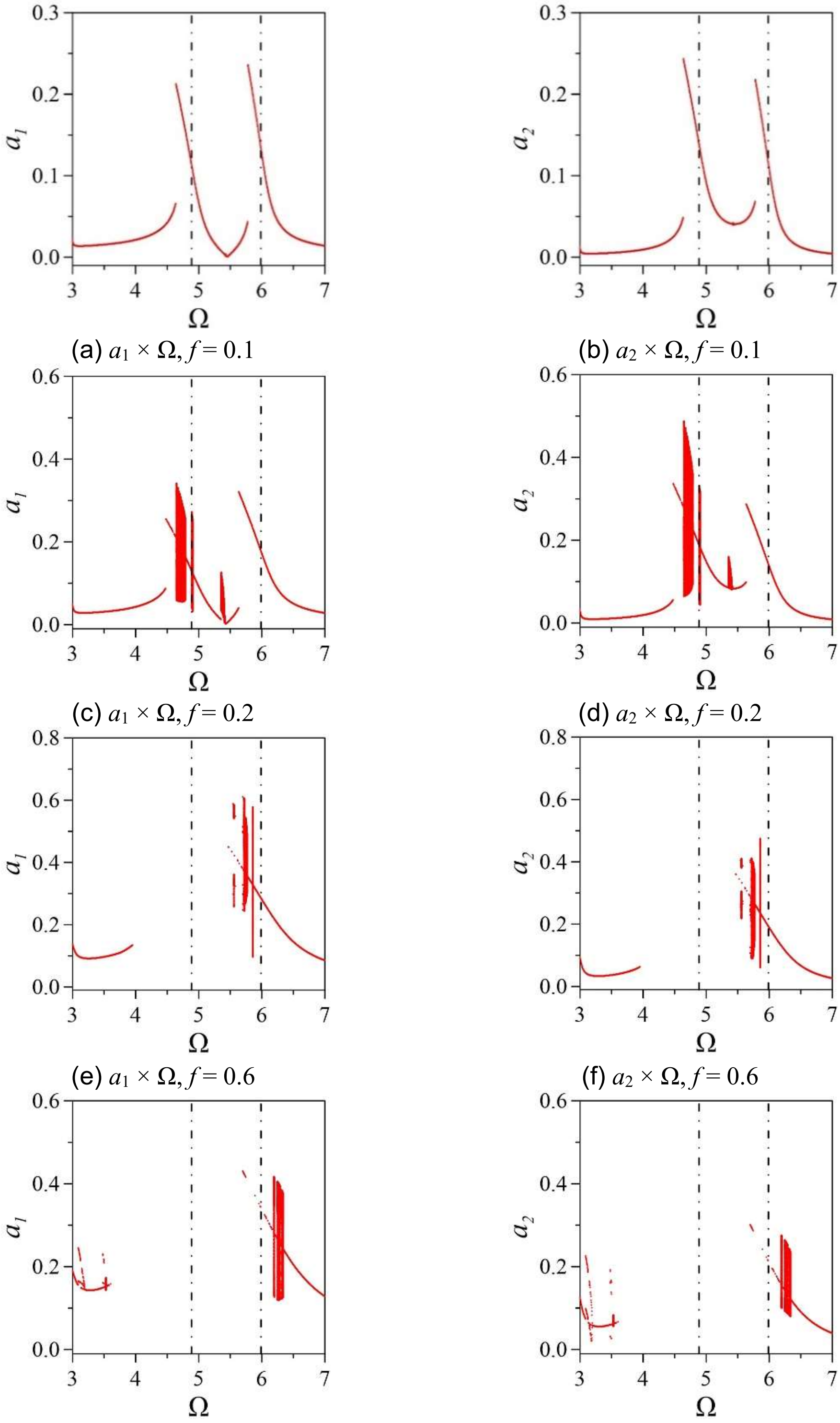
A Figura 5.34 mostra para este caso a variação das quatro bacias com o carregamento estático λ, considerando $\lambda = 0.25\ \lambda_{cr} \cong 1.47$ e $\lambda = 0.50\ \lambda_{cr} \cong 2.94$. Observa-se para estes níveis de carregamento estático o desaparecimento da bacia em preto já para níveis baixos de carregamento e a erosão das bacias em vermelho e verde em virtude do aumento progressivo da bacia em azul.



(a) $\lambda = 0.25\ \lambda_{cr}$ (b) $\lambda = 0.50\ \lambda_{cr}$

Figura 5.34 - Bacias de atração, variando o carregamento estático λ, para os parâmetros $b_1 = b_2 = 1.0$, $c_1 = c_2 = 0.01$ e $\kappa = 4.7$.

A Figura 5.35 apresenta as curvas de ressonância do sistema sob carga harmônica, considerando os parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$, $\kappa = 4.7$, em um intervalo do parâmetro de controle contendo as duas frequências naturais do modelo, $\omega_{01} = 4.8852$ e $\omega_{02} = 5.9861$, representadas nos gráficos pelas retas traço-ponto em preto. Foi utilizada como condição inicial a configuração de equilíbrio estável (0.0,0.0), em vermelho. Para $f = 0.1$ percebe-se dois picos ressonantes associados às duas frequências naturais, ambos apresentando o mesmo tipo de comportamento com perda de rigidez. Para $f = 0.2$ já aparecem em torno ω_{01} várias bifurcações e trechos caóticos. Também aparece um pico intermediário entre as duas frequências. Para $f = 0.6$ já não se observam soluções estáveis em uma larga faixa de frequências em torno ω_{01} e observam-se agora várias bifurcações e trechos caóticos em torno ω_{02}. Para $f = 0.9$ só existem soluções estáveis no vale pré-crítico para baixas e altas frequências.



(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$ (b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$

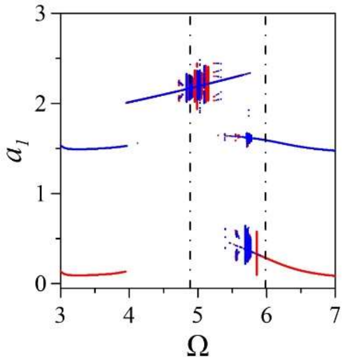
(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.2$ (d) $a_2 \times \Omega, f = 0.2$

(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$ (f) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$

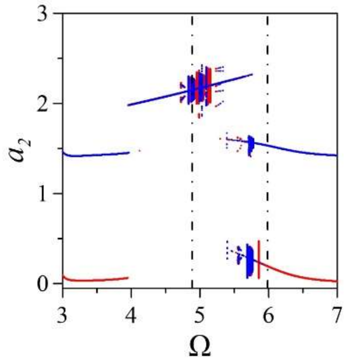
(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$ (h) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.35 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos senoidais e ligação flexível. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\kappa = 4.7$.

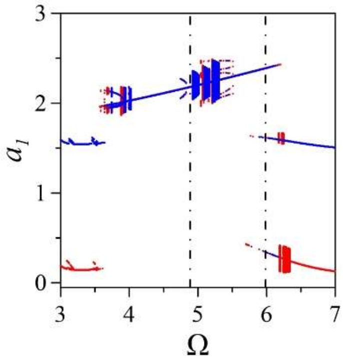
Considerando a região sem soluções estáveis no vale associado à posição inicial (0.0,0.0), a Figura 5.36 apresenta em azul os resultados associados ao vale potencial da segunda configuração de equilíbrio estável, (-1.4, -1.4), para os níveis de carregamento f = 0.6 e 0.9. Observa-se no segundo vale o mesmo tipo de comportamento. A Figura 5.37 apresenta para f = 0.6 os planos de fase (projeções da resposta) para $\Omega = \omega_{01} = 4.8852$ e $\Omega = \omega_{02} = 5.9861$ que ilustram as duas classes de comportamento observados nos diagramas de bifurcação. Verifica-se na região de escape oscilações de grande amplitude entre os dois vales potenciais (Figura 5.37(a)) e para $\Omega = \omega_{02}$ duas soluções coexistentes de pequena amplitude. Observa-se nos resultados a influência dos modos lineares em fase (Figura 5.37(a)) e fora de fase (Figura 5.37(b)).



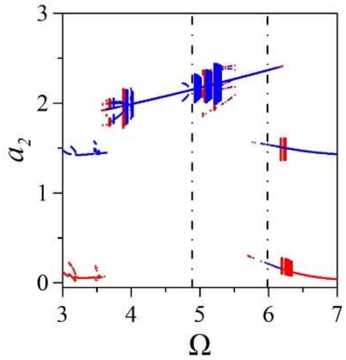
(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$



(b) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$

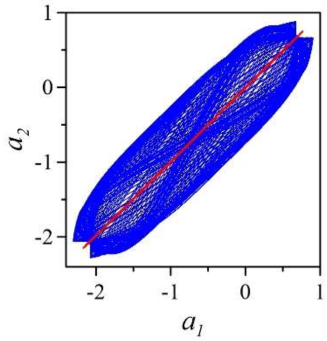


(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$

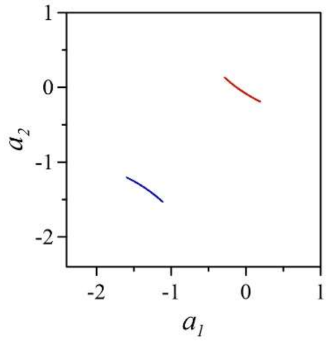


(d) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.36 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos senoidais e ligação flexível, considerando as duas condições iniciais. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\kappa = 4.7$.



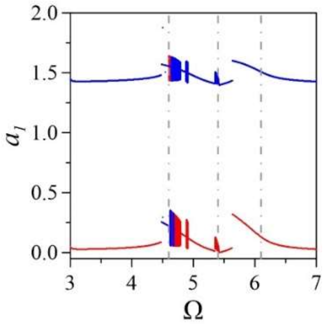
(a) $\Omega = 4.8852$



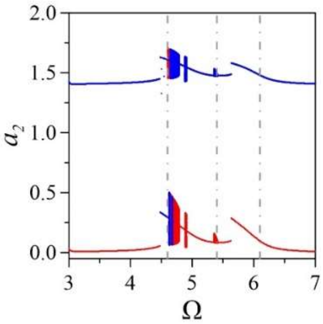
(b) $\Omega = 5.9861$

Figura 5.37 - Projeções da resposta permanente no plano de fase $a_1 \times a_2$ para $f = 0.6$, $b_1 = b_2 = 0.7$, $\kappa = 4.7$ e $c_1 = c_2 = 0.01$.

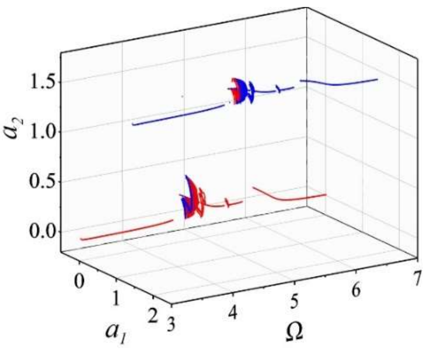
Para $f = 0.2$, a Figura 5.38 apresenta as curvas de ressonância considerando as duas sequências de soluções coexistentes associadas aos dois vales, uma em vermelho, outra em azul, além da vista 3D das curvas de ressonância, onde se observa nos dois vales a mesma sequência de bifurcações, gerando soluções coexistentes similares. A Figura 5.39 apresenta os diagramas de bifurcação para valores selecionados de Ω com f variando de 0 a 0.7 na região que contém as duas frequências naturais. Para $\Omega = 4.64$ já se observa a presença de descontinuidades para baixos valores de magnitude da excitação (f=0.1) e logo depois uma sequência de bifurcações culminando em vibrações entre vales de grande amplitude para f>0.5, demostrando a sensibilidade do sistema na primeira região de ressonância. O mesmo comportamento se observa na segunda região de ressonância ($\Omega = 5.78$) e na região de pico intermediário ($\Omega = 4.89 \approx (\omega_{01}+\omega_{02})/2$), onde se nota uma inesperada e complexa sequência de bifurcações.



(a) $a_1 \times \Omega$

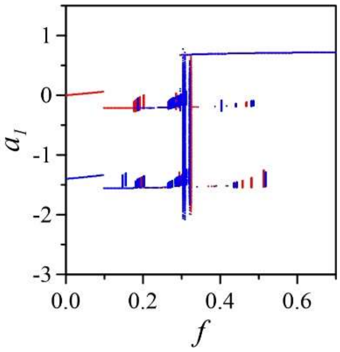


(b) $a_2 \times \Omega$

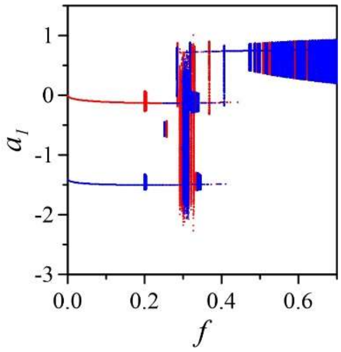


(c) 3D

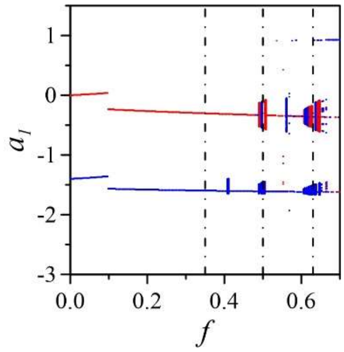
Figura 5.38 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos senoidais e ligação flexível, para amplitude do carregamento harmônico $f = 0.2$. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\kappa = 4.7$.



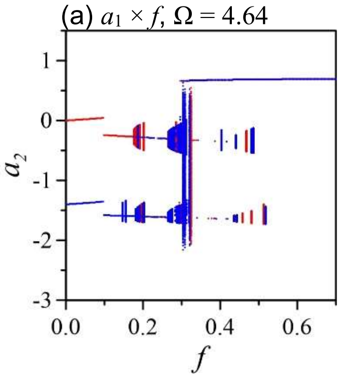
(a) $a_1 \times f$, $\Omega = 4.64$



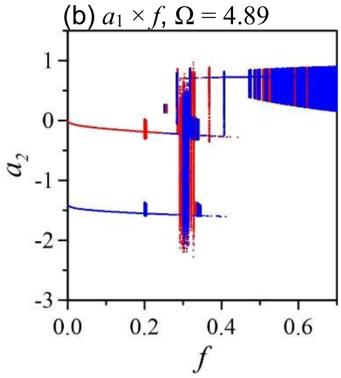
(b) $a_1 \times f$, $\Omega = 4.89$



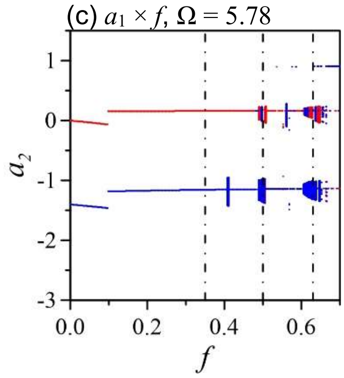
(c) $a_1 \times f$, $\Omega = 5.78$



(d) $a_2 \times f$, $\Omega = 4.64$



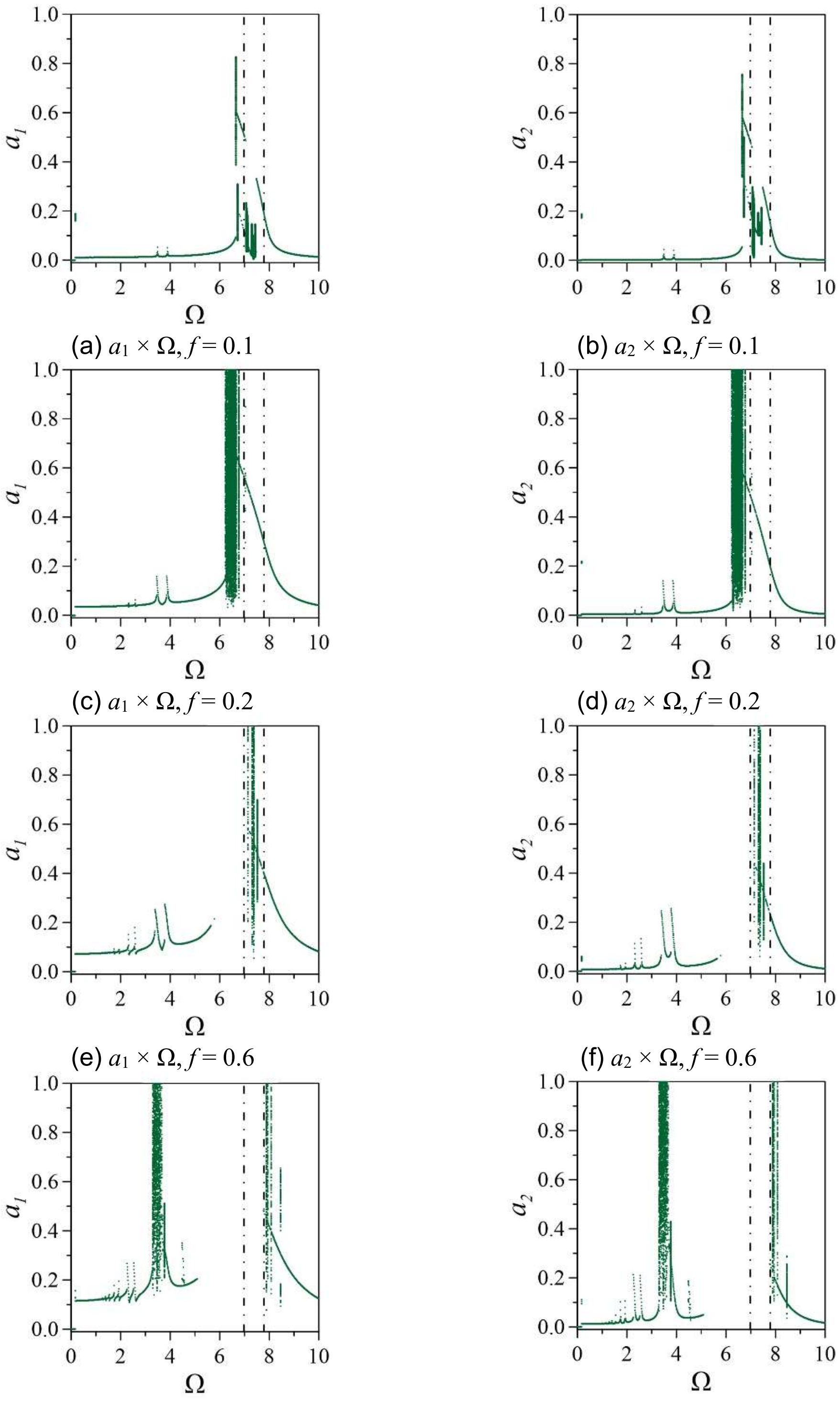
(e) $a_2 \times f$, $\Omega = 4.89$



(f) $a_2 \times f$, $\Omega = 5.78$

Figura 5.39 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a amplitude da força f, estrutura com arcos senoidais e ligação flexível, variando f de 0 a 0.7. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 0.7$ e $\kappa = 4.7$. $\omega_{01} = 4.8852$ e $\omega_{02} = 5.9861$.

Considerando agora o abatimento $b_1 = b_2 = 1.0$ e mantendo $\kappa = 4.7$, tem-se a inclusão de duas novas configurações de equilíbrio estático e consequentemente dois novos vales potenciais para a estrutura descarregada (Figura 5.33 - (0.0,0.0), (-0.29,-1.71), (-1.71,-0.29) e (-2.0,-2.0)). A Figura 5.40 apresenta as curvas de ressonância em uma região que abrange as duas frequências naturais do sistema na configuração inicial, $\omega_{01} = 6.9789$ e $\omega_{02} = 7.7893$, identificadas pelas duas retas verticais. Neste caso as duas frequências são muito próximas o que gera um comportamento complexo com o acoplamento dos modos, mesmo para baixos níveis de carregamento, ver Figura 5.40(a, b) para $f = 0.1$. Para $f = 0.2$ já se observa uma faixa de oscilações não periódicas e a resposta é semelhante à de um sistema com 1GL com perda de rigidez. Para $f = 0.6$ se observa uma região sem soluções estáveis neste vale potencial que se torna bem mais larga para $f = 0.9$. Nota-se em todos os casos picos para $\Omega < \omega_{01}$ que crescem com o carregamento e também apresentam comportamento não linear com perda de rigidez, particularmente na faixa de excitação $3 < \Omega < 4$.



