



Marcos Chataignier de Arruda

**Operações booleanas com sólidos compostos
representados por fronteira**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Luiz Fernando C. R. Martha

Rio de Janeiro, janeiro de 2005



Marcos Chataignier de Arruda

Operações booleanas com sólidos compostos representados por fronteira

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Luiz Fernando C. R. Martha

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

Prof. Waldemar Celes Filho

Departamento de Informática – PUC-Rio

Prof. Luiz Cristovão G. Coelho

TecGraf/PUC-Rio

Prof. Paulo Cezar P. Carvalho

IMPA

Prof. Marcelo de Andrade Dreux

Departamento de Engenharia Mecânica - PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador(a) Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de janeiro de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Marcos Chataignier de Arruda

Graduou-se em Engenharia Civil, ênfase em Estruturas, pela PUC-Rio – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2002. Desenvolveu seu trabalho de pesquisa com ênfase em computação gráfica aplicada.

Ficha Catalográfica

Arruda, Marcos Chataignier de

Operações booleanas com sólidos compostos representados por fronteira / Marcos Chataignier de Arruda ; orientador: Luiz Fernando C. R. Martha. – Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2005.

v., 267 f. : il. ; 29,7 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Operações booleanas. 3. Modelagem geométrica. 4. Topologia de Adjacência. 5. Estruturas de dados topológicos. 6. Sólidos non-manifold. 7. Representação por fronteira. I. Martha, Luiz Fernando C. R. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD:624

Agradecimentos

Aos meus pais Lucia e Miguel, às minhas irmãs Isabela e Tatiana e a todos os meus familiares, pelo apoio, paciência e incentivo demonstrados ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

A minha namorada Christina, pelo apoio, paciência e por todos os fins-de-semana que passou ao meu lado dedicando seu tempo, sua atenção, seu carinho e suas palavras de incentivo e encorajamento para que este trabalho pudesse ser concluído da melhor forma possível e dentro do prazo.

Ao professor Luiz Fernando Martha, orientador deste trabalho, pelo incentivo, ensinamento, orientação e, principalmente, pela amizade e dedicação demonstradas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao amigo William, que poderia ser considerado um verdadeiro co-orientador deste trabalho, por toda a orientação, auxílio e paciência e pelas modificações e inovações promovidas no código-fonte do modelador MG para tornar possível a implementação do algoritmo proposto neste trabalho.

A amiga Christiana, por todo o auxílio prestado a mim durante o mestrado, mas principalmente pela sua amizade inestimável.

Ao meu cunhado Pedro, pelo auxílio prestado de forma extremamente eficiente na elaboração de várias figuras deste trabalho.

A todos os amigos do TecGraf e da PUC pela amizade consolidada durante os quatro anos durante os quais estive vinculado a estas instituições, e pelo apoio e colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

A Ana Roxo e a todos os funcionários e professores do Departamento de Engenharia Civil da PUC.

Ao Tecgraf pelo apoio financeiro e tecnológico durante o curso de mestrado.

A CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro durante o curso de mestrado.

Resumo

Arruda, Marcos Chataignier de; Martha, Luiz Fernando C. R. **Operações booleanas com sólidos compostos representados por fronteira**. Rio de Janeiro, 2005. 267p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Num modelador de sólidos, uma das ferramentas mais poderosas para a criação de objetos tridimensionais de qualquer nível de complexidade geométrica é a aplicação das operações booleanas. Elas são formas intuitivas e populares de combinar sólidos, baseadas nas operações aplicadas a conjuntos. Os tipos principais de operações booleanas comumente aplicadas a sólidos são: união, interseção e diferença. Havendo interesse prático, para garantir que os objetos resultantes possuam a mesma dimensão dos objetos originais, sem partes soltas ou pendentes, o processo de regularização é aplicado. Regularizar significa restringir o resultado de tal forma que apenas volumes preenchíveis possam existir. Na prática, a regularização é realizada classificando-se os elementos topológicos e eliminando-se estruturas de dimensão inferior. A proposta deste trabalho é o desenvolvimento de um algoritmo genérico que permita a aplicação do conjunto de operações booleanas em um ambiente de modelagem geométrica aplicada à análise por elementos finitos e que agregue as seguintes funcionalidades: trabalhar com um número indefinido de entidades topológicas (conceito de Grupo), trabalhar com objetos de dimensões diferentes, trabalhar com objetos non-manifold, trabalhar com objetos não necessariamente poliedrais ou planos e garantir a eficiência, robustez e aplicabilidade em qualquer ambiente de modelagem baseado em representação B-Rep. Neste contexto, apresenta-se a implementação do algoritmo num modelador geométrico pré-existente, denominado MG, seguindo o conceito de programação orientada a objetos e mantendo a interface com o usuário simples e eficiente.

