

2 Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar os conceitos básicos de Geometria Computacional necessários para a realização deste trabalho.

2.1 Complexo Simplicial

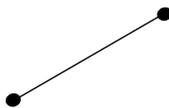
Começamos o capítulo com o conceito de complexo simplicial, que é uma estrutura combinatória simples bastante utilizada em Geometria Computacional. Como referência, indicamos [2].

Definição 2.1 (Fecho Convexo) O fecho convexo $Conv(C)$ de um conjunto finito $C = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ de pontos do \mathbb{R}^2 é o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de C , isto é, $Conv(C) = \{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_m p_m / \lambda_i \geq 0, \forall i \text{ e } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1\}$.

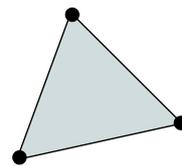
Definição 2.2 (Simplexo) Um p -simplexo em \mathbb{R}^2 , $p \leq 2$ é o fecho convexo de $p+1$ pontos v_0, \dots, v_p de tal forma que os vetores $v_1 - v_0, \dots, v_p - v_0$ sejam linearmente independentes. Os pontos v_0, \dots, v_p são chamados de vértices do simplexo e p é a dimensão do simplexo. Denotaremos por σ_T o simplexo cujo conjunto de vértices é representado por T .



2.1(a): 0-simplexo



2.1(b): 1-simplexo



2.1(c): 2-simplexo

Figure 2.1: Exemplos de simplexos

Definição 2.3 (Face de um simplexo) Seja σ um simplexo de dimensão p , $p \leq 2$ e γ um simplexo de dimensão $k \leq p$. Dizemos que γ é *face de* σ quando os vértices de γ formam um subconjunto dos vértices de σ .

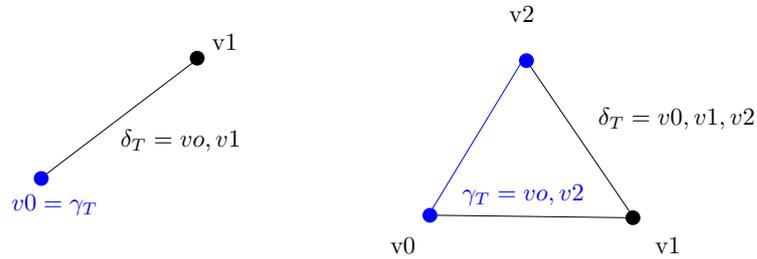
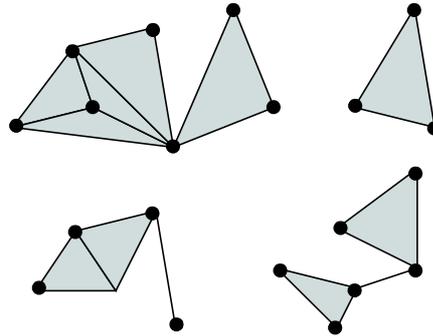


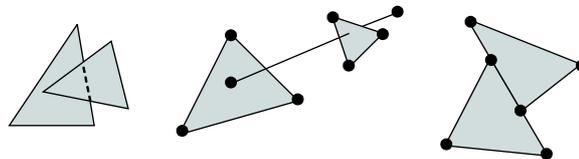
Figure 2.2: γ_T é face de δ_T

Definição 2.4 (Complexo Simplicial) Um *complexo simplicial* \mathcal{K} em \mathbb{R}^2 é um conjunto finito de simplexos em \mathbb{R}^2 tais que :

- (i) Se $\gamma \in \mathcal{K}$ e τ é face de γ , então $\tau \in \mathcal{K}$.
- (ii) Se $\gamma, \sigma \in \mathcal{K}$, então $\gamma \cap \sigma = \emptyset$ ou $\gamma \cap \sigma$ é uma face comum a γ e a σ .



2.3(a): Complexos Simpliciais



2.3(b): Não são Complexos Simpliciais

Figure 2.3: Complexo Simplicial

2.2

União de Bolas

Em Biologia, um modelo utilizado para a representação de moléculas consiste em representar um átomo por uma bola cujo raio depende do tipo de átomo. Este modelo é chamado de Modelo de Van der Waals. Daí, o grande interesse no estudo de união de bolas, também chamada de *polibolas*. Como referência, indicamos [11] e [3]. Em Geometria Computacional também existe grande interesse nas polibolas, uma vez que qualquer objeto pode ser aproximado por uma união de bolas, vide [9].

Definição 2.5 (União de Bolas) Uma *união de bolas em \mathbb{R}^2* é uma união finita de bolas fechadas de \mathbb{R}^2 . Assim, podemos escrever uma união de bolas \mathcal{U} como $\mathcal{U} = \bigcup B_i$, com $1 \leq i \leq k$, onde B_i representa uma bola fechada .

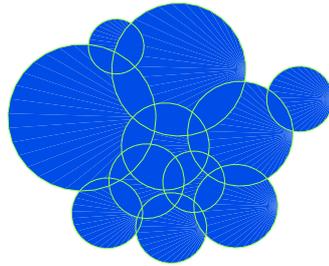
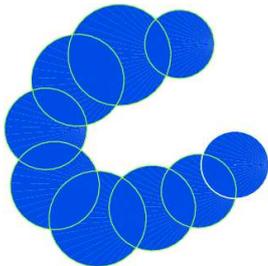
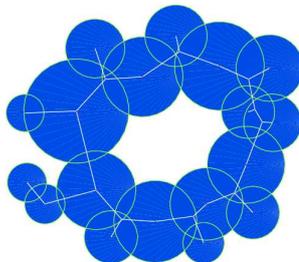


Figure 2.4: União de Bolas

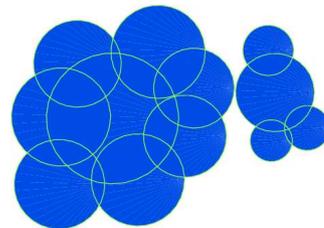
Observemos que uma união de bolas pode ter uma forma bastante geral. Ela pode ser formada por várias componentes conexas, ter buracos e cavidades.