(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$ (b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$

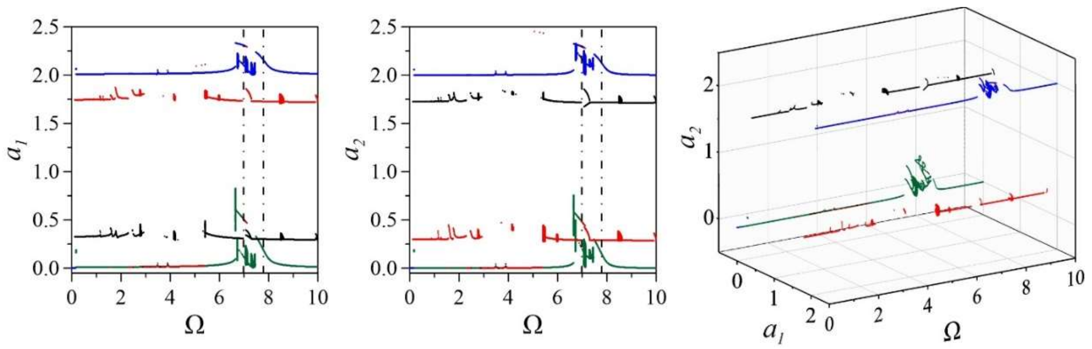
(c) $a_1 \times \Omega, f = 0.2$ (d) $a_2 \times \Omega, f = 0.2$

(e) $a_1 \times \Omega, f = 0.6$ (f) $a_2 \times \Omega, f = 0.6$

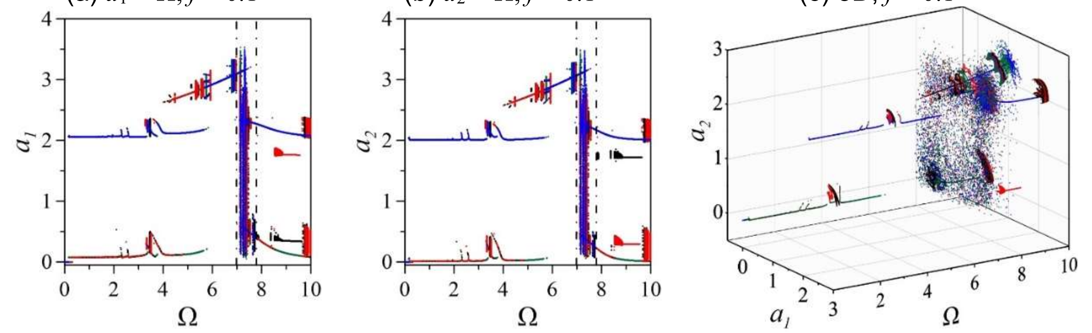
(g) $a_1 \times \Omega, f = 0.9$ (h) $a_2 \times \Omega, f = 0.9$

Figura 5.40 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos senoidais e ligação flexível. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 1.0$ e $\kappa = 4.7$.

Para $f = 0.1$ e 0.8 foram geradas as curvas de ressonância que emergem dos demais vales potenciais. Projeções e vistas 3D das quatro sequências de soluções são apresentadas na Figura 5.41. Nestes casos é possível observar que os ramos associados às configurações adicionais de equilíbrio (-0.29,-1.71) e (-1.71,-0.29) com os arcos tendo concavidades opostas, apresentados em vermelho e preto, possuem maior sensibilidade (vales potenciais menores, ver Figura 5.33), desaparecendo para níveis elevados de carregamento. Percebe-se nos resultados que a ligação flexível leva a complexas sequências de bifurcação, o que pode dificultar o projeto da estrutura e o controle das vibrações.



(a) $a_1 \times \Omega, f = 0.1$ (b) $a_2 \times \Omega, f = 0.1$ (c) 3D, $f = 0.1$



(d) $a_1 \times \Omega, f = 0.8$ (e) $a_2 \times \Omega, f = 0.8$ (f) 3D, $f = 0.8$

Figura 5.41 - Diagramas de bifurcação tendo como parâmetro de controle a frequência de excitação Ω, estrutura com arcos senoidais e ligação flexível, para condições iniciais diferentes. Parâmetros adimensionais $b_1 = b_2 = 1.0$ e $\kappa = 4.7$.

6
Aplicação dos Sistemas Multiestáveis

Neste capítulo investiga-se o procedimento de colheita de energia, conhecido como *"energy harvesting"*, usando-se um sistema multiestável como exemplo de aplicação dos sistemas aqui abordados.

6.1.
Colheita de Energia

A colheita de energia consiste na captura e armazenamento de energia para alimentar aparelhos de pequeno porte, como smartphones, sensores remotos, implantes médicos inteligentes, dentre outros (Inman & Priya, 2009; Erturk & Inman, 2011; Sezer & Koç, 2021). A energia elétrica é gerada a partir de fontes externas, neste caso, proveniente da energia mecânica oriunda da vibração dos sistemas estruturais.

A possibilidade de conversão de energia entre domínios físicos (do mecânico para o elétrico) é possível devido a exploração de materiais inteligentes como os materiais piezoelétricos que possuem propriedades capazes de promover essa transformação. O acoplamento entre dois domínios físicos proporcionado por estes materiais possibilita que a mudança de uma determinada variável em um domínio produza a alteração de outra variável em outro domínio acoplado.

Uma análise na bibliografia do tema mostra que a maioria dos estudos desenvolvidos em mecanismos de colheita de energia por piezeletricidade utiliza modelos de vigas em balanço associadas a campos magnéticos, resultando em modelos biestáveis ou multiestáveis, como em De Paula et al. (2015), Noremberg et al. (2022) e Ma et al. (2022). No entanto, é possível encontrar trabalhos com sistemas estruturais diferentes, como na pesquisa desenvolvida por Jiang & Chen (2014), onde é apresentado um estudo de uma estrutura biestável capaz de sofrer *snap-through*, similar ao modelo da treliça de von Mises.

Deste modo, realizou-se uma análise do processo de colheita de energia através do acoplamento piezoelétrico utilizando o modelo multiestável formado por treliças de von Mises ligadas através de elementos rígidos, partindo de um modelo de 1GL (treliça unitária) usado como referência, e, a seguir, investigando a eficiência de diferentes modos de acoplamento para o modelo com 2GL.

6.1.1. Equação do Circuito Elétrico para Colheita de Energia

Para inclusão do material piezoelétrico no modelo matemático, considera-se o mesmo como uma fonte de corrente elétrica em paralelo com sua capacitância interna. Assim, tem-se um circuito elétrico equivalente caracterizado como resistor-capacitor (RC), amplamente conhecido, conforme ilustra a Figura 6.1.

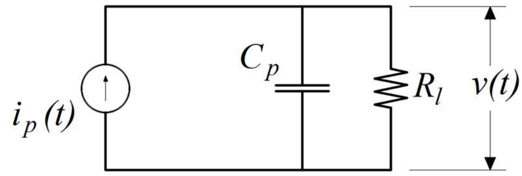


Figura 6.1 - Modelo esquemático do circuito equivalente ao material piezoelétrico a ser acoplado no sistema multiestável.

Na Figura 6.1, C_p representa a capacitância equivalente, R_l, a resistência, V a tensão e i_p a corrente elétrica. A lei de Kirchhorff descreve a corrente elétrica do sistema de captação equivalente como a soma das parcelas que passam pelo capacitor (i_1) e pelo resistor (i_2):

$$i_p = i_1 + i_2 \tag{6.1}$$

A partir das variáveis análogas dos domínios mecânico e elétrico, a corrente elétrica gerada no elemento piezoelétrico pode ser descrita pela velocidade do deslocamento ($\dot{v}$) e seu acoplamento (θ), (Thornton e Marion, 2004):

$$i_p = \theta \dot{v} \tag{6.2}$$

As corretes elétricas que passam pelo circuito são dadas por:

$$i_1 = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{V}{R_l} \tag{6.3}$$

onde q representa a carga elétrica.

A carga elétrica é equivalente a capacitância multiplicada pela tensão, a saber:

$$q = C_p V \tag{6.4}$$

Deste modo, a tensão (V) gerada no circuito pelo elemento piezoelétrico, como resposta às vibrações, é dada por:

$$C_p\dot{V} + \frac{V}{R_l} - \theta\dot{v} = 0 \tag{6.5}$$

Considerando o tempo na forma adimensional, e usando os parâmetros:

$$\chi = \frac{v}{a}, \ \gamma = \frac{1}{R_l C_p} \ \text{ e } \ \varphi = -\frac{\theta}{C_p} \tag{6.6}$$

onde v representa o deslocamento do nó central do modelo de treliça com 1GL (ver Figura 3.1), a, sua altura, γ, o recíproco da constante de tempo e φ o termo de acoplamento piezoelétrico na equação do circuito elétrico, obtém-se a equação do circuito elétrico para captação de energia na forma adimensional:

$$V_{,\tau} + \gamma V + \varphi\chi_{,\tau} = 0 \tag{6.7}$$

6.1.2. Eficiência e Desempenho da Colheita de Energia

De acordo com De Paula et al. (2015), para avaliar o desempenho da conversão de energia nos sistemas multiestáveis, utiliza-se a raiz quadrada média (*root mean square*, RMS) da tensão (V_{RMS}) a saber:

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} V^2 d\tau} \tag{6.8}$$

e a eficiência, η, calculada a partir da relação entre a potência elétrica efetiva (P_E) e a potência mecânica efetiva (P_M):

$$\eta = \frac{P_E}{P_M} \tag{6.9}$$

As potências efetivas, conhecidas como potências médias RMS, são definidas a partir das potências instantâneas (P_j^{ins}):

$$P_j = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \left(P_j^{ins}\right)^2 d\tau}, \quad j = E, M \tag{6.10}$$

A potência elétrica instantânea coletada pelo mecanismo piezoelétrico é definida pelo produto da tensão e da corrente elétrica:

$$P_E^{ins} = Vi \tag{6.11}$$

sendo a corrente adimensional dada por $i = V\gamma$.

A potência mecânica instantânea é dada pelo produto da velocidade do deslocamento nodal e da amplitude da força harmônica utilizada na excitação da estrutura, ou seja:

$$P_M^{ins} = \chi_{,\tau} F \tag{6.12}$$

6.2.
Colheita de Energia de Sistemas Multiestáveis

6.2.1.
Modelo de 1GL

O primeiro modelo analisado considera como referência uma treliça de von Mises, portanto um modelo com 1GL, Figura 3.1. Representam-se as barras da treliça com linhas contínuas em cinza, na posição indeformada, e com linhas tracejadas em vermelho, após a aplicação da carga P. O carregamento harmônico adicional, Q, produzirá a oscilação necessária para a deformação do elemento piezoelétrico acoplado ao nó central da treliça. O intuito de analisar este sistema é obter medidas de comparação para os modelos de 2GL.

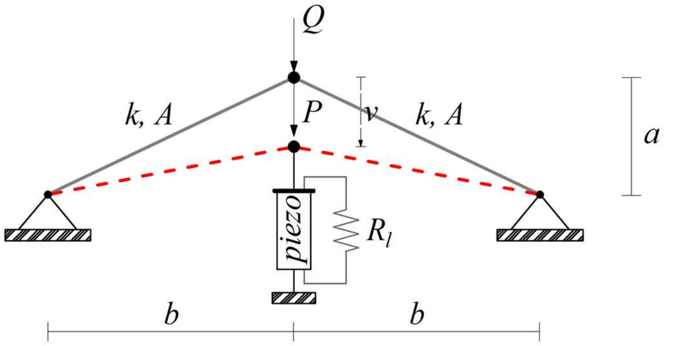


Figura 6.2 - Modelo de treliça de von Mises com acoplamento piezoelétrico para colheita de energia.

A formulação para o caso de 1GL segue o mesmo processo apresentado no capítulo 2, quando se utiliza duas treliças acopladas, com algumas simplificações devido a não necessidade de utilização dos índices que diferenciam as treliças superior e inferior, deste modo, a partir da Figura 3.1 tem-se que o comprimento das barras na configuração indeformada (L_i) e após a aplicação da carga P (L_f) são, respectivamente:

$$L_i = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad L_f = \sqrt{(a-v)^2 + b^2} \tag{6.13}$$

Considerando o comportamento linear-elástico do material da estrutura e a deformação de engenharia (ε), tem-se respectivamente para a energia interna de deformação e a energia potencial:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} k(\varepsilon)^2 \, dx = kL_i \left(\frac{L_f - L_i}{L_i} \right)^2 \tag{6.14}$$

$$V = -Pv \tag{6.15}$$

Com isso, a energia potencial total ($\Pi = U + V$) do modelo de treliça com 1GL fica:

$$\Pi = kL_i \left(\frac{L_f - L_i}{L_i} \right)^2 - Pv \tag{6.16}$$

Os parâmetros adimensionais adotados são:

$$\delta = \frac{a}{b},\ \lambda = \frac{P}{k} \text{ e } \chi = \frac{v}{a} \tag{6.17}$$

onde, δ representa o abatimento da treliça, λ o parâmetro adimensional de carga e χ o parâmetro adimensional relativo ao deslocamento do nó central da treliça.

Deste modo se obtêm a energia potencial total na forma adimensional para o modelo de 1GL:

$$\Pi = \sqrt{\delta^2 + 1} \left(\frac{\sqrt{(\delta - \delta\chi)^2 + 1}}{\sqrt{\delta^2 + 1}} - 1 \right)^2 - \lambda\chi\delta \tag{6.18}$$

Aplicando o princípio da energia potencial estacionária e explicitando o parâmetro de carga, tem-se o caminho fundamental de equilíbrio:

$$\lambda = \frac{2\delta(\chi - 1)\left(\sqrt{(\delta - \delta\chi)^2 + 1} - \sqrt{\delta^2 + 1} \right)}{\sqrt{\delta^2 + 1}\sqrt{(\delta - \delta\chi)^2 + 1}} \tag{6.19}$$

A obtenção da energia cinética (T) segue o mesmo processo apresentado no capítulo 2, com:

$$dT = \frac{dm}{2} \dot{v}^2 \tag{6.20}$$

onde:

$$v' = s\frac{v}{L} \quad \text{e} \quad \dot{v}' = s\frac{\dot{v}}{L} \tag{6.21}$$

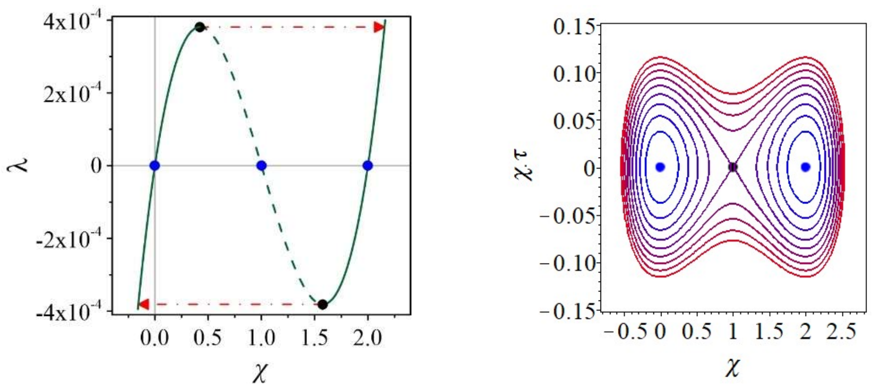
Assim, tem-se:

$$T = 2\left(\frac{\rho A_0}{2L^2} \int_0^L s^2 ds \dot{v}^2 \right) = \frac{\rho A_0 L}{3} \dot{v}^2 \tag{6.22}$$

Considerando os parâmetros adimensionais $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0^2 = k/\rho A_0 b^2$ e $\overline{T} = T/kb$, tem-se a energia cinética adimensional:

$$\overline{T} = \frac{\delta^2\sqrt{\delta^2+1}}{3}\chi_{,\tau}{}^2 \tag{6.23}$$

A Figura 6.3(a) apresenta o caminho não linear de equilíbrio, Equação (6.19), para $\delta = 0.100$. Como esperado, verifica-se que o sistema exibe dois pontos limite com $\lambda_{cr} = \pm\ 3.81 \times 10^{-4}$ (pontos em preto), onde a treliça sofre *snap-through*, atingindo uma segunda configuração de equilíbrio estável, com concavidade invertida e liberando grande quantidade de energia. Se tratando de um modelo biestável, observa-se a existência de duas configurações de equilíbrio estáveis para $\lambda = 0.0$, $\chi = 0.0, 2.0$, e uma configuração instável, $\chi = 1.0$, pontos em azul no gráfico. A Figura 6.3(b) acrescenta curvas equipotenciais de energia no plano $\chi \times \chi_{,\tau}$, $\lambda = 0.0$, mostrando que este pode apresentar oscilações em torno das configurações estáveis em cada vale potencial ou movimentos de maior amplitude em torno das duas configurações de equilíbrio estável, separados através da orbita homoclínica associada ao ponto de sela.



(a) Caminho não linear de equilíbrio. (b) Curvas equipotenciais de energia.

Figura 6.3 - Análise do modelo de treliça com 1GL, considerando $\delta = 0.100$.

A equação de movimento para este modelo é dada por:

$$\frac{2\delta\sqrt{\delta^2+1}}{3}\chi_{,\tau\tau} + 2\xi\delta\chi_{,\tau} - \frac{2\left(\dfrac{\sqrt{(\delta-\delta\chi)^2+1}}{\sqrt{\delta^2+1}}-1\right)(\delta-\delta\chi)}{\sqrt{(\delta-\delta\chi)^2+1}} - \lambda = \overline{Q} \tag{6.24}$$

Para análise de vibrações livres não amortecidas ($\xi = 0.0$), considerando o modelo sem carregamento ($\lambda = 0.0$ e $\overline{Q} = 0.0$), tem-se a equação de movimento:

$$\frac{2\delta\sqrt{\delta^2+1}}{3}\chi_{,\tau\tau}-\frac{2\left(\frac{\sqrt{(\delta-\delta\chi)^2+1}}{\sqrt{\delta^2+1}}-1\right)(\delta-\delta\chi)}{\sqrt{(\delta-\delta\chi)^2+1}}=0 \tag{6.25}$$

Linearizando (6.26), tem-se:

$$\chi_{,\tau\tau}+\frac{3\delta^2}{\left(\delta^2+1\right)^2}\chi=0 \tag{6.27}$$

Assim, a frequência natural é dada por:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{3\delta^2}{\left(\delta^2+1\right)^2}} \tag{6.28}$$

Portanto, para $\delta = 0.100$, tem-se $\omega_n = 0.1715$.