Palavras-chave

Operações Booleanas, Modelagem Geométrica, Topologia de Adjacência, Estruturas de Dados Topológicas, Sólidos *Non-Manifold*, Representação por Fronteira.

Abstract

Arruda, Marcos Chataignier de; Martha, Luiz Fernando C. R. (Advisor). **Boolean operations with compound solids represented by boundary**. Rio de Janeiro, 2005. 267p. MSc. Dissertation – Civil Engineering Department, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In a solid modeler, one of the most powerful tools to create three-dimensional objects with any level of geometric complexity is the application of the Boolean set operations. They are intuitive and popular ways to combine solids, based on the operations applied to sets. The main types of Boolean operations commonly applied to solids are: union, intersection and difference. If there is practical interest, in order to assure that the resulting objects have the same dimension of the original objects, without loose or dangling parts, the regularization process is applied. To regularize means to restrict the result in a way that only filling volumes are allowed. In practice, the regularization is performed classifying the topological elements and removing the lower dimensional structures. The objective of this work is the development of a generic algorithm that allows the application of the Boolean set operations in a geometric modeling environment applied to finite element analysis, which aggregates the following functionalities: working with an undefined number of topological entities (Group concept), working with objects of different dimensions, working with non-manifold objects, working with objects not necessarily plane or polyhedral and assuring the efficiency, robustness and applicability in any modeling environment based on B-Rep representation. In this context, the implementation of the algorithm in a pre-existing geometric modeler named MG is presented, using the concept of object oriented programming and keeping the user interface simple and efficient.

Key-Words

Boolean Set Operations, Geometric Modeling, Adjacency Topology, Topological Data Structures, *Non-Manifold* Solids, Boundary Representation.

Sumário

1	Introdução	19
1.1.	Motivações e Trabalhos Anteriores	23
1.2.	Objetivos e Principais Contribuições	24
1.3.	Organização da dissertação	26
2	O Modelador Geométrico MG	28
2.1.	Características gerais do modelador	28
2.2.	Modos de interface do MG	30
2.2.1.	Seleção	31
2.2.2.	Mudança de Projeções	32
2.2.3.	Edição do plano de interface	33
2.2.4.	Transformações por manipulação direta	34
2.2.5.	Criação	36
2.3.	Modelagem geométrica no MG	36
2.3.1.	Representação paramétrica de superfícies	37
2.3.2.	Descrição geométrica de curvas e superfícies usando NURBS	38
2.3.3.	Geração de curvas e superfícies no MG	41
2.3.4.	Geração de sólidos no MG	47
2.3.5.	Geração de Malhas Não-Estruturadas no MG	49
2.3.5.1.	Geração de malhas em superfícies	50
2.3.5.2.	Geração de malhas volumétricas	50
2.3.6.	Criação de grupos	51
2.3.7.	Atributos	55
2.3.8.	Estrutura de dados híbrida	55
2.3.9.	A estrutura de dados do modelador MG	57
2.4.	Interseção de superfícies e detecção automática de regiões	64
3	Algoritmo para Operações Booleanas	72
3.1.	Domínio representacional <i>non-manifold</i>	72
3.2.	Conceito de fronteira	74
3.3.	Grupos como parâmetros de entrada	76
3.4.	Condições de aplicabilidade do algoritmo	76

