

## 4

### Alguns Problemas Surgidos na Implementação

O processo de implementação do eixo medial descrito no capítulo anterior apresentou alguns problemas geométricos e numéricos que serão discutidos neste capítulo.

#### 4.1

##### O Problema da Convexidade dos Pontos

No capítulo anterior, descrevemos um algoritmo para a implementação das triangulações Regular e de Delaunay. Nesta seção apresentaremos o algoritmo do teste *Valid* para pontos com peso (parte da função *legalize*), os problemas surgidos e que não foram tratados em [4] e a solução apresentada.

Recordando o capítulo anterior, dados quatro pontos  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$ , este teste verifica se o triângulo de vértices  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  é válido em relação ao ponto  $p_4$ . Em caso negativo, fazemos um *flip* de aresta. Para pontos em  $\mathbb{R}^2$ , um triângulo é de Delaunay (ou é válido) se o círculo definido pelos seus vértices não contém nenhum outro ponto do conjunto. No caso de pontos com peso, um triângulo é regular (ou válido) se existe um círculo  $X$  ortogonal aos círculos cujos centros definem seus vértices e tal que  $\pi(X, p) > 0$  para todos os demais pontos  $p$  do conjunto.

No entanto, estes testes supõem que os pontos  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$  estão sempre em posição convexa, o que não é verdade. Assim, o programa executou *flips* como os da figura 4.2, causando erro na construção das triangulações.

Resolvemos este problema testando primeiro se os pontos estão em posição convexa. Somente em caso afirmativo, testamos a validade do triângulo e fazemos ou não o *flip*. Caso contrário, como um *flip* não faz sentido, consideramos aquela aresta como válida.

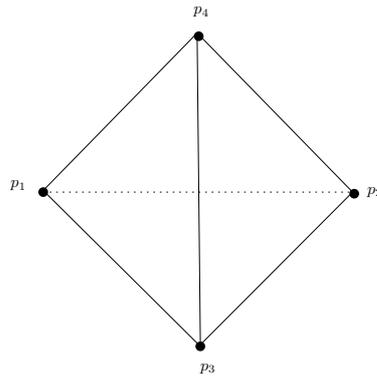


Figure 4.1: Pontos em posição convexa

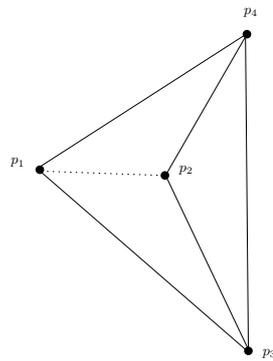


Figure 4.2: Pontos em posição não - convexa

#### 4.1.1

##### Teste da Convexidade dos Pontos

---

**Algoritmo 5** Teste da Convexidade dos Pontos

---

$A \leftarrow p_2x - p_4x; B \leftarrow p_1y - p_4y; C \leftarrow p_1x - p_4x;$

$D \leftarrow p_2y - p_4y; E \leftarrow p_2x - p_4x;$

$F \leftarrow p_3y - p_4y; G \leftarrow p_3x - p_4x; H \leftarrow p_2y - p_4y;$

$I \leftarrow A * B - C * D; J \leftarrow E * F - G * H;$

**if**  $(I * J) > 0$  **then**

    retorna verdadeiro

**end if**

---

### 4.1.2

#### Teste da Validade da Aresta

---

**Algoritmo 6** Teste da Validade da Aresta
 

---

```

1:  $r1 \leftarrow p1x * p1x + p1y * p1y - p1r * p1r$ ;  $r2 \leftarrow p2x * p2x + p2y * p2y - p2r * p2r$ ;
2:  $r3 \leftarrow p3x * p3x + p3y * p3y - p3r * p3r$ ;  $r4 \leftarrow p4x * p4x + p4y * p4y - p4r * p4r$ ;
3:  $det1 \leftarrow p1x * p2y + p1y * p3x + p2x * p3y - p1x * p3y - p2y * p3x - p2x * p1y$ ;
4:  $det2 \leftarrow p2y * p4x + p2x * p3y + p3x * p4y - p2x * p4y - p3y * p4x - p2y * p3x$ ;
5:  $det3 \leftarrow p1y * p4x + p1x * p3y + p3x * p4y - p1x * p4y - p3y * p4x - p1y * p3x$ ;
6:  $det4 \leftarrow p1y * p4x + p1x * p2y + p2x * p4y - p1x * p4y - p2y * p4x - p1y * p2x$ ;
7: if  $det1 * (r2 * det3 - r3 * det4 + r4 * det1 - r1 * det2) \geq 0$  then
8:   retorna verdadeiro
9: end if

```

---

## 4.2

### O Problema dos Pontos em Posição Não-Geral

Dizemos que um conjunto de pontos  $S$  está em *posição geral* se quaisquer quatro pontos de  $S$  não estão sobre o mesmo círculo.

A maioria dos algoritmos de triangulações de Delaunay trabalha com a hipótese de que os pontos do conjunto a ser triangulado estão em posição geral. No entanto, como uma das etapas da implementação do eixo medial consiste em calcular o diagrama de Voronoi de pontos que provêm de interseções entre círculos, não é possível evitar que hajam pontos em posição não-geral. Quando isto ocorre, a triangulação de Delaunay não é única, e a função que valida ou não uma aresta pode entrar em processo de *looping*. Uma possível solução para este problema é gerar uma pequena perturbação nos pontos em posição não-geral e refazer os cálculos. No entanto, preferimos parar o processo de legalização antes de fazer a perturbação, quando a pilha de triângulos a serem testados estivesse muito cheia.