2.5(a): Cavidade



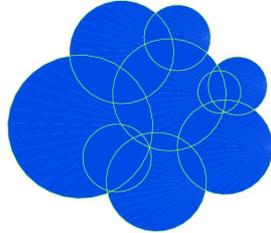
2.5(b): Buraco



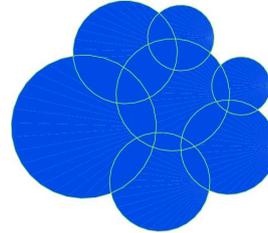
2.5(c): Componentes

Figure 2.5: Exemplos de Uniões de Bolas

É importante observar que a estrutura de uma união de bolas não é necessariamente mínima. Assim, se uma união de bolas se escreve como $\mathcal{U} = \bigcup B_i$, certas bolas podem ser supérfluas.



2.6(a): Escrita Não-Mínima



2.6(b): Escrita Mínima

Figure 2.6: Escrita Mínima

Definição 2.6 (Escrita Mínima) Seja \mathcal{U} uma união de bolas. Dizemos que $\mathcal{U} = \bigcup B_i$, $1 \leq i \leq k$ é uma *escrita mínima de \mathcal{U}* se \mathcal{U} não pode ser escrita como a união de um subconjunto dos B_i 's.

As definições abaixo serão extremamente importantes para podermos fazer uma relação entre a união de bolas e o α -shape que será apresentado mais adiante.

Definição 2.7 (Vértices) O conjunto dos *vértices* de \mathcal{U} é formado por todos os pontos provenientes das interseções entre todas as bolas de \mathcal{U} e que estão situados no bordo $\partial\mathcal{U}$ de \mathcal{U} . Denotaremos este conjunto por \mathcal{V} .

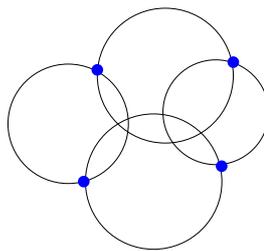


Figure 2.7: Vértices da União de Bolas

Definição 2.8 (0 - componente) Uma *0-componente do bordo de \mathcal{U}* é um subconjunto de \mathcal{V} contido na interseção entre duas bolas de \mathcal{U} . Note que uma mesma 0-componente pode conter um ou dois pontos de \mathcal{V} .

Definição 2.9 (1 - componente) Uma *1-componente do bordo de \mathcal{U}* é o arco de círculo determinado por dois pontos de \mathcal{V} consecutivos no bordo de \mathcal{U} .

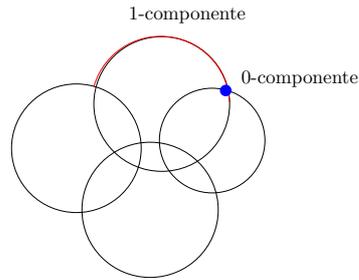
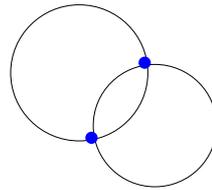
Figure 2.8: Componentes do $\partial\mathcal{U}$ 

Figure 2.9: 0-componente formada por dois pontos

Observemos que o conjunto das 0-componentes adicionado ao conjunto das 1-componentes do bordo de \mathcal{U} formam todo o bordo de \mathcal{U} .

2.3 Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi

Nesta seção, apresentaremos a Triangulação de Delaunay e seu grafo dual, chamado de Diagrama de Voronoi, que são estudados e aplicados em diversas áreas da matemática. A Triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos em \mathbb{R}^2 é uma coleção de simplexos que satisfazem a propriedade de *círculo vazio*: para cada simplexo, podemos encontrar um círculo que contém os vértices deste simplexo e que não contém nenhum outro ponto. Como referência, podemos citar [8], [6], [2] e também [13].

2.3.1 Diagrama de Voronoi

Dado um conjunto $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ de pontos no plano, cada elemento x_i determina uma região $V_i = \{x \in \mathbb{R}^2 / d(x_i, x) \leq d(x_j, x), \forall j \neq i\}$, onde $d(\cdot, \cdot)$ denota a distância Euclidiana em \mathbb{R}^2 . O conjunto de todos os V_i 's formam uma partição de \mathbb{R}^2 . Esta decomposição é chamada de *Diagrama de Voronoi de S* e é denotada por $Vor(S)$.