3.5. Descrição do algoritmo	79
3.5.1. Parâmetros de entrada	79
3.5.2. Tratamento dos parâmetros de entrada	80
3.5.3. Aplicação das Operações Booleanas sobre os Grupos	87
3.5.3.1. Operação Booleana de União	90
3.5.3.2. Operação Booleana de Interseção	93
3.5.3.3. Operação Booleana de Diferença	96
3.5.3.4. Regularização do resultado	99
3.6. Considerações sobre o algoritmo	102
4 As Operações Booleanas no MG	104
4.1. Modelagem geométrica usando POO	104
4.2. Descrição das novas classes criadas no MG	105
4.2.1. A classe <i>Group</i>	106
4.2.2. A classe <i>GroupItf</i>	106
4.2.3. A classe <i>GeomBoolOp</i>	108
4.2.4. A classe <i>BoolOp</i>	111
4.2.5. A classe <i>BoolOpItf</i>	114
4.3. Pré-processamento dos parâmetros de entrada	117
4.4. Detalhes de implementação das operações booleanas no MG	126
4.4.1. Armazenamento das informações dos grupos	126
4.4.2. Classificação das entidades topológicas dos grupos	127
4.4.3. Operações Booleanas e Regularização do Resultado	133
4.5. Pós-processamento do resultado	135
4.6. Eficiência e robustez do algoritmo	136
5 Exemplos	139
5.1. Geração de modelos <i>manifold</i>	139
5.2. Geração de modelos a partir de entidades topológicas com diferentes dimensões	152
5.3. Geração de modelos <i>non-manifold</i>	157
5.4. Regularização do resultado	162
5.5. Problemas com o pré-processamento dos parâmetros de entrada	165
5.6. Ordem de grandeza do tempo de execução do algoritmo	173
6 Conclusões	177
6.1. Principais contribuições	179

6.2. Sugestões para trabalhos futuros	180
Referências Bibliográficas	183
Apêndice	188
A.1. Conceitos Fundamentais	188
A.2. Evolução Histórica	190
A.3. Problemas da modelagem de sólidos	192
A.3.1. Completude	192
A.3.2. Integridade	193
A.3.3. Complexidade e abrangência geométrica	194
A.3.4. Natureza dos algoritmos geométricos	194
A.4. Modelagem Geométrica <i>manifold</i> e <i>non-manifold</i>	195
A.5. Topologia em Modelagem Geométrica	201
A.5.1. Topologia e geometria	201
A.5.2. Conceitos fundamentais e definições matemáticas	201
A.5.2.1. Conceitos da teoria de grafos	202
A.5.2.2. Conceitos topológicos	202
A.5.2.2.1. A Fórmula de Euler – Poincaré	206
A.5.2.3. Conceitos gerais de modelagem	208
A.5.3. Tipos de topologia	209
A.5.4. O uso da topologia na modelagem geométrica	210
A.5.5. Suficiência de uma topologia	213
A.5.5.1. Topologia suficiente como base de um sistema de modelagem	214
A.5.5.2. Domínio topológico	215
A.5.5.3. Tipos de suficiência	216
A.5.6. Topologia em representações de sólidos <i>manifold</i>	217
A.5.7. Topologia em representações de sólidos <i>non-manifold</i>	219
A.5.8. Estruturas de dados topológicas	222
A.5.8.1. Modelos de fronteira baseados em polígonos	222
A.5.8.2. Modelos de fronteira baseados em arestas	223
A.5.8.2.1. A estrutura de dados <i>Winged-edge</i>	224
A.5.8.2.2. Extensões para grafos desconexos	226
A.5.8.2.3. A estrutura de dados <i>Half-edge</i>	227
A.5.8.2.4. A estrutura de dados <i>Radial Edge</i>	231
A.5.9. Operadores de <i>Euler</i> e Operadores <i>Non-Manifold</i>	235
A.6. Tipos de representação de sólidos	249

