

Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

**Evolução de União de Bolas a partir
do Eixo Medial**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Pós-graduação em Matemática

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2005

Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

**Evolução de União de Bolas a partir do Eixo
Medial**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2005

Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

Evolução de União de Bolas a partir do Eixo Medial

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcos Craizer

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Ana Tereza Ribeiro de Vasconcelos

Laboratório Nacional de Computação Científica — LNCC

Prof. Luiz Carlos Pacheco R. Velho

Instituto de Matemática Pura e Aplicada — IMPA

Prof. Sinésio Pesco

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 21 de Fevereiro de 2005

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ.

Ficha Catalográfica

Ferreira, Cynthia de Oliveira Lage

Evolução de União de Bolas a partir do Eixo Medial/
Cynthia de Oliveira Lage Ferreira; orientador: Marcos Craizer.
— Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática,
2005.

v., 103 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade
Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. União de Bolas. 3. Eixo Me-
dial. 4. Alpha-Shape. 5. Geometria Computacional. I. Craizer,
Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Aos meus pais, irmão e família e em especial ao meu namorado Alexandre Paiva Barreto pelo carinho.

Ao meu professor orientador Marcos Craizer pelo apoio e incentivo para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos da PUC-Rio, em especial à Thomas Lewiner e João Domingos Gomes da Silva Junior.

Aos professores do departamento de Matemática, em especial à Hélio Lopes, Marcos Alexandrino e Geovan Tavares.

Ao pessoal do departamento de Matemática pela a ajuda de todos os dias, em particular à Creuza e Orlando.

À FAPERJ e à CAPES pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo

Ferreira, Cynthia de Oliveira Lage; Craizer, Marcos. **Evolução de União de Bolas a partir do Eixo Medial**. Rio de Janeiro, 2005. 103p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O estudo computacional de uniões de bolas possui aplicações em diversas áreas da Matemática. O objetivo principal deste trabalho é propor uma simplificação de união de bolas em \mathbb{R}^2 através de um movimento que obedece as direções do eixo medial, procurando preservar os grandes elementos geométricos da união de bolas. A desconexão ou não das formas é um aspecto essencial da evolução. Em alguns casos, pode significar uma divisão importante do objeto. Em outros, pode ser indesejada, pois gostaríamos de ter uma versão conexa simplificada da forma.

Palavras-chave

União de Bolas; Eixo Medial; Geometria Computacional.

Abstract

Ferreira, Cynthia de Oliveira Lage; Craizer, Marcos. **Evolution of Union of Balls from its Medial Axis**. Rio de Janeiro, 2005. 103p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The computational study of unions of balls has applications in several domains of the Mathematics. The purpose of this dissertation is to propose a simplification of the union of balls in \mathbb{R}^2 through a movement that obeys the direction of the medial axis in order to simplify it, maintaining the major geometric elements of its shape. The disconnection of the shape is an essential property of the evolution. In some cases, it could mean an important division of the object. In others, it may be undesirable because we would like to have a simplified version connected of this shape.

Keywords

Union of Balls; Medial Axis; Computational Geometry.

Sumário

1	Introdução	13
2	Preliminares	16
2.1	Complexo Simplicial	16
2.2	União de Bolas	18
2.3	Triangulação de Delaunay e Diagrama de Voronoi	20
2.4	Triangulação Regular e Diagrama de Potências	24
2.5	α -Shape	27
2.6	α -Shape com peso	29
2.7	Eixo Medial	31
2.8	Eixo Medial de União de Bolas	32
3	Implementação do Eixo Medial	37
3.1	Classes	37
3.2	Class Vert	38
3.3	Class Edge	38
3.4	Class Face	38
3.5	Class Polyhedron	39
3.6	Class Triangulation	40
3.7	Class Point	42
3.8	Class Circle	44
3.9	Class IPoint	45
3.10	Class NPoint	46
3.11	Class NIPoint	46
3.12	Class Node	46
3.13	Class Link	46
3.14	Class Medial Axis	47
3.15	Class Join	47
4	Alguns Problemas Surgidos na Implementação	49
4.1	O Problema da Convexidade dos Pontos	49
4.2	O Problema dos Pontos em Posição Não-Geral	51
4.3	Alguns Problemas Numéricos	52
4.4	O Problema dos Centros de Voronoi que Coincidem com o Centro de Bolas	53
5	Evolução	55
5.1	Possíveis Aplicações	55
5.2	Evolução baseada no Eixo Medial	56
5.3	Variações do Movimento	58
5.4	Sobre a Implementação	59
6	Resultados	60
6.1	Exemplo 1	61

6.2	Exemplo 2	64
6.3	Exemplo 3	67
6.4	Exemplo 4	71
6.5	Exemplo 5	75
6.6	Exemplo 6	80
6.7	Exemplo 7	87
6.8	Exemplo 8	91
6.9	Exemplo 9	95
7	Conclusão e trabalhos futuros	100
	Referências Bibliográficas	102