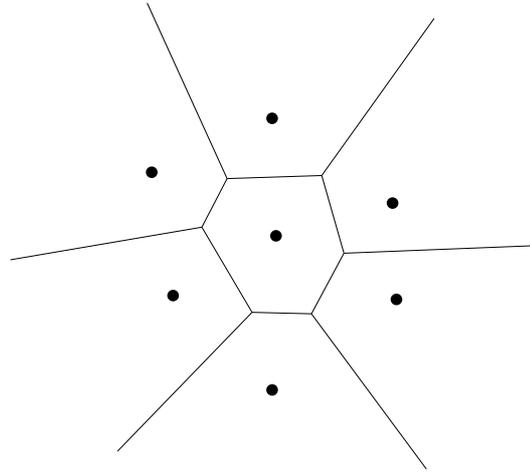


Figure 2.10: Diagrama de Voronoi

Propriedades do Diagrama de Voronoi

Teorema 2.1 As regiões de Voronoi correspondentes a um par de pontos x_i , x_j de S possuem uma aresta em comum se e somente se existe um círculo contendo x_i e x_j e tal que todos os demais pontos de S sejam exteriores a este círculo.

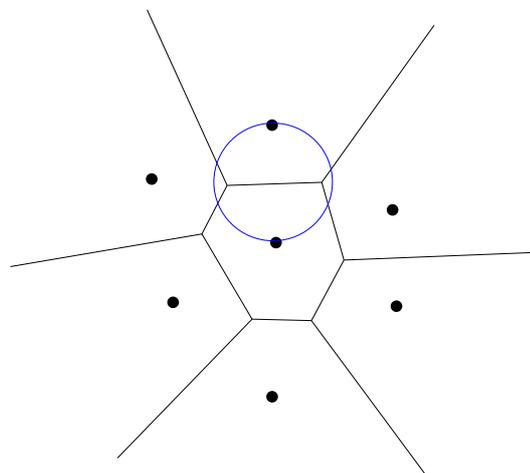


Figure 2.11: Propriedade 1

Teorema 2.2 Todo centro v de $Vor(S)$ é comum a pelo menos três regiões de Voronoi e é centro de um círculo $C(v)$ definido pelos pontos de S correspondentes às regiões que se encontram em v . Além disso, $C(v)$ não contém nenhum outro ponto de S .

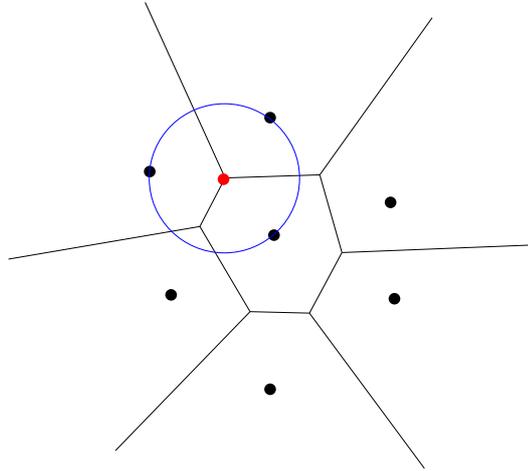


Figure 2.12: Propriedade 2

Teorema 2.3 Uma região de Voronoi é ilimitada se e somente se o ponto correspondente x_i pertence à fronteira de $Conv(S)$.

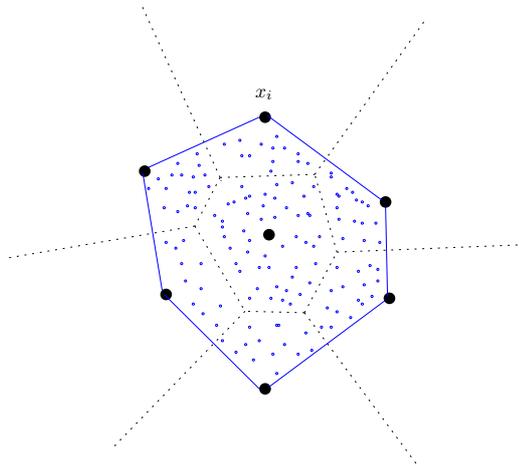


Figure 2.13: Propriedade 3

2.3.2 Grafo Dual

No Diagrama de Voronoi, cada elemento de S está associado a uma região de $Vor(S)$. O grafo dual de $Vor(S)$ tem por vértices os elementos de S e por arestas os pares de S cujas regiões de Voronoi são vizinhas. Considere agora o diagrama obtido representando estas arestas pelos segmentos de reta que ligam os elementos respectivos de S . Tal diagrama é chamado de *Triangulação de Delaunay de S* , o que nos dá a seguinte definição:

Definição 2.10 (Triangulação de Delaunay) Dado um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ em posição geral, isto é, quatro pontos quaisquer de S não estão sobre o mesmo círculo, a *Triangulação de Delaunay $DT(S)$* consiste em :

- (i) Todos os 2-simplexos σ_T , com $T \subseteq S$ tais que o círculo circunscrito a T não contém nenhum ponto de S e
- (ii) Todos os k - simplexos ($k = 0, 1$) que são faces de algum outro simplexo em $DT(S)$.

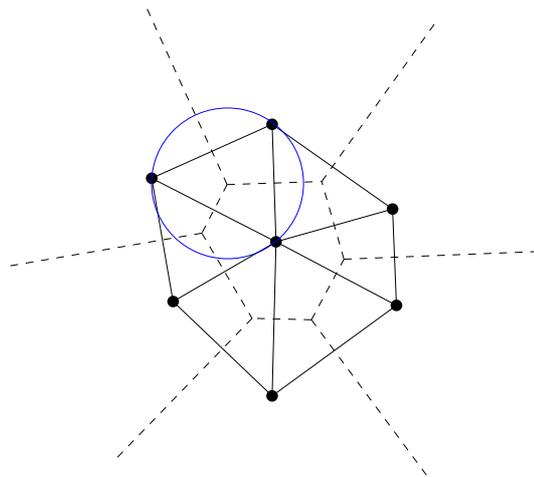


Figure 2.14: Triangulação de Delaunay

Observemos que a fronteira do fecho convexo dos pontos está incluída na Triangulação de Delaunay.