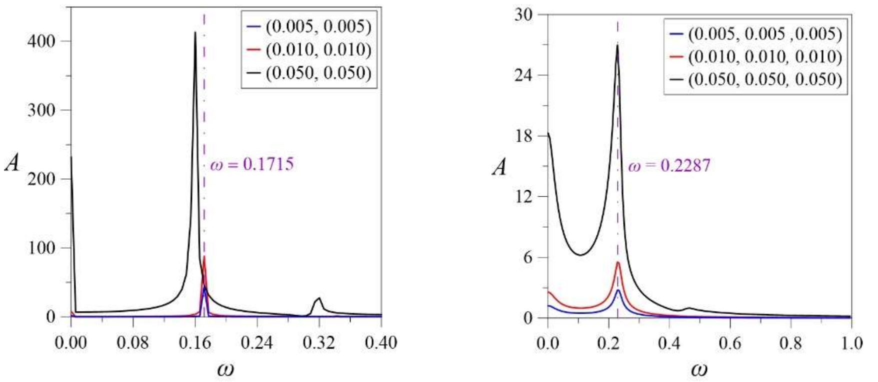
Considerando o acoplamento piezoelétrico, as equações de movimento são:

$$\frac{2\delta\sqrt{\delta^2+1}}{3}\chi_{,\tau\tau}+2\xi\delta\chi_{,\tau}-\frac{2\left(\frac{\sqrt{(\delta-\delta\chi)^2+1}}{\sqrt{\delta^2+1}}-1\right)(\delta-\delta\chi)}{\sqrt{(\delta-\delta\chi)^2+1}}-\lambda-\beta V=\bar{Q} \tag{6.29}$$

$$V_{,\tau}+\gamma V+\varphi\chi_{,\tau}=0 \tag{6.30}$$

onde β representa o termo de acoplamento piezoelétrico na equação de movimento. Considerando valores encontrado na literatura (De Paula et al., 2015), foram utilizados em todas as análises os parâmetros $\beta = 0.05$, $\varphi = 0.5$ e $\gamma = 0.05$.

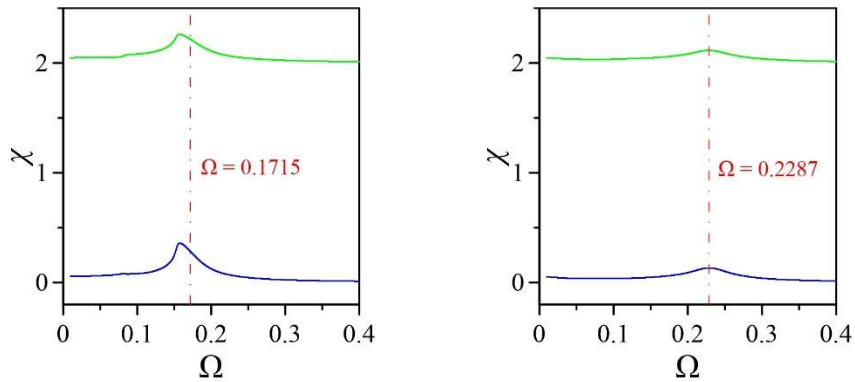
Nesse caso, sabe-se que o acoplamento do elemento piezoelétrico na treliça, produz uma alteração no valor da frequência de ressonância. Por conta disto, realizou-se um estudo da frequência para o sistema com acoplamento piezoelétrico utilizando a Transformada Rápida de Fourier (FFT) (Nussbaumer, 1982; Heckbert, 1995). A Figura 6.4(a) mostra uma convergência com o valor calculado anteriormente para o caso da treliça isolada, de modo a validar o processo de cálculo da frequência. A Figura 6.4(b) apresenta a frequência natural para o modelo acoplado, onde se obtém $\omega_n = 0.2287$. São usadas as condições iniciais $(\chi,\dot{\chi})$ para o sistema sem acoplamento, e $(\chi,\dot{\chi},V)$, para o sistema com acoplamento.



(a) Sem colheita de energia. (b) Com colheita de energia.

Figura 6.4 - Comparação entre as frequências naturais do sistema antes e após o acoplamento do elemento piezoelétrico, considerando $\delta = 0.100$.

Na Figura 6.5 realiza-se uma comparação entre as curvas de ressonância considerando o sistema sem e com acoplamento piezoelétrico, δ = 0.100, λ = 0.0 e amplitude do carregamento harmônico $F = 1.0 \times 10^{-4}$. Verifica-se também, que as curvas de ressonância do sistema sem colheita de energia, Figura 6.5(a), apresentam um comportamento com um grau de não linearidade maior em relação as curvas do sistema com colheita, Figura 6.5(b). Isso se deve ao fato de que a solução somente da equação de movimento do piezoelétrico é $e^{-\gamma\tau}$, Equação (6.30), ou seja, uma exponencial negativa tendendo a zero, o que corresponde a um sistema superamortecido, e, portanto, torna o sistema mais amortecido, diminuindo assim o grau de não linearidade.



(a) Sem colheita de energia. (b) Com colheita de energia.

Figura 6.5 - Curvas de ressonância comparando os picos do sistema antes e após o acoplamento do piezo, considerando $\delta = 0.100$ e $F = 1.0 \times 10^{-4}$.

Deste modo e sabendo que, a princípio, a região em torno da frequência natural é onde ocorrem as maiores amplitudes de movimento com as menores magnitudes de carregamento, apresenta-se na Figura 6.6(a) o diagrama de bifurcação considerando $\Omega = 0.2287$ e $\delta = 0.100$. O ramo que parte das condições iniciais (0,0) é representado em azul e o ramo que parte das condições iniciais (2,0) em verde. Através das retas vermelhas, selecionam-se quatro amplitudes F do carregamento harmônico e são obtidos os planos de fase e seções de Poincaré das soluções coexistentes. Na Figura 6.6(b), $F = 3.81 \times 10^{-4}$, observam-se duas soluções permanente em cada vale potencial com período 1. Para $F = 15.24 \times 10^{-4}$, Figura 6.6(c), há novamente duas soluções com período 1. Para $F = 20.96 \times 10^{-4}$, Figura 6.6(d), verifica-se dois movimentos possíveis, com a solução em azul apresentando amplitude menor que a oscilação em verde. Por fim, para $F = 24.77 \times 10^{-4}$, Figura 6.6(e), há uma única solução de grande amplitude que se move entre os dois vales potenciais com a treliça mudando de concavidade a cada oscilação.

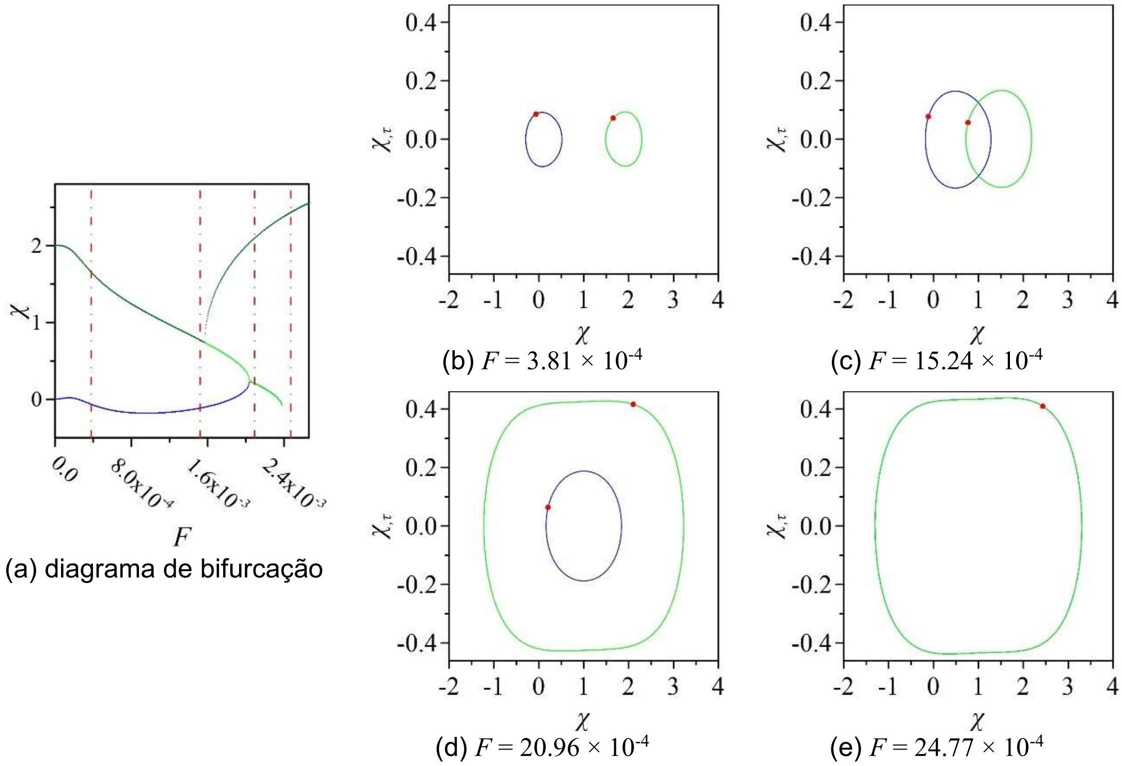


Figura 6.6 - Digrama de bifurcação com parâmetro de controle F e planos de fase e seções de Poincaré, para $\delta = 0.100$ e $\Omega = 0.2287$.

A Figura 6.7 apresenta uma vista tridimensional da tensão efetiva, considerando $\delta = 0.100$, $F = 20.96 \times 10^{-4}$ e $\Omega = 0.2287$, mostrando a variação da tensão produzida a partir do movimento oscilatório do sistema para a solução de maior amplitude (em verde na Figura 6.6(d)).

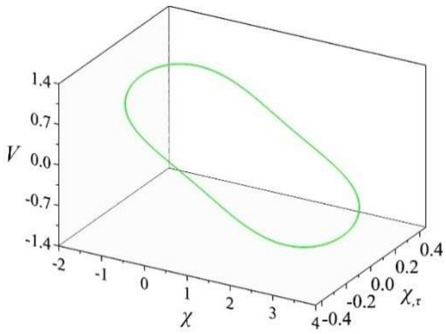
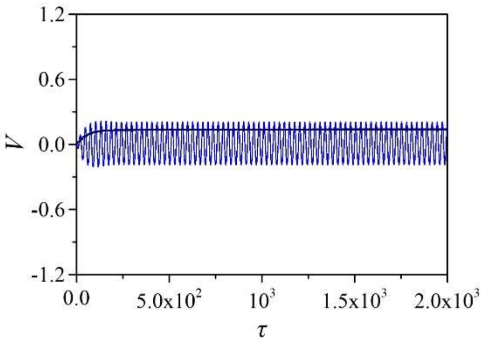
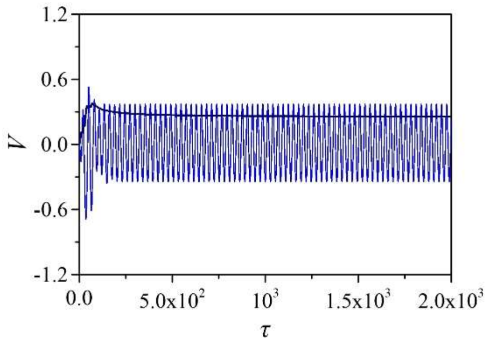


Figura 6.7 - Tensão efetiva em 3D, considerando $\delta = 0.100$, $F = 20.96 \times 10^{-4}$ e $\Omega = 0.2287$.

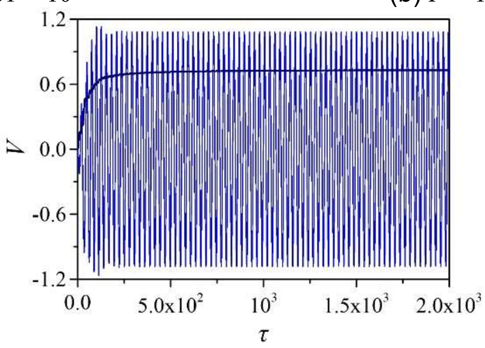
A Figura 6.8 apresenta a tensão efetiva no domínio do tempo, em azul, e a tensão RMS, em azul escuro, para diferentes amplitudes do carregamento, $\delta = 0.100$ e $\Omega = 0.2287$, mostrando que movimentos com maiores amplitudes envolvendo *snap-through* geram um aumento considerável na tensão efetiva e no RMS.



(a) $F = 3.81 \times 10^{-4}$



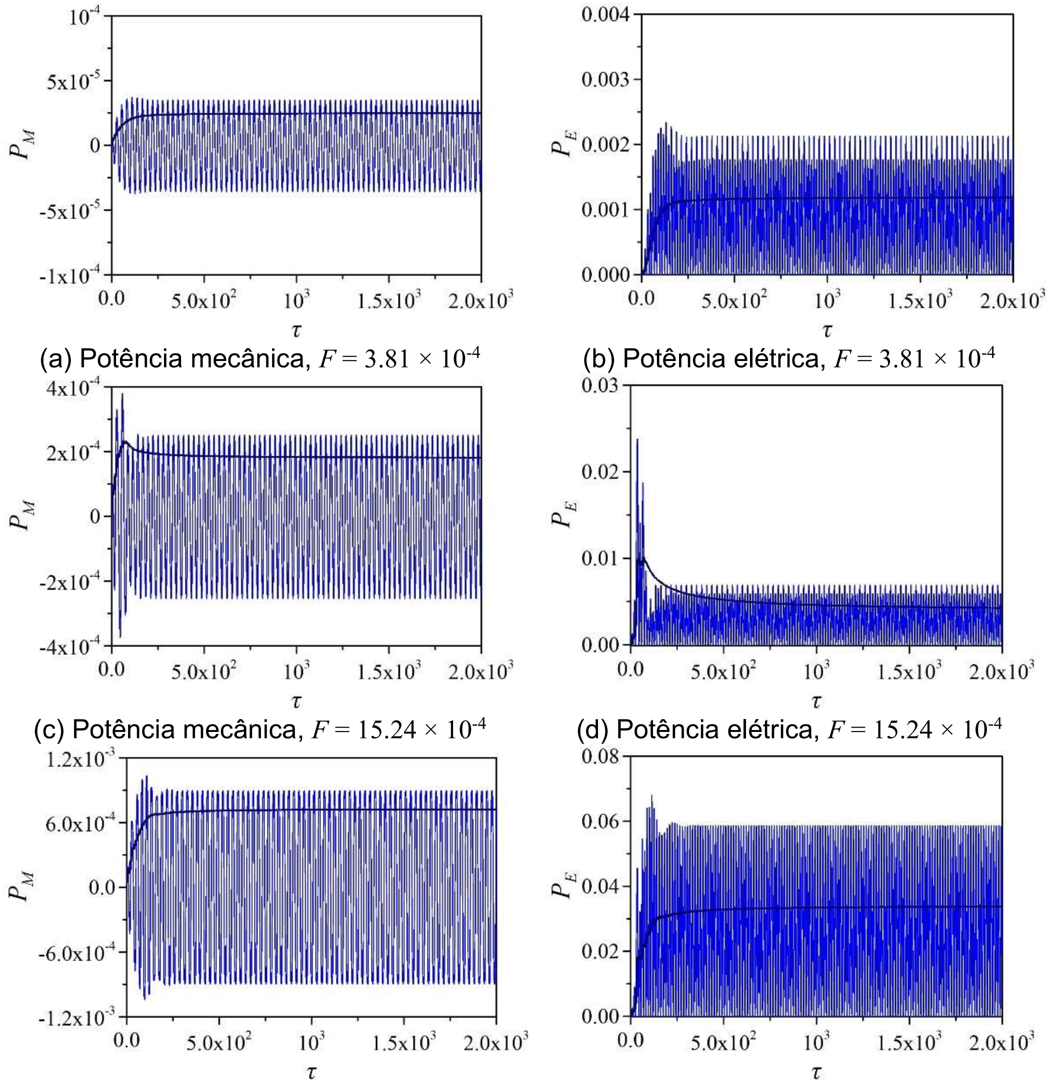
(b) $F = 15.24 \times 10^{-4}$



(b) $F = 20.96 \times 10^{-4}$

Figura 6.8 - Tensão efetiva no domínio do tempo, considerando $\delta = 0.100$ e $\Omega = 0.2287$.

A Figura 6.9 apresenta a potência instantânea mecânica e elétrica e RMS no domínio do tempo, em azul claro e azul escuro, respectivamente, para diferentes amplitudes do carregamento e $\delta = 0.100$ e $\Omega = 0.2287$, onde novamente observa-se o efeito benéfico do *snap-through* com um aumento considerável de ambas as potências. Isto ocorre em virtude de a treliça armazenar grande quantidade de energia interna de deformação ao passar pela posição instável (horizontal), onde as tensões de compressão atingem o valor máximo, sendo esta energia então liberada no processo de descompressão.



(a) Potência mecânica, $F = 3.81 \times 10^{-4}$

(b) Potência elétrica, $F = 3.81 \times 10^{-4}$

(c) Potência mecânica, $F = 15.24 \times 10^{-4}$

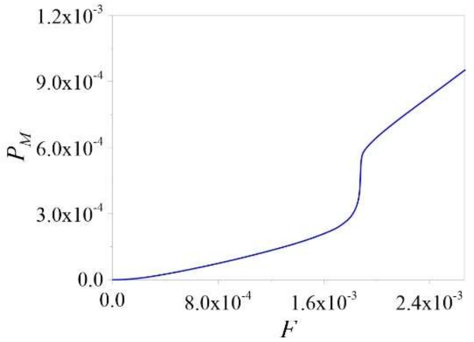
(d) Potência elétrica, $F = 15.24 \times 10^{-4}$

(e) Potência mecânica, $F = 20.96 \times 10^{-4}$

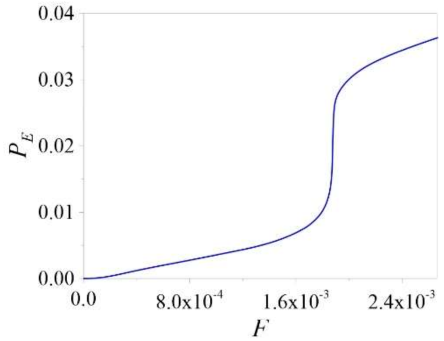
(f) Potência elétrica, $F = 20.96 \times 10^{-4}$

Figura 6.9 - Potencias mecânica e elétrica, considerando $\delta = 0.100$ e $\Omega = 0.2287$.

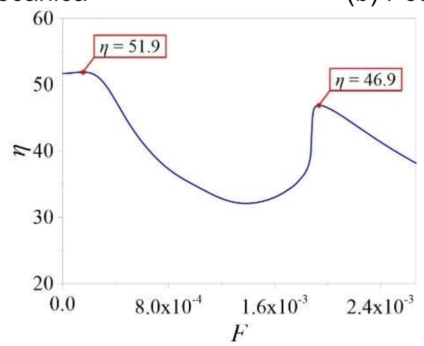
As Figura 6.10(a, b) mostram os valores RMS das potências para uma faixa de magnitude do carregamento harmônico, considerando δ = 0.100 e Ω = 0.2287. Percebe-se um salto no valor tanto da potência mecânica quanto da elétrica próximo a $F = 1.9 \times 10^{-3}$. Como mostra a Figura 6.10(a), para um valor de F próximo a 1.9×10^{-3} as soluções coexistentes em vales potenciais vizinhos coalescem após o escape, gerando soluções de grande amplitude, Figura 6.6(d, e). A Figura 6.10(c) calcula a eficiência nesta região onde ressaltam-se dois pontos de máximo em $F = 1.54 \times 10^{-4}$ e $F = 1.93 \times 10^{-3}$, sendo a região com menor amplitude de maior eficiência. No entanto, a região de maior interesse está associada ao segundo pico, onde movimentos de maior amplitude levam a maior geração de energia.



(a) Potência mecânica



(b) Potência elétrica



(c) Eficiência

Figura 6.10 - Potências RMS variando a amplitude do carregamento f, considerando $\delta = 0.100$ e $\Omega = 0.2287$.

A Figura 6.11 mostra o cálculo da eficiência no domínio do tempo, para as três respostas apresentadas nas Figura 6.8 e Figura 6.9, $F = 3.81 \times 10^{-4}$, em preto, $F = 15.24 \times 10^{-4}$, em azul, e $F = 20.96 \times 10^{-4}$, em vermelho, mostrando resultados coerentes com o apresentado na Figura 6.10. Para calcular a eficiência utiliza-se a relação entre a potência elétrica e a potência mecânica, Equação (6.9). Assim quando a força de excitação é baixa a potência mecânica é muito pequena e, com isso, a eficiência fica muito alta mesmo com uma potência elétrica muito baixa. Isto tem relação com o fato de a estrutura ser abatida. Assim o sistema tem boa eficiência desde amplitudes muito baixas. Porém, além da eficiência tem que verificar a tensão RMS, por isso o segundo pico na Figura 6.10(c) é mais importante.

