



Karl Igor Martins Guerra

**Teoria da homogeneização e não linearidades
na lei de Darcy: um novo olhar sobre fluxo em
solos granulares saturados**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-
graduação em Engenharia Civil do Departamento de
Engenharia Civil e Ambiental da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Celso Romanel

Rio de Janeiro
Janeiro de 2023



Karl Igor Martins Guerra

**Teoria da homogeneização e não linearidades
na lei de Darcy: um novo olhar sobre fluxo em
solos granulares saturados**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo.

Prof. Celso Romanel

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Edgard Pimentel

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Dr. Marlon Michael Lopez Flores

IMPA

Prof. Júlio César da Silva

UERJ

Dr. Nelson Inoue

GTEP- PUC-Rio

Rio de Janeiro, 23 de janeiro de 2023

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

Karl Igor Martins Guerra

Graduou-se em Engenharia Civil pela UVA (Universidade Veiga de Almeida), em dezembro de 2016. Concluiu o mestrado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em fevereiro de 2019, desenvolvendo dissertação na linha de pesquisa de Geomecânica Teórica aplicada a Dinâmica dos Solos. Ingressou no doutorado em março de 2019 na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, desenvolvendo tese na linha de pesquisa de Geomecânica Teórica aplicada a problema de dinâmica dos fluidos em meios porosos.

Ficha Catalográfica

Guerra, Karl Igor Martins

Teoria da homogeneização e não linearidades na lei de Darcy: Um novo olhar sobre fluxo em solos granulares saturados. / Karl Igor Martins Guerra; orientador: Celso Romanel – 2023.

206 f. : il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2023.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Teoria da homogeneização. 3. Navier-Stokes. 4. Fluxo em solos granulares. 5. Lei de Darcy. 6. Análise numérica. I. Romanel, Celso. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

Aos meus pais e família, por todo o apoio em todas as esferas necessárias para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu irmão, eterna e permanente fonte de força de inspiração para os mais felizes, mas também aos mais melancólicos momentos.

Ao meu orientador, professor Celso Romanel, por ter confiado em meu trabalho, permitindo que eu explorasse com liberdade temas nem sempre tão comuns no universo da engenharia.

Aos meus amigos de longa data que, apesar da minha pouca frequência nas reuniões em que outrora participava, continuam demonstrando apoio, carinho e um verdadeiro sentido de amizade.

À minha psicóloga Gabriela por ter me ajudado a cuidar do bem mais valioso que possuo ao longo destes árduos anos.

Às pessoas que apareceram aos poucos no meu caminho e que, de alguma forma, se tornaram importantes cada uma com seus motivos, maneiras, tempo, lugares e formas.

À Mary, pelo que foi, é e será.

Aos professores Patrizia Donato, Giuseppe Romanazzi e Marina Corte pelas conversas, explicações, ideias e dados generosamente concedidos para a realização desta tese.

Aos mal diagramados Hélder e Marco pelo ódio festivo compartilhado, contribuindo para a estabilidade da minha saúde mental ao longo destes quatro longos anos.

À Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro pelo espaço concedido, pela formação de excelência da qual pude desfrutar e pela dedicação a educação de nosso país.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

A todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para que eu estive hoje aqui digitando este texto, meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

Guerra, Karl Igor Martins; Romanel, Celso (orientador). **Teoria da homogeneização e não linearidades na lei de Darcy: um novo olhar sobre fluxo em solos granulares saturados**. Rio de Janeiro, 2023. 206 p. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A teoria da homogeneização de equações diferenciais tornou-se um campo aberto de pesquisa em diversas áreas das ciências exatas e mostrou-se ser uma poderosa ferramenta para a compreensão do comportamento global de materiais heterogêneos. Apesar de ser conhecido que a dedução da lei de Darcy através das equações de Navier-Stokes já é tema debatido há décadas, muitas questões continuam em aberto, principalmente a respeito de condições de contorno mais complexas, casos envolvendo fluxos multifásicos e técnicas de homogeneização numérica. Sabe-se que a lei de Darcy se apresenta sob forma de uma relação linear apenas para um intervalo de gradiente hidráulico e que este intervalo se sobrepõe ao intervalo de fluxo laminar do fluido através dos vazios do solo. Se propõe neste trabalho, então, compreender a perda de linearidade na lei de Darcy, a partir da teoria da homogeneização, modificando e explorando os resultados obtidos anteriormente na literatura.

Palavras-chave

Teoria da homogeneização; equações de Navier-Stokes; fluxo em meios porosos; lei de Darcy; análise numérica.

Abstract

Guerra, Karl Igor Martins; Romanel, Celso (advisor). **Homogenization theory and nonlinearities in the Darcy's law: a new look at flow through particulate saturated soils.** Rio de Janeiro, 2023. 206 p. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The theory of homogenization of differential equations has become an open field of research in several areas of the exact sciences and has proved to be a powerful tool for understanding the global behavior of heterogeneous materials. Despite knowing that the deduction of Darcy's law through the Navier-Stokes equations has been debated for decades, many questions remain open, mainly regarding more complex boundary conditions, cases involving multiphase flows and the numerical homogenization techniques. It is known that Darcy's law is presented in the form of a linear relationship only for a range of hydraulic gradient that overlaps the range of laminar flow of fluids through soil voids. Therefore, it is proposed in this work to understand the loss of linearity in Darcy's law, based on the theory of homogenization, modifying and exploring the limit results obtained in the literature.

Keywords

Homogenization theory; Navier-Stokes equations; flow in porous media; Darcy's law; numerical analysis.

Sumário

1 . Introdução	16
1.1. Organização da tese	17
2 . Teoria da homogeneização de equações diferenciais parciais	19
2.1. Motivação para a teoria da homogeneização.	19
2.2. Representação de uma equação em duas escalas e descrição matemática de um meio poroso.	20
2.2.1. Caracterização dos tipos de heterogeneidade e aleatoriedade de um domínio físico e matemático.	20
2.2.2. Descrição matemática da célula representativa.	23
2.2.3. Homogeneização como um problema de sequências convergentes em um dado subespaço.	26
2.2.4. Convergência da série de potências nos subespaços randômicos.	29
2.2.5. O caso de uma equação diferencial elíptica unidimensional.	31
2.2.6. Resolução do sistema e obtenção dos parâmetros homogeneizados.	34
2.3. O método das energias de Luc Tartar.	37
3 . Formulação fraca das equações de Navier-Stokes e as simulações numéricas diretas (SND)	41
3.1. Breve introdução às equações de Navier-Stokes incompressíveis.	41
3.2. Análise de existência e unicidade da solução em um espaço de dimensão infinita.	44
3.2.1. Existência e unicidade do caso linearizado	45
3.2.2. Existência de uma solução para o caso não linear generalizado.	47
3.3. Formulação variacional das equações de Navier-Stokes incompressível e estacionária.	48
3.3.1. Desenvolvimento do funcional da equação de quantidade de movimento.	50
3.3.2. A equação de conservação de massa	51
4 . Instabilidade hidrodinâmica e elementos de fluxos não lineares em meios porosos	53

4.1. Estabilidade global e local, critério de energia e transição.	53
4.1.1. Estabilidade em escala micro	54
4.1.2. Estabilidade na escala macro (média)	57
4.1.3. Estabilidade Linear e a equação de Orr-Sommerfeld.	63
4.1.4. Estabilidade do movimento médio (escoamento médio) de um regime em transição.	69
4.2. Solução geral linear para estabilidade de um campo de velocidade e pressão genérico.	71
4.3. A natureza da turbulência.	73
4.3.1. Uma visão qualitativa: a teoria de Kolmogorov.	73
4.3.2. O modelo de Leray	76
4.3.3. A conjectura de Landau-Hopf	77
5 . Conceitos gerais sobre fluxo em meios porosos, lei de Darcy e considerações sobre o regime laminar.	78
5.1. Experimento e lei de Darcy	84
5.2. Soluções clássicas para fluxo turbulento em solos	92
6 . Prova da convergência do problema de Stokes para células unitárias com condições de contorno não-Dirichlet.	96
6.1. O problema de célula	109
6.2. A EDP na célula unitária e sua solução.	113
7 . A curva granulométrica e o decaimento do tamanho dos grãos.	120
8 . Convergência numérica do problema de homogeneização das equações de Navier Stokes em duas dimensões.	126
8.1. Os primeiros passos e primeiros obstáculos.	126
8.2. A homogeneização via simulação numérica direta (DNS).	130
8.2.1. Construindo o espaço dos elementos finitos.	131
8.3. Roteiro das simulações	135
8.3.1. Resultados das DNS	138
8.4. A homogeneização utilizando o problema de célula multigrão: o caso de Darcy.	144

8.5. A homogeneização para limites diferentes de Darcy: a viscosidade aparente de Navier-Stokes e o problema de Brinkman.	148
8.6. Resultados de convergência para o problema teórico da convergência em Navier Stokes.	152
8.7. O limite em Brinkman: uma zona cinzenta entre Darcy e Navier Stokes.	154
9 . Comparação com resultados de laboratório.	157
9.1. Um modelo de condutividade hidráulica baseado em <i>D50</i> , <i>CU</i> e <i>CC</i> .	157
10 . Conclusão	170
Anexo	174
Referências bibliográficas	198

Lista de figuras

Figura 1. Representação gráfica da variação da porosidade em função do comprimento do corpo de prova (Autor, 2020).	22
Figura 2. Representação de um domínio Ω dividido em células periódicas de dimensão ε . (Allaire, 2010).	23
Figura 3. Autovalores no plano complexo com Reynolds $1 < \text{Reynolds} < 2$. (Autor, 2020)	62
Figura 4. Representação gráfica das linhas neutras de Heisenberg. (Heisenberg, 1924).	67
Figura 5. Comparação entre os perfis de velocidade em dutos cilíndricos para o caso laminar e turbulento. (Levicky, 2016)	71
Figura 6. Esquema de evolução dos vórtices pela teoria de Kolmogorov, (Autor, 2020).	74
Figura 7. Modelo idealizado de canais de poro e sistema de coordenadas. (Bear, 1972).	79
Figura 8. Relação de Re com f . (Rose, 1945).	90
Figura 9. Relação entre q e J para valores crescentes de Re. (Bear, 1985)	92
Figura 10. Domínio perfurado periódico	99
Figura 11. Célula unitária	99
Figura 12. Domínio homogeneizado	100
Figura 13. Célula unitária com quatro grãos.	111
Figura 14. Relações geométricas na célula unitária.	111
Figura 15. Domínio para solução analítica do problema de célula.	112
Figura 16. Domínio para solução analítica do problema de célula com quatro grãos.	112
Figura 17. Distribuição granulométrica dos solos (Craig, 2012).	120
Figura 18. $a(\varepsilon)$ com $Cc \rightarrow +\infty$.	122
Figura 19. (ε) com $Cc = 5$.	122
Figura 20. Representação dos diferentes limites para $a(\varepsilon)$ e $\sigma(\varepsilon)$	125
Figura 21. Representação da célula unitária com mais de um grão.	129
Figura 22. Domínio do problema $PCel - Num$.	130

Figura 23. Discretização do espaço em elementos finitos triangulares tipo T2.	133
Figura 24. Elemento do tipo T2	133
Figura 25. Representação gráfica da relação entre velocidade e gradiente hidráulico.	137
Figura 26. Variação de K em função de ε para $\phi = 0,6$.	138
Figura 27. $\sigma\varepsilon \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,3$	139
Figura 28. $\sigma\varepsilon \rightarrow 0$, $\phi = 0,3$	140
Figura 29. $\sigma\varepsilon \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,4$	141
Figura 30. $\sigma\varepsilon \rightarrow 0$, $\phi = 0,4$	141
Figura 31. $\sigma\varepsilon \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,5$	141
Figura 32. $\sigma\varepsilon \rightarrow 0$, $\phi = 0,5$	142
Figura 33. $\sigma\varepsilon \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,6$	142
Figura 34. $\sigma\varepsilon \rightarrow 0$, $\phi = 0,6$	142
Figura 35. $\sigma\varepsilon \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,7$	143
Figura 36. $\sigma\varepsilon \rightarrow 0$, $\phi = 0,7$	143
Figura 37. $\sigma\varepsilon \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,8$	143
Figura 38. $\sigma\varepsilon \rightarrow 0$, $\phi = 0,8$	144
Figura 39. Convergência em relação a teoria da homogeneização para $\phi = 0,6$, $a\varepsilon = 0,2\varepsilon$.	146
Figura 40. Convergência para Darcy com $\phi = 0,3$ e $Msunit = 21,10$.	147
Figura 41. Convergência para Darcy com $\phi = 0,4$ e $Msunit = 34,66$.	147
Figura 42. Convergência para Darcy com $\phi = 0,5$ e $Msunit = 34,66$.	147
Figura 43. Convergência para Darcy com $\phi = 0,7$ e $Msunit = 34,66$.	147
Figura 44. Convergência para Darcy com $\phi = 0,7$ e $Msunit = 34,66$.	148
Figura 45. Exemplo de convergência para Navier Stokes.	152
Figura 46. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,3$ e $Msunit = 51,15$.	152
Figura 47. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,4$ e $Msunit = 54,94$.	153
Figura 48. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,5$ e $Msunit = 60,06$.	153

Figura 49. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,6$ e $Ms_{unit} = 67,61$.	153
Figura 50. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,7$ e $Ms_{unit} = 76,80$.	154
Figura 51. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,8$ e $Ms_{unit} = 96,15$.	154
Figura 52. Relação entre A e Cu/Cc .	161
Figura 53. Comparação dos valores de laboratório com resultados do modelo para $KCuCc$.	162
Figura 54. Perda da linearidade na relação gradiente hidráulico – velocidade média para diferentes viscosidades aumentadas.	164
Figura 55. Relação entre a razão Cu/Cc com o gradiente crítico de perda de linearidade.	165
Figura 56. Relação entre a condutividade hidráulica estimada e o gradiente crítico.	165
Figura 57. Distribuição de densidade de probabilidade dos ensaios de permeabilidade.	167
Figura 58. Relação do gradiente hidráulico com a velocidade média de fluxo	167
Figura 59. Relação entre número de Reynolds e atrito de Fanning para diferentes viscosidades aumentadas.	168
Figura 60. Mapa linear em espaços isomorfos (autor, 2020).	179
Figura 61. Exemplos de espaços convexos e um não convexo (autor, 2020).	179

Lista de tabelas

Tabela 1. Porosidade em função do comprimento da amostra (Autor, 2020)	21
Tabela 2. Relação entre velocidade e gradiente hidráulico para $\varepsilon = 1/3$	137
Tabela 3. Ensaio de calibração do modelo.	160
Tabela 4. Relação entre a viscosidade aumentada e o limite da EDP	163
Tabela 5. Reynolds crítico em função de Cu/Cc	166

Este trabalho foi escrito ao longo dos últimos quatro anos, de 2019 a 2022. Neste período, houve uma pandemia de COVID-19, doença causada pelo novo coronavírus, que durou dois anos em sua fase mais aguda. Ao longo destes dois anos de pandemia, o Brasil mergulhou no obscurantismo do negacionismo científico e humanitário, agenciado e financiado por um governo neoliberal fascista que foi em grande parte responsável pela morte de 693.941 brasileiros até 31/12/2022, incluindo alunos e trabalhadores da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Esta tese de doutorado é pelos que resistiram e pelos que se foram.