2.4

Triangulação Regular e Diagrama de Potências

Nesta seção apresentaremos os conceitos da Triangulação Regular e do Diagrama de Potências que são generalizações da Triangulação de Delaunay e do Diagrama de Voronoi para pontos com peso. Um ponto com peso (ou bola) é denotado por $p = (x, r)$, onde $x \in \mathbb{R}^2$ é dito *posição* de p e $r \in \mathbb{R}$ é dito *peso* de p . Para maiores detalhes sobre este assunto, sugerimos a referência [2].

2.4.1

Diagrama de Potências

Definição 2.11 (Potência) Seja p_0 um ponto com peso e seja $x \in \mathbb{R}^2$. A *potência de x em relação a p_0* é definida por $\pi(p_0, x) = d(x_0, x)^2 - r_0^2$.

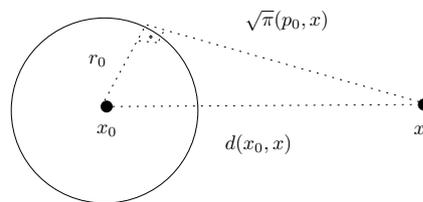


Figure 2.15: Potência de x em relação a p_0

Definição 2.12 (Eixo Radical) Sejam p_0, p_1 duas bolas. O *eixo radical* $ER(p_0, p_1)$ é o conjunto de pontos definido por $ER(p_0, p_1) = \{x \in \mathbb{R}^2 / \pi(p_0, x) = \pi(p_1, x)\}$.

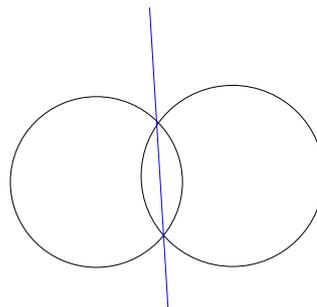


Figure 2.16: Eixo Radical entre duas bolas

Observamos que o eixo radical é uma reta porque consideramos a potência como a distância entre um ponto com peso e um ponto em \mathbb{R}^2 . Podemos definir outras distâncias entre eles de modo que o eixo radical tenha a forma de um arco, por exemplo. Para maiores detalhes sobre esta discussão, sugerimos, também, a referência [2].

Definição 2.13 (Distância π) Para dois pontos com peso $p_1 = (x_1, r_1)$ e $p_2 = (x_2, r_2)$, defina $\pi(p_1, p_2) = d(x_1, x_2)^2 - r_1^2 - r_2^2$, onde $d(\cdot)$ denota a distância Euclidiana em \mathbb{R}^2 .

Definição 2.14 (Ortogonalidade) Duas bolas p_0, p_1 são ditas *ortogonais* se $\pi(p_0, p_1) = 0$.

Definição 2.15 (Centro Radical) Sejam p_0, p_1, p_2 três bolas cujos centros são linearmente independentes. O ponto de interseção dos C_2^3 eixos radicais é chamado de *centro radical*. O centro radical é o centro de uma bola X ortogonal à p_0, p_1 e p_2 .

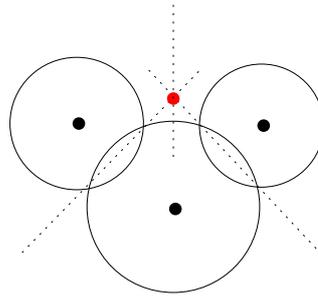


Figure 2.17: Centro Radical

Definição 2.16 (Diagrama de Potências) O Diagrama de Potências é definido para um conjunto finito de pontos com peso. Seja $S = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ um tal conjunto. Assim, cada elemento p_i de S determina uma região $W_i = \{p \in \mathbb{R}^2 / \pi(p_i, p) \leq \pi(p_j, p), \forall j \neq i\}$. O conjunto de todos os W_i 's formam uma partição de \mathbb{R}^2 . Esta decomposição é chamada de *Diagrama de Potências* (ou *Laguerre*) de S e é denotada por $Pot(S)$.

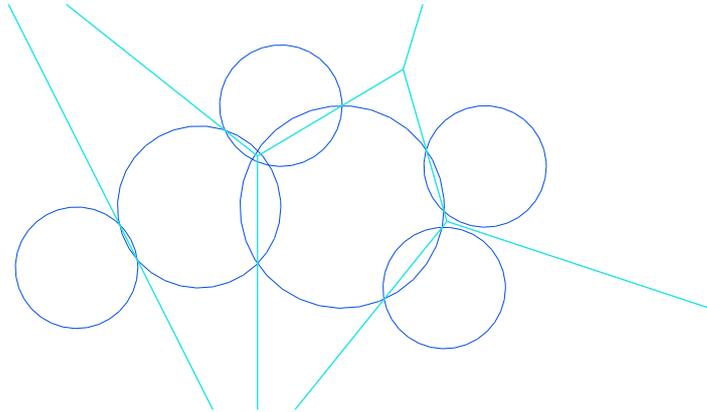


Figure 2.18: Diagrama de Potências

Definição 2.17 (Simplexo Regular) Seja T um conjunto de três bolas. O simplexo σ_T é dito *regular* se existe uma bola X tal que $\pi(X, p_i) = 0, \forall p_i \in T$ e $\pi(X, p_j) > 0, \forall p_j \in S - T$.