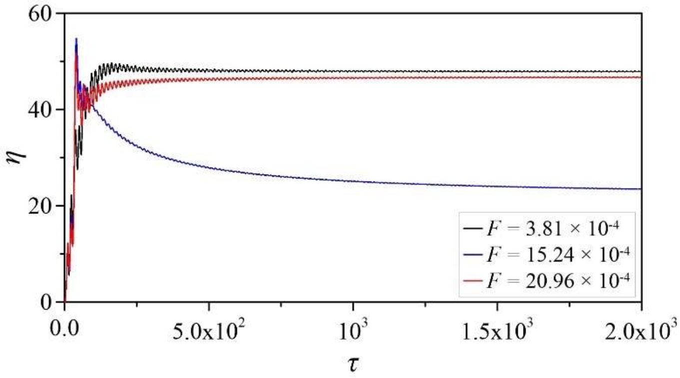


Figura 6.11 - Eficiências ao longo do tempo.

Para se obter uma visão mais abrangente do sistema de colheita de energia, é realizado um estudo no plano Ω x F. Deste modo, se estabeleceu uma janela de variação dos parâmetros de excitação, com Ω variando de 0.02 até 0.5, e F, de 0 a 0.02. A Figura 6.12 mostra em escala de cores o valor RMS da tensão considerando a variação dos parâmetros do carregamento harmônico. Verifica-se através da região mais escura do gráfico que as maiores tensões surgem para frequências de excitação pouco antes da frequência natural do sistema (ω_n = 0.2287), Ω ≅ 0.2, até pouco depois de Ω ≅ 0.45, bem como nas maiores amplitudes deste carregamento, demonstrando a possibilidade de se utilizar uma faixa de excitação maior que a região de ressonância do sistema.

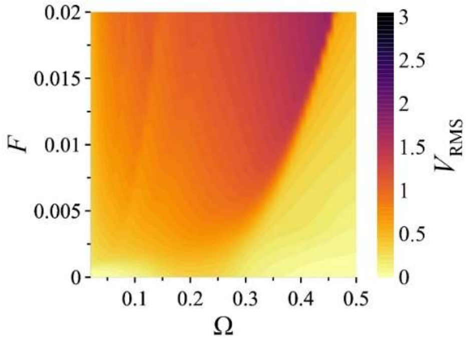
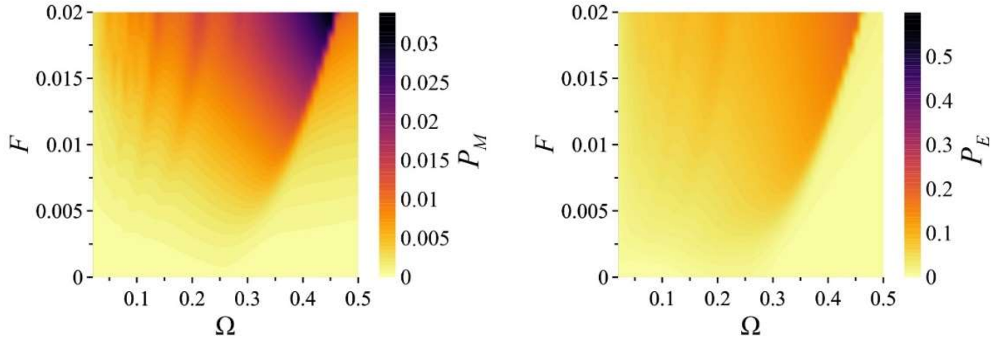


Figura 6.12 - Tensão RMS em função dos parâmetros de carga.

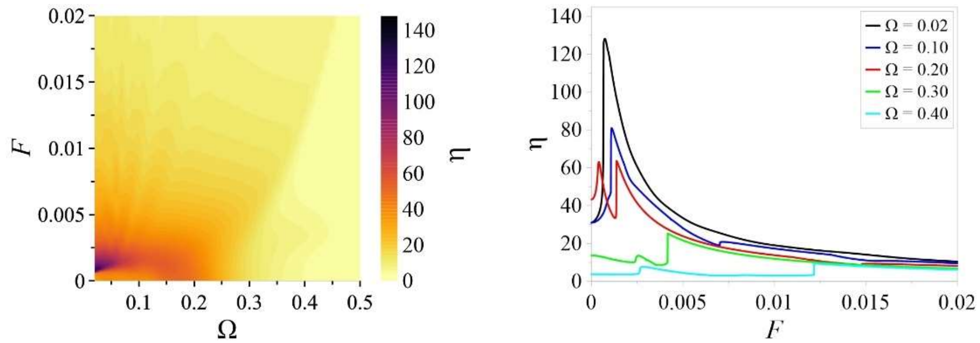
Na Figura 6.13 tem-se também, para os mesmos valores de variação do carregamento harmônico, as potências efetivas mecânica e elétrica do sistema, com comportamento parecidos, em consonância com as tensões obtidas.



(a) Potência mecânica (b) Potência elétrica

Figura 6.13 - Potências em função dos parâmetros de carga.

Para uma melhor avaliação do sistema, a Figura 6.14(a) mostra a eficiência do sistema a partir das potências apresentadas na Figura 6.13. Verifica-se uma eficiência maior na região de menores magnitudes da excitação, o que é salutar. Contudo se observa boa eficiência para uma larga faixa de frequências. Na Figura 6.14(b) são apresentadas as curvas de eficiência para valores selecionados de Ω.



(a) em função dos parâmetros de carga (b) para frequências selecionadas

Figura 6.14 - Eficiências do sistema de capitação.

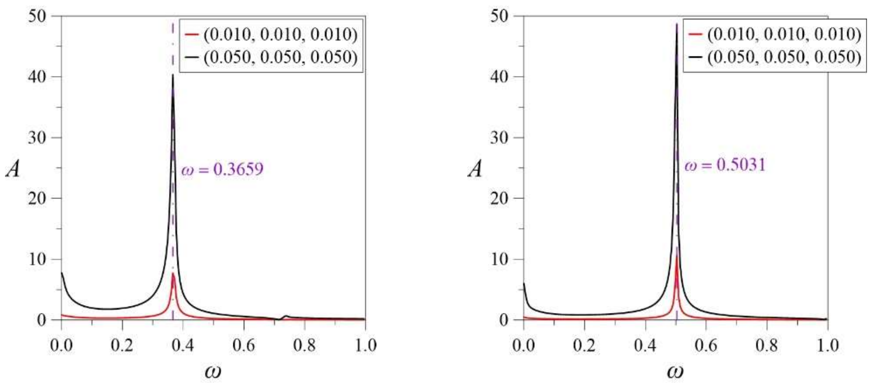
6.2.1.1. Influência do Abatimento

Para verificar a influência do abatimento da treliça no processo de colheita de energia, além do valor estudado anteriormente, verifica-se o comportamento do sistema para $\delta = 0.200$ e 0.300. A Tabela 5.1 apresenta os valores de carga crítica e frequências naturais para os abatimentos estudados do sistema sem acoplamento piezelétrico para 1GL:

Tabela 6.1 - Cargas limites e frequências naturais para valores determinados de abatimento.

δ	λ_{cr} ($\times 10^{-3}$)	ω_n^2	ω_n
0.100	± 0.381	0.0294	0.1715
0.200	± 2.961	0.1109	0.3331
0.300	± 9.530	0.2273	0.4767

A Figura 6.15 apresenta as frequências naturais considerando o acoplamento piezoelétrico para os abatimentos mostrados na Tabela 5.1, onde se verifica para o abatimento de δ = 0.200, que a frequência natural do sistema com acoplamento piezelétrico é ω_n = 0.3659 e para δ = 0.300, ω_n = 0.5031.



(a) δ = 0.200.　(b) δ = 0.300.

Figura 6.15 - Frequências naturais do sistema com acoplamento piezelétrico para valores diferentes de abatimento.

A Figura 6.16(a) apresenta o diagrama de bifurcação para δ = 0.200 e $\Omega = \omega_n$, com dois ramos de soluções a partir das configurações de equilíbrio estável, (0,0), em azul, e (2,0), em verde. Para os valores identificados através das retas vermelhas, obtêm-se os planos de fase e seções de Poincaré. Na Figura 6.16(b), para F = 1.48 × 10^{-3}, verifica-se duas soluções coexistentes de período 1, uma em cada vale potencial. Para F = 4.15 × 10^{-3}, Figura 6.16(c), essas soluções sofrem duplicação de período ainda com movimentos em cada vale potencial, acrescenta-se ainda que as soluções convergem para vales opostos às condições iniciais, indicando escape. Para F = 4.44 × 10^{-3}, Figura 6.16(d), após as sucessivas bifurcações, verificam-se soluções periódicas com maiores períodos, e posteriormente, Figura 6.16(e), uma oscilação de grande amplitude e período 1.

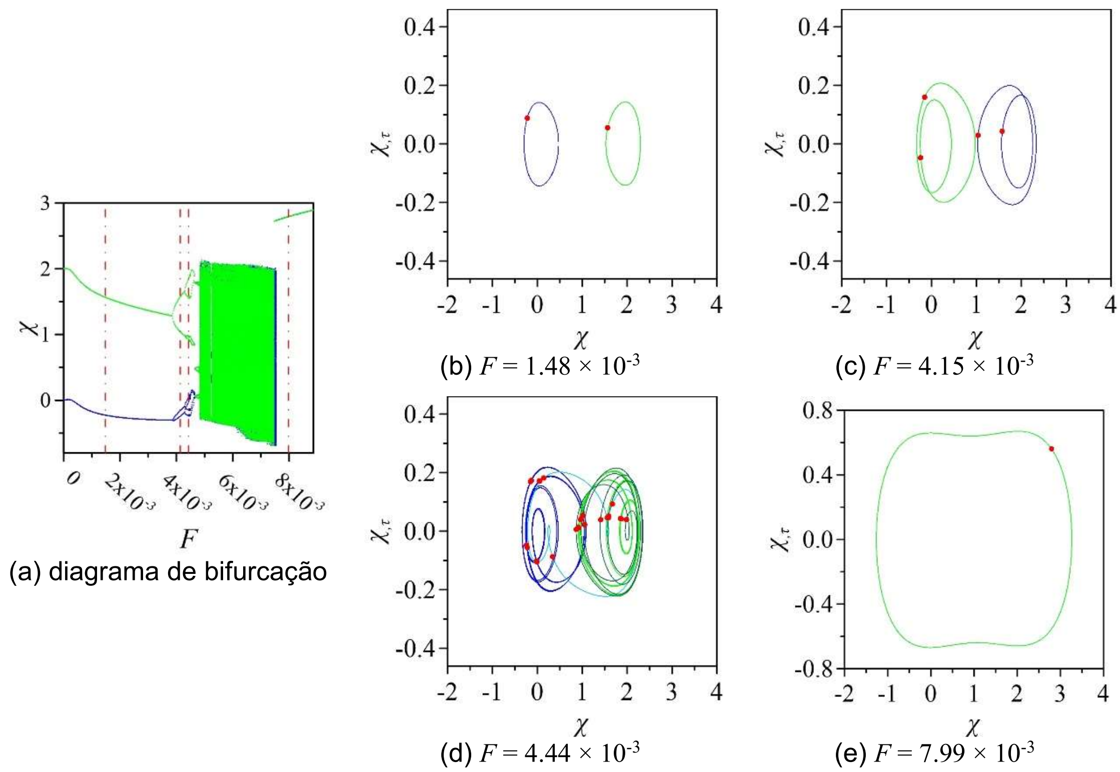


Figura 6.16 - Digrama de bifurcação com parâmetro de controle f e planos de fase e seções de Poincaré, para $\delta = 0.2$ e $\Omega = 0.3659$.

A Figura 6.17(a) apresenta o diagrama de bifurcação para $\delta = 0.300$ e $\Omega = \omega_n$, com comportamento similar ao observado na Figura 6.16(a). Na Figura 6.17(b) tem-se o plano de fase e as seções de Poincaré para $F = 2.86 \times 10^{-3}$, revelando duas soluções coexistentes de período 1. Para $F = 10.48 \times 10^{-3}$, Figura 6.17(c), tem-se as duplicações de período. A seguir, para $F = 14.3 \times 10^{-3}$, Figura 6.17(d), verifica-se uma região de movimento caótico e posteriormente, Figura 6.17(e), uma oscilação de grande amplitude e período 1.

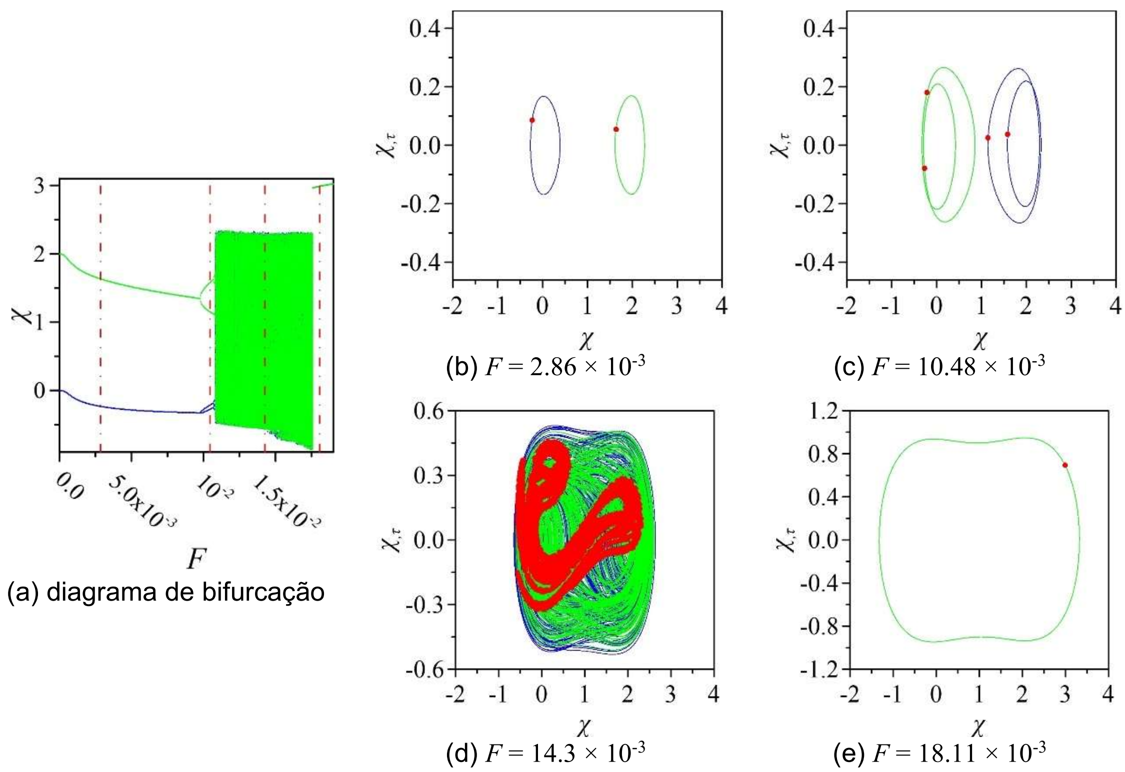
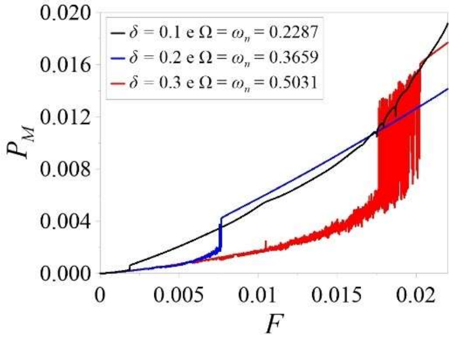
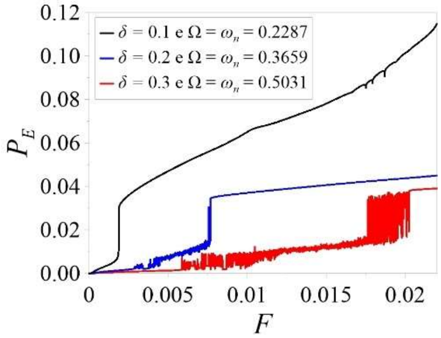


Figura 6.17 - Digrama de bifurcação com parâmetro de controle f e planos de fase e seções de Poincaré, para $\delta = 0.3$ e $\Omega = 0.5031$.

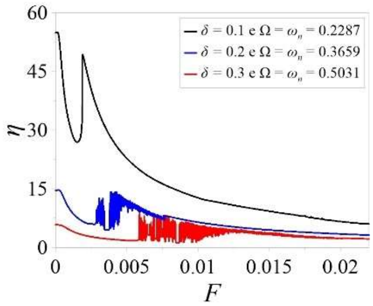
A Figura 6.18(a) compara a potência mecânica RMS em uma faixa de amplitudes do carregamento harmônico F para cada abatimento e $\Omega = \omega_n$. Percebe-se no início uma variação muito pequena entre as potências mecânicas geradas, com um pequeno salto para o maior abatimento, δ = 0.100, em preto, seguido por um salto próximo a $F = 7.5 \times 10^{-3}$, para δ = 0.200, em azul, ultrapassando a potência mecânica gerada para δ = 0.100. Observa-se a vantagem de usar estruturas mais abatidas. Na Figura 6.18(b) verifica-se um grande salto na potência elétrica para δ = 0.100, próximo a $F = 2 \times 10^{-3}$, sendo a potência elétrica maior para δ = 0.100 em toda região analisada, para os outros abatimentos esses saltos ocorrem para amplitudes maiores. Na Figura 6.18(c) mostra-se que a eficiência é maior para δ = 0.100, com dois picos já para amplitudes mais baixas.



(a) Potência mecânica



(b) Potência elétrica



(c) Eficiência

Figura 6.18 - Comparação entre as potências RMS variando a amplitude do carregamento F, considerando $\delta = 0.100$ e $\Omega = 0.2287$, em preto, $\delta = 0.2$ e $\Omega = 0.3659$, em azul, e $\delta = 0.3$ e $\Omega = 0.5031$, em vermelho.

6.2.2. Modelo de 2GL

Agora, considera-se o sistema com duas treliças de von Mises rigidamente conectadas, Figura 6.19, com acoplamento piezoelétrico nos dois nós centrais. Posteriormente, estuda-se também os casos em que o acoplamento ocorre em apenas uma das treliças.

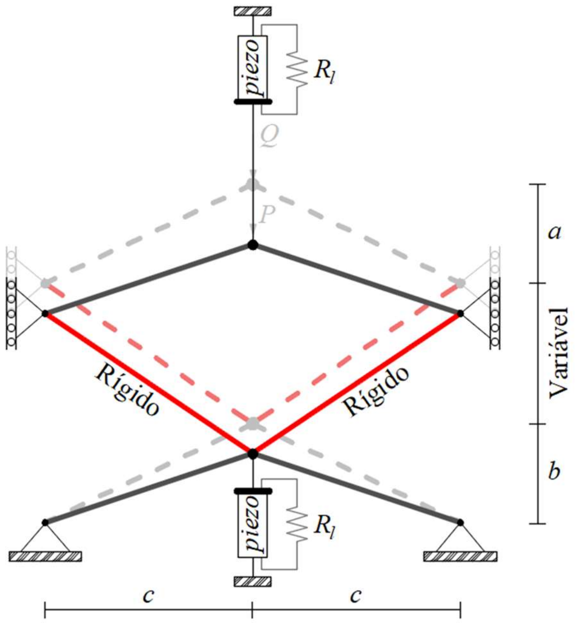


Figura 6.19 - Modelo de treliças para colheita de energia com 2 GL e acoplamento piezelétrico nas duas treliças.