Dedico especialmente este trabalho a Cecília Gama Martins.

Nunca esqueceremos.

“(...) aliás, toda ciência seria supérflua se houvesse
coincidência imediata entre a aparência e a
essência das coisas (...)”
Marx, K.

1. Introdução

A literatura em torno dos problemas de fluxo é extensa, porém concentrada no estudo de fluxos laminares. A formulação da lei de Darcy, semi-empírica, é coerente e matematicamente verossímil, trazendo assim resultados de relevante acurácia na previsão do comportamento de lençóis freáticos, poços, percolação através de barragens de terra entre outras aplicações da engenharia geotécnica. Esta boa aproximação é consequência da homogeneidade adotada para o elemento de solo, transformando-o em um meio contínuo com propriedades de permeabilidade condensadas em um único parâmetro que dá a magnitude do fenômeno considerado linear.

Após Darcy, principalmente no início do século XX, pesquisadores como Forchheimer e Kochina trouxeram à tona o surgimento de uma relação não linear entre o gradiente hidráulico e a velocidade de fluxo, conceito a ser formalmente definido neste trabalho. O que se deve ressaltar aqui é que a lei de Darcy perde seu caráter linear a partir de um certo gradiente hidráulico, quantidade que é diretamente proporcional ao gradiente de pressão do fluido. Torna-se, entretanto, natural questionar sobre a natureza desta não linearidade e explorar suas consequências no padrão de fluxo. Ao admitir que a não linearidade é relativa a um gradiente hidráulico crítico e que o gradiente de pressão é dependente do domínio onde está sendo avaliado, e conhecendo que o fluxo não ocorre através das partículas sólidas, mas sim por entre os poros do material, a hipótese de um estudo na escala de poros se faz portanto válida. Com os resultados das simulações na escala de poros implementada, um processo de homogeneização das equações diferenciais será apresentado para que os mesmos objetos matemáticos sejam capturados em uma escala maior, em problemas reais de geotecnia, demonstrando que alguns aspectos dos fluxos instáveis são invariantes em relação a escala de tempo e espaço.

Pelos argumentos apresentados, sugere-se uma análise matemática dos possíveis mecanismos e gatilhos desta não linearidade que serão mais tarde associados a uma perda de estabilidade hidrodinâmica e uma possível transição para o regime turbulento. Para capturar matematicamente estes fenômenos, um estudo rigoroso sobre as equações diferenciais que regem o problema de fluxo será feito neste trabalho. Não somente as equações diferenciais serão estudadas, mas também a construção de métodos numéricos capazes de explorar o comportamento do fluido em um domínio tortuoso e localmente descontínuo como o solo. O desenvolvimento do trabalho utilizará argumentos da análise funcional, topologia geral, sistemas dinâmicos e da teoria moderna das equações diferenciais para embasar as simulações realizadas pelo método dos elementos finitos. Reforça-se aqui que este trabalho possui um anexo referente as ferramentas de análise funcional e topologia geral que serão exploradas ao longo da tese. Caso haja qualquer lacuna de compreensão, o leitor é convidado a consultar o anexo ou textos referenciados.

1.1.Organização da tese

O presente capítulo expõe a motivação da pesquisa e sua contextualização, que pode ser dividida em três grandes partes: a primeira delas contempla a revisão bibliográfica do tema e apresenta o embasamento teórico do problema a ser tratado, enquanto que na segunda parte é desenvolvida a solução proposta pelo autor. A terceira parte é formada pelos apêndices matemáticos e as referências bibliográficas citadas no decorrer do texto.

O capítulo 2 discute os fundamentos da teoria da homogeneização de equações diferenciais parciais, enquanto que no capítulo 3 as equações de Navier-Stokes são apresentadas e enfraquecidas para a forma variacional. O capítulo 4 aborda as formas de instabilidade de fluxo e transição para o regime turbulento enquanto que o capítulo 5 aborda conceitos de fluxo em meios porosos.

A solução desenvolvida pelo autor é detalhada no capítulo 6, e os fundamentos da nova técnica de homogeneização, assim como um simples modelo de previsão da condutividade hidráulica de solos, são discutidos nos capítulos 7 e 8. O capítulo 9 é dedicado a comparações com resultados de fluxo em solo obtidos em ensaios de laboratório, para validar o modelo proposto, e o capítulo 10 apresenta as principais conclusões da pesquisa.

2. Teoria da homogeneização de equações diferenciais parciais

2.1. Motivação para a teoria da homogeneização.

Apesar da ampla literatura desenvolvida dentro da grande área da dinâmica dos fluidos e do atual domínio sobre as equações de Navier-Stokes compressíveis (NSC) ou incompressíveis (NSI), conhece-se também as limitações técnicas de resolvê-las em domínios complexos. As simulações numéricas diretas das equações NSI em meios porosos hipotéticos na escala de poro tem permitido que pesquisadores encontrassem relações fundamentais entre as propriedades do fluxo em relação a estrutura porosa pela qual o fluido escoar. Entretanto, este tipo de abordagem traz algumas severas limitações. A primeira é que a geometria do espaço poroso em escala microscópica é dificilmente conhecida. A segunda é que este tipo de simulação não permite que conclusões possam ser tiradas a respeito do fluxo em maciços de maior escala compostos pelo mesmo material, ao menos não diretamente. Para que estas propriedades do fluxo em escala microscópica sejam utilizadas em problemas na escala real de problemas geotécnicos, algum tipo de média deve ser utilizado (Lazarov, 2013).

A homogeneização das equações diferenciais é um rigoroso método matemático que resulta em propriedades médias dos componentes que integram o problema físico. Apesar de ter-se utilizado neste parágrafo a palavra “média”, a homogeneização implica em propriedades mais fortes e precisas do que uma média aritmética ou geométrica. A física e mecânica dos meios porosos tem sido a alavanca teórica dos estudos sobre os fundamentos da teoria da homogeneização, uma vez que o meio poroso é caracterizado como algo heterogêneo e randômico em sua estrutura. Equações diferenciais aplicadas a meios heterogêneos e randômicos tendem a evoluir em diferentes níveis de escala (Quintard e Whitaker,

2005). Considere por exemplo o clássico exemplo do fluxo em solos onde, em uma escala macroscópica, para baixas velocidades e condições ideais, modela-se o fluxo pela lei de Darcy, com um coeficiente de permeabilidade aplicado diretamente ao gradiente hidráulico.

Na mais avançada das formas da lei de Darcy, alguns geotécnicos consideram a permeabilidade como um tensor para que a permeabilidade do meio seja considerada dependente da direção. Na realidade, toda informação relativa às complexas interações do fluido com as paredes sólidas irregulares é extremamente complexa, sendo condensada em uma única matriz com valores numéricos aproximados. Ou seja, na escala microscópica se recomendaria utilizar as equações NSI com rigorosas condições de contorno, mas na escala macroscópica, a lei de Darcy satisfaz o problema. Outro aspecto relacionado com o comportamento de solos, é a resistência ao cisalhamento de materiais granulares. É conhecido que o coeficiente de atrito existente entre os grãos de solo individualmente, em escala microscópica, não condiz com o coeficiente de atrito determinado pelo critério de Mohr-Coulomb em escala macroscópica que considera o solo como um meio contínuo e homogêneo. Estes fenômenos que evoluem diferentemente a depender da escala, evoluem também ao mesmo tempo; proceder uma mudança de escala de maneira matematicamente rigorosa é o principal objetivo da teoria da homogeneização.

2.2.Representação de uma equação em duas escalas e descrição matemática de um meio poroso.

2.2.1.Caracterização dos tipos de heterogeneidade e aleatoriedade de um domínio físico e matemático.

Seja um meio aparentemente contínuo em grande escala, mas que seja heterogêneo e randômico em uma escala arbitrariamente pequena. Assume-se que ao avaliar uma propriedade do meio em escala muito pequena, esta propriedade varia significativamente de ponto a ponto, mas, com o aumento gradual da escala, o valor da propriedade pode estabilizar ou variar de uma amplitude tão pequena quanto se deseje. Diz-se então

que esta escala para a qual a propriedade desejada cessa de variar seja representativa de todo o volume onde ela está inserida. Ou seja, a propriedade estudada varia dentro desta escala pois o efeito microscópico ainda impacta nas medições macroscópicas, mas além deste volume, a propriedade evolui somente de maneira macroscópica. É comum na literatura encontrar o termo REV (*Reference Elementary Volume*) para definir este volume, mas neste trabalho busca-se diferenciar o REV da escala representativa do material encontrada pela teoria da homogeneização (Bear, 1985; Allaire, 2010).

Considere por exemplo a análise da porosidade de um solo. Suponha que uma amostra cilíndrica possua 1 metro de comprimento. Corta-se a amostra em corpos de prova menores de 1, 5, 10, 15, 30 e 39 cm. A partir de um porosímetro de mercúrio obtém-se os seguintes resultados (Tab. 1) para cada corpo de prova:

Tabela 1. Porosidade em função do comprimento da amostra (Autor, 2020)

Comprimento do corpo de prova (cm)	Porosidade (ϕ)
1	0,9
5	0,4
10	0,76
15	0,54
30	0,6
39	0,6

Graficamente a tabela apresenta-se como:

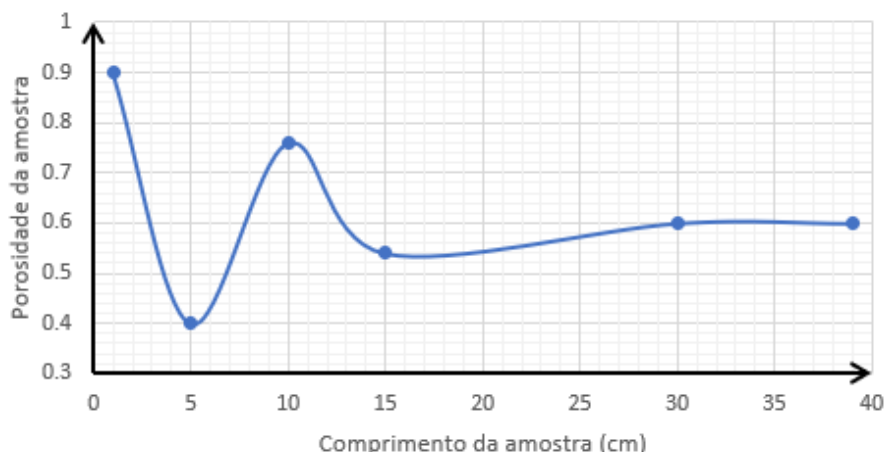


Figura 1. Representação gráfica da variação da porosidade em função do comprimento do corpo de prova (Autor, 2020).

Duas importantes informações são então evidenciadas: a variação da propriedade em uma escala muito pequena tende a ser oscilatória e a porosidade efetiva é atingida para corpos de prova com comprimento acima de 30 cm.

Considere um maciço de solo a ser estudado tal que uma das suas dimensões, apenas para exemplo, seja de 10 m. Com base nos resultados da Tabela 1 e da Figura 1, duas possibilidades emergem:

- a) Admitir que 30 cm são representativos e cobrir toda a superfície do maciço com estes mesmos “recortes” de 30 cm. Desta maneira, diz-se que as propriedades em escala microscópica são periódicas com período $T = 30$ cm.
- b) Admitir que outros REV's podem ser encontrados e, por análises estatísticas mais complexas, determinar diversos REV's que cobrirão todo o volume do maciço, não obtendo assim uma estrutura periódica.

Seja este volume representativo uma célula de dimensão ε^d , isto é, para o caso unidimensional apresentado acima $\varepsilon = 0,30$ m e $d = 1$. No caso bidimensional, estas células que irão compor o volume do domínio maior podem ser representadas como na Figura 2 (Allaire, 2010).

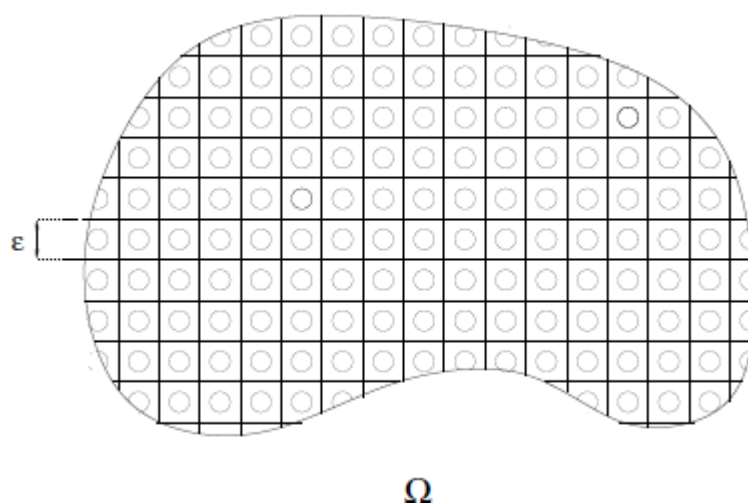


Figura 2. Representação de um domínio Ω dividido em células periódicas de dimensão ε . (Allaire, 2010).

Dentro de cada célula, as soluções das equações diferenciais que regem o problema estudado oscilam devido a sua evolução em duas escalas simultaneamente. É provável que não exista uma solução analítica de forma fechada para tal problema e, numericamente, o custo computacional para simular inúmeros domínios pequenos e heterogêneos seria muito grande além da possibilidade de não convergência da solução (Allaire, 2010; Quintard e Whitaker, 2005). Propõe-se então que, caso consiga-se homogeneizar uma destas células, o comportamento macroscópico dos fenômenos pode ser aproximado com maior fidelidade em relação às observações de laboratório.