A.6.1. Modelos de decomposição	250
A.6.2. Modelos de fronteira (B-Rep)	252
A.6.3. Modelos construtivos	254
A.6.3.1. Primitivas	254
A.6.3.2. <i>Undo e Redo</i>	255
A.6.3.3. A Representação CSG	256
A.6.3.4. As operações booleanas regularizadas	256
A.6.3.5. Construção de um objeto CSG	258
A.6.3.6. Classificação de pontos, curvas e superfícies em relação a sólidos	262
A.6.3.7. Redundâncias e aproximações em árvores CSG	263
A.6.4. Modelos Híbridos	265

Lista de figuras

Figura 1.1 – Interseção entre malhas de superfícies [8].	20
Figura 1.2 – Caso patológico de interseção de superfícies [6].	20
Figura 1.3 – Modelo explodido: detecção automática de regiões [6].	21
Figura 1.4 – Dificuldade para detecção de multi-regiões [6].	23
Figura 2.1 – Interface do MG e plano de interface.	29
Figura 2.2 – Atração de vértices: a) posicionamento; b) atração [7].	32
Figura 2.3 – Parâmetros de visualização e posição inicial da câmera (visão esquemática do objeto em destaque) [7].	33
Figura 2.4 – Modo de transformação por manipulação direta.	35
Figura 2.5 – Representações de uma superfície: a) espaço Euclidiano; b) espaço paramétrico [6].	38
Figura 2.6 – Exemplo de superfície NURBS [6].	39
Figura 2.7 – Representação de curvas na biblioteca NURBS++ [6].	40
Figura 2.8 – Representação de superfícies na biblioteca NURBS++ [6].	40
Figura 2.9 – Organização das classes de curvas no modelador MG [6].	41
Figura 2.10 – Organização das classes de superfícies no modelador MG [6].	41
Figura 2.11 – Criação de um toro através da técnica de <i>sweep</i> : a) curvas bases; b) superfície gerada.	43
Figura 2.12 – Superfície gerada por <i>skin</i> .	44
Figura 2.13 – Superfície <i>coons</i> [6].	45
Figura 2.14 – Superfície gerada por <i>sweep</i> genérico [6].	45
Figura 2.15 – Superfície de <i>Gordon</i> [6].	46
Figura 2.16 – Superfície triangular [6].	46
Figura 2.17 – Mapeamento de sólido por extrusão [6].	47
Figura 2.18 – Mapeamento de sólido por <i>sweep</i> curvo [6].	48
Figura 2.19 – Sólido gerado por mapeamento transfinito tridimensional [6].	48
Figura 2.20 – Geração de sólido com domínio arbitrário [6].	49
Figura 2.21 – Exemplo de malha em uma superfície 3D: a) sem considerar distorções; b) considerando distorções.	50
Figura 2.22 – Criação de um novo grupo no MG.	53
Figura 2.23 – Árvore de grupos com suas entidades topológicas.	54
Figura 2.24 – Organização de classes do modelador MG [6].	58
Figura 2.25 – Relações dos objetos da classe <i>Vtxtop</i> [6].	59