A formulação do sistema sem acoplamento piezelétrico foi apresentada no capítulo 2. Com a inclusão das duas equações do circuito elétrico, se obtém um sistema com quatro equações. Nos casos em que o acoplamento piezoelétrico ocorre em uma das treliças apenas, esse sistema se reduz para três equações. Para o caso mais geral, tem-se:

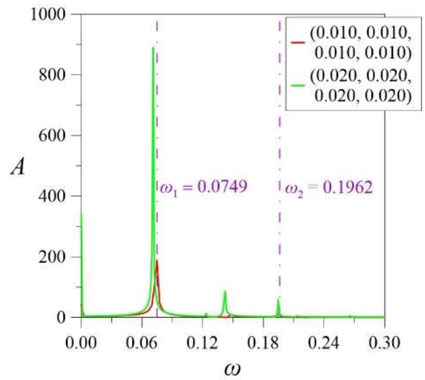
$$\begin{aligned}&\frac{2\delta_1\sqrt{\delta_1^2+1}}{3}\chi_{1,\tau\tau}+2\xi_1\delta_1\chi_{1,\tau}-\lambda-\beta_1V_1\\&+\frac{2\left(\sqrt{\left(\delta_1+\chi_2\delta_2-\chi_1\delta_1\right)^2+1}-\sqrt{\delta_1^2+1}\right)\left(-\delta_1-\chi_2\delta_2+\chi_1\delta_1\right)}{\sqrt{\delta_1^2+1}\sqrt{\left(\delta_1+\chi_2\delta_2-\chi_1\delta_1\right)^2+1}}=\bar{Q}\end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}&2\delta_2\left(\sqrt{\delta_1^2+1}+\frac{\sqrt{\delta_2^2+1}}{3}\right)\chi_{2,\tau\tau}+2\xi_2\delta_2\chi_{2,\tau}-\beta_2V_2\\&+\frac{2\left(\sqrt{\left(\delta_1+\chi_2\delta_2-\chi_1\delta_1\right)^2+1}-\sqrt{\delta_1^2+1}\right)\left(\delta_1+\chi_2\delta_2-\chi_1\delta_1\right)}{\sqrt{\delta_1^2+1}\sqrt{\left(\delta_1+\chi_2\delta_2-\chi_1\delta_1\right)^2+1}}\\&+\frac{2\alpha\left(\sqrt{\left(\delta_2-\chi_2\delta_2\right)^2+1}-\sqrt{\delta_2^2+1}\right)\left(-\delta_2+\chi_2\delta_2\right)}{\sqrt{\delta_2^2+1}\sqrt{\left(\delta_2-\chi_2\delta_2\right)^2+1}}=0\end{aligned} \tag{6.32}$$

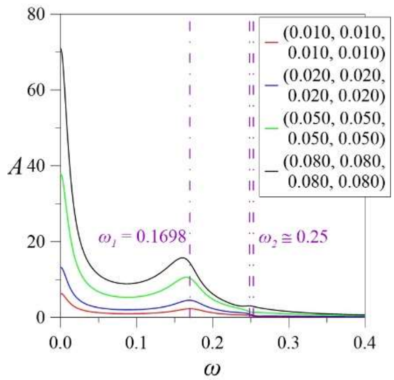
$$V_{1,\tau}+\gamma_1V_1+\varphi_1\chi_{1,\tau}=0 \tag{6.33}$$

$$V_{2,\tau}+\gamma_2V_2+\varphi_2\chi_{2,\tau}=0 \tag{6.34}$$

A Figura 6.20(a) mostra os valores das frequências naturais para o sistema sem acoplamento piezoelétrico e a Figura 6.20(b) apresenta a FFT para o modelo acoplado.



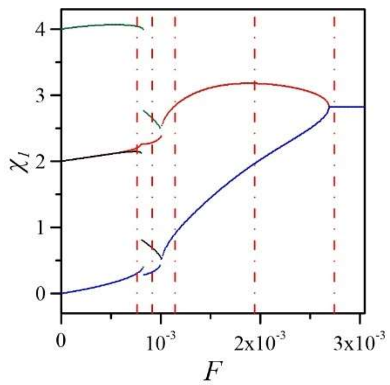
(a) Sem colheita de energia.



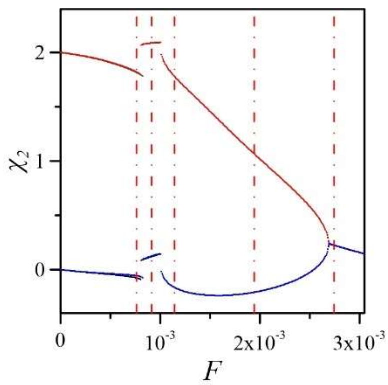
(b) Com colheita de energia.

Figura 6.20 - FFT do sistema antes e após o acoplamento, considerando $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

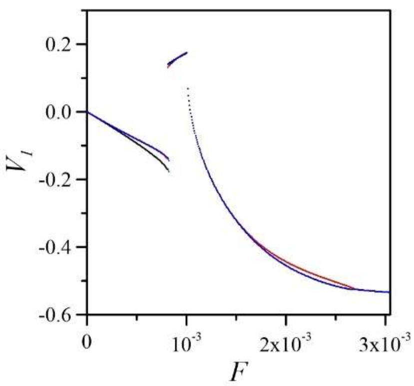
A Figura 6.21 apresenta os diagramas de bifurcação considerando como parâmetro de controle a amplitude do carregamento F para $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = \omega_{01}$. Nas Figura 6.21(a, b), verifica-se a existência de quatro ramos de soluções, que partem das condições iniciais (0,0), representado em azul, (2,0), em preto, (2,2), em vermelho, e (4,2), em verde. As retas vermelhas marcam cinco amplitudes F para os quais se obtém os planos de fase e seções de Poincaré, Figura 6.22 (F = 0.76, 0.91, 1.14, 1.94 e 2.74 × 10^{-3}). As Figura 6.21(d, e) apresentam os diagramas em função das tensões instantâneas. Em todos os casos observam-se soluções de período 1, inicialmente uma em cada vale potencial. A seguir, verifica-se a coalescência de soluções em vales potenciais vizinhos e, finalmente, uma solução que visita os quatro vales potenciais.



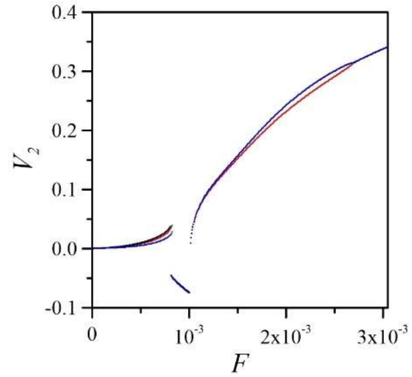
(a) $\chi_1 \times F$



(b) $\chi_2 \times F$

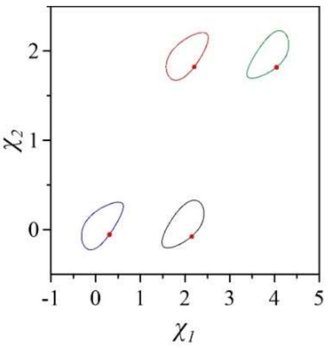


(c) $V_1 \times F$

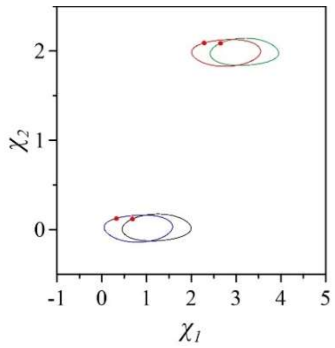


(d) $V_2 \times F$

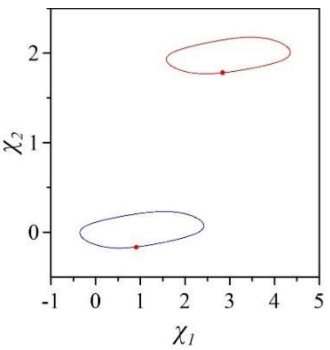
Figura 6.21 - Diagramas de bifurcação do sistema com acoplamento piezoelétrico nas duas treliças, considerando $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = 0.1698$.



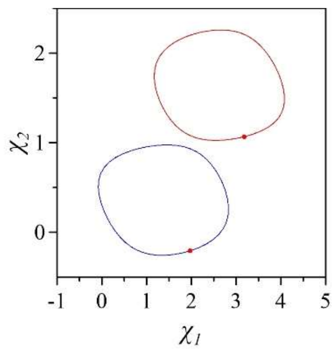
(a) $\chi_1 \times \chi_2$, $F = 0.76 \times 10^{-3}$



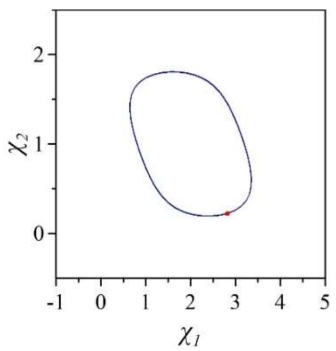
(b) $\chi_1 \times \chi_2$, $F = 0.91 \times 10^{-3}$



(c) $\chi_1 \times \chi_2$, $F = 1.14 \times 10^{-3}$



(d) $\chi_1 \times \chi_2$, $F = 1.94 \times 10^{-3}$

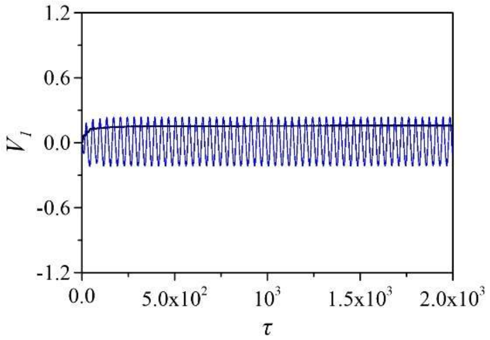


(e) $\chi_1 \times \chi_2$, $F = 2.74 \times 10^{-3}$

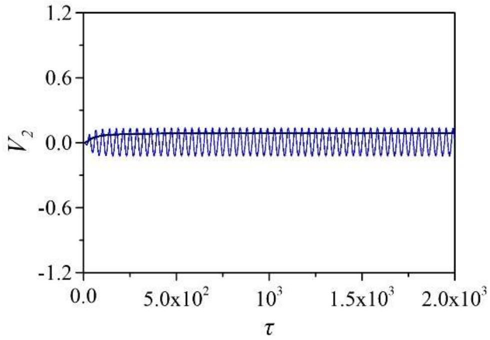
Figura 6.22 - Planos de fase e seções de Poincaré para $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = 0.1698$.

A Figura 6.23 apresenta a evolução das tensões a partir dos diferentes movimentos detectados na Figura 6.22, considerando apenas a condição inicial

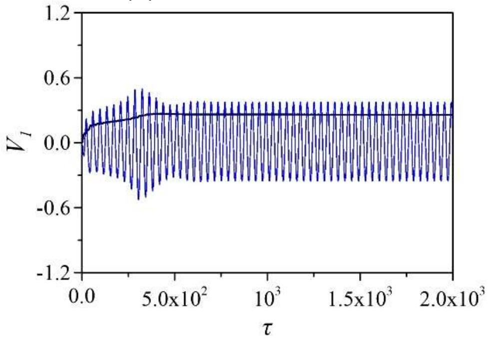
(0,0). É possível destacar uma relação direta entre as amplitudes do movimento e as tensões de saída do sistema, com destaque para as tensões geradas a partir do movimento da treliça superior, que apresenta maiores amplitudes, logo maiores tensões RMS.



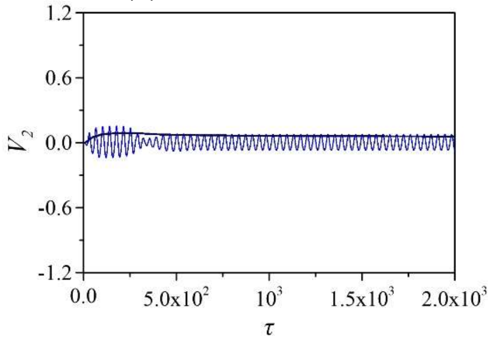
(a) V_1, $F = 0.76 \times 10^{-3}$



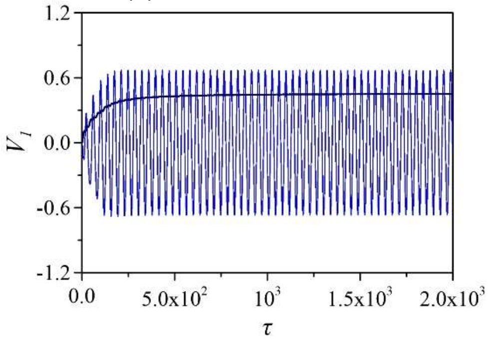
(b) V_2, $F = 0.76 \times 10^{-3}$



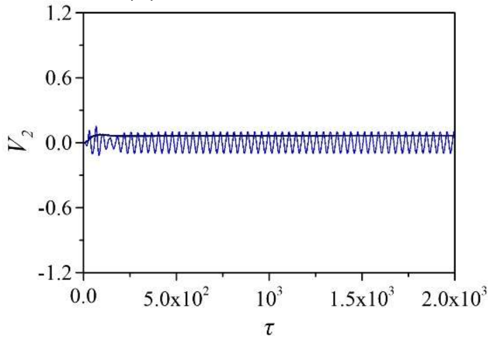
(c) V_1, $F = 0.91 \times 10^{-3}$



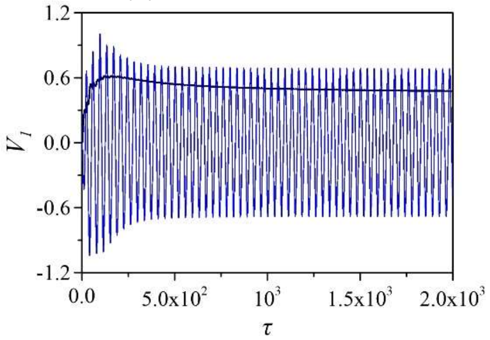
(d) V_2, $F = 0.91 \times 10^{-3}$



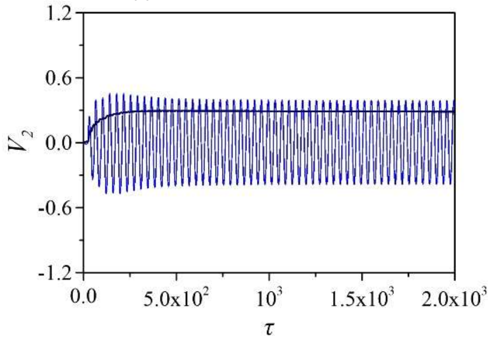
(e) V_1, $F = 1.14 \times 10^{-3}$



(f) V_2, $F = 1.14 \times 10^{-3}$



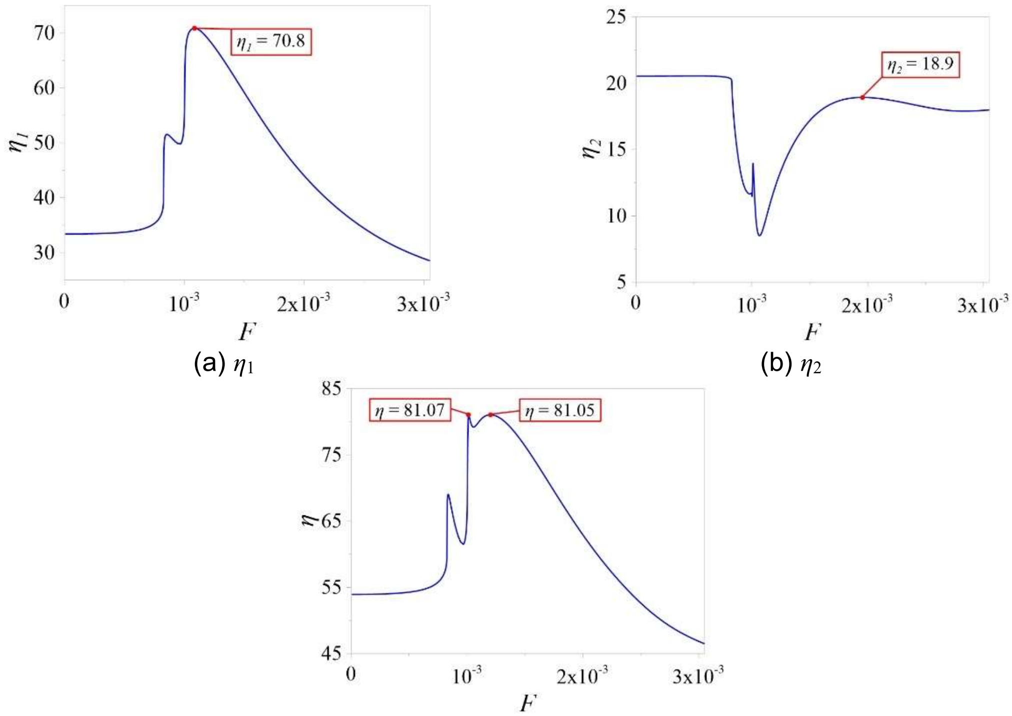
(g) V_1, $F = 2.74 \times 10^{-3}$



(h) V_2, $F = 2.74 \times 10^{-3}$

Figura 6.23 - Tensão efetiva no domínio do tempo para diferentes amplitudes F, considerando $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = 0.1698$.

A Figura 6.24 apresenta a eficiência do sistema para a mesma faixa de F considerada na Figura 6.21. Observando os resultados, percebe-se que o piezoelétrico acoplado ao nó central da treliça superior é mais eficiente para todas as amplitudes, destacando-se uma eficiência de η_1 = 70.8 para F = 1.09 × 10^{-3}, Figura 6.24(a). Para o piezoelétrico acoplado ao nó central da treliça inferior tem-se inicialmente um patamar para valores baixos de F com η_2 = 20.5. A seguir a eficiência decai até F = 1.09 × 10^{-3}, quando η_1 atinge um máximo, voltando a crescer até atingir um pico em F = 1.95 × 10^{-3} igual a η_2 = 18.9, Figura 6.24(b). Ressalta-se que, apesar da Figura 6.24(b) mostrar uma região com boa eficiência para valores pequenos de F, estas excitações estão relacionadas a movimentos de menor amplitude, o que, consequentemente, produzirá menos energia. A Figura 6.24(c) apresenta um somatório das duas eficiências, refletindo de maneira mais clara a maior contribuição da treliça superior, tendo em vista a semelhança entre as curvas nas Figura 6.24(a,c). Destaca-se a eficiência de η ≅ 81 em dois picos nas proximidades do pico detectado na Figura 6.24(a).



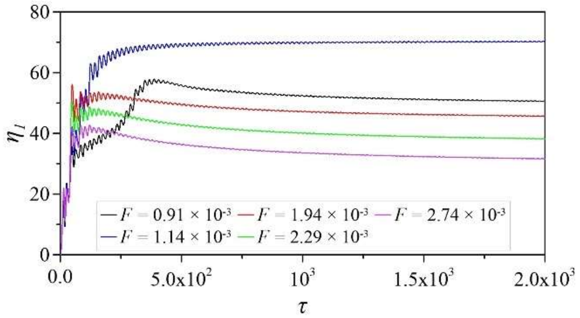
(a) η_1 (b) η_2

(c) somatório η

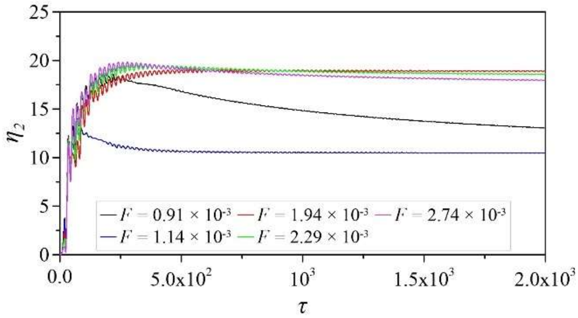
Figura 6.24 - Eficiências, considerando $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = 0.1698$.