2.2.2. Descrição matemática da célula representativa.

Volta-se a atenção para uma única célula representativa genérica. O interior desta célula é composto pelos vários materiais que compõe o meio heterogêneo macroscópico. No caso de solos e rochas, o interior da célula representativa é composto por um domínio sólido e um outro domínio preenchido por fluido ou vazio.

Pela simplicidade, assuma que o tamanho na célula seja unitário, tal que seu domínio matemático seja posto como $Y =]0; 1[$, onde $Y \subset \Omega$, ou seja, um espaço aberto em Ω . Seja Y composto por dois subdomínios Y_S para a parte sólida e Y_F para a parte fluida, considerando que o meio poroso esteja saturado. Seja \bar{Y} o fecho de Y . Como Y é um espaço aberto, Y_S é um subespaço fechado de Y . Por consequência, $Y_F = Y \setminus Y_S$. Esta relação de complementariedade será mais profundamente debatida ao longo do subtema. Realiza-se uma repetição periódica de Y_S ao longo de todo \mathbb{R}^n para $n = 2, 3$ tal que se obtenha $\{Y_S^1, Y_S^2, \dots, Y_S^k\}$. A repetição periódica pode ser escrita rigorosamente como $Y_S^k = Y_S + k$, $k \in I^n = \mathbb{Z}^n$. A partir das k células periódicas obtidas, subespaços de Y , um conjunto pode ser construído pela união destas células como $E_S = \bigcup_{k \in I^n} Y_S^k$ e logo, a união de finitos conjuntos ou espaços fechados é também um espaço fechado. Afirma-se então que E_S é um subespaço fechado de \mathbb{R}^n permitindo assim que seja rapidamente deduzido $E_F = \mathbb{R}^n \setminus E_S$ pela mesma relação de complementariedade citada acima. Os dois subespaços gerados possuem as seguintes características (Mikelic, 1999):

- i) Y_F é um espaço aberto, conexo, de medida (no sentido topológico) estritamente positiva, com fronteiras Lipschitz-contínuas e Y_S possui também medida estritamente positiva em \bar{Y} .
- ii) E_F e o interior do espaço E_S são conjuntos abertos com fronteiras de classe ao menos C^1 (diferenciável até a primeira derivada) que existem somente em um único lado de suas fronteiras (não é possível ter água por fora e por dentro do grão).
- iii) E_F é conexo.

Tem-se definido a malha regular e periódica que cobre todo o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seja cada uma das células unitárias de dimensão ε nomeadas como Y_i^ε , $1 \leq i \leq N(\varepsilon)$ onde $N(\varepsilon)$ é o número de células necessárias para cobrir Ω . Seja então Y uma célula padrão, ou célula-mestre, jargão

frequentemente utilizado em análise numérica. Cada célula Y_i^ε é dita homeomórfica a Y por homeomorfismo linear P_i^ε composto de translação rígida e homotetia de razão $1/\varepsilon$. Isto é:

$$Y_{S_i}^\varepsilon = P^{-1}(Y_S), \quad Y_{F_i}^\varepsilon = P^{-1}(Y_F) \quad (2.1)$$

Definição (Homeomorfismo): Uma função ou aplicação $T: A \rightarrow B$ entre dois espaços topológicos é um homeomorfismo se:

- i) T é uma bijeção (um para um).
- ii) T é contínua.
- iii) O inverso de T , ou seja T^{-1} , é contínua e logo, T se caracteriza como um mapa aberto.

Definição (Homotetia): Uma relação entre dois objetos matemáticos, ou dois espaços topológicos, é caracterizada como homotetia se tal objeto for ampliado ou contraído sem mudança de forma e com referência em um ponto fixo no espaço. A relação de homotetia é contínua e afim com coeficiente $\lambda \neq 0$.

Em busca de um pouco mais de formalismo, visto que o conjunto de subespaços Y_{S_i} e Y_{F_i} é finito, para valores de $\varepsilon > 0$ e arbitrariamente pequenos, existe o conjunto:

$$K = \{k \in I^n = \mathbb{Z}^n : Y_{S_k}^\varepsilon \subset \Omega\} \quad (2.2)$$

Finalmente, a estrutura do meio poroso pode ser descrita topologicamente como:

$$O_\varepsilon = \bigcup_{k \in K} Y_{S_k}^\varepsilon, \quad S^\varepsilon = \partial O_\varepsilon, \quad \Omega^\varepsilon = \Omega \setminus O_\varepsilon = \Omega \cap E_F \quad (2.3)$$

Onde relações secundárias a respeito das fronteiras podem ser obtidas tal qual $\partial \Omega^\varepsilon = \partial \Omega \cup S^\varepsilon$. O subespaço S^ε representa a parte sólida do meio poroso definido por Ω e Ω^ε representa a parte fluida deste mesmo

meio poroso. Suponha por simplicidade que o tamanho do domínio maior seja L e que cada célula tenha tamanho ε . Assume-se então que $\frac{L}{\varepsilon} \in \mathbb{N}$. A partir de uma adaptação da desigualdade de Poincaré, define-se formalmente a aleatoriedade de um subespaço ou subdomínio de um meio poroso.

Definição (Aleatoriedade de um subespaço): Diz-se que um domínio poroso $E_F(\Omega)$ é randômico se nele existe uma variável randômica $h(\Omega) > 0$ tal que $M\{h^{-1}\} < +\infty$ e:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(T(y)\Omega) |\varphi(y)|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(y)|^2 dy, \forall \varphi \in C_0^\infty(E_F(\Omega)) \quad (2.4)$$

Onde T é um operador representativo de um sistema dinâmico n -dimensional que descreve a estrutura randômica. O termo $h(T(y)\Omega)$ pode ser lido como uma variável (que pode ser uma função devido ao espaço onde habita) que toma valores do mapeamento de Ω pelo operador T como argumento. A função $\varphi = \varphi(y)$ atua como um *mollifier* na estrutura do funcional descrito por (2.4). Para exemplificar, suponha uma estrutura porosa periódica. Recupera-se então os valores $\Omega = Y$ já que a estrutura seria Y -periódica. A variável de medida (topológica e probabilística) $d\mu = dy$ é o operador T dado por $T(y)\Omega$ pode ser facilmente representado pela transformação $(y + \Omega) \bmod 1$, isto é, uma transformação entre espaços de equivalência (espaços quocientes) tal que $y, \Omega \in \mathbb{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\alpha(y + \Omega) + \beta = z \in \mathbb{E}$ tal que $z - \Omega, z - y \in \mathbb{E}_Z$. De maneira simples, o operador T age como uma simples translação e amplificação do argumento que ele toma.

2.2.3. Homogeneização como um problema de sequências convergentes em um dado subespaço.

Seja um problema matemático definido por uma equação diferencial em um domínio Ω não homogêneo, com heterogeneidade periódica em células unitárias previamente descritas. Para fins de garantir a simplicidade da explicação, considere o problema unidimensional e elíptico tal que:

$$-\frac{d}{dx}\left(A\frac{du}{dx}\right) = f, \quad em \Omega \quad (2.5.a)$$

$$u = u_{\partial\Omega}, \quad em \partial\Omega \quad (2.5.b)$$

A notação do problema (2.5.a – 2.5.b) não garante que se entenda a heterogeneidade do meio Ω . Se A for uma função que armazene em seu núcleo as informações sobre a geometria e propriedades fundamentais do meio, então esta função deve ser reescrita. Considere que a solução $u = u(x)$ evolua em duas escalas, a micro e a macro, simultaneamente. Para que haja coerência, a função A também deve ser composta de informações provenientes das duas escalas. A escala macroscópica pode ser posta para evoluir em função de x tal qual comumente utilizado. Considerando que a escala micro consiste em dividir a escala macro em pedaços menores de dimensão ε , pode-se dizer que existe uma escala micro dada por $y = x/\varepsilon$. A notação que será utilizada a partir de agora para quantidades e coeficientes variáveis que evoluem em duas escalas será $u_e\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ ou simplesmente $u_e(x, y)$ onde y não indica uma direção ortogonal a x mas uma subescala de x (Allaire, 2010; Tartar, 2010). Na literatura é comum encontrar estas escalas descritas como a escala rápida e a escala lenta de uma função. Rescrevendo o problema (2.5.a – 2.5.b):

$$-\frac{d}{dx}\left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du_e}{dx}\right) = f, \quad em \Omega \quad (2.6.a)$$

$$u_e(x, y) = u_{e\partial\Omega}, \quad em \partial\Omega \quad (2.6.b)$$

onde $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ representa uma propriedade fortemente heterogênea que varia em todo o domínio. Se torna óbvio entender que resolver o problema tal como posto em (2.6.a – 2.6.b) mesmo numericamente se torna inviável. Busca-se então uma forma homogeneizada das variáveis e coeficientes para que o problema seja resolvível.

Antes de buscar uma explicação formal matemática para o *ansatz* que será proposto em breve, uma rápida consideração física e intuitiva do problema pode ser posta. Suponha uma barra cilíndrica de um material heterogêneo, como por exemplo, várias peças de madeira presas entre si

por presilhas de aço periodicamente espaçadas e uniformes. Cada presilha de aço tem tamanho ε . A resistência a tração deste material heterogêneo dependerá do comportamento simultâneo do aço e da madeira, e logo, o coeficiente de rigidez deveria incorporar estas duas informações. Suponha agora que, de alguma maneira, este coeficiente de rigidez seja encontrado e ele depende das duas escalas tal como $A\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$. Considerando que o tamanho das presilhas tende progressivamente a zero, o coeficiente se tornaria apenas $A^*(x)$, uma forma homogeneizada de A , contabilizando de alguma forma a influência das presilhas de aço sem que ela entre diretamente na equação. Percebe-se a partir deste exemplo que homogeneizar um problema consiste em encontrar sua forma dependente das duas escalas e tomar o limite de uma delas até zero. Porém, não é trivial encontrar esta função a ser passada ao seu limite e, para este efeito, sugere-se um *ansatz*, isto é, uma intuição sobre como tal objeto matemático deve se parecer. O problema (54.a – 54.b) indica que a solução $u_\varepsilon(x, y)$ deve ser ao menos duas vezes diferenciável. Usando os argumentos da topologia, pode-se propor que f seja pelo menos 2-Lebesgue-contínua para que Lax-Milgram seja aplicável ao problema e garanta-se existência e unicidade das soluções. Se $f \in L^2$, então $u_\varepsilon \in V$ onde V é um análogo de dimensão infinita de um espaço de Sobolev. Estes argumentos permitem que seja proposta uma expansão em série de potências em ε , ao menos duas vezes diferenciável. Propõe-se:

$$u_\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i, \quad i \in I = \mathbb{N} \quad (2.7)$$

De maneira extensa:

$$u_\varepsilon(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \dots \quad (2.8)$$

O *ansatz* de (2.7) e (2.8) carrega uma informação importante que oriunda de sua própria estrutura: $u_\varepsilon(x, y)$ deve convergir para um valor $u(x)$ que seja finito, Lebesgue-integrável e de ao menos segunda derivada contínua para todo elemento $u_{\varepsilon_j}(x, y) \in V$. No anexo, objetos com esta característica são mencionados. São as conhecidas sequências de

Cauchy, que determinam a própria natureza do espaço onde elas habitam. Se provado que todo $u_{e_j}(x, y) \rightarrow u_e(x, y)$, $u_e(x, y) \rightarrow u(x)$ e que $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow A^*(x)$, o espaço V pode ser considerado completo e gozará de todas as propriedades e regularidades de um espaço de Sobolev, permitindo que se garanta a existência e unicidade soluções fortes e fracas. Outro ponto importante da expansão (2.7) é que esta é uma série *a priori* convergente e que é também oscilatória. Este comportamento matemático oscilatório indica uma correlação física com o que é observado em laboratório e apontado pela Figura 1. Uma discussão sobre convergência de séries na teoria da homogeneização deve ser feita.

2.2.4. Convergência da série de potências nos subespaços randômicos.

Inicialmente, define-se de maneira formal a convergência em duas escalas.

Definição (*Convergência em duas escalas*): Uma sequência $\{w_e\} \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ é chamada de convergente em duas escalas para um limite w em $L^p(\Omega)$, ou seja, $w \in L^p(\Omega \times Y)$ se $\forall \sigma \in C_0^\infty(\Omega; C_{per}^\infty(Y))$ exista:

$$\int_{\Omega} w_e(x) \sigma\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y w(x, y) \sigma(x, y) dy dx \quad (2.9)$$

Onde a integral em Y age como um operador linear na célula unitária, semelhante a um operador-média. O espaço $C_{per}^\infty(Y)$ é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e periódicas em Y . Uma das formas de garantir a convergência das sequências dentro do próprio espaço é construir adequadamente o espaço de funcional no qual se deseja resolver o problema. Uma forte ferramenta que pode ser utilizada é a reflexividade dos espaços de Banach (Landim, 2020).

Lema (*Convergência forte em espaços de Banach reflexivos*): Seja X um espaço de Banach, i.e, um espaço completo em respeito à sua norma. Seja X' o espaço dual de X e suponha que X seja reflexivo. Tome $\{x_m\} \subset X'$ uma sequência que converge fracamente para um elemento $x \in X'$ e $\xi_m \rightarrow \xi \in X$. Tem-se então:

$$\langle x_m, \xi_m \rangle_{X', X} \rightarrow \langle x, \xi \rangle_{X', X}, \quad \forall \{\xi_m\} \subset X \quad (2.10)$$

Então $x_m \rightarrow x \in X'$ fortemente.

Este lema permite afirmar que um funcional gerado a partir de uma sequência de Cauchy qualquer no espaço original X e um elemento do seu dual X' , no caso em que X é completo e reflexivo, converge de maneira forte e densa. Logo, a aproximação pela identidade (*mollifiers*) pode ser utilizada para se buscar uma solução fraca do problema. Aplicando o lema da convergência em espaços de Banach reflexivos e sabendo que o espaço de Sobolev é um espaço de Banach, chega-se a um outro lema.

Lema (*Subseqüências convergentes*): Seja uma sequência fracamente convergente $\{\psi_e\} \subset L^2(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} \psi_e d\mu = 0 \forall e$ que convirja para 0. Existe uma subsequência de $\{u_e\}$ tal que:

$$\int_{\Omega} u_e(x, y) \psi_e dx \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

Com os dois lemas citados acima, um importante corolário pode ser obtido.