Figura 2.26 – Relações dos objetos da classe <i>Point</i> [6].	59
Figura 2.27 – Relações dos objetos da classe <i>Segment</i> [6].	60
Figura 2.28 – Relações dos objetos da classe <i>Curve</i> [6].	60
Figura 2.29 – Relações dos objetos da classe <i>Patch2d</i> [6].	61
Figura 2.30 – Relações dos objetos da classe <i>Surface</i> [6].	61
Figura 2.31 – Relações dos objetos da classe <i>Patch3d</i> [6].	62
Figura 2.32 – Relações dos objetos da classe <i>Solid</i> [6].	62
Figura 2.33 – Usos de vértices em duas superfícies adjacentes [6].	63
Figura 2.34 – Relações dos objetos da classe <i>VertexUse</i> [6].	63
Figura 2.35 – Relações dos objetos da classe <i>SegmentUse</i> [6].	64
Figura 2.36 – Exemplos de interseções de superfícies [6].	66
Figura 2.37 – Exemplo de interseção de malhas dos casos especiais aresta / aresta e aresta / vértice [8] e [6].	67
Figura 2.38 – Exemplo de interseção onde uma curva de <i>trimming</i> intercepta outra [6].	67
Figura 2.39 – Interseção de superfícies não-retangulares [6].	68
Figura 2.40 – Reconstrução da malha em superfícies incidentes às curvas de interseção [6].	68
Figura 3.1 – Operação de diferença levando a um resultado <i>non-manifold</i> .	74
Figura 3.2 – Superposição de faces: na verdade, a face F_1 possui um <i>loop</i> interno formando uma cavidade onde se encaixa a face F_2 .	78
Figura 3.3 – Interseção entre dois objetos considerando um deles como uma região ou somente como uma casca.	79
Figura 3.4 – Armazenamento das entidades topológicas explicitamente selecionadas e daquelas obtidas a partir destas por relações de adjacência: a) cubo selecionado; b) cubo, aresta pendente e face pendente selecionados.	81
Figura 3.5 – Exemplo de classificação de vértices.	83
Figura 3.6 – Exemplo de classificação de arestas.	85
Figura 3.7 – Exemplo de classificação de faces.	87
Figura 3.8 – Operações booleanas entre grupos de entidades.	89
Figura 3.9 – Operação booleana de união.	92
Figura 3.10 – Operação booleana de interseção.	95
Figura 3.11 – Operação booleana de diferença.	98
Figura 3.12 – Exemplos de regularização do resultado.	101
Figura 4.1 – Novas classes criadas no MG.	106

Figura 4.2 – Relações dos objetos da classe <i>Group</i> .	106
Figura 4.3 – Exemplo de organização da árvore da classe <i>GroupItf</i> .	108
Figura 4.4 – Relações dos objetos da classe <i>GroupItf</i> .	108
Figura 4.5 – Relações dos objetos da classe <i>GeomBoolOp</i> .	111
Figura 4.6 – Relações dos objetos da classe <i>BoolOp</i> .	113
Figura 4.7 – Relações dos objetos da classe <i>BoolOpItf</i> .	115
Figura 4.8 – Elementos de interface responsáveis pela chamada do algoritmo de operações booleanas.	116
Figura 4.9 – Modelo gerado no MG: a) antes da chamada do algoritmo de interseção entre superfícies; b) depois de calculadas as interseções.	118
Figura 4.10 – Reconhecimento de multi-regiões: detecção automática ou seleção explícita dos retalhos de superfície que compõem a fronteira de cada região.	120
Figura 4.11 – Detecção de regiões antes da interseção.	124
Figura 4.12 – Detecção de regiões depois da interseção.	125
Figura 4.13 – Interseção entre duas entidades topológicas A e B. O resultado da interseção é o vértice comum a ambas as entidades, mas que não pode ser representado devido à remoção automática dos vértices de uma aresta quando ela é removida.	128
Figura 4.14 – Influência das curvas geradoras de um retalho de superfície na sua descrição geométrica: a) dois sólidos; b) interseção entre os sólidos; c) remoção de quatro arestas ocasionando remoção automática dos retalhos de superfície.	130
Figura 4.15 – Comparação entre duas possibilidades de abordagem: a) manutenção de todas as arestas; b) manutenção somente das arestas que guardam sozinhas informações geométricas sobre os retalhos de superfície.	132
Figura 4.16 – Arestas no interior de uma face formando um <i>loop</i> interno fechado.	133
Figura 4.17 – Aresta de fronteira sendo tratada como aresta solta no interior da face.	133
Figura 4.18 – Problema com a detecção automática de regiões após a operação booleana: a) sólido com vazio interno ocupado por outro sólido; b) interseção entre os dois sólidos representada apenas por uma casca.	136
Figura 5.1 – Operações booleanas de união e diferença: a) dois cilindros se interceptando; b) união entre os cilindros; c) quatro paralelepípedos;	