Definição 2.18 (Triangulação Regular) A coleção de todos os 2-simplexos regulares define a *Triangulação Regular* de S , denotada por $\mathcal{R}(S)$.

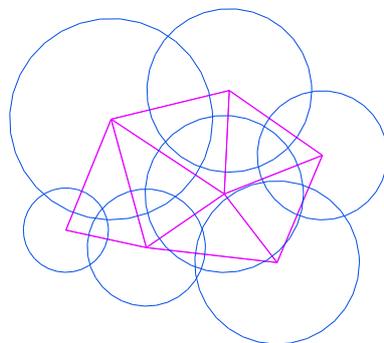


Figure 2.19: Triangulação Regular de pontos com peso

2.5 α -Shape

O conceito de α -shape formaliza a noção intuitiva da “forma” de um conjunto de pontos, que aparece frequentemente nas ciências computacionais. Um α -shape é um objeto geométrico concreto que é unicamente determinado por um conjunto particular de pontos e que não é necessariamente convexo nem conexo.

Definição 2.19 (Bola Vazia / Simplexo α -exposto) Para $0 < \lambda < \infty$ uma λ -bola é uma bola aberta de raio λ . Uma certa λ -bola b é dita *vazia* se $b \cap S = \emptyset$. Assim, um k -simplexo σ_T ($k = 0, 1$) é dito α -exposto se existe uma α -bola vazia com $T = \partial b \cap S$.

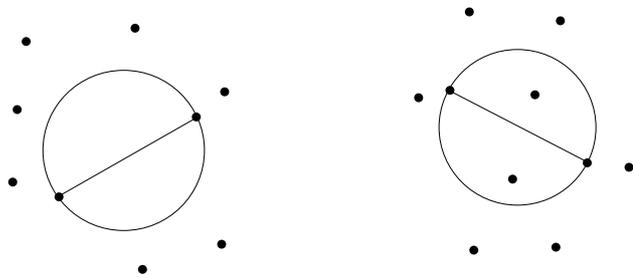


Figure 2.20: simplexo α -exposto / simplexo não α -exposto

Definição 2.20 (α -complexo) Para um conjunto de pontos $S \subset \mathbb{R}^2$ e $0 \leq \alpha \leq \infty$, o α -complexo \mathcal{C}_α de S é um subcomplexo simplicial de $DT(S)$. Um simplexo σ_T de $DT(S)$ está em \mathcal{C}_α

- (i) se o círculo de menor raio r que passa pelos vértices de σ_T não contém nenhum outro ponto de $S - T$ e é tal que $r < \alpha$ ou
- (ii) se σ_T é face de outro simplexo em \mathcal{C}_α .

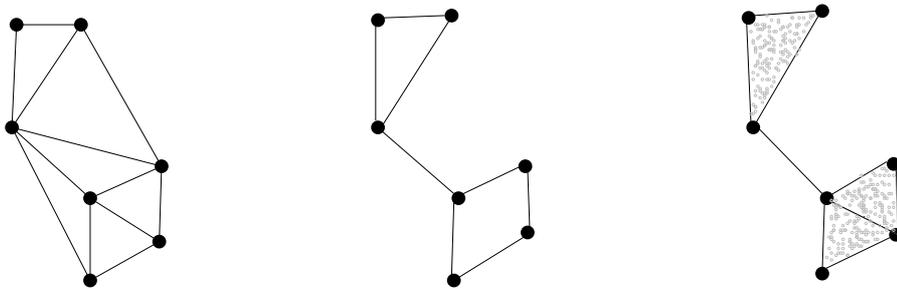


Figure 2.21: $DT(S)$ / $\partial\mathcal{S}_\alpha$ / \mathcal{C}_α

Definição 2.21 (α -shape) O α -shape \mathcal{S}_α de um conjunto de pontos $S \subseteq \mathbb{R}^2$ consiste na realização geométrica do complexo simplicial \mathcal{C}_α .

Teorema 2.4 O bordo $\partial\mathcal{S}_\alpha$ do α -shape de um conjunto de pontos S em \mathbb{R}^2 consiste em todos os k -simplexos ($k = 0, 1$) de S que são α -expostos.

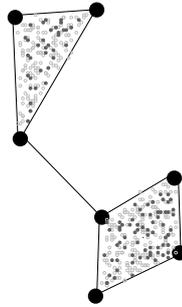


Figure 2.22: \mathcal{S}_α

2.6

α -Shape com peso

O conceito de α -shape também pode ser generalizado para um conjunto de pontos com peso. Como referência, indicamos [4].

Definição 2.22 (α -complexo) Para um conjunto de pontos $S \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e $0 \leq \alpha \leq \infty$, o α -complexo \mathcal{C}_α de S é um subcomplexo simplicial de $\mathcal{R}(S)$. Sejam σ_T um simplexo de $\mathcal{R}(S)$ e $X = (x, w)$ o círculo de menor peso ortogonal aos círculos cujos centros são os vértices de σ_T .

σ_T está em \mathcal{C}_α se

- (i) $w^2 < \alpha$ e $\pi(p, X) > 0$, para todo $p \in S - T$ ou
- (ii) σ_T é face de outro simplexo em $\mathcal{R}(S)$.