Corolário: As sequências $\{\nabla u_e\}$ e u_e convergem fortemente e são relativamente compactas em $W_p'^k(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$, $p = 2$, respectivamente.

Finalmente, considere as seguintes suposições:

- i) Seja um $\sigma \in L_{per}^{\infty}(Y)$ tal que $\sigma_e = \sigma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ e seja uma sequência $\{w_e\} \subset L^p(\Omega)$ que converge em duas escalas em L^p para um limite $w \in L^p(\Omega \times Y)$. Então o produto das expansões $\sigma_e w_e$ converge em duas escalas em $L^p(\Omega)$ para o limite σw .
- ii) Seja F um funcional contínuo, linear e coercivo definido em \mathbb{R}^n e seja também $w \in C_0^{\infty}\left(\Omega; C_{per}^{\infty}(Y)\right)^n$.

Então:

$$\int_{\Omega} F(w_e) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y F(w) dy dx \quad (2.12. a)$$

e

$$\int_{\Omega} F(\varepsilon \nabla w_e) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y F(\nabla_y w) dy dx \quad (2.12.b)$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e logo $w_e(x) = w\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Com este resultado, tem-se a prova de que em um espaço vetorial devidamente construído, a expansão em duas escalas em série de potência em ε converge densamente no espaço. Prova-se também que ao menos sua primeira derivada converge no espaço dual do Sobolev original e que um funcional contínuo destas sequências também converge, validando assim o uso do *ansatz* proposto em (2.7).

A prova acima, por mais que informal e com certo abuso de notação, parte do fato de que as células unitárias são periódicas em todo o domínio. A prova pode ser generalizada para uma distribuição completamente randômica das células unitárias.

2.2.5.O caso de uma equação diferencial elíptica unidimensional.

Considere a expansão do campo $u_e(x, y)$ tal como definido pelo *ansatz* (55). Suponha também o seguinte problema diferencial:

$$-\nabla \cdot \left[A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_e \right] = f, \quad em \Omega \quad (2.13.a)$$

$$u_e(x, y) = 0, \quad em \partial\Omega \quad (2.13.b)$$

Tem-se então um típico problema elíptico de Dirichlet. O desenvolvimento do termo ∇u_e traz consequências importantes na teoria da homogeneização. Considere o caso unidimensional por simplicidade. O termo se traduz como:

$$\frac{\partial u_e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i u_i \right), \quad i \in I = \mathbb{N} \quad (2.14)$$

Obtendo então:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \dots \quad (2.15)$$

Sabendo que $y = x/\varepsilon$ e que $dy/dx = 1/\varepsilon$, a equação (2.15) se reescreve como:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} + \dots \quad (2.16)$$

Onde identifica-se uma série de potências em função de ε . Generalizando (2.16) para o caso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$, a equação (2.13.a) se expande em série igualmente sob a forma:

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} (\nabla_y \cdot A \nabla u_0) - \frac{1}{\varepsilon} [\nabla_y \cdot A (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1) + \nabla_x \cdot A \nabla_y u_0] - [\nabla_x \cdot A (\nabla_x u_0 + \nabla_y u_1) + \nabla_y \cdot A (\nabla_x u_1 + \nabla_y u_2)] - \dots = f(x) \quad (2.17)$$

Nota-se que a equação (2.17) possui termos de diversas ordens de grandeza e que podem ser separadas umas outras e passadas ao limite onde $\varepsilon \rightarrow 0$. Por exemplo, a equação de ordem ε^{-2} é:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon^2} (\nabla_y \cdot A \nabla u_0) \right] = 0 \quad (2.18.a)$$

Logo:

$$(\nabla_y \cdot A(y) \nabla u_0) = 0 \quad (2.18.b)$$

Onde que, para que (2.18.b) seja verdade, o termo $u_0(x, y)$ não pode ter dependência em y . Entende-se então que $u_0 = u_0(x) = u(x)$ e representa a parcela de maior escala do campo $u_\varepsilon(x, y)$ já que não depende diretamente de x/ε . Volta-se a atenção agora para a equação de ordem ε^{-1} :

$$-\nabla_y \cdot A(y) \nabla_y u_1 = \nabla_y \cdot A(y) \nabla_x u(x) \quad (2.19)$$

Onde agora $u_1(x, y)$ é uma incógnita atuando na célula Y -periódica. É importante perceber que existe um efeito de cascada com as ordens das equações diferenciais. A variável em escala microscópica u_1 pode ser calculada como uma combinação linear de $\nabla_x u(x)$. Um sistema de

equações diferenciais parciais surge da fragmentação da série de potências encontrada e, neste sistema, $y = x/\varepsilon$ é a variável do problema enquanto x pode ser tratado como um parâmetro. A equação de ordem $\varepsilon^0 = 1$ é:

$$-\nabla_y \cdot A(y) \nabla_y u_2 = \nabla_y \cdot A(y) \nabla_x u_1 + \nabla_x \cdot A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + f(x) \quad (2.20)$$

Onde (20) é a equação responsável por $u_2(x, y)$ dentro da célula unitária. A equação (2.20) possui uma particularidade. Utilizando-se da hipótese de que as células unitárias são periódicas, sabe-se que uma função periódica integrada em um domínio idêntico ao seu período é identicamente nula. Logo, usando a alternativa de Fredholm, um lema sobre as integrais-média periódicas, pode-se afirmar que ao passar o operador médio (integral em Y) nos dois lados da equação, o lado esquerdo da igualdade desaparece identicamente. A consequência desta etapa é que ela indicará que o lado direito deverá também ter média igual a zero, já que (2.20) é uma igualdade. Logo:

$$\int_Y [\nabla_y \cdot A(y) \nabla_x u_1 + \nabla_x \cdot A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) + f(x)] dy = 0 \quad (2.21)$$

Onde o primeiro termo do integrando desaparece também pois é periódico e só depende de $u_1(x, y)$. O termo $f(x)$ não é afetado pela integral pois depende exclusivamente de x . Sua integral resultaria em:

$$\int_Y f(x) dy = \int_0^1 f(x) dy = f(x) \int_0^1 dy = f(x) 1 = f(x) \quad (2.22)$$

Devido a suavidade imposta nas fronteiras, permite-se a permutação do operador linear da divergência com a integral, transformado a equação (2.22) em:

$$-\nabla_x \cdot \left(\int_Y A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u) dy \right) = f(x), \quad em \Omega \quad (2.23)$$

A equação (2.23) passa então a ser uma equação dependente somente de $u_0(x) = u(x)$ pois o próprio termo $u_1(x, y)$ pode ser expresso como uma combinação linear de $\nabla_x u_0(x)$ como demonstrado pela equação (2.19). A solução da equação (2.19) permite que se obtenha os parâmetros

homogeneizados do problema (2.18.a – 2.18.b). Apesar de ser uma simples equação elíptica de segunda ordem, algumas ponderações devem ser feitas antes de se buscar pela solução rigorosa do problema (Tartar, 2010; Allaire, 2010; Quintard e Whitaker, 2005).

2.2.6. Resolução do sistema e obtenção dos parâmetros homogeneizados.

O efeito de cascada no sistema de equações diferenciais que surge da aplicação do *ansatz* na equação diferencial inicial, permite que duas equações relacionando $u_0(x)$ e $u_1(x, y)$ que representam respectivamente a evolução na escala macroscópica da quantidade estudada e a evolução na escala de poros, ou na escala micro (célula unitária) da quantidade estudada. Fisicamente, este sistema de equações diferenciais significam o mapeamento entre escalas. Rearranjando a equação (2.19) obtém-se:

$$-\nabla_y \cdot A(y) \nabla_y u_1 - \nabla_y \cdot A(y) \nabla_x u_0(x) = 0 \quad (2.24. a)$$

Ou ainda

$$-\nabla_y \cdot A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) = 0 \quad (2.24. b)$$

Suponha que, como já mencionado, $u_1(x, y)$ seja apenas uma combinação linear de $\nabla_x u_0(x)$. Sendo assim, assuma:

$$u_1(x, y) = u_{10} + \sum_{i=1}^N \nabla_x u_{0i}(x) \phi_i(y) \quad (2.25)$$

Onde já se considera a combinação linear em um espaço de dimensão finita. Seja $\{e_i\}$ uma base em \mathbb{R}^N tal que $u_0(x)$ possa ser escrito como:

$$u_0(x) = u_{00} + \sum_{i=1}^N u_0(x) e_i(x) \quad (2.25)$$

Desta forma, como já visto na teoria dos espaços de dimensão finita, quando os vetores que compõe a base do espaço são independentes, pode-se tratar o problema somente em relação as bases pois os

coeficientes por consequência resolveriam o problema também. De maneira mais rigorosa, tome por exemplo o simples problema:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{i=1}^M u_i \phi_i(x_i) = 0 \quad (\text{Exemplo})$$

Esta equação, pela linearidade, pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_i \sum_{i=1}^M \phi_i(x_i) = 0 \quad (\text{Exemplo})$$

Demonstrando assim que o problema pode ser resolvido somente em função das bases do espaço vetorial, garantindo que o resultando será verdadeiro para qualquer coeficiente. Voltando ao problema deste subtema, considerando arbitrariamente $u_{1_0} = u_{0_0} = 0$ (pois na equação só se utiliza os gradientes e então os coeficientes não fariam diferença na solução), reescreve-se a equação (2.24.b) sob a forma:

$$-\nabla_y A(y) (\nabla_y \phi_i + e_i) = 0 \quad (2.26)$$

Esta forma é conhecida como “problema de célula” pois é resolvido na escala microscópica. Sendo uma equação existente dentro da célula unitária e garantindo assim que as coordenadas são Y-periódicas. A equação (2.26) junto com suas condições de contorno (implícitas quando se trata de um problema periódico) possui solução e garantia de que seja única (Allaire, 2010). O seguinte lema garante a solução.

Lema (*Solução do problema na célula unitária*): Seja uma função f atuando na escala microscópica tal que $f = f(y)$. Sendo $f(y) \in L^2_{per}(Y)$, então uma solução única existe no espaço de Hilbert $H^1_{per}(Y)$ para o problema:

$$-\nabla A(y) \nabla \phi(y) = f, \quad \text{em } Y \quad (2.27.a)$$

$$y \rightarrow \phi(y), \quad Y - \text{periódica} \quad (2.27.b)$$

Desde que a alternativa de Fredholm ($\int_Y f(y) dy = 0$) seja verdadeira.

Como (2.27.a – 2.27.b) tem solução garantida, então garante-se que a combinação linear (2.25) é válida. Substituindo agora (2.25) na equação (2.23), ou seja, na outra equação gerada pelo efeito cascada, e forçando uma condição de contorno bem-posta, chega-se ao problema:

$$-\nabla_x A^* \nabla_x u_0(x) = f(x), \quad \text{em } \Omega \quad (2.28.a)$$

$$u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega \quad (2.28.b)$$

Onde o novo termo A^* se expande sob a forma:

$$A_{ij}^* = \int_Y [A(y) \nabla_y \phi_j \cdot e_i + A_{ij}(y)] dy \quad (2.29)$$

Integrando por partes:

$$A_{ij}^* = \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y \phi_j) \cdot (e_i + \nabla_y \phi_i) dy \quad (2.30)$$

A matriz A_{ij}^* abriga as propriedades homogeneizadas do material heterogêneo de propriedades $A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. É importante perceber que a matriz A_{ij}^* não depende do domínio Ω , do termo f e tampouco das condições impostas em $\partial\Omega$. Esta propriedade corrobora com a ideia de que as propriedades intrínsecas do material não podem variar de problema para problema.

A expressão das propriedades homogeneizadas foi encontrada, entretanto, percebe-se que esta não se apresenta sob uma forma simples. Possivelmente, a depender da complexidade das bases e da matriz heterogênea $A(y)$, a equação (2.30) talvez não tenha uma solução em forma fechada, analítica. Note que a matriz está expressa em função das bases dos termos do *ansatz*, que são termos vetoriais em espaços muito bem determinados. Sabe-se que todos os termos em (2.30) habitam $L^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, logo, o problema (2.28.a – 2.28.b) assim como o sub-problema (2.30) pode ser resolvido por métodos numéricos baseados na análise funcional, como o método dos elementos finitos. Uma estratégia comumente encontrada na literatura é resolver o problema (2.30) a partir de técnicas de minimização e maximização de funcionais lineares, encontrando-se assim os limites inferiores e superiores para o tensor A_{ij}^* e

após (2.30) resolvido, aplica-se o tensor no problema (2.28.a – 2.28.b) para encontrar a distribuição do campo $u_e(x, y) \rightarrow u(x) \in \Omega$ (Allaire, 2010; Svansted e Wellander, 2006; Tartar, 1980).

2.3.O método das energias de Luc Tartar.

O método da função teste oscilante, também conhecido como o método de Tartar, é uma elegante e poderosa técnica de homogeneização de equações diferenciais parciais. Uma forte vantagem deste método é que ele abrange uma enorme classe de equações diferenciais e não é fortemente afetado pela estrutura do domínio e do seu contorno. Antes de falar propriamente do método, propõe-se um pouco de contexto histórico relatado pelo próprio Luc Tartar em seu livro Tartar (2010).

No final da década de 1960, precisamente em 1967, Luc Tartar se forma na École Polytechnique e se prepara para o serviço militar. Entretanto, o presidente da França na época, Charles de Gaulle, decide que o país deveria investir massivamente em tecnologia. Tartar, então, volta para a carreira acadêmica. Orientado pelo famoso matemático francês Jacques Louis Lions, ele passa os anos de 1967 e 1968 estudando temas aparentemente desconexos sugeridos por seu orientador. Neste período, Louis Lions apenas pedia para que Tartar resolvesse pequenas questões em aberto na matemática, sem aparente direção nos estudos do seu orientado. Em uma destas ocasiões, Tartar termina rapidamente o que lhe foi pedido por seu orientador e vai visitar um colega também pesquisador: François Murat.

Luc Tartar então pergunta para seu colega sobre o que este está pesquisando e se interessa pelo problema apresentado. Naquele momento, ambos acreditavam que estavam descobrindo um novo campo da matemática, mas na verdade estavam o redescobrindo, uma vez que o problema já havia sido abordado por Spagnolo no início da década de 1960. Neste período de aproximação entre os dois, Louis Lions envia uma questão aparentemente simples para seu orientado: minimizar uma função custo, sob a forma:

$$J(a) = \int_0^1 |y - z_d|^2 dx$$

Tal que y fosse solução de:

$$-\frac{d}{dx} \left(a \frac{dy}{dx} \right) + ay = f, \quad em (0,1)$$

$$A_{ad} := \{a \mid a \in L^\infty((0,1)), \alpha \leq a \leq \beta\}$$

Com os valores $y(0)$ e $y(1)$ previamente fornecidos.