A Figura 6.25 apresenta a variação da eficiência no domínio do tempo considerando δ_1 = δ_2 = 0.100, α = 1.0 e Ω = 0.1698. Na Figura 6.25(a), a melhor eficiência é obtida para F = 1.14 × 10^{-3}, na região mais eficiente observada na Figura

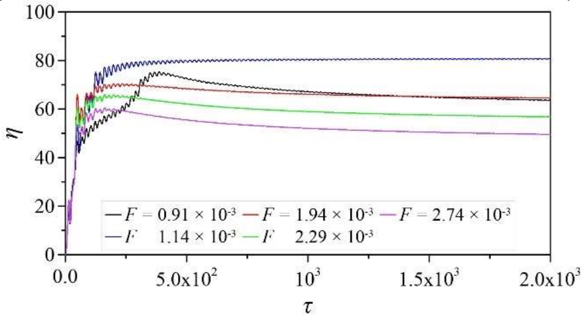
6.24(a) para a treliça superior. Já para treliça inferior, Figura 6.25(b), verifica-se eficiências parecidas para $F = 1.94$, 2.29 e 2.74×10^{-3}, em consonância com a região com F entre 1.9 e 3.05×10^{-3} observada na Figura 6.24(b). Na Figura 6.25(c) apresenta-se o somatório das eficiências associadas a cada treliça, demonstrando mais uma vez, um comportamento similar ao da treliça superior, o que demonstra uma maior participação dos movimentos de χ_1 na geração de energia.



(a) η_1



(b) η_2



(c) somatório η

Figura 6.25 - Eficiências ao longo do tempo.

Ao se ampliar a análise para diferentes frequências de excitação, e, portanto, verificando, a Figura 6.26 mostra a variação do somatório das tensões RMS nas duas treliças no plano Ω x F, onde as zonas mais escuras da superfície revelam uma larga faixa de valores de Ω e F onde se tem boa eficiência, principalmente entre $\Omega = 0.1$ e $\Omega = 0.45$.

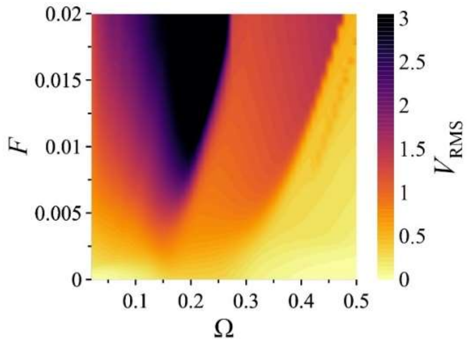
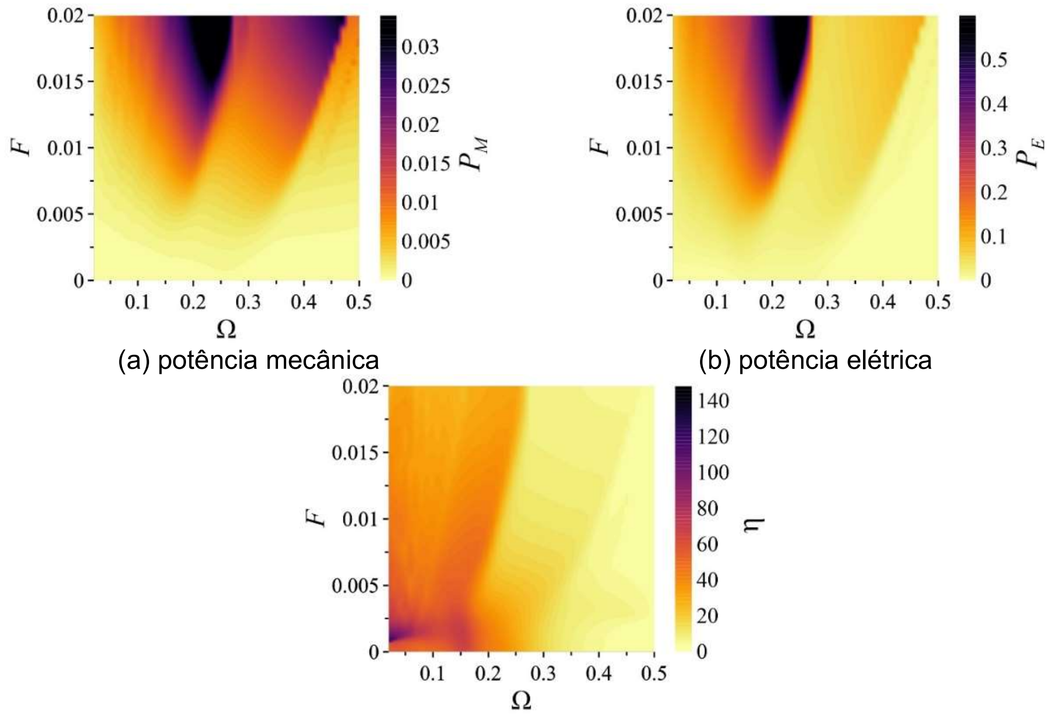


Figura 6.26 - Somatório das tensões RMS em função dos parâmetros de carga para acoplamento piezoelétrico nas duas treliças.

A Figura 6.27 mostra o somatório das potências efetivas mecânica e elétrica e da eficiência do sistema de 2GL com acoplamento piezoelétrico nas duas treliças, onde nota-se a coerência entre os diversos resultados. Verifica-se, Figura 6.27(a,b), a correlação entre a potência mecânica e a tensão RMS em virtude da relação direta entre a amplitude do movimento e a geração de energia elétrica. A Figura 6.27(c) mostra uma configuração da superfície de eficiência similar à observada no modelo de 1GL, ainda que o modelo com 2GL apresente tonalidades mais escuras, demonstrando uma maior eficiência do modelo de 2GL.



(a) potência mecânica (b) potência elétrica

(c) eficiência

Figura 6.27 - Potências e eficiência em função dos parâmetros de carga para acoplamento piezoelétrico nas duas treliças.

6.2.2.1. Colheita Apenas na Treliça Superior

Analisa-se agora o modelo de 2GL com acoplamento piezoelétrico apenas na treliça superior. A Figura 6.28 apresenta a FFT para o sistema, onde destacam-se os valores das frequências naturais de $\omega_1 = 0.0974$ e $\omega_2 = 0.2422$.

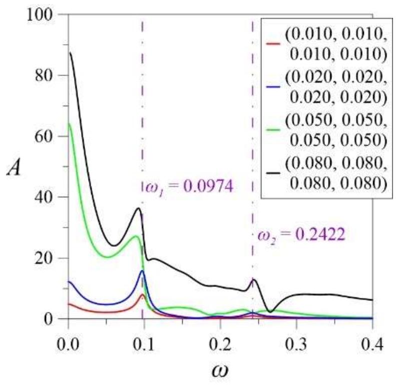
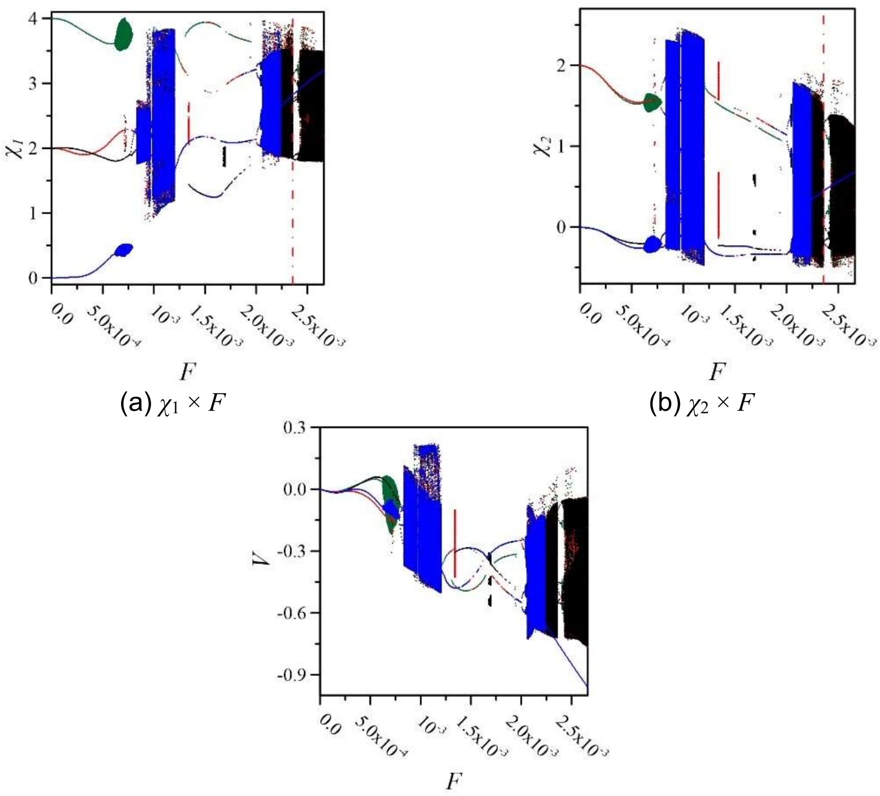


Figura 6.28 - Frequências naturais do sistema com 2GL com acoplamento piezelétrico apenas na treliça superior, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$.

A Figura 6.29 apresenta os diagramas de bifurcação considerando a frequência de excitação como parâmetro de controle e os parâmetros $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = \omega_{01}$. A representação é a mesma adotada no caso anterior, onde os quatro ramos de soluções partem das configurações de equilíbrio estável. Neste caso, os diagramas intercalam regiões de movimentos periódicos com movimentos caóticos. Considerando apenas o ramo de solução para a condição inicial (0,0), percebe-se uma larga faixa de movimentos periódicos de grandes amplitudes onde se obtém maior geração de energia.



(a) $\chi_1 \times F$

(b) $\chi_2 \times F$

(c) $V \times F$

Figura 6.29 - Diagramas de bifurcação do sistema com acoplamento piezoelétrico na treliça superior, considerando $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = 0.0974$.

A Figura 6.30 mostra a eficiência do sistema variando-se F, para a mesma faixa de amplitudes observadas na Figura 6.29. Verifica-se que para $F > 7.5 \times 10^{-4}$, após ocorrer o escape e a coalescência das duas soluções coexistentes em uma solução de grande amplitude um aumento significativo de η, principalmente na região de vibrações caóticas. A seguir η decresce na janela de soluções periódicas e volta a crescer a partir de $F = 2.25 \times 10^{-3}$ ($\eta = 60.1$) onde se observa novamente movimentos caóticos para uma larga faixa de F.

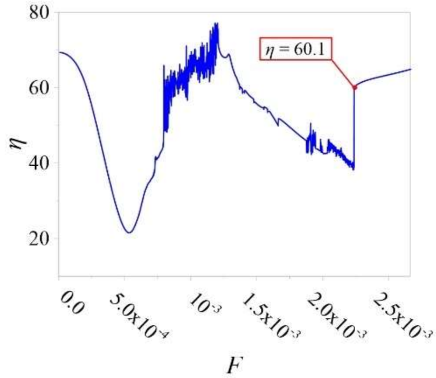
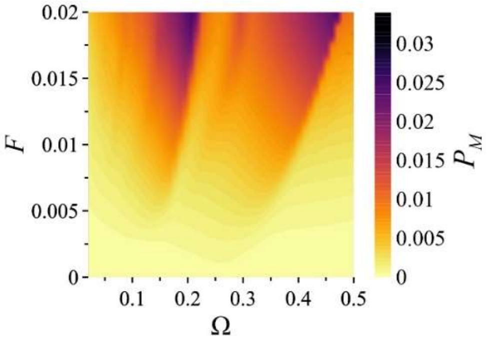
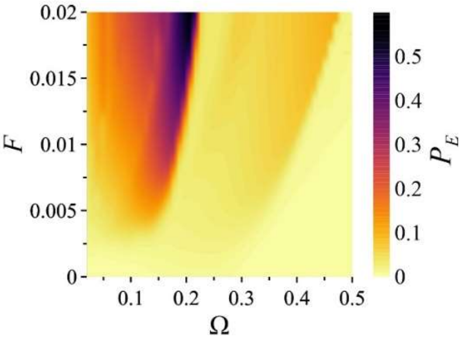


Figura 6.30 - Eficiência variando a amplitude do carregamento F, para acoplamento piezoelétrico na treliça superior, para $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = 0.0974$.

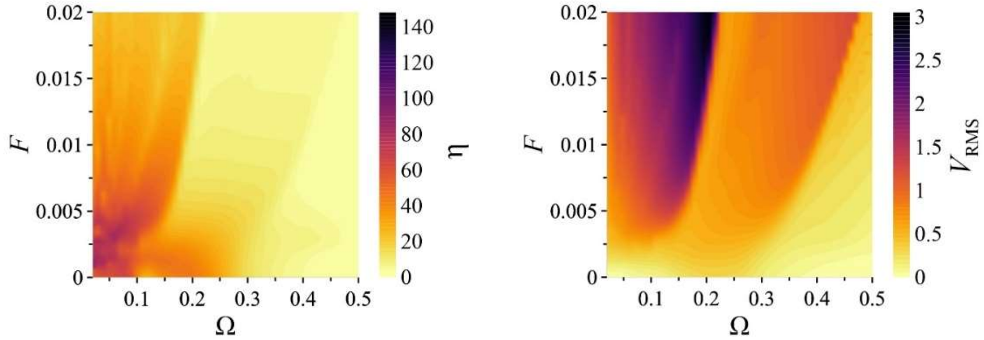
A Figura 6.31 mostra a variação das potências efetivas, eficiência e tensão RMS em função dos parâmetros de carga para acoplamento piezoelétrico na treliça superior. O comportamento é similar ao observado anteriormente, destacando-se um ganho quando comparado com o sistema de 1GL, embora o acoplamento piezoelétrico nas duas treliças ainda seja obviamente mais vantajoso.



(a) potência mecânica



(b) potência elétrica



(c) eficiência (d) tensão

Figura 6.31 - Potências, eficiência e tensão RMS em função dos parâmetros de carga para acoplamento piezoelétrico na treliça superior.

6.2.2.2. Colheita Apenas na Treliça Inferior

A Figura 6.32 apresenta a FFT para o sistema com acoplamento piezoelétrico apenas na treliça inferior, onde destacam-se os valores de frequências naturais de $\omega_1 = 0.1373$ e $\omega_2 = 0.2197$.

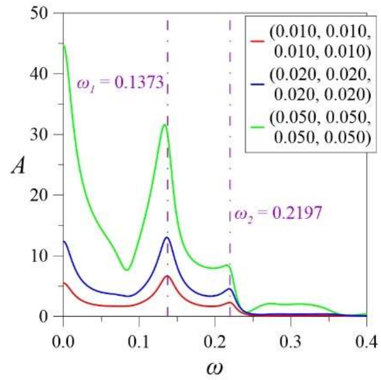
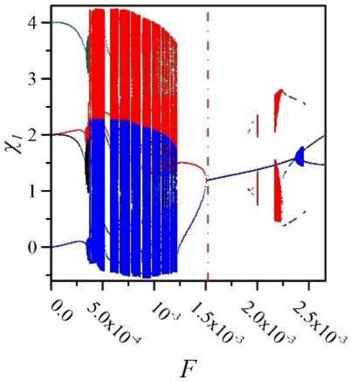
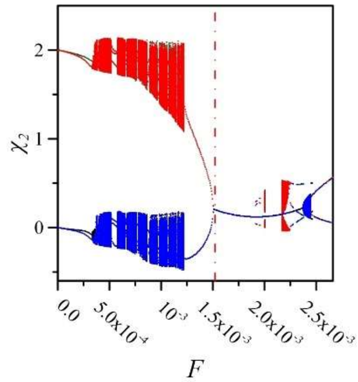


Figura 6.32 - FFT da resposta do sistema com 2GL com acoplamento piezelétrico apenas na treliça inferior, $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, considerando valores crescentes das condições iniciais (ver valores associados a cada cor).

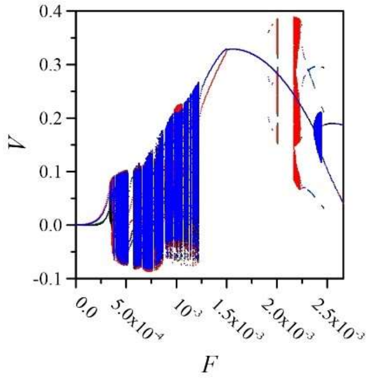
A Figura 6.33 mostra os diagramas de bifurcação considerando a magnitude da excitação como parâmetro de controle e os parâmetros $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = \omega_{01}$. Observam-se os quatro ramos de soluções que partem das quatro configurações de equilíbrio estável.



(a) $\chi_1 \times F$



(b) $\chi_2 \times F$



(c) $V \times F$

Figura 6.33 - Diagramas de bifurcação do sistema com acoplamento piezoelétrico na treliça inferior, considerando $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = 0.1373$.

Ao analisar a eficiência do sistema na mesma faixa de F da Figura 6.33, a Figura 6.34 destaca dois pontos, $F = 1.52 \times 10^{-3}$, com eficiência de $\eta = 38.2$, onde ocorre a coalescência dos diagramas de bifurcação e início das soluções de grande amplitude e $F = 1.94 \times 10^{-3}$, com eficiência $\eta = 39.3$, onde se registra de fato a maior eficiência na região de oscilações de grande amplitude.

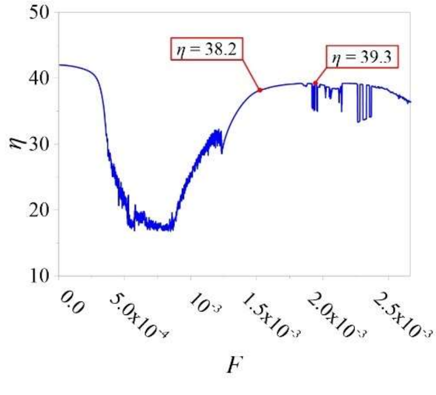
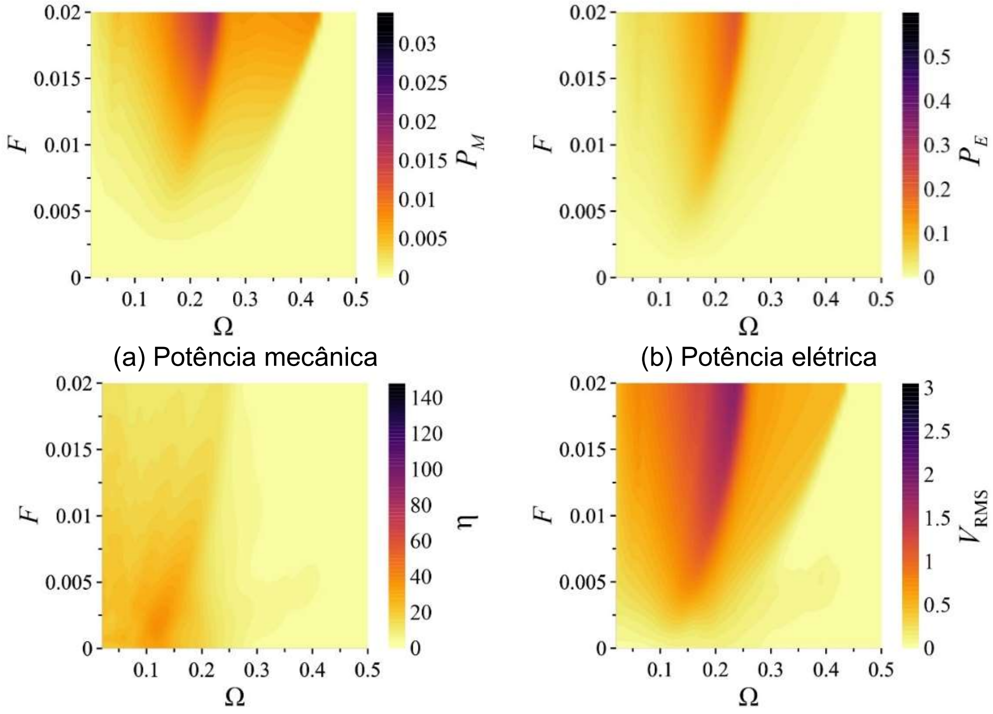


Figura 6.34 - Eficiência variando a amplitude do carregamento F, para $\delta_1 = \delta_2 = 0.100$, $\alpha = 1.0$ e $\Omega = 0.1373$.