- d) diferença entre o resultado da letra (b) e os paralelepípedos. 140
- Figura 5.2 – Interseção e diferença: a) dois cilindros; b) interseção entre os cilindros e cubo a ser subtraído; c) diferença entre os dois sólidos da letra (b). 142
- Figura 5.3 – União e interseção: a) dois cilindros; b) união entre os cilindros; c) cubo interceptando os cilindros; d) interseção entre os dois sólidos. 143
- Figura 5.4 – Diferenças entre os sólidos C e D da Figura 5.3: a) $C - D$; b) $D - C$. 144
- Figura 5.5 – Cilindro e prisma: diferenças: a) vista frontal; b) vista de cima; c) prisma menos cilindro; d) cilindro menos prisma. 145
- Figura 5.6 – Dois paralelepípedos se interceptando: a) disposição espacial; b) união; c) interseção; d) diferença $A - B$; e) diferença $B - A$. 146
- Figura 5.7 – Cilindro cortando cubo obliquamente: a) disposição espacial; b) união; c) interseção; d) diferença $A - B$; e) diferença $B - A$. 147
- Figura 5.8 – Quatro paralelepípedos se tocando: a) disposição espacial; b) grupo A ; c) grupo B . 149
- Figura 5.9 – Numeração das faces do modelo da Figura 5.8. 150
- Figura 5.10 – Operações booleanas aplicadas aos grupos da Figura 5.8: a) união; b) interseção; c) diferença. 152
- Figura 5.11 – Operações booleanas com entidades de diferentes dimensões. 154
- Figura 5.12 – Plano cortando cilindro: a) disposição espacial; b) união; c) interseção; d) diferença $A - B$; e) diferença $B - A$. 156
- Figura 5.13 – Região com arame interno sendo combinada com outra região: a) disposição espacial; b) união; c) interseção; d) diferença $A - B$. 158
- Figura 5.14 – Aresta solta no interior de uma face: a) cubo com outro cubo interno em que uma das faces contém uma aresta solta no seu interior; b) união entre os grupos; c) interseção entre os grupos. 159
- Figura 5.15 – Três prismas: a) disposição espacial; b) união; c) interseção; d) diferença $A - B$; e) diferença $B - A$. 161
- Figura 5.16 – União, interseção e regularização do resultado: a) dois paralelepípedos (A e B); b) $A \cup B$; c) novo paralelepípedo (C) inserido no modelo; d) $(A \cup B) \cap C$; e) $(A \cup B) \cap^* C$. 163
- Figura 5.17 – Sólido com estrutura interna - problemas na regularização: a) dois cubos com faces internas; b) união; c) interseção; d) diferença. 164
- Figura 5.18 – Problemas no cálculo da interseção de superfícies. 167
- Figura 5.19 – Cilindro e paralelepípedo se interceptando: a) disposição espacial;

b) arestas coincidentes.	169
Figura 5.20 – Faces superpostas: a) e b) subdivisões da face original do paralelepípedo; c) e d) faces da base do cilindro.	170
Figura 5.21 – Malhas das faces superpostas dos dois sólidos: a) malha relativa à face do paralelepípedo; b) malha relativa às faces do cilindro.	171
Figura 5.22 – União e inserção de um novo cilindro.	172
Figura 5.23 – Diferença e má qualidade das malhas geradas após a interseção de superfícies.	173
Figura 5.24 – Quatro cilindros interceptando um cubo: a) disposição espacial; b) diferença.	176
Figura A.1 – Formas de modelagem: a) por arames; b) por superfícies; c) modelagem de sólidos; d) modelagem <i>non-manifold</i> .	191
Figura A.2 – Desenho sem sentido [10].	193
Figura A.3 – Objeto sólido ambíguo [10].	193
Figura A.4 – Modelo poliédrico [10].	194
Figura A.5 – Exemplos de superfícies não orientáveis: a) Faixa de Möbius; b) Garrafa de Klein [9].	196
Figura A.6 – Situações topológicas <i>non-manifold</i> [17].	197
Figura A.7 – Exemplo de sólidos <i>non-manifold</i> [10,19].	197
Figura A.8 – União regularizada de dois objetos <i>manifold</i> gerando um resultado <i>non-manifold</i> [17].	199
Figura A.9 – Aproximações para situações <i>non-manifold</i> : a) objeto <i>non-manifold</i> gerado pela união regularizada de dois suportes em forma de L; b) e c) topologias possíveis [9].	200
Figura A.10 – Exemplos de homeomorfismo: a) objeto com dois buracos e faces homeomorfas a discos; b) esfera com alças (ordem 2) [9].	205
Figura A.11 – Face com quatro <i>loops</i> [9].	207
Figura A.12 – Sólido que obedece à equação de Euler-Poincaré estendida [9].	208
Figura A.13 – Superfície com uma aresta <i>non-manifold</i> [9].	208
Figura A.14 – Representação hierárquica decrescente dos elementos topológicos [17].	212
Figura A.15 – Nove relações de adjacência possíveis entre vértices, arestas e faces [17].	214
Figura A.16 – <i>Self-loops</i> e multigrafos gerados pela aplicação das operações booleanas a sólidos: a) <i>self-loop</i> criado pela subtração de um cilindro de um	