Tartar e Murat se debruçam então sobre o problema e Murat encontra um caso em que o problema não admite solução. As implicações desta falta de solução não serão abordadas neste trabalho, mas este resultado foi o gatilho para que se discutisse os valores aceitáveis de uma sequência convergente $a \in A_{ad}$. O problema, a princípio puramente acadêmico e inocente, resultou em teoremas de convergência que mais tarde culminariam na teoria da homogeneização pelo método das energias.

Volta-se agora para os aspectos técnicos do método. Considere um problema semelhante ao apresentado acima:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (A(y)\nabla u_\varepsilon) &= f, \quad em \Omega \\ u_\varepsilon &= 0, \quad em \partial\Omega \end{aligned} \quad (Exemplo)$$

Onde $f(x) \in L^2(\Omega)$. Pela aplicação do teorema de Lax-Milgram, o problema (Exemplo) admite solução única em $H_0^1(\Omega)$ e cabe a estimativa:

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.31)$$

Para $C > 0$ e independente de ε . Verifica-se então a convergência de (Exemplo) numa ótica variacional, utilizando-se uma função teste $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, resultando em:

$$\int_{\Omega} A(y)\nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \quad (2.32)$$

A dificuldade que emerge é a falta de conhecimento sobre o limite do produto de dois objetos apenas fracamente convergentes em $L^2(\Omega)$, isto é, $A(y)$ e $\nabla u_\varepsilon(x)$.

A principal ideia do método das energias proposto por Tartar é encontrar uma função teste específica que, graças as suas propriedades, faça o lado esquerdo de (81) convergir no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Este tipo de procedimento é conhecido como compacidade compensada, onde a função teste garante a convergência do integrando mesmo que estes por si próprios não garantam convergência.

O tipo de função teste que garante a convergência por compacidade compensada foi descoberta como sendo algo sob a forma:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) w_i(y) \quad (2.33)$$

Onde $w_i(y)$ é solução do problema de célula dual:

$$\begin{aligned} -\nabla_y \cdot (A^T(y) (e_i + \nabla_y w_i(y))) &= 0, \quad em Y \\ y &\rightarrow w_i(y), \quad Y - \text{peródico} \end{aligned} \quad (2.34)$$

O problema é dito dual pois ele é formulado com a transposta de A e não com A em si. A prova de (2.33) como função teste que resolve o problema de convergência está em Allaire (2010).

Note também que o método desenvolvido possui outra grande vantagem: a ausência de uma expansão assintótica que pode gerar um longo sistema de EDPs, que pode se tornar rapidamente um desafio quando a EDP original é complexa o suficiente, como o caso das equações de Navier-Stokes.

Desde o início da década de 1990, diversas outras formas de homogeneizar uma equação diferencial parcial foram propostas. Entre os principais e mais relevantes trabalhos está a proposta do método do trabalho virtual em duas escalas, desenvolvido no LNCC (Petrópolis) pelos pesquisadores Blanco e Feijó, cujos resultados estão no artigo Blanco et.

al (2016). Fora do Brasil, tem-se o trabalho da professora Patrizia Donato (BUNOIU e DONATO, 2017), utilizando o método de desdobramento (*unfolding*) que foi desenvolvido por sua orientadora, a já citada Cioranescu. Mais recentemente, surgiu o trabalho de Höfer (2022) sobre a homogeneização das equações de Navier-Stokes no limite do inviscido, isto é, levando para um limite em Euler. Apesar de ser um campo que retomou um considerável volume de produção após anos adormecido, o problema da homogeneização numérica continua em aberto. É nesta perspectiva que se orienta este trabalho.

3. Formulação fraca das equações de Navier-Stokes e as simulações numéricas diretas (SND)

3.1. Breve introdução às equações de Navier-Stokes incompressíveis.

As equações de Navier-Stokes são, talvez, um dos últimos maiores avanços na matemática aplicada a compreensão e previsão de fenômenos naturais. Nesta seção, dedica-se algumas linhas ao entendimento de sua formação e informações presentes na estrutura da equação. Seja a segunda lei de Newton escrita em sua forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) = \sum F_{ext} \quad (3.1)$$

Com simples interpretação: O somatório de todas as forças externas é igual a variação temporal na quantidade de movimento da partícula material. Define-se $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $F_{ext} = F(\mathbf{x}, t)$, onde todas estas funções atuam em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 1$ e com fronteiras suaves $\partial\Omega$. Expandindo (3.1):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega} p \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \mathbf{T}_d d\Omega \quad (3.2)$$

Onde um abuso de notação foi utilizado de maneira consciente. O primeiro termo a direita do sinal de igualdade representa a pressão atuando normal a superfície do elemento de fluido e o segundo termo uma segunda parcela da força externa que ainda será explorada. Uma demonstração mais rigorosa e de fácil entendimento pode ser encontrada em Chorin e Marsden (1993). Suponha agora uma hipótese em que a densidade do fluido, ρ , não seja função da posição ou do tempo, mas apenas uma constante. Esta seria a hipótese da incompressibilidade e resultaria em:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega} p \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \mathbf{T}_d d\Omega \quad (3.3)$$

Entretanto, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ e deve ser expandido pela regra da cadeia, dando origem a derivada material:

$$\rho \left(\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = - \int_{\partial\Omega} p \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \mathbf{T}_d d\Omega \quad (3.4)$$

Seja agora \mathbf{u} uma função solenoidal, isto é, que desaparece identicamente em $\partial\Omega$.

$$\mathbf{u}_{\partial\Omega} = 0 \rightarrow \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.5)$$

O que resulta em:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{T}_d \quad (3.6)$$

Finalmente, pela teoria dos tensores lineares de Cauchy, sabe-se que $\mathbf{T}_d = 2\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ e, substituindo em (3.6), chega-se à forma mais conhecida da equação da quantidade de movimento para fluidos incompressíveis:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.7)$$

A equação (3.7) é uma equação diferencial parcial hiperbólica em $p(x, t)$ e $\mathbf{u}(x, t)$, logo, precisa-se ainda de uma equação escalar para que o sistema seja ao menos resolvível. A equação escalar que envolve o termo $p(x, t)$ é a conhecida equação do balanço de massa dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (3.8)$$

Em conjunto, (3.7) e (3.8) formam as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis sem influência de forças de corpo. Estas equações são, sem dúvida, a principal ferramenta matemática para os experimentos em dinâmica dos fluidos computacional. Por seu rigor e generalidade, tais equações permitem que fenômenos reais sejam observados puramente a

partir de análises matemáticas (Carvalho e Valério, 2012; Chorin e Marsden 1993). Por este reconhecimento em sua robustez e confiabilidade, nos últimos anos, cientistas em geociências, engenharia de materiais e outras áreas acadêmicas que estudam o comportamento de meios porosos permeáveis, têm utilizado as equações de Navier-Stokes para simular o comportamento do fluido em escala de poros, o que seria uma tarefa difícil de ser realizada em laboratório. Com isso, deve-se aqui uma rápida nota sobre a incompressibilidade e a simulação numérica em escala de poro.

É amplamente difundido nas engenharias que a água é um fluido incompressível e, em larga escala e condições normais, ela é. Entretanto, em um olhar mais cuidadoso e físico, percebe-se rapidamente que material algum na Terra é totalmente incompressível. A água possui uma conhecida deformação volumétrica de $\varepsilon_V = 5 \times 10^{-5}$ para cada $\Delta p = 100 kPa$. O que se deve notar aqui é a importância da escala na qual aplica-se as equações de Navier-Stokes e o regime no qual elas estão sendo estudadas. Este questionamento emerge do fato que $\nabla \cdot \mathbf{u}$ não é absolutamente nulo pois $\mathbf{u} \partial \rho / \partial t$ também não é realmente nulo. Estes termos são apenas negligenciados quando a escala do problema admite parcelas difusivas e inerciais consideravelmente superiores a compressibilidade do fluido, e logo, podem ser descartadas da equação sem grande influência no resultado da solução da equação diferencial parcial (Chorin e Marsden, 1993; Chipot, 1984). Quando o problema simulado numericamente se encontra na escala de poros, isto é, em um domínio $\Omega^n \cong 10^{-6} m$, o efeito da compressibilidade não é mais negligenciável como é em larga escala. A análise deve então ser completada com uma rápida investigação no regime das pressões aplicadas para que se julgue se a compressibilidade fará uma grande diferença no resultado da simulação ou não. Por estes motivos sucintamente abordados, recomenda-se que formas adimensionais sejam construídas para melhor avaliação dos efeitos de escala.

3.2. Análise de existência e unicidade da solução em um espaço de dimensão infinita.

Seja a princípio o problema matemático das equações de Navier-Stokes incompressíveis (NSI) em sua formulação estacionária com forças de corpo e suas devidas condições de contorno:

$$\rho \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \text{em } \Omega \quad (3.9.a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega \quad (3.9.b)$$

$$\mathbf{u}_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.9.c)$$

O problema posto exige que o campo encontrado seja solenoidal com condições de contorno de Dirichlet (homogêneas) em todo contorno do domínio. Suponha que o domínio e sua fronteira sejam devidamente regulares com todas as propriedades bem-postas como definido no subtema anterior para que seja possível afirmar que o problema todo seja bem-posto. Suponha então que, tal como escrito, o problema (3.9.a – 3.9.c) admite um par de solução (\mathbf{u}, p) tal que \mathbf{u} seja um campo vetorial e p um escalar. As equações (3.9.a – 3.9.c) expressam com clareza as exigências na restrição do espaço vetorial de dimensão infinita onde se deve buscar por \mathbf{u} . Define-se:

$$\mathbf{u} \in V := \{v: \|v\| < \infty, \|\nabla \cdot v\| < \infty, \|\Delta v\| < \infty, v_{\partial\Omega} = 0, \forall v \in V\} \quad (3.10)$$

E logo \mathbf{u} pode ser expandido de maneira única como:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j, \quad \phi_j \in V, c_j \in \mathbb{K} \quad (3.11)$$

O campo escalar p deve habitar um outro espaço de dimensão infinita:

$$p(x) \in Z := \{y: \|y\| < \infty, \|\nabla y\| < \infty, \forall y \in Z\} \quad (3.12)$$

E pode também ser expandido de maneira única:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_j, \quad \chi \in Z, a_j \in \mathbb{K} \quad (3.13)$$

3.2.1.Existência e unicidade do caso linearizado

Antes de generalizar a prova da existência para o caso não linear, propõe-se que seja demonstrada a existência e unicidade de uma solução forte e de uma solução fraca para tempos limitados ou para o caso estacionário. Considere o caso onde $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon \ll 1$, tal que $\|\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u}\| < \varepsilon \ll \nabla^2 \mathbf{u}$. As equações de Navier-Stokes se tornam:

$$-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} = 0, \quad \text{em } \Omega \quad (3.14.a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega \quad (3.14.b)$$

$$\mathbf{u}_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.14.c)$$

Rearranjando a equação (3.14.a) obtém-se:

$$\mu \Delta \mathbf{u} = \nabla p + \mathbf{f} \quad (3.15)$$

Onde o Laplaciano Δ é um operador linear auto-adjunto simétrico de propriedades extensivamente conhecidas e $\mu \in \mathbb{R}$, logo, propõe se que o seguinte operador linear seja proposto:

$$\mu \Delta = A: C_0^\infty(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (3.16)$$

Permitindo assim que (3.15) se reescreva:

$$A\mathbf{u} = \nabla p + \mathbf{f} \quad (3.17)$$

Seja então um funcional F gerado a partir de (3.17) cuja solução corresponde a solução fraca do problema (3.14.a – 3.14.c), formulado como:

$$F(A\mathbf{u}) = F(\nabla p + \mathbf{f}) \quad (3.18)$$

Considere que \mathbf{f} seja uma força de corpo gerada por um campo potencial, como o campo gravitacional por exemplo. Com isso, pode-se dizer que $\mathbf{f} = \nabla H$ e o lado direito da igualdade se reescreve $F(\nabla p + \nabla H)$ ou $F(\nabla(p + H))$ onde, H sendo um escalar, assume-se que p e H sejam de

mesma classe, logo aditivos e, portanto, $p + H = J$, reescrevendo (3.18) sob a forma:

$$F(A\mathbf{u}) = F(J) \quad (3.19)$$

Seja uma solução fraca \mathbf{u}_S habitando o espaço vetorial de dimensão finita $S \subset V \in \mathbb{R}^n$. Da análise funcional, sabe-se que (3.19) pode ser reescrita pelo teorema da representação de Riesz como:

$$\langle A\mathbf{u}_S, \mathbf{v} \rangle = \langle J, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{u}_S \in S, \quad \mathbf{v} \in S, \quad J \in L^2(\Omega) \quad (3.20)$$

Sendo A um operador simétrico e auto-adjunto, o seu conjugado formal pode ser transferido para o elemento \mathbf{v} tal que:

$$\langle \mathbf{u}_S, A^+ \mathbf{v} \rangle = \langle J, \mathbf{v} \rangle \quad (3.21)$$

Onde A^+ não transporta o elemento para um outro espaço vetorial, apenas o translada dentro do espaço original, sendo assim $\mathbf{v} \in S, A^+ \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{w} \in S$, logo $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ arbitrariamente. Tem-se finalmente:

$$\langle \mathbf{u}_S, \mathbf{v} \rangle = \langle J, \mathbf{v} \rangle \quad (3.22)$$

Ou

$$a(\mathbf{u}_S, \mathbf{v}) = \langle J, \mathbf{v} \rangle \quad (3.23)$$

Onde (3.22) é um funcional linear oriundo da equação linearizada de NSI, podendo assim ser submetido ao teorema de Lax-Milgram e comprovando finalmente a existência e unicidade de \mathbf{u}_S . A unicidade de J também é garantida, logo por consequência, \mathbf{f} e p também são unicamente definidos. A solução \mathbf{u}_S habita um espaço já conhecido e estudado neste trabalho:

$$\mathbf{u}_S \in S := \{u: \|u_S\|_{L^2} < \infty, \|D_w^\alpha u_S\|_{L^2} < \infty, \alpha \leq 1, u_{S\partial\Omega} = 0\} = \dot{W}_2^1(\Omega) \quad (3.24)$$