Finalmente, a Figura 6.35 apresenta a variação das potências efetivas, eficiência e tensão RMS em função dos parâmetros de carga para acoplamento piezoelétrico na treliça inferior. Neste caso, notam-se regiões mais claras, evidenciando a menor eficiência do sistema quando associado ao nó da treliça inferior.



(a) Potência mecânica (b) Potência elétrica

(c) Eficiência (d) Tensão

Figura 6.35 - Potências, eficiência e tensão RMS em função dos parâmetros de carga para acoplamento piezoelétrico na treliça inferior.

6.3. Discussão dos Resultados

Observando os resultados apresentados ao longo do capítulo, percebe-se que, embora inicialmente se considere a região de ressonância do sistema como melhor zona para se coletar energia, manter o sistema oscilando nessa faixa de frequência pode ser difícil para aplicações onde a fonte de excitação vem do ambiente, sendo, portanto, variável. Uma possibilidade para aumentar a eficiência do processo de colheita de energia é através de sistemas utilizando arranjos com diferentes frequências de ressonância, ampliando a banda de frequência de ressonância e aumentando o número de unidades de colheita.

Deste modo, verifica-se um ganho na eficiência do sistema quando se utilizam duas treliças acopladas, produzindo um sistema multiestável com 2 GL, principalmente quando ocorrem as maiores amplitudes de vibração associadas ao nó da treliça superior.

Para se comparar as eficiências dos sistemas com 1 e 2GL, através do somatório das eficiências, a Figura 6.36 apresenta a subtração entre as eficiências em cada ponto, considerando 2GL menos 1GL. Apenas em uma pequena região próximo ao canto inferior esquerdo o sistema de 1GL é mais eficiente atingindo o máximo valor negativo de -61,52 para $\Omega = 0.02$ e $F = 6.71 \times 10^{-4}$. Contudo pequenas variações de carregamento levam a uma rápida perda de eficiência. O sistema com 2GL é menos sensível a variações no carregamento e atinge uma diferença de 36,09 pra $\Omega = 0.21$ e $F = 9.01\times 10^{-4}$. Apesar de, ao se comparar esses valores absolutos máximos o sistema com 1GL parecer mais eficiente, 73% da área na Figura 6.36 corresponde a pontos onde o sistema com 2GL se mostra mais eficiente. Este é um estudo exploratório, devendo no futuro ser pesquisada a influência das variações nos parâmetros dos sistemas biestáveis acoplados na colheita de energia, otimizando a colheita nas duas treliças simultaneamente.

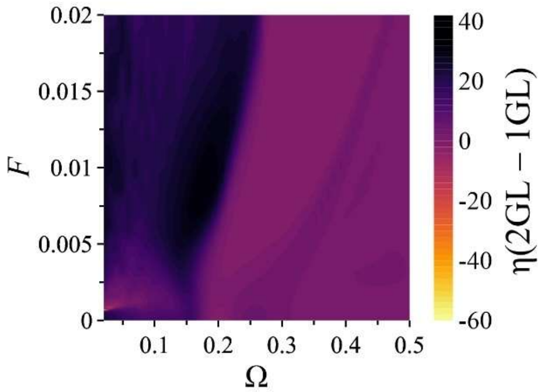


Figura 6.36 - Diferença entre as eficiências dos sistemas com 1 e 2GL com acoplamento piezoelétrico nas duas treliças.

7
Conclusões e Sugestões

Neste capítulo são apresentadas as conclusões a partir das análises dos sistemas estruturais estudados e sua aplicação no processo de colheita de energia. Adicionalmente são apresentadas algumas sugestões para realização de trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

7.1.
Conclusões

Tendo em vista o número crescente de aplicações de sistemas estruturais multiestáveis e, sobretudo, a lacuna de informações a respeito de seus comportamentos estático e dinâmico não linear, esta tese apresentou uma análise detalhada de uma classe de estruturas multiestáveis, formadas por duas treliças de von Mises ou por dois arcos biestáveis, com acoplamento rígido ou flexível, através de ferramentas da estabilidade elástica e da dinâmica não linear. Um complexo comportamento estrutural é observado em todos os casos. Para ilustrar a aplicabilidade destes sistemas, estudou-se o processo de colheita de energia, conhecido como "*energy harvesting*", através do acoplamento de elementos piezoelétricos ao modelo estrutural formado por treliças de von Mises conectadas rigidamente.

A partir das estruturas analisadas, verificou-se um comportamento análogo entre os sistemas estruturais formados por treliças e por arcos, mostrando um conjunto de comportamentos típicos de elementos biestáveis com acoplamento rígido ou flexível. Considerando as estruturas conectadas através de elementos rígidos, verifica-se que o caminho fundamental de equilíbrio apresenta duas bifurcações por ponto limite que coincidem com uma bifurcação simétrica instável. Isto resulta em três caminhos de equilíbrio. Adicionalmente ocorrem duas bifurcações por ponto limite ao longo dos caminhos bifurcados, resultando em seis pontos de bifurcação com a mesma carga de bifurcação. Assim, entre os pontos limite tem-se quatro soluções estáveis coexistentes e cinco instáveis, um máximo e quatro selas. Esse número aumenta exponencialmente com o número de elementos conectados em série. A influência da carga estática é demonstrada pelas mudanças significativas no número de vales potenciais, curvas de energia equipotencial e caminhos de equilíbrio. Isto é de grande importância em aplicações que dependem da energia de deformação armazenada e liberada, além de sistemas onde são desejadas mudanças de forma e diferentes configurações de equilíbrio. As simetrias inerentes à sequência de elementos biestáveis, se refletem nas simetrias dos múltiplos vales potenciais que têm uma influência considerável na resposta não linear da estrutura sob vibração forçada. A influência de pequenas imperfeições geométricas e da rigidez entre os elementos conectados também é discutida. Estas imperfeições destroem as bifurcações múltiplas e geram uma quebra de simetria, mas não mudam o número de soluções estáveis coexistentes. O sistema sob carga harmônica apresenta quatro sequências de bifurcações coexistente, iniciando cada uma delas em uma configuração de equilíbrio estável, o que leva a um número crescente de atratores coexistentes. À medida que a amplitude da excitação aumenta, estas soluções independentes podem fundir-se devido ao escape dos vales potenciais, resultando em diferentes movimentos entre vales. Para níveis de carga relativamente altos, amplas regiões de movimentos caóticos entre vales são identificadas, intersectadas por janelas de respostas periódicas. A dinâmica global do sistema é analisada através das evoluções das bacias de atração, o que permite avaliar a robustez dos atratores e a segurança da estrutura sob cargas dinâmicas. As bacias mostram uma estrutura complexa com muitas regiões desconectadas, que se alternam repetidamente até que finalmente uma estrutura fractal é observada para grandes perturbações ou para elevadas magnitudes da excitação, o que dificulta a previsibilidade da resposta na presença de ruídos ou incertezas.

Os dois sistemas conectados por um elemento flexível têm o comportamento intimamente ligado à rigidez da ligação. Para ligações com pequena ou grande rigidez, o caminho é semelhante ao de um único elemento biestável com dois pontos limite, que delimitam o trecho instável que separa os dois caminhos estáveis, tendo-se dois vales potenciais e duas soluções estáveis coexistentes. Para valores de rigidez entre estes dois extremos, o trecho instável apresenta uma contínua deformação o que leva ao surgimento de novos pontos limites de carga e deslocamento, novos trechos estáveis e, consequentemente, novos vales potenciais. Neste caso os novos vales apresentam menor profundidade e cargas de escape.

Assim a estrutura descarregada pode apresentar de três a nove posições de equilíbrio, sendo que as configurações estáveis variam entre duas e quatro, a depender da rigidez da mola que conecta os elementos biestáveis. O efeito da carga estática também é analisado através de curvas de energia equipotencial e bacias de atração, ilustrando a variação do tamanho e da profundidade nos vales potenciais à medida que a carga compressiva aumenta. Além disso, através da evolução da energia potencial e das bacias de atração, o aumento da sensibilidade da configuração de equilíbrio pré-flambagem a perturbações externas é demonstrado pela perda de sua integridade dinâmica, com o plano de fase dominado pela bacia da posição de equilíbrio pós-flambagem onde as duas unidades ficam em posição invertida. A análise em vibração forçada considerando uma carga harmônica demonstra, através do uso de diagramas de bifurcação e bacias de atração, a complexidade da resposta dinâmica, com vários atratores coexistentes, pontos de bifurcação, saltos entre atratores coexistentes, bifurcações com duplicação de período e caos.

Mostra-se que o sistema multiestável acoplado a elementos piezoelétricos pode ser usado com eficiência na colheita de energia. Os resultados referentes aos modelos de 1 e 2 GL revelam a possibilidade de se obter sistemas com maior eficiência na colheita de energia, a partir do sequenciamento de unidades biestáveis, uma vez que se obtêm maiores amplitudes de movimentos em maior faixa de frequências.

Os resultados mostram que o comportamento estático e dinâmico não linear de sistemas multiestáveis é um passo essencial para aplicações futuras. Essa análise detalhada de sistemas multiestáveis não foi encontrada em nenhuma outra fonte e pode auxiliar no desenvolvimento de novas aplicações de engenharia onde a multiestabilidade é desejada, além disso, podem ser utilizados como uma referência (*benchmark*) em outros estudos.

7.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Em virtude da complexidade da resposta estática e dinâmica de sistemas multiestáveis e em virtude das poucas soluções não lineares disponíveis na literatura, são sugeridos os seguintes temas para trabalhos futuros:

- Análise não linear da estabilidade estática e dinâmica de sistemas formados por uma sequência de mais de duas estruturas biestáveis usando ferramentas numéricas apropriadas para a análise de sistemas com vários graus de liberdade como os softwares AUTO, PyDSTool, MatCont ou Continuation Core (COCO);
- Construção de modelos de estruturas multiestáveis e análise experimental da instabilidade dinâmica destes modelos;
- Analisar a aplicação destes modelos no controle de vibrações e absorção de energia;
- Estudar o efeito de ruídos e incertezas na dinâmica global e suas medidas de integridade;
- Estudar os modos normais não lineares destes sistemas, gerando modelos de ordem reduzida que podem ser usados para aprofundar a análise das complexas oscilações não lineares destes sistemas;
- Pesquisar a influência das variações nos parâmetros dos sistemas biestáveis acoplados na colheita de energia, otimizando a coleta nas duas treliças simultaneamente;
- Estudar a colheita de energia considerando a aleatoriedade dos parâmetros do sistema;
- Pesquisar a colheita de energia nos sistemas multiestáveis considerando um acoplamento piezoelétrico não linear.

8
Referências Bibliográficas

ALLGOWER, E. L.; KURT, G. **Introduction to Numerical Continuation Methods**. SIAM Classics in Applied Mathematics 45. 2003.

ARRIETA, A. F.; NEILD, S. A.; WAGG, D. J. On the cross-well dynamics of a bi-stable composite plate. **Journal of Sound and Vibration**, v. 330, n. 14, p. 3424-3441, 2011.

BARNARINO, S.; GANDHI, F. S. Shape memory alloy actuated morphing cellular frame using bi-stable von-Mises trusses with variable length links. In: **22nd AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference**, Maryland, United States, 2014, p. 1417.

BAŽANT, Z. P., CEDOLIN, L. **Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories**. World Scientific, 2010.

BENEDETTI, K. C.; GONÇALVES, P. B.; LENCI, S.; REGA, G. (2023). Global analysis of stochastic and parametric uncertainty in nonlinear dynamical systems: adaptative phase-space discretization strategy, with application to Helmholtz oscillator. **Nonlinear Dynamics**, v. 111, p. 15675-15703, 2023.

BENEDETTI, K. C. B.; GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A. Nonlinear oscillations and bifurcations of a multistable truss and dynamic integrity assessment via a Monte Carlo approach. **Meccanica**, v. 55, p. 2623–2657, 2020.

BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O.; **Buckling of Bars, Plates and Shells.** McGraw-Hill, New York, 1975.

CAO, Y.; DERAKHSHNI, M.; FANG, Y.; HUANG, G.; CAO, C. Bistable Structures for Advanced Functional Systems. **Advanced Functional Materials**, v. 31, n. 45, p. 2106231, 2021.

CASALS-TERRE, J.; SHKEL, A. Dynamic analysis of a snap-action micromechanism. In: **SENSORS, 2004 IEEE**. Vienna, Austria, 2004, v. 3, p. 1245-1248.

CHAMPNEYS, A. R.; DODWELL, T. J.; GROH, R. M. J.; HUNT, G. W.; NEVILLE, R. M.; PIRRERA, A.; SAKHAEI, A. H.; SCHENK, M.; WADEE, M. A. Happy catastrophe: Recent progress in analysis and exploitation of elastic instability. **Frontiers in Applied Mathematics and Statistics**, v. 5, p. 34, 2019.

CHE, K.; YUAN, C.; WU, J.; JERRY QI, H.; MEAUD, J. Three-dimensional-printed multistable mechanical metamaterials with a deterministic deformation sequence. **Journal of Applied Mechanics**, v. 84, n. 1, p. 011004, 2017.

CHEN, T.; MUELLER, J.; SHEA, K. Integrated design and simulation of tunable, multi-state structures fabricated monolithically with multi-material 3D printing. **Scientific Reports**, v. 7, n. 1, p. 45671, 2017.

CHERSTON, J.; STROHMEIER, P.; PARADISO, J. A. Grappler: Array of bistable elements for pinching net-like infrastructure to low gravity bodies. In: **AIAA Scitech 2019 Forum**. San Diego, California, 2019, p. 0871.

CHIACCHIARI, S.; ROMEO, F.; MCFARLAND, D. M.; BERGMAN, L. A.; VAKAKIS, A. F. Vibration energy harvesting from impulsive excitations via a bistable nonlinear attachment. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 94, p. 84-97, 2017.

CUI, Y.; SANTER, M. Highly multistable composite surfaces. **Composite Structures**, v. 124, p. 44-54, 2015.

DANSO, L. A.; KARPOV, E. G. Cusp singularity-based bistability criterion for geometrically nonlinear structures. **Extreme Mechanics Letters**, v. 13, p. 135-140, 2017.

DE PAULA, A. S.; INMAN, D. J.; SAVI, M. A. Energy harvesting in a nonlinear piezomagnetoelastic beam subjected to random excitation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 54-55, p. 405-416, 2015.

DEL PRADO, Z.J.G.N. **Acoplamento e Interação Modal na Instabilidade Dinâmica de Cascas Cilíndricas**. Rio de Janeiro, 2001. 193 p. Tese de Doutorado – PUC-Rio.

DEVARAJAN, K.; SANTHOSH, B. Performance enhancement of snap-through vibration energy harvester with displacement amplifier. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 253, p. 108391, 2023.

EMAM, S. A.; NAYFEH, A. H. On the nonlinear dynamics of a buckled beam subjected to a primary-resonance excitation. **Nonlinear Dynamics**, v. 35, p. 1–17, 2004.

ERTURK, A.; HOFFMANN, J.; INMAN, D. J. A piezomagnetoelastic structure for broadband vibration energy harvesting. **Applied Physics Letters**, v. 94, n. 25, p. 254102, 2009.

ERTURK A.; INMAN D. J. **Piezoelectric energy harvesting**. John Wiley & Sons, 2011.

FANG, S.; FU, X.; LIAO, W. Asymmetric plucking bistable energy harvester: Modeling and experimental validation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 459, p. 114852, 2019.

FANG, S.; ZHOU, S.; YURCHENKO, D.; YANG, T.; LIAO, W. H.; Multistability phenomenon in signal processing, energy harvesting, composite structures, and metamaterials: A review. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 166, p. 108419, 2022.

FONSECA, F. M., GONÇALVES, P. B. Nonlinear behavior and instabilities of a hyperelastic von Mises truss. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 142, 103964, 2022.

FRIEDMAN, N.; WEINER, M.; FARKAS, G.; HEGEDŰS, I.; IBRAHIMBEGOVIC, A. On the snap-back behavior of a self-deploying antiprismatic column during packing. **Engineering Structures**, v. 50, p. 74-89, 2013.

GALAMBOS, T. V. **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures**, John Wiley & Sons, 1998.

GRECO, M.; VENTURINI, W. S. Stability analysis of three-dimensional trusses. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 3, n. 3, p. 325-344, 2006.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields**, Springer-Verlag Applied Mathematical Sciences 42, New York, 1983.

HADDAB, Y.; AICHE, G.; HUSSEIN, H.; SALEM, M. B.; LUTZ, P.; RUBBERT, L.; RENAUD, P. Mechanical bistable structures for microrobotics and mesorobotics from microfabrication to additive manufacturing. In: **2018**

International Conference on Manipulation, Automation and Robotics at Small Scales (MARSS). Nagoya, Japan, 2018, p. 1-6.

HAN, Q.; HUANG, X.; SHAO, X. Nonlinear kinetostatic modeling of double-tensural fully-compliant bistable mechanisms. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 93, p. 41-46, 2017.

HAN, Q.; JIN, K.; CHEN, G.; SHAO, X. A novel fully compliant tensural-compresural bistable mechanism. **Sensors and Actuators A: Physical**, v. 268, p. 72-82, 2017.

HECKBERT, P.S. Fourier transforms and the fast Fourier transform (FFT) algorithm. **Computer Graphics**, v. 2, p. 15-463, 1995.

HRINDA, G. A. Snap-through instability patterns in truss structures. In: **51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**. Orlando, Florida, 2010, p. 2611.

HU, N; BURGUEÑO, R. Buckling-induced smart applications: recent advances and trends. **Smart Materials and Structures**, v. 24, n. 6, p. 063001, 2015.

HUA, J.; LEI, H.; GAO, C. F.; GUO, X.; FANG, D. Parameters analysis and optimization of a typical multistable mechanical metamaterial. **Extreme Mechanics Letters**, v. 35, p. 100640, 2020.

HWANG, M.; ARRIETA, A. F. Solitary waves in bistable lattices with stiffness grading: Augmenting propagation control. **Physical Review E**, v. 98, n. 4, p. 042205, 2018.

HWANG, M.; ARRIETA, A. F. Topological wave energy harvesting in bistable lattices. **Smart Materials and Structures**, v. 31, n. 1, p. 015021, 2021.

JIANG, W.; CHEN, L. Snap-through piezoelectric energy harvesting. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 18, p. 4314-4325, 2014.

KIDAMBI, N.; ZHENG, Y.; HARNE, R. L.; WANG, K. W. Energy release for the actuation and deployment of muscle-inspired asymmetrically multistable chains. In: **SPIE Smart Structures and Materials + Nondestructive Evaluation and Health Monitoring**, Denver, Colorado, 2018, p. 1059510.

KOCHMANN, D. M.; BERTOLDI, K. Exploiting microstructural instabilities in solids and structures: from metamaterials to structural transitions, **Applied Mechanics Reviews**, v. 69, n. 5, p. 050801, 2017.

KOITER, W. T. **On the Stability of Elastic Equilibrium**. Nasa Report no TT-F-10833 (Translation of: Over Stabiliteit van het Elastiche Evenwitch, Ph. D. Thesis, Delft, ND, 1945), 1967.