Lista de figuras

2.1	Exemplos de simplexos	16
2.2	γ_T é face de δ_T	17
2.3	Complexo Simplicial	17
2.4	União de Bolas	18
2.5	Exemplos de Uniões de Bolas	18
2.6	Escrita Mínima	19
2.7	Vértices da União de Bolas	19
2.8	Componentes do $\partial\mathcal{U}$	20
2.9	0-componente formada por dois pontos	20
2.10	Diagrama de Voronoi	21
2.11	Propriedade 1	21
2.12	Propriedade 2	22
2.13	Propriedade 3	22
2.14	Triangulação de Delaunay	23
2.15	Potência de x em relação a p_0	24
2.16	Eixo Radical entre duas bolas	24
2.17	Centro Radical	25
2.18	Diagrama de Potências	26
2.19	Triangulação Regular de pontos com peso	26
2.20	simplexo α -exposto / simplexo não α -exposto	27
2.21	$DT(S)$ / $\partial\mathcal{S}_\alpha$ / \mathcal{C}_α	27
2.22	\mathcal{S}_α	28
2.23	α -shape de pontos com peso	29
2.24	Círculo Ortogonal	30
2.25	0-shape	30
2.26	Dualidade	31
2.27	Aresta Singular e Componente Regular	31
2.28	Eixo Medial	32
2.29	Eixo Medial de União de Bolas	33
2.30	Pontos mais próximos	34
2.31	Dualidade	34
3.1	Triângulo T que contém todos os pontos de \mathcal{B}	41
3.2	b pertence ao interior de t / b pertence a uma aresta e de t	42
3.3	Legalize: Esta função troca arestas ilegais por legais através de <i>edge flips</i>	42
4.1	Pontos em posição convexa	50
4.2	Pontos em posição não - convexa	50
4.3	Pontos em posição geral (Delaunay única) / Pontos em posição não-geral (Delaunay não é única)	52
4.4	Os pontos no interior de \mathcal{U} devem ser descartados	53
4.5	Evitou que pontos de interseção entre círculos na fronteira de \mathcal{U} fossem descartados	53
4.6	Centro de $Vor(\mathcal{V})$ coincide com o centro de uma bola	54

4.7	Centro de $Vor(\mathcal{V})$ dual a dois triângulos da triangulação de Delaunay de \mathcal{V}	54
4.8	Eixo Medial : cuidado para que todos os nós estivessem sendo representados por centros de bolas, quando fosse o caso	54
5.1	Nem todos os centros de bolas são nós do eixo medial	56
5.2	Cálculo da direção do movimento de uma bola	57
6.1	Centopéia	61
6.2	Centopéia: Primeiro Movimento	61
6.3	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	62
6.4	Centopéia: Segundo Movimento	62
6.5	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	63
6.6	Bolas dispostas formando um "U": cavidade	64
6.7	Primeiro Movimento: arredondamento da forma	64
6.8	Primeiro Movimento: desconectou	65
6.9	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	65
6.10	Segundo Movimento: arredondamento da forma	66
6.11	Segundo Movimento: evitou o desconectamento	66
6.12	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	66
6.13	Configuração com uma bola com 3 arestas incidentes	67
6.14	Primeiro Movimento: desconectamento rápido	68
6.15	Segundo Movimento: não evitou o desconectamento	68
6.16	Terceiro Movimento: evitou o desconectamento	69
6.17	Terceiro Movimento: evitou o desconectamento	69
6.18	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	70
6.19	Configuração com buraco e algumas cavidades	71
6.20	Primeiro Movimento: variação dos raios causa o desconectamento da forma	71
6.21	Primeiro Movimento: variação dos raios causa o desconectamento da forma	72
6.22	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	72
6.23	Segundo Movimento	73
6.24	Segundo Movimento	73
6.25	Segundo Movimento: eliminação das cavidades	73
6.26	Segundo Movimento: arredondamento da forma	73
6.27	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	74
6.28	Espiral	75
6.29	Ramos caminham em direção ao eixo medial	75
6.30	Alinhamento das bolas ao longo do eixo medial	76
6.31	O Desconectamento da forma é inevitável	76
6.32	Desconectamento	76
6.33	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	77
6.34	Ramos caminham em direção ao eixo medial	77
6.35	Alinhamento das bolas ao longo do eixo medial	78
6.36	Alinhamento das bolas ao longo do eixo medial	78
6.37	Desenrolamento do espiral	78
6.38	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	79
6.39	Boneco	80

6.40	Simplificação	81
6.41	Desconectamento	81
6.42	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	82
6.43	Simplificação	82
6.44	Simplificação	83
6.45	Simplificação	83
6.46	Simplificação	83
6.47	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	84
6.48	Simplificação	85
6.49	Simplificação	85
6.50	Simplificação	86
6.51	Resultado similar ao movimento anterior	86
6.52	Várias bolas do eixo medial com mais de duas ligações incidentes	87
6.53	Desconectamento	87
6.54	Desconectamento em vários pontos	88
6.55	Desconectamento	88
6.56	Não evitou o desconectamento em vários pontos	89
6.57	Simplificação	89
6.58	Evitou o desconectamento em vários pontos	90
6.59	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	90
6.60	Bolas de mesmo raio	91
6.61	Simplificação	91
6.62	Simplificação	92
6.63	Simplificação	92
6.64	Desconectou	92
6.65	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	93
6.66	Simplificação	93
6.67	Simplificação	94
6.68	Simplificação	94
6.69	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	94
6.70	Configuração com dois buracos	95
6.71	Simplificação	96
6.72	Simplificação	96
6.73	Fechamento dos buracos após a simplificação	96
6.74	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	97
6.75	Simplificação	97
6.76	Simplificação	98
6.77	Eliminação das bolas supérfluas em cada iteração	98

Lista de tabelas

6.1	Tabela des Resultados 1	99
6.2	Tabela des Resultados 2	99