Isto é, S é um espaço de Sobolev de funções compactas em Ω . (Georgescu, 1985)

Estendendo o raciocínio para o espaço de dimensão infinita, prova-se que o problema também possui solução forte. No mais, a extensão pode ser garantida também para casos de condições de contorno essenciais

(Dirichlet) não homogêneas, como por exemplo, $\mathbf{u}_{\partial\Omega} = g \in L^2(\partial\Omega)$ (Rempfer, 2006)

3.2.2. Existência de uma solução para o caso não linear generalizado.

No caso não linear generalizado, a prova de existência também pode ser dada por Lax-Milgram pois, como explicado no anexo, a linearidade exigida pelo teorema é em relação ao funcional e não ao elemento do espaço no qual está sendo aplicado o funcional. Isto é, na formulação de Riesz $a(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ classicamente encontrada na literatura, o ponto e vírgula separa a variável linear da variável linear e pode ser interpretado então como um funcional cujo elemento tomado no espaço seja não linear em seus argumentos, mas que sua relação com o outro elemento é linear pois é um produto interno dentro de um espaço de Hilbert. A prova do caso generalizado não será demonstrada de maneira extensa pois esta pode ser encontrada nas referências deste. Seja o problema não linear generalizado:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad em \Omega \quad (3.25.a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad em \Omega \quad (3.25.b)$$

$$\mathbf{u}_{\partial\Omega} = 0, \quad em \partial\Omega \quad (3.25.c)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0 \quad (3.25.d)$$

Propõe-se uma solução forte dada por um funcional representativo de (3.25.a). O método apresentado a seguir é comumente chamado de solução turbulenta de Leray. Um cuidado deve ser tomado na interpretação do nome do método pois este não trata de uma solução *a priori* turbulenta, mas sim de uma solução válida para tempos finitos até o colapso do fluxo laminar, ou seja, até a explosão da solução determinística (Georgescu, 1985) Tome um candidato a solução $\mathbf{u} \in V$ de dimensão infinita. Tome agora um outro elemento $\varphi \in D(\Omega)$, logo, infinitamente diferenciável e de suporte compacto (*mollifier*). Nota-se que tanto \mathbf{u} quanto φ devem agora

também fazer parte do conjunto de funções pelo menos uma vez diferenciáveis no tempo em um dado intervalo de tempo. Logo, uma definição mais rigorosa diria que:

$$\mathbf{u} \in V \cap T(0; t) \quad (3.26.a)$$

$$\varphi \in D(\Omega) \cap T(0; t) \quad (3.26.b)$$

$$p \in Z \cap T(0; t) \quad (3.26.c)$$

Obtêm-se o funcional:

$$\int_0^t \left\{ \langle \mathbf{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle + \langle (\nabla \cdot \mathbf{u}) \varphi, \mathbf{u} \rangle + \nu \langle \mathbf{u}, \nabla^2 \varphi \rangle \right\} dt = -\langle \mathbf{u}_0, \varphi(0) \rangle \quad (3.27)$$

Onde $\nu = \frac{\mu}{\rho} \in \mathbb{R}$. A existência do par de solução (\mathbf{u}, p) provada por Leray diz que a solução do problema (3.27) satisfaz de maneira única a equação de energia:

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \nu \int_0^t \left| \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right|^2 dt \leq \frac{1}{2} |\mathbf{u}_0|^2, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \cdot) \quad (3.28)$$

E, provando-se que a solução encontrada habita o espaço:

$$L^2([0; t]; N^1(\Omega)) \cap L^\infty([0; t]; N(\Omega)) \quad (3.29)$$

Onde $N^1(\Omega)$ é um análogo ao espaço de Sobolev $W_2^1(\Omega)$ porém de dimensão infinita assim como $N(\Omega)$ é o análogo de $W_\infty^1(\Omega)$. A junção de (3.28) e (3.29), por extensos argumentos topológicos demonstram também a unicidade da solução (Georgescu, 1985).

3.3. Formulação variacional das equações de Navier-Stokes incompressível e estacionária.

Com os argumentos topológicos apresentados e a derivação das equações de NSI, busca-se agora desenvolver um funcional que represente o problema (3.14.a – 3.14.c), referente a formulação estacionária das equações de NSI. Define-se a presente o tensor dito cheio

$\mathbf{T} = \mathbf{T}_d + p\mathbf{I}$ onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Sejam também definidas as principais condições de contorno que podem ser impostas em $\partial\Omega$ ou partes $\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$ (Li et. al, 2017; Carvalho e Valério, 2012; Rempfer, 2006):

- i) Condição de não-deslizamento, ou, parede sólida (parada): $\mathbf{u} = 0$.
- ii) Condição de não-deslizamento, ou, parede sólida (em movimento): $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\partial\Omega}$.
- iii) Linha de simetria (tensão de cisalhamento nula): $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{t} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) = 0$ onde \mathbf{t} é a componente tangencial do campo de velocidades.
- iv) Condição de entrada para fluxo desenvolvido: $\mathbf{u} = U(\mathbf{x})$.
- v) Condição de saída ou pressão de saída: $\mathbf{n} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ e $p = p_{saída}$.

Seja então o problema (3.14.a – 3.14.c) definido em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteiras $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ devidamente Lipschitz-contínuas com condições de contorno bem postas (satisfazendo os teoremas de traço e extensão entre variedades de dimensões diferentes). Suponha um par de soluções aproximadas habitando um subespaço de dimensão finita (\mathbf{u}_S, p_Q) tal que $\mathbf{u}_S \in S = W_2^1(\Omega)$ e $p_Q \in Q = L^2(\Omega)$. Pelo Método dos Resíduos Ponderados (MRP) a equação da conservação de quantidade de movimento torna-se o funcional:

$$\int_{\Omega} (\rho \mathbf{u}_S \cdot \nabla \mathbf{u}_S - \nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \psi \, d\Omega = 0 \quad (3.30.a)$$

E conseqüentemente a equação de conservação de massa:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_S) \omega \, d\Omega = 0 \quad (3.30.b)$$

Nota-se que as funções teste do MRP para (3.30.a) e (3.30.b) são diferentes. Esperava-se este resultado pois a natureza das equações é diferente. Um funcional, por definição, toma valores em um espaço vetorial

e mapeia nos reais. Caso fosse utilizado uma função teste vetorial na equação (3.30.b) o funcional não estaria bem posto pois tomaria valores em um espaço escalar e o mapearia em um espaço vetorial.

3.3.1. Desenvolvimento do funcional da equação de quantidade de movimento.

Expandindo (3.30.a) encontra-se:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_S (\mathbf{u}_S \cdot \nabla \mathbf{u}_S) \cdot \psi \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \psi \, d\Omega = 0 \quad (3.31)$$

Onde o último termo a esquerda da igualdade, do qual sabe-se que originará o termo de segunda derivada, pode então ser integrado por partes para transferir a exigência de regularidade para a função teste. A integração por partes permite a seguinte identidade tensorial:

$$\mathbf{T} : \nabla \psi = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \psi) - (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \psi \quad (3.32)$$

A equação (3.31) pode então ser reescrita sob a forma:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_S (\mathbf{u}_S \cdot \nabla \mathbf{u}_S) \cdot \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \psi \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \psi) \, d\Omega = 0 \quad (3.33)$$

Onde o teorema da divergência permite que o último termo a direita da igualdade seja transformado em um termo integral avaliado na fronteira $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{u}_S (\mathbf{u}_S \cdot \nabla \mathbf{u}_S) \cdot \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \psi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \cdot \psi) \cdot \mathbf{n} \, d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

Seja então (3.34) definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2$ com fronteiras devidamente suaves $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Seja então a função teste $\psi \in W_2^1(\Omega), \psi = \{\psi_1, \psi_2\}$. Seja $\mathbf{u}_S \in W_2^1(\Omega), \mathbf{u}_S = \{u, v\}$. O integrando do primeiro termo da equação (3.34) se expande tal que:

$$\rho \mathbf{u}_S (\mathbf{u}_S \cdot \nabla \mathbf{u}_S) \cdot \psi = \rho \mathbf{u}_S \left[\psi_1 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \psi_2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad (3.35. a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \nabla \psi = & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ & + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \left(-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.35.b)$$

E como o último termo age no contorno e supostamente o contorno possui valores conhecidos, admite-se funções arbitrárias $g = \{g_x, g_y\}$ tal que:

$$(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\psi}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\psi} = g_x \psi_1 + g_y \psi_2 \quad (3.35.c)$$

3.3.2. A equação de conservação de massa

A equação escalar que garante que o problema de NSI seja resolvível, ou fechado, é a equação de conservação ou balanço de massa. Em sua forma variacional (ou funcional) ela se apresenta como:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_S) \omega \, d\Omega = 0 \quad (3.36.a)$$

Onde ω é um n-tuplo de escalares, de mesma dimensão que o problema posto. Isto é, $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ tal que $|\omega| = \sum \omega_i < \infty$. A expansão de (3.36.a) se escreve facilmente como:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \omega \, d\Omega = 0 \quad (3.36.b)$$

Tomando agora as expansões (3.37.a) e (3.37.b) para os campos de velocidade e pressão, porém desta vez em um espaço de dimensão finita, onde pode-se aproveitar as mesmas bases da expansão em espaço infinito, pois já foi demonstrado que desta maneira se garante que o espaço de dimensão finita será necessariamente um subespaço do espaço de dimensão infinita (Halmos, 2017):

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N c_j \boldsymbol{\phi}_j, \quad \boldsymbol{\phi}_j \in S = W_2^1(\Omega), c_j \in \mathbb{K} \quad (3.37.a)$$

$$p_Q(x) = \sum_{j=1}^M a_j \chi_j, \quad \chi \in Q \subset Z, a_j \in \mathbb{K} \quad (3.37.b)$$

Onde os teoremas de completude dos espaços de dimensão finita permitem garantir a convergência para uma solução aproximada a partir das expansões (3.37.a) e (3.37.b).

O enfraquecimento das equações de NSI não-estacionárias, isto é, dependentes do tempo, segue o mesmo raciocínio apresentado até aqui. Entretanto, quando o tempo é contemplado na equação, esta muda de natureza, deixando de ser parabólica e passando a ser hiperbólica. A discretização temporal é por sua vez tratada como um problema de diferenças finitas, onde se opta pela formulação em esquema- θ para $\theta = 1/2$, um esquema implícito (Crank-Nicholson) incondicionalmente estável (Romanel, 2019; Simpson, 2017; Khennane, 2013; Heinrich e Pepper, 2017).

4. Instabilidade hidrodinâmica e elementos de fluxos não lineares em meios porosos

4.1. Estabilidade global e local, critério de energia e transição.

O entendimento da estabilidade de fluxos laminares assim como o processo de transição para turbulência possui grande importância no estudo de otimização energética dos processos hidrodinâmicos, mas também ganhou valor na mecânica dos solos e meios porosos em geral a partir do momento em que uma nova área de estudo foi implementada: a dinâmica dos fluidos em meios porosos. Em sistemas deste tipo, o fluxo, em qualquer regime, causa distribuições de forças e tensões na matriz sólida que o cerca. Entretanto, parece ser razoável levantar a hipótese de que uma variação no fluxo, em relação ao campo de velocidades ou ao campo de pressão, pode ter efeitos mecânicos consideráveis na estrutura sólida do meio.

Do ponto de vista matemático, a solução $u(x, t)$ para as equações de Navier-Stokes pode existir para qualquer valor de R_e , mas o campo encontrado só corresponde ao real campo observado para soluções cujo valor de Reynolds é inferior a um número de Reynolds crítico, dito $R_{e_{CR}}$. Para avaliar esse processo de transição, decidiu-se que a instabilidade de fluxo deveria ser analisada em escala micro e macro, de maneira rigorosa com as equações diferenciais que governam fluxos de fluidos em geral. Nesta sessão, será demonstrado o surgimento das equações de Orr-Sommerfeld, suas características assim como uma breve revisão dos tipos de instabilidade.

4.1.1. Estabilidade em escala micro

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um subdomínio aberto e simplesmente conectado no qual ocorre um fluxo não compressível de um fluido perfeitamente newtoniano gerado por uma força de corpo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Seja também o campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e de pressão $p(\mathbf{x}, t)$ soluções do problema de NS posto tal que:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.1.a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1.b)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (4.1.c)$$

$$\mathbf{u}_{\partial\Omega} = \mathbf{w} \quad (4.1.d)$$

Onde a equação Eq.4.1.a é a equação de NS e a equação Eq.4.1.b é a equação da continuidade. Tem-se também as condições iniciais dadas pela Eq.4.1.c e as condições de contorno na fronteira do domínio pela Eq.4.1.d. Assume-se por simplicidade que a única variação nas condições do problema acima será em sua condição inicial, ou seja, uma perturbação inicial nos campos de pressão e velocidade (Georgescu, 1985). Seja uma solução base (estável) para as equações de NS dada pelo par de campos $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ tal que:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \quad (4.2.a)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.2.b)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad (4.2.c)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{\partial\Omega} = \mathbf{w} \quad (4.2d)$$

Admite-se também que haja um par de perturbações do tipo (\mathbf{v}_0, q_0) tal que este par induza uma perturbação para qualquer $t > 0$ e que isto gere um campo de soluções perturbadas tal que:

$$\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{v}_0 \quad (4.3.a)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v} \quad (4.3.b)$$

$$\mathbf{p} = \bar{p} + q \quad (4.3.c)$$

Define-se $\bar{\mathbf{u}}$ um fluxo base estável às condições iniciais como um campo em que qualquer outro campo \mathbf{u} em $t = 0$ é suficientemente próximo a $\bar{\mathbf{u}}_0$ e que posteriormente continua tão próximo de \mathbf{u} quanto desejamos. No mais, se \mathbf{u} se aproxima de $\bar{\mathbf{u}}$ quando $t \rightarrow \infty$ diz-se que $\bar{\mathbf{u}}$ é assintoticamente estável (no sentido descrito por Lyapunov). De outro lado, um fluxo é dito instável às condições iniciais se \mathbf{u} se amplifica com $t \rightarrow \infty$. Matematicamente, diz-se que uma solução $\bar{\mathbf{u}}$ é dita estável na escala micro se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma função $\eta(\varepsilon) > 0$ tal que $\sup_{x,t} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon$ para todo $|\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})| < \eta(\varepsilon)$. $\bar{\mathbf{u}}$ é dita assintoticamente estável na escala micro se além de estável (Lyapunov) a relação $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)| = 0$.