KOVACIC, I.; BRENNAN, M. J. **The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour**. John Wiley & Sons, 2011,

KOVACIC, I.; BRENNAN, M. J.; WATERS, T. P. A study of a nonlinear vibration isolator with a quasi-zero stiffness characteristic. **Journal of Sound and Vibration**, v. 315, n. 3, p. 700-711, 2008.

KREIDER, W.; NAYFEH, A. H. Experimental investigation of single-mode responses in a fixed-fixed buckled beam. **Nonlinear Dynamics**, v. 15, p. 155-177, 1998.

KUZNETSOV, Y. A. **Elements of Applied Bifurcation Theory**, Springer-Verlag Applied Mathematical Sciences 112, New York, 1995.

LAN, C.; TANG, L.; HU, G.; QIN, W. Dynamics and performance of a two degree-of-freedom galloping-based piezoelectric energy harvester. **Smart Materials and Structures**, v. 28, n. 4, p. 045018, 2019.

LENCI, S.; ORLANDO, D.; REGA, G.; GONÇALVES, P. B. Controlling practical stability and safety of mechanical systems by exploiting chaos properties. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 22, n. 4, p. 047502, 2012.

LENCI, S.; REGA, G. **Global Nonlinear Dynamics for Engineering Design and System Safety.** Springer International Publishing, 2019.

LENCI, S. Exact solutions for coupled Duffing oscillators. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 165, p. 108299, 2022.

LIGARÒ, S. S.; VALVO, P. S. Large displacement analysis of elastic pyramidal trusses. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 16, p. 4867-4887, 2006.

LITAK, G.; FRISWELL, M. I.; KWUIMY, C. A. K.; ADHIKARI, S.; BOROWIEC, M. Energy harvesting by two magnetopiezoelastic oscillators with mistuning. **Theoretical and Applied Mechanics Letters**, v. 2, n. 4, p. 043009, 2012.

LIU, B.; LEVI, C.; ESTEFEN, S. F.; WU, Z.; DUAN, M. Evaluation of the double snap-through mechanism on the wave energy converter's performance. **Journal of Marine Science and Application**, v. 20, n. 2, p. 268-283, 2021.

LOPES, V. G., PETERSON, J. V. L. L., CUNHA JR., A. Nonlinear Characterization of a Bistable Energy Harvester Dynamical System. In: BELHAQ, M. (Ed.) **Topics in Nonlinear Mechanics and Physics**. Springer Proceedings in Physics, Springer: Singapore, 1995, p. 71-88.

MA, X.; LI, H.; ZHOU, S.; YANG, Z.; LITAK, G. Characterizing nonlinear characteristics of asymmetric tristable energy harvesters, **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 168, p. 108612, 2022.

MAPLE. **Maplesoft, a Division of Waterloo Maple Inc.**. Waterloo, Ontario, 2020.

MISES, R. V. Über die stabilitätsprobleme der elastizitätstheorie. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 3, n. 6, p. 406-422, 1923.

MISES, R. V.; RATZERSDORFER, J. Die Knicksicherheit von Fachwerken. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 5, n. 3, p. 218-235, 1925.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear oscillations**. John Wiley & Sons, 2008.

NORENBERG, J. P.; CUNHA JR, A.; DA SILVA, S.; VAROTO, P. S. Global sensitivity analysis of asymmetric energy harvesters. **Nonlinear Dynamics**, v. 109, p. 443-458, 2022.

NUSSBAUMER, H. J. (1982). The Fast Fourier Transform. In: **Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms**. Springer Series in Information Sciences, v. 2. Springer, Berlin, Heidelberg. 1982, p. 80-111.

ORLANDO, D. **Dinâmica Não-Linear, Instabilidade e Controle de Sistemas Estruturais com Interação Modal**. Rio de Janeiro, 2010. 300 p. Tese de Doutorado – PUC-Rio.

ORLANDO, D.; CASTRO, C. H. L. de; GONÇALVES, P. B. Nonlinear vibrations and instability of a bistable shallow reticulated truss. **Nonlinear Dynamics**, v. 94, n. 2, p. 1479-1499, 2018.

ORLANDO, D.; GONÇALVES, P. B.; REGA, G.; LENCI, S. Influence of symmetries and imperfections on the non-linear vibration modes of archetypal structural systems. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 49, p. 175-195, 2013.

ORLANDO, D.; GONÇALVES, P. B.; REGA, G.; LENCI, S. Influence of transient escape and added load noise on the dynamic integrity of multistable systems. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 109, p. 140-154, 2019.

OSORIO, J. C.; MORGAN, H. ARRIETA, A. F. Programmable Multistable Soft Grippers. In: **IEEE 5th International Conference on Soft Robotics**, Edinburgh, United Kingdom, 2022, p. 525-530.

PAPANGELO, A.; FONTANELA, F.; GROLET, A.; CIAVARELLA, M.; HOFFMANN, N. Multistability and localization in forced cyclic symmetric structures modelled by weakly-coupled Duffing oscillators. **Journal of Sound and Vibration**, v. 440, p. 202-211, 2019.

PARKER, T. S.; CHUA, L. **Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems**, Springer-Verlag, New York, 1989.

PECKNOLD, D. A.; GHABOUSSI, J.; HEALEY, T. J. Snap-Through and Bifurcation in a Simple Structure. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 111, n. 7, p. 909-922, 1985.

PHAM, H.; WANG, D. A quadristable compliant mechanism with a bistable structure embedded in a surrounding beam structure. **Sensors and Actuators A: Physical**, v. 167, n. 2, p. 438-448, 2011.

PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M. Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 25, n. 9, p. 097616, 2015.

PIQUEIRA, J. R. C.; MAZZILLI, C. E. N.; PESCE, C. P.; FRANZINI, G. R. **Lectures on Nonlinear Dynamics**. Springer, 2024.

PRIYA S.; INMAN D.J. **Energy harvesting technologies**. Springer, New York, 2009.

REGA, G. Bifurcation and chaos in the Helmholtz-Duffing oscillator. In: AWREJCEWICZ, J. (Ed.) **Bifurcation and Chaos: Theory and Applications**. Berlin, Heidelberg: Springer, 1995. p. 191-215.

REGA, G.; LENCI, S. Identifying, evaluating, and controlling dynamical integrity measures in non-linear mechanical oscillators. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 63, n. 5-7, p. 902-914, 2005.

REGA, G.; SETTIMI, V. Global dynamics perspective on macro- to nano-mechanics. **Nonlinear Dynamics**, v. 103, p. 1259-1303, 2021.

REIS, P. M. A perspective on the revival of structural (in)stability with novel opportunities for function: from buckliphobia to buckliphilia. **Journal of Applied Mechanics**, v. 82, n. 11, p. 111001, 2015.

SANTANA, M. V. B.; GONÇALVES, P. B.; SILVEIRA, R. A. Stability and load capacity of an elasto-plastic pyramidal truss. **International Journal of Solids and Structures**, v. 171, p. 158-173, 2019a.

SANTANA, M. V. B.; GONÇALVES, P. B.; SILVEIRA, R. A. Nonlinear oscillations and dynamic stability of an elastoplastic pyramidal truss. **Nonlinear Dynamics**, v. 98, n. 4, p. 2847-2877, 2019b.

SANTANA, M. V.; ARNOUTS, L. I. W.; MASSART, T. J.; GONÇALVES, P. B.; BERKE, P. Z. Corotational 3D joint finite element tailored for the simulation of bistable deployable structures. **Engineering Structures**, v. 227, p. 111387, 2021.

SANTANA, M. V. B.; GONÇALVES, P. B.; SILVEIRA, R. A. M. Closed-form solutions for the symmetric nonlinear free oscillations of pyramidal trusses. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 417, p. 132814, 2021.

SANTER, M.; PELLEGRINO, S. Compliant multistable structural elements. **International Journal of Solids and Structures**, v. 45, n. 24, p. 6190-6204, 2008.

SAVI, M. A.; NOGUEIRA, J. B. Nonlinear dynamics and chaos in a pseudoelastic two-bar truss. **Smart Materials and Structures**, v. 19, n. 11, p. 115022, 2010.

SCHIOLER, T.; PELLEGRINO, S. Space Frames with Multiple Stable Configurations. **AIAA Journal**, v. 45, n. 7, p. 1740-1747, 2007.

SEYDEL, R. **From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis**. Amsterdam: Elsevier, 1988.

SEZER, N.; KOÇ, M. A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting. **Nano Energy**, v. 80, p. 105567, 2021.

SILVA, F. M. A. **Modelos de Dimensão Reduzida para Análise das Oscilações Não-Lineares e Estabilidade de Cascas Cilíndricas**. Rio de Janeiro, 2008. 182 p. Tese de Doutorado – PUC-Rio.

SPECIALE, A.; ARDITO, R.; BAÙ, M.; FERRARI, M.; FERRARI, V.; FRANGI, A. A. Snap-through buckling mechanism for frequency-up conversion in piezoelectric energy harvesting. **Applied Sciences**, v. 10, n. 10, p. 3614, 2020.

TAN, X.; WANG, B.; YAO, Y.; YAO, K.; KANG, Y.; ZHU, S.; CHEN, S.; XU, P. Programmable Buckling-based negative stiffness metamaterial. **Materials Letters**, v. 262, p. 127072, 2020.

THOMPSON, J. M. T. Dynamical integrity: three decades of progress from macro to nano mechanics, In: LENCI S. S., G. REGA (Eds.) **Global Nonlinear Dynamics for Engineering Design and System Safety**, CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer, Cham, 2019, p. 1–26.

THOMPSON, J. M. T., HUNT, R. G. W. **A General Theory of Elastic Stability**. Wiley-Blackwell, 1973.

THOMPSON, J. M. T., HUNT, R. G. W. **Elastic Instability Phenomena**. John Wiley and Sons, London, 1984.

THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B, **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Wiley, 1986.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. Thompson Learning, 2004.

VIRGIN, L. N. **Introduction to Experimental Nonlinear Dynamics: A Case Study in Mechanical Vibration**. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

WANG, W.; CAO, J.; BOWEN, C. R.; INMAN, D. J.; LIN, J. Performance enhancement of nonlinear asymmetric bistable energy harvesting from harmonic, random and human motion excitations. **Applied Physics Letters**, v. 112, n. 21, p. 213903, 2018.

YANG, H.; MA, L. 1D to 3D multi-stable architected materials with zero Poisson's ratio and controllable thermal expansion. **Materials & Design**, v. 188, p. 108430, 2020.

ZANETTE, D. H. Dynamics of globally coupled bistable elements. **Physical Review E**, v. 55, n. 5, p. 5315-5320, 1997.

ZHOU, S.; ZUO, L. Nonlinear dynamic analysis of asymmetric tristable energy harvesters for enhanced energy harvesting. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 61, p. 271-284, 2018.

Apêndice A

Neste apêndice, apresentam-se informações complementares sobre os sistemas de equações utilizadas para as análises.

A.1
Sistemas Multiestáveis Formados por Treliças

Para análise dos sistemas multiestáveis utiliza-se a seguinte mudança de variáveis para obtenção de um sistema de primeira ordem:

$$y[1]=\chi_1,\, y[2]=\chi_{1,\tau},\, y[3]=\chi_2 \text{ e } y[4]=\chi_{2,\tau} \tag{A.1}$$

Assim quando o modelo é formado por treliças, no caso de ligação rígida, as equações de movimento são transformadas como segue:

$$\dot{y}[1]=y[2] \tag{A.2}$$

$$\dot{y}[3]=\frac{3}{\Delta 1}\left[\begin{array}{c} F\cos(\Omega\tau)-2\xi_1\delta_1 y[2]+\lambda \\ -\dfrac{2\left(\sqrt{\left(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1\right)^2+1}-\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}\right)\left(-\delta_1-y[3]\delta_2+y[1]\delta_1\right)}{\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}\sqrt{\left(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1\right)^2+1}} \end{array}\right] \tag{A.3}$$

$$\dot{y}[3]=y[4] \tag{A.4}$$

$$\dot{y}[4]=\frac{1}{\Delta 2}\left[\begin{array}{c} F\cos(\Omega\tau)-2\xi_2\delta_2 y[4] \\ -\dfrac{2\left(\sqrt{\left(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1\right)^2+1}-\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}\right)\left(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1\right)}{\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}\sqrt{\left(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1\right)^2+1}} \\ -\dfrac{2\alpha\left(\sqrt{\left(\delta_2-y[3]\delta_2\right)^2+1}-\sqrt{\delta_2^{\,2}+1}\right)\left(-\delta_2+y[3]\delta_2\right)}{\sqrt{\delta_2^{\,2}+1}\sqrt{\left(\delta_2-y[3]\delta_2\right)^2+1}} \end{array}\right] \tag{A.5}$$

onde $\Delta 1=2\delta_1\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}$ e $\Delta 2=2\delta_2\left(\sqrt{\delta_1^{\,2}+1}+\dfrac{\sqrt{\delta_2^{\,2}+1}}{3}\right)$.

No caso de ligação flexível entre as treliças, tem-se o sistema formado pelas mesmas equações (A.2) e (A.4), adicionando:

$$\dot{y}[3]=\frac{3}{\Delta 1}\left[\begin{array}{c} F\cos(\Omega\tau)-2\xi_1\delta_1 y[2]-\kappa(y[1]\delta_1-y[3]\delta_2)+\lambda \\ -\dfrac{2\left(\sqrt{(\delta_1-y[1]\delta_1)^2+1}-\sqrt{\delta_1^2+1}\right)(-\delta_1+y[1]\delta_1)}{\sqrt{\delta_1^2+1}\sqrt{(\delta_1-y[1]\delta_1)^2+1}} \end{array}\right] \tag{A.6}$$

$$\dot{y}[4]=\frac{3}{\Delta 3}\left[\begin{array}{c} F\cos(\Omega\tau)-2\xi_2\delta_2 y[4]+\kappa(y[1]\delta_1-y[3]\delta_2) \\ -\dfrac{2\alpha\left(\sqrt{(\delta_2-y[3]\delta_2)^2+1}-\sqrt{\delta_2^2+1}\right)(-\delta_2+y[3]\delta_2)}{\sqrt{\delta_2^2+1}\sqrt{(\delta_2-y[3]\delta_2)^2+1}} \end{array}\right] \tag{A.7}$$

onde $\Delta 3=2\delta_2\sqrt{\delta_2^2+1}$.

No caso sistema com acoplamento piezoelétrico, para 1GL, tem-se a mudança de variáveis:

$$y[1]=\chi,\; y[2]=\chi_{,\tau} \text{ e } y[3]=V \tag{A.8}$$

E o sistema, adicionado da equação (A.2), fica:

$$\dot{y}[2]=\frac{3}{2\delta\sqrt{\delta^2+1}}\left[\begin{array}{c} F\cos(\Omega\tau)-2\xi\delta y[2]+\lambda \\ +\dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{(\delta-\delta y[1])^2+1}}{\sqrt{\delta^2+1}}-1\right)(\delta-\delta y[1])}{\sqrt{(\delta-\delta y[1])^2+1}} \end{array}\right]+\beta y[3] \tag{A.9}$$

$$\dot{y}[3]=-\gamma y[3]-\varphi y[2] \tag{A.10}$$

Para 2GL, tem-se a mudança de variáveis:

$$y[1]=\chi_1,\; y[2]=\chi_{1,\tau},\; y[3]=\chi_2,\; y[4]=\chi_{2,\tau} \text{ e } y[5]=V \tag{A.11}$$

E o sistema formado pelas equações, além das equações (A.2) e (A.4):

$$\dot{y}[2]=\frac{3}{\Delta 1}\left[\begin{array}{c} F\cos(\Omega\tau)-2\xi_1\delta_1 y[2]+\lambda \\ -\dfrac{2\left(\sqrt{(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1)^2+1}-\sqrt{\delta_1^2+1}\right)(-\delta_1-y[3]\delta_2+y[1]\delta_1)}{\sqrt{\delta_1^2+1}\sqrt{(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1)^2+1}} \end{array}\right] \tag{A.12}$$

$$+\beta_1 y[5]$$

$$\dot{y}[4]=\frac{1}{\Delta 2}\left[\begin{array}{c} -\dfrac{2\left(\sqrt{(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1)^2+1}-\sqrt{\delta_1^2+1}\right)(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1)}{\sqrt{\delta_1^2+1}\sqrt{(\delta_1+y[3]\delta_2-y[1]\delta_1)^2+1}} \\ -\dfrac{2\alpha\left(\sqrt{(\delta_2-y[3]\delta_2)^2+1}-\sqrt{\delta_2^2+1}\right)(-\delta_2+y[3]\delta_2)}{\sqrt{\delta_2^2+1}\sqrt{(\delta_2-y[3]\delta_2)^2+1}}-2\xi_2\delta_2 y[4] \end{array}\right] \tag{A.13}$$

$$+\beta_2 y[6]$$

$$\dot{y}[5] = -\gamma_1 y[5] - \varphi_1 y[2] \tag{A.14}$$

$$\dot{y}[6] = -\gamma_2 y[6] - \varphi_2 y[4] \tag{A.15}$$

A.2
Sistemas Multiestáveis Formados por Arcos

Quando os sistemas multiestáveis são formados por arcos, no caso de ligação rígida, faz-se o desacoplamento das equações não lineares através da regra de Cramer, obtendo um sistema formado pelas mesmas equações (A.2) e (A.4), além de:

$$\dot{y}[2] = \frac{1}{\Delta 4}\left\{\begin{array}{c} -\left(3+2\mu\right)\left[\begin{array}{l} c_1\left(y[2]+\dfrac{4}{\pi}y[4]\right)+\dfrac{1}{4}\pi^4 y[1]^3 \\ +\dfrac{3}{4}\pi^4 b_1 y[1]^2+\dfrac{1}{2}\pi^4 b_1^2 y[1]+2\lambda \end{array}\right] \\ +\dfrac{4}{\pi}\left(c_2 y[4]+\dfrac{1}{4}\pi^4 y[3]^3+\dfrac{3}{4}\pi^4 b_2 y[3]^2+\dfrac{1}{2}\pi^4 b_2^2 y[3]+2\lambda\right) \end{array}\right\} \tag{A.16}$$

$$\dot{y}[4] = \frac{1}{\Delta 4}\left\{\begin{array}{c} -\left(c_2 y[4]+\dfrac{1}{4}\pi^4 y[3]^3+\dfrac{3}{4}\pi^4 b_2 y[3]^2+\dfrac{1}{2}\pi^4 b_2^2 y[3]+2\lambda\right) \\ +\dfrac{4}{\pi}\left[\begin{array}{l} c_1\left(y[2]+\dfrac{4}{\pi}y[4]\right)+\dfrac{1}{4}\pi^4 y[1]^3 \\ +\dfrac{3}{4}\pi^4 b_1 y[1]^2+\dfrac{1}{2}\pi^4 b_1^2 y[1]+2\lambda \end{array}\right] \end{array}\right\} \tag{A.17}$$

onde $y[1] = a_1$, $y[2] = \dot{a}_1$, $y[3] = a_2$, $y[4] = \dot{a}_2$ e $\Delta 4 = 3 + 2\mu - \dfrac{16}{\pi^2}$.

No caso de ligação flexível entre os arcos, tem-se o sistema abaixo adicionado às equações (A.2) e (A.4):

$$\dot{y}[2] = -c_1 y[2] - \frac{1}{4}\pi^4 y[1]^3 - \frac{3}{4}\pi^4 b_1 y[1]^2 - \frac{1}{2}\pi^4 b_1^2 y[1] - 2\lambda - \frac{4\kappa}{\pi}\left(y[1]-y[3]\right) \tag{A.18}$$

$$\dot{y}[4] = -c_2 y[4] - \frac{1}{4}\pi^4 y[3]^3 - \frac{3}{4}\pi^4 b_2 y[3]^2 - \frac{1}{2}\pi^4 b_2^2 y[3] - \frac{4\kappa}{\pi}\left(y[3]-y[1]\right) \tag{A.19}$$