Definição 2.23 (α -shape) O α -shape \mathcal{S}_α de um conjunto de pontos com peso S consiste na realização geométrica do complexo simplicial \mathcal{C}_α .

Definição 2.24 (Simplexo α -exposto) Considere um conjunto S de pontos com peso. Um k -simplexo σ_T ($k = 0, 1$) é dito α -exposto se existe um ponto com peso $X = (x, \alpha)$ tal que $\pi(p, X) = 0$, para todo $p \in T$ e $\pi(q, X) > 0$, para todo $q \in S - T$.

Teorema 2.5 O bordo $\partial\mathcal{S}_\alpha$ do α -shape de um conjunto de pontos com peso S consiste em todos os k -simplexos ($k = 0, 1$) de S que são α -expostos.

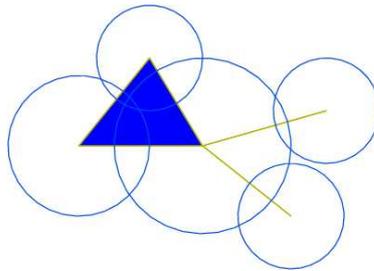


Figure 2.23: α -shape de pontos com peso

0-shape

Propriedade: Suponha que a união de bolas \mathcal{U} está na sua escrita mínima. Um simplexo σ_T de $\mathcal{R}(S)$ está no 0-shape se, e somente se, as bolas correspondentes se interceptam.

De fato, se σ_T está no 0-shape, existe um ponto X que define a mesma potência negativa em relação às bolas cujos centros determinam σ_T . Assim, X é interior à todas as bolas que definem σ_T , o que significa que X é um ponto comum às bolas que definem σ_T .

Reciprocamente, se as bolas cujos centros definem σ_T se interceptam, o ponto X que realiza a mesma potência em relação às bolas de σ_T deve estar no interior de todas as bolas correspondentes. Assim, a potência de X em relação às bolas é negativa e o simplexo σ_T está no 0-shape.

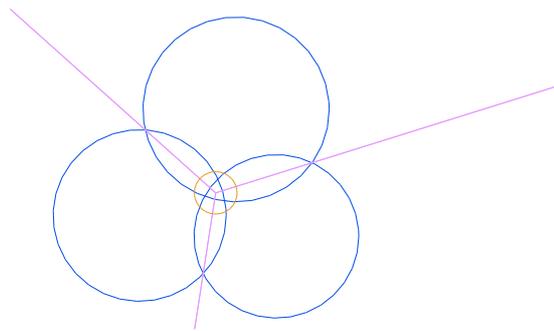


Figure 2.24: Círculo Ortogonal

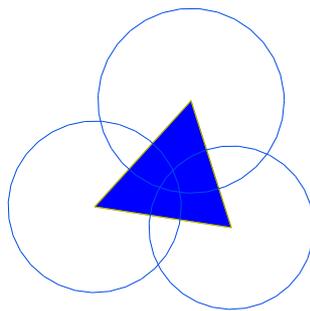


Figure 2.25: 0-shape

Apresentaremos abaixo o conceito de *dualidade* que relaciona a estrutura do α -shape com a união de bolas.

Definição 2.25 (Dualidade) Sejam γ uma 0-componente do bordo de \mathcal{U} e σ o 1-simplexo do α -shape cujos vértices são os centros das bolas cuja interseção

contém γ . Analogamente, sejam γ uma 1-componenete do bordo de \mathcal{U} e σ o 0-simplexo do α -shape cujo vértice é o centro da bola que contém γ . Dizemos que γ e σ são *duais*.

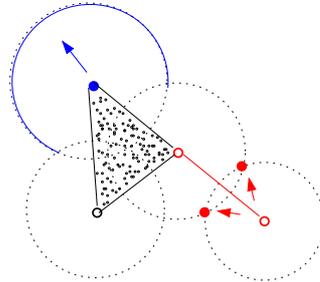


Figure 2.26: Dualidade

Definição 2.26 (Aresta Singular / Componente Regular) Uma aresta no bordo $\partial\mathcal{S}_\alpha$ do α -shape é *singular* se ela não é uma face de um simplexo de dimensão 2 do α -complexo \mathcal{C}_α . Se removermos as arestas singulares do α -shape \mathcal{S}_α , as componentes conexas restantes são ditas *componentes regulares*.

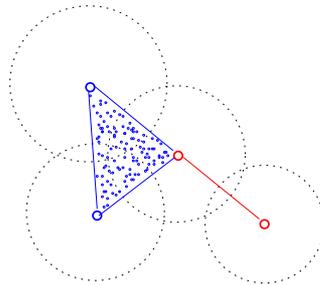


Figure 2.27: Aresta Singular e Componente Regular

2.7 Eixo Medial

O eixo medial de um objeto é uma estrutura que carrega informações sobre a topologia deste objeto, vide figura 2.28. A complexidade do eixo medial está relacionada com a complexidade do objeto. Por isso, se quisermos simplificar um objeto, é natural pensarmos em simplificar seu eixo medial. Esta estrutura possui várias aplicações em geração de malhas, reconstrução de curvas e superfícies e em modelagem geométrica. Em [12], por exemplo, temos um trabalho teórico que mostra o que acontece com o eixo medial de uma curva sob a ação do movimento por curvatura.

Definição 2.27 (Eixo Medial) O *eixo medial* \mathcal{X} de um objeto \mathcal{O} é o fecho do conjunto de pontos $m \in \mathcal{O}$ tais que a distância de m ao bordo de \mathcal{O} está realizada em pelo menos dois pontos.