Substituindo (4.3.a – 4.3.c) em (4.2.a – 4.2.d), ou seja, a solução perturbada na equação de NS e considerando que $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0$, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})\mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\bar{\mathbf{u}} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla q + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (4.4.a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0 \quad (4.4.b)$$

As equações 4.4.a e 4.4.b caracterizam um problema de valor inicial na classe das funções solenoidais, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, que desaparecem identicamente na fronteira do domínio ($\partial\Omega$). A solução trivial (nula) do problema acima refere-se diretamente ao fluxo de base devido a construção $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}$. Matematicamente, a estabilidade do fluxo base é garantida em uma perturbação \mathbf{v}_0 existe um $\varepsilon > 0$ tal que exista também $\eta(\varepsilon) > 0$ e $\sup_{x,t} |\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon$ para qualquer $|\mathbf{v}_0(\mathbf{x})| < \eta$. No mais, se $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$, então $\bar{\mathbf{u}}$ é assintoticamente estável.

Percebe-se a presente que a teoria da estabilidade/instabilidade hidrodinâmica está voltada para o comportamento assintótico dos fluxos

perturbados, isto é, não há um real interesse em estudar a transição de regimes ou a evolução no tempo das perturbações.

Em sua forma adimensional, as equações de NS tornam-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.5.a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.5.b)$$

E o parâmetro conhecido como número de Reynolds (Re) passa a governar o comportamento da estabilidade do escoamento. O parâmetro de Reynolds pode ser definido como $Re = VL/\nu$, onde V , L e ν são respectivamente a velocidade característica, comprimento característico e a viscosidade dinâmica do fluido. Para Re pequeno, o problema acima (Eq. 4.5.a e Eq. 4.5.b) admite uma solução $\bar{\mathbf{u}}$ que é única e estável, ou seja, o fluxo base garante os princípios da unicidade e existência das soluções de equações diferenciais parciais. Entretanto, existe um valor de Re para qual o fluxo perde estabilidade. Este valor será denominado Re_G . Após o valor de Re_G ser atingido, a instabilidade pode aparecer de duas formas distintas: uma instabilidade pura ou uma instabilidade por etapas. No primeiro caso, a instabilidade é amplificada quando $t \rightarrow \infty$ enquanto para o segundo caso o fluxo tende para um novo regime laminar em $t \rightarrow \infty$ apesar de ter passado por uma fase instável transiente. Este segundo estado de fluxo laminar após a instabilidade é chamado de fluxo secundário e pode, por sua vez, tornar-se instável para uma nova energia de perturbação. Apesar de não ser o foco principal deste trabalho, reforça-se que a instabilidade por etapas corresponde ao problema de bifurcação de soluções das equações de NS, pois, ao assumir que existe um fluxo de base para cada valor de Re , em Re_G pode-se dizer que há uma perda de unicidade da solução. O estudo rigoroso das instabilidades se resume a um estudo da existência global das soluções (Georgescu, 1985; Hopf, 1952).

4.1.2. Estabilidade na escala macro (média)

De maneira geral, a existência de soluções correspondentes ao fluxo básico não pode ser provada na maneira 'clássica', isto é, pela análise da solução singular do problema. Para isso, busca-se estudar o comportamento das soluções generalizadas que pertencem a algum espaço de Hilbert H , obtido por construção (conclusões) de alguns espaços de funções contínuas. Nestes casos, o tipo de estudo de estabilidade se diz *estabilidade na média*, ou, *estabilidade na escala macro*. O estudo da estabilidade na escala macro está associado ao estudo na energia da perturbação que pode ser descrita por $\int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 dx \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Ou pode-se utilizar também a análise dos gradientes de velocidade da perturbação tal como $\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

Seja uma perturbação, por definição, a diferença entre o campo de velocidade perturbado e a velocidade do fluxo de base. Em sua forma adimensional, busca-se resolver o problema:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \bar{\mathbf{u}}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\nabla q + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad (4.6. a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad (4.6. b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.6. c)$$

$$\mathbf{v}_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.6. d)$$

Para encontrar a energia da perturbação, multiplica-se a equação 4.6.a inteira por \mathbf{v} e em seguida integra-se em todo o domínio limitado. Obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} dx + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx = \\ - \int_{\Omega} \mathbf{v} \nabla q dx + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sabendo que o campo de velocidades é solenoidal, admite-se a relação $\nabla \cdot (\mathbf{w}\phi) = \mathbf{w}\nabla\phi + \phi\nabla \cdot \mathbf{w}$ onde $\phi\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ para ϕ escalar e \mathbf{w} vetor

solenoidal. Chega-se então á $\int_{\Omega} \mathbf{w} \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{w} \phi) \, dx = \int_{\partial \Omega} \mathbf{w} \phi \mathbf{n} \, dS$. Rearranjando a equação da energia do campo de velocidades da perturbação utilizando-se das relações de campos solenoidais demonstradas acima, chega-se a *equação de energia de Reynolds-Orr*:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} |\Delta \mathbf{v}|^2 \, dx \quad (4.8)$$

Sendo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ um campo de vetores solenoidais, tem-se a igualdade $(\nabla \cdot \mathbf{v}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}] - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}}$, que ao ser integrada no domínio Ω e aplicando o teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dx \quad (4.9)$$

Logo, uma forma alternativa de explicitar a equação de energia de Reynolds-Orr aparece sob a forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dx - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx \quad (4.10)$$

Da equação (4.10), pode-se extrair informações sobre a natureza física de cada parcela. A parcela da esquerda é o aumento no tempo da energia da perturbação que provém da transferência de energia do fluxo de base. A parcela da direita é a parte dissipativa do sistema devido ao efeito viscoso, que é sempre positiva. A positividade incondicional da parcela dissipativa tem como consequência uma incondicional perda de energia. Tal processo pode ser demonstrado como a seguir. Sejam as equações de NS sem força de corpo para apenas o campo da perturbação:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (4.11)$$

Multiplicando ambos os lados pelo campo \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla)] - \frac{1}{\rho} (\mathbf{v} \cdot \nabla) p + \nu \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} \quad (4.12)$$

Onde as parcelas a direita da igualdade podem ser reescritas como (considerando $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$):

$$\mathbf{v} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla)] = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) |\mathbf{v}|^2 = \nabla \cdot \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \mathbf{v} \right) \quad (4.13.a)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)p = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (4.13.b)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] - |\nabla \mathbf{v}|^2 \quad (4.13.c)$$

Logo, se a variação de energia E do sistema for descrita pela variação temporal de $\mathbf{v} \partial \mathbf{v} / \partial t$, em todo o domínio obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dx = \\ &\rho \int_{\Omega} \nabla \cdot \left[-\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \mathbf{v} - p \mathbf{v} + \nu (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] dx - \rho \int_{\Omega} \nu |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aplicando o teorema da divergência na primeira integração após a igualdade, obter-se-ia, em todos os termos que compõe o integrando, o produto do campo de velocidades com o vetor normal a fronteira do domínio. Como $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ é solenoidal, logo todo o referido termo desaparece na fronteira restando apenas:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\rho \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx = -\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \quad (4.15)$$

Como o parâmetro $\mu > 0$, conclui-se que $\frac{\partial E}{\partial t} < 0$ incondicionalmente, e logo, por corolário, a parcela de dissipação viscosa há de ser sempre positiva.

Seja uma função $K(t)$ que defina a energia média do sistema ao longo do tempo. Tal função pode ser explicitada como:

$$K(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 dx \quad (4.16)$$

Assim, pode-se dizer que um fluxo perturbado é estável na média (em escala macro) se $K(t)$ se mantém limitada para qualquer campo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. No mais, se $K(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, diz-se que $\bar{\mathbf{u}}$ é assintoticamente estável na média. A equação da função $K(t)$ indica que $K(t) = 0$ implica necessariamente em $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$ em praticamente todo o domínio e que então $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ permanece limitada em quase todo o domínio. Com estas

afirmações, entende-se que a análise de estabilidade na escala micro é mais forte do que na escala macro. Entretanto, por outro lado, a análise de estabilidade na média com a função $K(t)$ permite que funções descontínuas com normas de Lebesgue nulas sejam integradas pelo método de Riemann, permitindo que perturbações de naturezas mais genéricas possam ser avaliadas. É importante reforçar que, caso a perturbação $v(x, t)$ seja descontínua, a integração por Riemann só pode ser aplicada a fluxos laminares. A restrição a fluxos laminares nasce da própria limitação da integração de Riemann dada a definição: *Uma função limitada em um intervalo compacto é Riemann-integrável se e somente se ela for contínua em quase todo o domínio, isto é, tendo o conjunto dos pontos de descontinuidade com medida Lebesgue nula definido*. Logo, para que $K(t)$ seja limitada, a perturbação deve necessariamente desaparecer assintoticamente em tempo infinito.

A condição de estabilidade na escala macro pode ser então obtida com a simples razão entre os termos a direita e a esquerda do sinal de igualdade na equação de energia, assim sendo:

$$\frac{\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx}{\frac{1}{Re} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx} < 1 \quad (4.17)$$

Da equação (4.17), pode-se determinar o valor de Re que torna o fluxo instável para um mesmo campo de velocidades perturbado. Seja o valor de Re que torna o fluxo instável denominado por \widetilde{Re} , logo, o critério para estabilidade global (média) será:

$$Re < \widetilde{Re} \quad (4.18)$$

A análise da estabilidade de fluxos e transição para turbulência pode ser feita sob a ótica da avaliação dos autovalores de uma EDP. Para o caso extremo onde $Re = \widetilde{Re}$, pode-se escrever que:

$$\frac{1}{\widetilde{Re}} = \max \frac{\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \, dx}{\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 \, dx} \quad (4.19. a)$$

Onde, parametrizando a EDP no objetivo de tornar $\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = 1$, pode-se tratar o problema sob a forma:

$$\frac{1}{\widetilde{Re}} = \max \left\{ \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dx \right\} \quad (4.19.b)$$

Considerando um problema de otimização, adotando $1/Re^*$ como multiplicadores de Lagrange e a função escalar lambda de Lagrange como $\lambda(x, t)$, obtém-se o seguinte problema a ser otimizado:

$$\delta \int_{\Omega} \left[(\nabla \mathbf{v}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{Re^*} |\nabla \mathbf{v}|^2 - 2\lambda \nabla \mathbf{v} \right] dx = 0 \quad (4.20)$$

Tal problema possui uma equação de Euler-Lagrange do tipo:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\nabla \lambda + \frac{1}{Re^*} \Delta \mathbf{v} \quad (4.21)$$

Que se assemelha fortemente a equação de NS sem o termo inercial. O problema variacional logo se torna um problema de autovalores, sendo estes, $1/Re^*$. Do teorema de Serrin (1959), afirma-se que: *Se o problema de variacional tal como descrito acima admite solução, então $1/\widetilde{Re}$ é o maior autovalor do problema de autovalores. O fluxo de base é então estável para todo $\frac{1}{Re} > 1/\widetilde{Re}$.*

O problema acima (4.21) pode ter autovalores de natureza complexa, isto é, composto por uma parte real e outra parte imaginária. Este problema pode ser interpretado de maneira gráfica como a seguir, utilizando o plano Z dos complexos ($Z \in \mathbb{C}$).

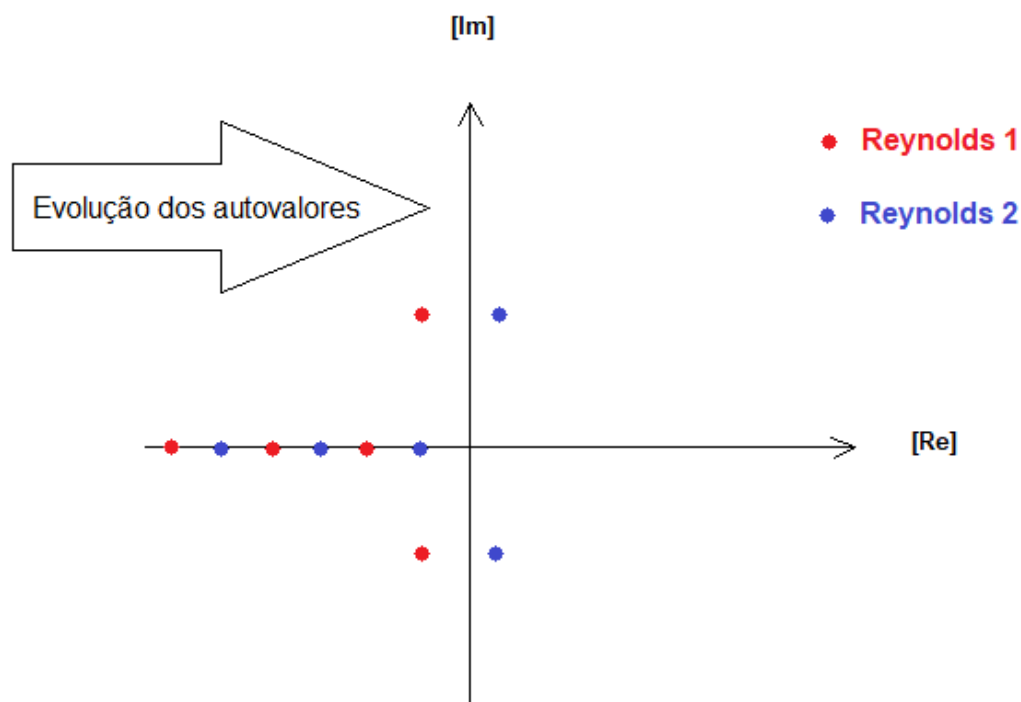


Figura 3. Autovalores no plano complexo com Reynolds 1 < Reynolds 2. (Autor, 2020)

Na Figura 3, nota-se que ao aumentar o valor da parte real dos autovalores, estes se tornam positivos e desestabiliza o fluxo perturbado.