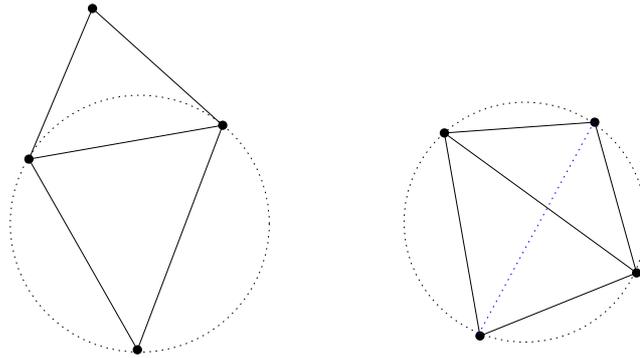


Figure 4.3: Pontos em posição geral (Delaunay única) / Pontos em posição não-geral (Delaunay não é única)

### 4.3

#### Alguns Problemas Numéricos

O processo de implementação também apresentou alguns problemas numéricos. Tivemos problemas quando precisamos saber se um ponto  $p$  era igual ou não a um determinado ponto  $q$ . Como alguns desses pontos eram resultados de cálculos e, portanto, sujeitos a erro de aproximação, uma simples função que compara as coordenadas de dois pontos para decidir se eles são iguais ou não apresentou erros. Resolvemos este problema considerando que dois pontos são iguais se a distância entre eles é muito pequena.

Um outro problema bastante similar a este ocorreu quando precisamos saber se um ponto pertencia ou não ao interior de um círculo. Afim de selecionarmos o conjunto de vértices  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$ , depois de calculados os pontos de interseção entre todos os círculos, precisávamos descartar aqueles que pertenciam ao interior de  $\mathcal{U}$ , isto é, ao interior de pelo menos uma bola de  $\mathcal{U}$ , como mostra a figura 4.4.

Consideramos que um ponto pertence ao interior de uma bola se a sua distância para o raio do círculo é menor do que o raio dele menos um valor muito pequeno. Isto evitou que os pontos de interseção na fronteira de  $\mathcal{U}$  (sujeitos a erro de aproximação) fossem descartados, como mostra a figura 4.5.

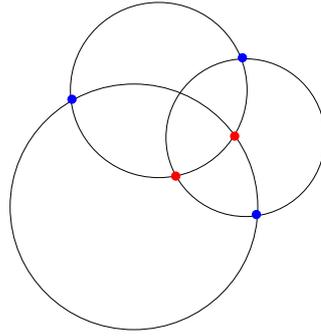


Figure 4.4: Os pontos no interior de  $\mathcal{U}$  devem ser descartados

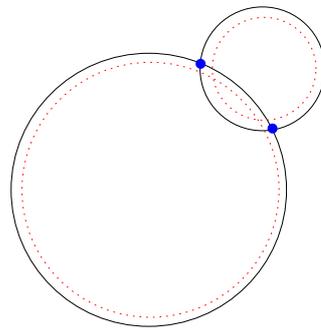


Figure 4.5: Evitou que pontos de interseção entre círculos na fronteira de  $\mathcal{U}$  fossem descartados

#### 4.4

#### O Problema dos Centros de Voronoi que Coincidem com o Centro de Bolas

Tivemos problemas com os centros de  $Vor(\mathcal{V})$  que coincidiam com o centro de alguma bola, tais como mostra a figura 4.6. Sabemos que o conjunto de pontos  $\mathcal{V}$  provêm das interseções entre as bolas, fazendo com que este conjunto esteja em posição não-geral. Assim sendo, um centro de  $Vor(\mathcal{V})$  pode ser dual a mais de um triângulo da triangulação de Delaunay de  $\mathcal{V}$  e, portanto, estar sendo representado mais de uma vez, como mostra a figura 4.7.

Na construção do eixo medial, tivemos que tomar cuidado para garantirmos que todos os nós que eram centro de bolas estavam realmente sendo representados por elas. Porque, senão, o movimento não atuaria sobre essas bolas, uma vez que não estariam sendo consideradas nós do eixo medial.

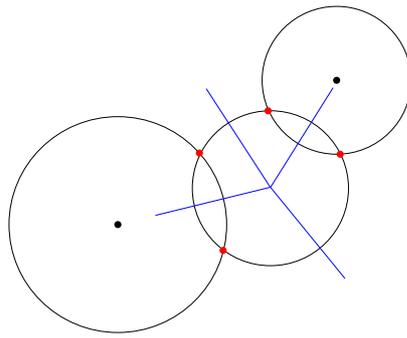


Figure 4.6: Centro de  $Vor(\mathcal{V})$  coincide com o centro de uma bola

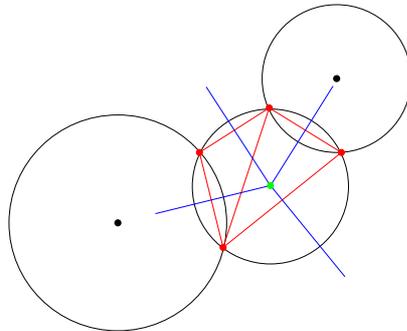


Figure 4.7: Centro de  $Vor(\mathcal{V})$  dual a dois triângulos da triangulação de Delaunay de  $\mathcal{V}$

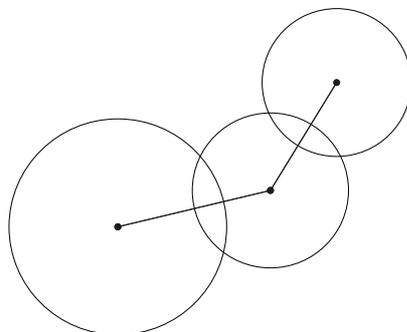


Figure 4.8: Eixo Medial : cuidado para que todos os nós estivessem sendo representados por centros de bolas, quando fosse o caso