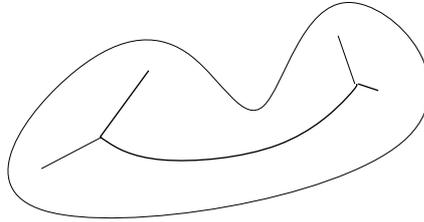


Figure 2.28: Eixo Medial

2.8

Eixo Medial de União de Bolas

Em [11], Nina Amenta nos dá uma caracterização para o eixo medial de uma união de bolas e propõe um algoritmo que será descrito na próxima seção. Descrevemos abaixo alguns dos resultados que podem ser encontrados nesta referência.

Teorema 2.6 (Eixo Medial de União de Bolas–Attali [1]) Sejam \mathcal{U} uma união de bolas, \mathcal{V} seus vértices e \mathcal{S}_α seu α -shape. O *eixo medial* \mathcal{X} de \mathcal{U} consiste:

- (i) nas arestas singulares de \mathcal{S}_α e
- (ii) no subconjunto das separatrizes do Diagrama de Voronoi $Vor(\mathcal{V})$ cujo ponto mais próximo da fronteira $\partial\mathcal{U}$ de \mathcal{U} é um vértice em \mathcal{V} .

Teorema 2.7 (Eixo Medial de União de Bolas–Amenta) Sejam \mathcal{U} uma união de bolas, \mathcal{V} seus vértices e \mathcal{S}_α seu α -shape. O *eixo medial* \mathcal{X} de \mathcal{U} consiste:

- (i) nas arestas singulares de \mathcal{S}_α e
- (ii) na interseção das separatrizes do Diagrama de Voronoi $Vor(\mathcal{V})$ com as componentes regulares de \mathcal{S}_α .

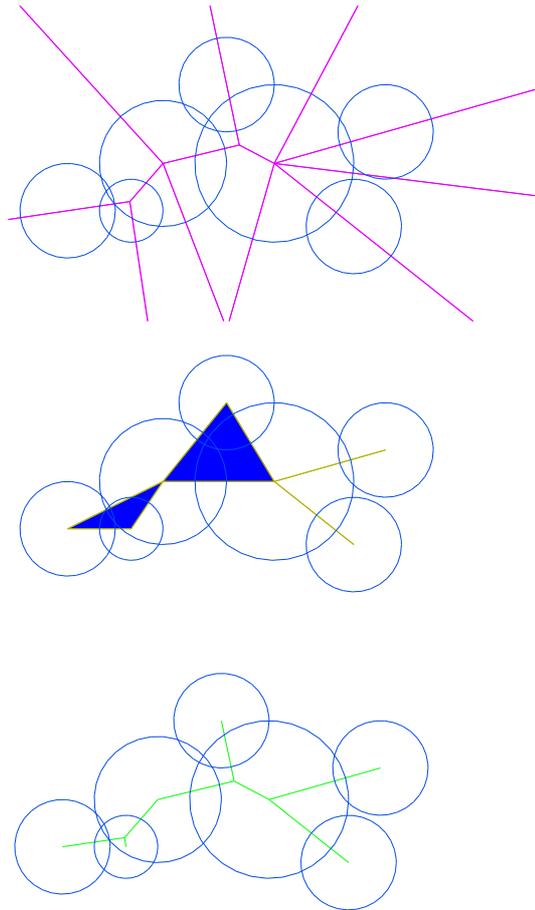


Figure 2.29: Eixo Medial de União de Bolas

No final desta seção, faremos a demonstração do teorema 2.7. Mas antes disto, apresentaremos algumas observações e alguns lemas que serão utilizados nesta demonstração.

Observação 2.1 Para cada ponto $x \in \mathcal{U} - \mathcal{S}_\alpha$ existe um único ponto $u \in \partial\mathcal{U}$ tal que para todo $v \in \partial\mathcal{U}$, $d(u,x) < d(v,x)$.

Observação 2.2 Se $y \in \sigma_T$, onde σ_T é um simplexo em $\partial\mathcal{S}_\alpha$, então y é centro de um círculo b tal que a face dual a σ_T , $\gamma_T \subseteq \partial b \subseteq \partial\mathcal{U}$.

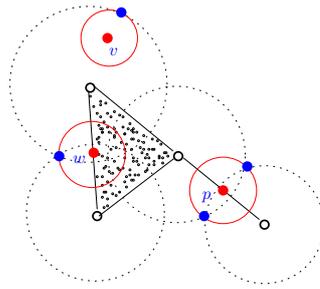


Figure 2.30: Pontos mais próximos

Observação 2.3 Uma aresta singular de \mathcal{S}_α é dual a uma 0-componente do bordo de \mathcal{U} contendo dois pontos do conjunto de vértices \mathcal{V} de \mathcal{U} .

Um 1-simplexo que pertence a fronteira $\partial\mathcal{C}$ de uma componente regular \mathcal{C} de \mathcal{S}_α é dual a uma 0-componente do bordo de \mathcal{U} contendo um único ponto do conjunto de vértices \mathcal{V} de \mathcal{U} .

Um 0-simplexo em $\partial\mathcal{C}$ pode ser dual a mais de uma 1-componente do bordo de \mathcal{U} , vide figura 2.31.