paralelepípedo; b) multigrafo criado pela subtração de uma esfera de um paralelepípedo [17].	218
Figura A.17 – Estrutura de dados <i>winged-edge</i> [9].	225
Figura A.18 – Aresta auxiliar para conectar contornos separados de uma face [17].	226
Figura A.19 – Estrutura de dados <i>half-edge</i> [10].	230
Figura A.20 – Relação entre aresta e semi-aresta na estrutura de dados <i>half-edge</i> [10].	231
Figura A.21 – Condições <i>non-manifold</i> em um vértice e em uma aresta [17].	234
Figura A.22 – Elementos topológicos na RED [6].	235
Figura A.23 – Descrição hierárquica da RED [6].	235
Figura A.24 – Aplicação dos operadores de Euler [17].	239
Figura A.25 – Aplicação dos operadores de Euler [17].	240
Figura A.26 – Aplicação dos operadores de Euler [17].	241
Figura A.27 – Aplicação dos operadores <i>non-manifold</i> de Weiler [17].	245
Figura A.28 – Aplicação dos operadores <i>non-manifold</i> de Weiler [17].	246
Figura A.29 – Aplicação dos operadores <i>non-manifold</i> de Weiler [17].	247
Figura A.30 – Aplicação dos operadores <i>non-manifold</i> de Weiler [17].	248
Figura A.31 – Aplicação dos operadores <i>non-manifold</i> de Weiler [17].	249
Figura A.32 – Subdivisão uniforme do espaço [10].	251
Figura A.33 – Subdivisão do espaço por Octree [9].	252
Figura A.34 – Subdivisão irregular do espaço [9].	252
Figura A.35 – Componentes básicos de um modelo de fronteira [10].	253
Figura A.36 – Interseção regularizada entre sólidos [9].	257
Figura A.37 – Operações booleanas aplicadas a dois sólidos: união, interseção e diferenças [56].	258
Figura A.38 - Sólidos gerados por meio de operações booleanas em primitivas básicas [56].	258
Figura A.39 – Suporte [9].	259
Figura A.40 – Árvore CSG [56].	260
Figura A.41 – Árvore representando a expressão CSG [9].	261
Figura A.42 – Aproximação de $(A \cup^* B) - (C \cup^* D)$ [9].	265
Figura A.43 – Principais arquiteturas dos modeladores híbridos: a) CSG como representação primária; b) B-Rep como representação primária [10].	267

Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Classificação das faces do modelo da Figura 5.8.	151
Tabela A.1 – Operadores de Euler [17].	238
Tabela A.2 – Operadores <i>non-manifold</i> de Weiler [17].	244

Lista de Abreviaturas

MEF	Método dos Elementos Finitos
MG	<i>Mesh Generator</i>
CGC	<i>Complete Geometric Complex</i>
POO	Programação Orientada a Objetos
ESAM	<i>Extensible System Attributes Management</i>
NURBS	<i>Non-Uniform Rational B-Splines</i>
CSG	<i>Constructive Solid Geometry</i>
B-REP	<i>Boundary Representation</i>
RED	<i>Radial Edge</i>