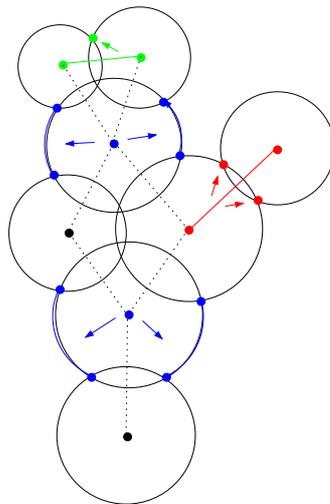


Figure 2.31: Dualidade

Lema 2.1 Todo vértice da fronteira $\partial\mathcal{S}_\alpha$ do α -shape de \mathcal{U} pertence ao eixo medial \mathcal{X} de \mathcal{U} .

Demonstração 2.1 Considere um vértice x de $\partial\mathcal{S}_\alpha$, isto é, um 0-simplexo σ do $\partial\mathcal{S}_\alpha$. A dimensão de γ , dual de σ é 1. Pela observação 2.2, x é centro de uma bola b , com $\gamma \subseteq \partial b \subseteq \partial\mathcal{U}$. Como a dimensão de γ é 1, ∂b contém mais de um ponto de $\partial\mathcal{U}$ e x é um ponto do eixo medial. ■

Lema 2.2 Qualquer ponto pertencente a uma aresta singular de \mathcal{S}_α pertence ao eixo medial \mathcal{X} de \mathcal{U} .

Demonstração 2.2 *Sejam σ_T uma aresta singular e x um ponto contido em σ_T . Pela observação 2.3, o dual γ_T consiste em dois vértices $p, q \in \partial\mathcal{U}$. Pela observação 2.2, p e q são os vértices mais próximos de x em $\partial\mathcal{U}$ e x pertence ao eixo medial. ■*

Lema 2.3 Seja \mathcal{C} uma componente regular de \mathcal{S}_α . Então, para qualquer ponto $x \in \mathcal{C}$, ou

- (i) x tem exatamente um ponto mais próximo $p \in \partial\mathcal{U}$ e p é um vértice de \mathcal{U}
- (ii) x tem mais de um ponto mais próximo na $\partial\mathcal{U}$ e pelo menos dois deles são vértices de \mathcal{U} .

Demonstração 2.3 *Consideremos primeiro um ponto x no interior de \mathcal{C} . Nós afirmamos que qualquer ponto mais próximo de x é um vértice de $\partial\mathcal{U}$. Assuma por contradição que existe um ponto p mais próximo de x tal que $p \in \sigma_T$ para alguma face σ_T com dimensão maior do que zero. Considere a bola b centrada em x e tocando em p . Como p é o ponto mais próximo de x em $\partial\mathcal{U}$, $b \subseteq \mathcal{U}$, o segmento px intercepta a fronteira de \mathcal{S}_α em algum ponto y . Pela observação 2.2, existe uma bola b_y centrada em y , com $\sigma_T \subseteq \partial b_y \subseteq \partial\mathcal{U}$, e como $y \in px$, o ponto p é também um ponto mais próximo de y . Como y está mais próximo de p do que x , $b_y \subset b$, de modo que o conjunto $\sigma_T - p$, de dimensão maior do que zero, pertence ao interior de $b - p$. Como σ_T é parte de $\partial\mathcal{U}$, isto contradiz $b \subseteq \mathcal{U}$. Então, quando um ponto x tiver um ponto mais próximo em $\partial\mathcal{U}$ (i) ou mais de um (ii), em ambos os casos todo ponto mais próximo deve ser um vértice de $\partial\mathcal{U}$.*

Consideremos agora o caso em que $x \in \partial\mathcal{C}$. Seja γ_T o simplexo de menor dimensão na $\partial\mathcal{C}$ contendo x . Se γ_T é um simplexo de dimensão 1, então o único ponto mais próximo de x na $\partial\mathcal{U}$ é o dual δ_T , que é um vértice de $\partial\mathcal{U}$. Por outro lado, se γ_T é um 0-simplexo, seu dual δ_T contém infinitos pontos mais próximos de x em $\partial\mathcal{U}$, sendo que pelo menos dois deles são vértices de $\partial\mathcal{U}$, vide observação 2.3. ■

demonstração do Teorema 2.7 *Primeiro, mostraremos que qualquer ponto que pertence a uma aresta singular de \mathcal{S}_α ou que pertence ao mesmo tempo a uma componente regular de \mathcal{S}_α e ao $\text{Vor}(\mathcal{V})$ está no eixo medial. Pelo lema 2.2, qualquer ponto em uma aresta singular de \mathcal{S}_α está no eixo medial. Qualquer ponto x em uma componente regular pertencente a $\text{Vor}(\mathcal{V})$ tem, claramente, mais de um vértice de \mathcal{U} como ponto mais próximo de $\partial\mathcal{U}$. O lema 2.3 implica que nenhum outro ponto em $\partial\mathcal{U}$ é mais próximo de x e, portanto,*

x deve estar no eixo medial de \mathcal{U} .

Agora considere um ponto m no eixo medial de \mathcal{U} . Pela observação 2.1, m não pode ser um ponto de $\mathcal{U} - \mathcal{S}_\alpha$. Por outro lado, se m está em alguma componente regular, pelo lema 2.3, m deve ter mais de um ponto mais próximo em \mathcal{V} , isto é, m pertence a $\text{Vor}(\mathcal{V})$. ■

No próximo capítulo mostraremos uma implementação para o eixo medial de união de bolas cujo algoritmo se baseia nos resultados apresentados nesta seção.