O teorema de Serrin (1959) indica por consequência de um problema de autovalores, que existe um autovetor \tilde{v} que satisfaz a equação a ser otimizada (4.21). O que era anteriormente apenas um problema de autovalores ganha uma dificuldade maior pois passa a ser um problema de existência de soluções. Partindo do princípio de que \tilde{v} é, por construção, o vetor diferença entre o fluxo base e o fluxo perturbado, ao encontrar-se um autovalor que desestabilize o fluxo, não necessariamente o autovetor associado é uma perturbação. Em outras palavras, a solução puramente matemática do problema de autovalor-autovetor não garante que a natureza física do campo de velocidades $v(x, t)$ seja compatível com uma perturbação real. Esta condição implica que para $Re < \widetilde{Re}$, o fluxo perturbado é incondicionalmente estável, mas que para alguns valores de $Re > \widetilde{Re}$ onde \tilde{v} não satisfaz a equação otimizada (semelhante a NS), o fluxo perturbado pode continuar estável. Entretanto, se $Re > \widetilde{Re}$ e \tilde{v}

satisfaz o problema de estabilidade, \widetilde{Re} passa então a ser chamado de *limite exato de estabilidade*, tal que para qualquer $Re > \widetilde{Re}$, a perturbação se amplifica.

Há dois tipos de limite de estabilidade (dos autovalores) que são frequentemente utilizados na literatura, \widetilde{Re} e Re_G . O primeiro limite é o mesmo apresentado no parágrafo anterior, ou seja, o *limite exato de estabilidade*. O segundo é conhecido como *limite global de estabilidade*. O limite de estabilidade global (Re_G) possui uma importante propriedade, tal que se pode afirmar que toda perturbação com $Re < Re_G$ será amortecida e que para $Re > Re_G$, pelo menos uma perturbação será amplificada. Logo, o método de análise por energia média do sistema (com análise de $K(t)$ e o problema de autovalores) se torna adequado para fluxos perturbados que admitem \widetilde{Re} próximo a Re_G .

4.1.3. Estabilidade Linear e a equação de Orr-Sommerfeld.

Para pequenas perturbações no fluxo, as parcelas não lineares da equação de NS podem ser desprezadas pois em ordens maiores os valores são irrelevantes para o problema de estabilidade. Eliminando os termos não lineares da equação 6.a, obtém-se o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \bar{\mathbf{u}}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\nabla q + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad (4.22.a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0 \quad (4.22.b)$$

O problema apresentado nas equações 4.22.a e 4.22.b podem ser resolvidos adotando as propriedades e definições expostas anteriormente sobre a estabilidade na escala micro. Entretanto, uma nova informação é dada ao problema, sobre a natureza da perturbação $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Da teoria linear das funções, assume-se que qualquer perturbação $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ pode ser escrita como a sobreposição de finitas funções (perturbações) do tipo $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})e^{-\sigma t}$, chamadas de modos-normais, onde σ é o autovalor complexo e $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ uma

autofunção associada. Substituindo o valor de \mathbf{v} composto pelos modos-normais dentro da equação 4.22.a e 4.22.b, chega-se a:

$$-\sigma \mathbf{v}_0 + (\nabla \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{v}_0 + (\nabla \mathbf{v}_0) \bar{\mathbf{u}} = -\nabla q_0 + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}_0 \quad (4.23. a)$$

$$\mathbf{v}_0|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.23. b)$$

Onde \mathbf{v}_0 é função solenoidal. A partir do problema posto pelas equações 4.23.a e 4.23.b se define que um fluxo de base $\bar{\mathbf{u}}$ é dito *linearmente e assintoticamente estável* se o problema não apresenta qualquer autovalor complexo com parte real negativa (a exponencial fica com argumento positivo e tende a uma imagem infinita e não limitada), *assintoticamente instável* se pelo menos um autovalor possui parte real negativa e *neutro* (ou *marginamente estável*) se pelo menos um autovalor possui parte real nula e os outros autovalores possuem partes reais nulas ou positivas. Os autovalores σ_i ($i = 1, \dots, n$) são, naturalmente, dependentes de Re . Todo fluxo de base é estável para números de Reynolds suficientemente pequenos, e então, o menor valor do número de Reynolds para o qual existe pelo menos um autovalor com parte real negativa é chamado de limite da estabilidade linear, denotado por Re_{CR} em analogia a um número de Reynolds crítico. Matematicamente, pode-se propor uma função que determine o valor da parte real dos autovalores tal como $\xi_0(Re) = \inf \text{Re}(\sigma_i)$, onde pode-se propor que $\xi_0(Re_{CR}) = 0$ (Georgescu, 1985).

No caso de domínios não limitados em qualquer umas das duas dimensões (semi-infinito) ou nas duas simultaneamente, a perturbação viajante pode ser expressa sob a forma dos modos normais como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(x_2, x_3) e^{i\alpha x_1 - \sigma t} \quad (4.24. a)$$

Ou

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(x_3) e^{i\alpha x_1 + i\beta x_2 - \sigma t} \quad (4.24. b)$$

Dependendo da direção de propagação e da direção de oscilação da informação. Nas equações 4.24.a e 4.24.b, entende-se que o valor de σ dependerá dos valores de número de onda α e β . Uma eficiente e poderosa

ferramenta para avaliar a estabilidade do fluxo é estabelecer um plano (α, Re) ou (α, β, Re) onde os subdomínios estável e instável são separados por linhas neutras (ou superfícies a depender da dimensão do problema). Tal ferramenta será discutida posteriormente com a análise do trabalho de Heisenberg (1924).

Seja uma perturbação a ser sobreposta ao campo de velocidades do fluxo de base, determinada por sua forma em modos-normais tal que:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (4.25. a)$$

$$\mathbf{v}_0(y) = \{u(y), (y)\} \in \mathbb{R}^2 \quad (4.25. b)$$

Onde $\frac{\sigma}{i\alpha} = c = c_r + ic_i$. Estas perturbações são conhecidas na literatura como *ondas de Tollmien-Schlichting*. Partindo das definições já dadas sobre autovalores estáveis e instáveis, afirma-se que para todo $c_j < 0$, ($j = 1, \dots, n$), há estabilidade incondicional, para ao menos um $c_j > 0$ há instabilidade e para $c_j = 0$ tem-se o caso neutro (ou marginalmente estável) desde que as partes imaginárias de todos os outros autovalores complexos sejam negativas ou nulas. Assim como anunciado na equação 4.25.b, o vetor de velocidades da perturbação possui uma parcela $u(y)$ e outra $v(y)$. O campo de velocidades sendo solenoidal, ou seja, incompressível por consequência, admite que o campo de velocidade seja escrito com funções potenciais gerando linhas de fluxo. Seja uma função potencial do tipo linha de fluxo tal que:

$$\Psi(x, y; t) = \varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (4.26)$$

Obtém-se então, pelas condições de funções analíticas-holomorfas:

$$u(x, y; t) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dy} e^{i\alpha(x-ct)} = \varphi'(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (4.27. a)$$

$$v(x, y; t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i\alpha\varphi e^{i\alpha(x-ct)} \quad (4.27. b)$$

Substituindo as ondas de *Tollmien-Schlichting*, formuladas em função de potenciais em duas dimensões, na equação (4.27.a), admitindo um fluxo

entre paredes paralelas ao eixo x e entre si, considerando também um campo de pressão dado por $p(x, y; t) = p(y) e^{i\alpha(x-ct)}$, obtém-se:

$$-i\alpha\varphi U' - i\alpha c\varphi' + U\alpha i\varphi' = -i\alpha p + \frac{1}{Re}(-\alpha^2\varphi' + \varphi''') \quad (4.28.a)$$

Na direção x e:

$$-\alpha^2 c\varphi + \alpha^2 U\varphi = -p' + \frac{1}{Re}(i\alpha^3\varphi - i\alpha\varphi'') \quad (4.28.b)$$

Na direção y .

Somando as duas componentes e realizando a eliminação da pressão, obtém-se:

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \varphi U'' = \frac{1}{i\alpha Re}(\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \quad (4.29)$$

A equação (4.29) é conhecida como *equação de Orr-Sommerfeld*, onde U é uma função arbitrária de y ($U \rightarrow U(y)$). O problema de *Orr-Sommerfeld* (4.29) é de mesma natureza do que o problema apresentado pela equação (4.21), isto é, um problema de autovalores. No caso específico da equação (4.29), o autovalor é representado por c e φ sua autofunção associada.

No problema de fluxo estacionário em coordenadas cilíndricas de Hagen-Poiseuille, em um duto circular, sendo o eixo do duto representado pela variável ξ e um perfil de velocidades $(\xi, \theta, \zeta) \rightarrow (0, 0, 1 - \xi^2)$, o problema de autovalores torna-se:

$$\{(L - \lambda^2) - [\sigma + i\lambda Re(1 - \xi^2)]\}(L - \lambda^2)f = 0; \forall \xi \in 0 \leq \xi < 1 \quad (4.30.a)$$

$$f = \frac{df}{d\xi} = 0; \text{ para } \xi = 1 \quad (4.30.b)$$

Onde L representa o operador Laplaciano em coordenadas cilíndricas, σ é o autovalor associado ao tempo, λ é o número de onda e f é a autofunção associada ao autovalor do problema. Heisenberg (1924), estudou o problema de Hagen-Poiseuille no caso de fluxo plano (coordenadas cartesianas), analisando a estabilidade na escala micro de maneira assintótica e propôs uma representação gráfica das linhas neutras

de estabilidade relacionando Re , Re_{CR} e c_j . Tal representação é conhecida como a *língua de Heisenberg*.

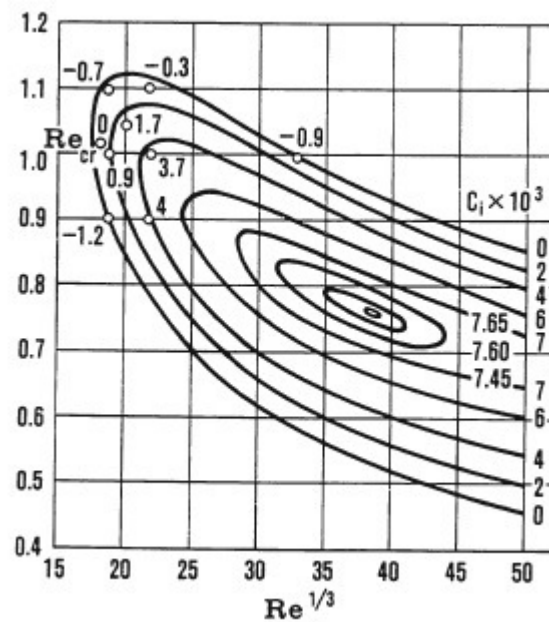


Figura 4. Representação gráfica das linhas neutras de Heisenberg.
(Heisenberg, 1924).

Todas essas análises de estabilidade por autovalores são classificadas como estudo de estabilidade na escala micro, uma vez que é estudada em um ponto do domínio e sua vizinhança imediata, mesmo que para tempos assintóticos.

A estabilidade de um fluxo perturbado também pode ser avaliada na escala macro, como já explicado, a partir da variação da energia média do sistema. Seja a equação de energia escrita em sua forma alternativa dada pela equação (4.16) e seja a energia média $K(t)$. Logo:

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \left[\frac{-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dx}{\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx} - \frac{1}{Re} \right] \leq$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \left[\max \frac{-\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dx}{\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx} - \frac{1}{Re} \right] = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \left[\frac{1}{\overline{Re}} - \frac{1}{Re} \right] \quad (4.31)$$

Onde, pelo teorema de Serrin (1959), se $Re < \widetilde{Re}$ e considerado $\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \geq \tilde{\alpha} \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 dx$ (demonstrável pelo *critério universal de Serrin*), afirma-se que:

$$\frac{dK}{dt} < 0 ; \forall t \geq 0 \quad (4.32)$$

No mais, pode-se ainda afirmar que:

$$\frac{dK}{dt} \leq \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 dx \frac{\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx}{\int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 dx} \left[\frac{1}{\widetilde{Re}} - \frac{1}{Re} \right] \leq -\frac{2\tilde{\alpha}(\widetilde{Re} - Re)}{Re\widetilde{Re}} K \quad (4.33)$$

Onde, por Serrin (1959):

$$K(t) \leq K(0) e^{-\frac{2\tilde{\alpha}(\widetilde{Re} - Re)}{Re\widetilde{Re}} t} \quad (4.34)$$

Logo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K(t)}{K(0)} = 0 \quad (4.35)$$

Diz-se então que o fluxo de base $\bar{\mathbf{u}}$ é *atrativo na média* (referindo-se ao comportamento de atratores matemáticos) se a relação exposta pela equação (4.35) for satisfeita. Percebe-se logo que um fluxo é *assintoticamente estável* se e somente se ele for *estável e atrativo*, onde estas duas propriedades não são dependentes uma da outra. O fluxo de base é dito *incondicionalmente estável* (ou *globalmente estável*) se a relação da equação (4.35) for satisfeita para qualquer $K(0)$; $\bar{\mathbf{u}}$ é dito *condicionalmente estável* se a relação da equação (4.35) for verdadeira para um $K(0) < \delta > 0$ e δ tão pequeno quanto se queira. Portanto, o fluxo *linearmente estável* é necessariamente *condicionalmente estável*. Já que Re_{CR} da teoria linear representa um limite para o qual números de Reynolds acima deste valor possuem pequenas perturbações que serão amplificadas, isto indica então que $Re > Re_{CR}$ é uma condição suficiente para a instabilidade global. Por outro lado, para $Re < \widetilde{Re}$, as perturbações para qualquer $K(0)$ são amortecidas, portanto, $Re < \widetilde{Re}$ é uma condição suficiente para a estabilidade global. Por definição $\widetilde{Re} \leq Re_G \leq Re_{CR}$, e para o cenário onde um fluxo perturbado possui um número de Reynolds tal que

$\widetilde{Re} < Re < Re_G$, a energia das perturbações decai para zero em tempo assintótico $t \rightarrow \infty$, porém, para um tempo finito qualquer, a energia $K(t)$ pode primeiro aumentar antes de decair. No mais, para o cenário onde $Re_G \leq Re < Re_{CR}$ existe uma perturbação v' com energia final positiva e tempo $t \rightarrow \infty$. Tais considerações são de relevância para a discussão subsequente sobre a estabilidade do movimento médio de um regime em transição.

4.1.4. Estabilidade do movimento médio (escoamento médio) de um regime em transição.

O estudo da estabilidade de fluxos em transição de regime se faz por métodos não lineares. Reynolds propôs que um escoamento em transição de regime dado por um campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, pode ser decomposto em um escoamento médio $\bar{\mathbf{u}}$ e uma flutuação \mathbf{v} . Nesse tipo de aproximação do problema de estabilidade, as flutuações são mais escritas como modos-normais, mas sim como série de potência em suas amplitudes (Stuart, J. (1958, 1960, 1971), Watson, J. (1960) e Eckhaus, W. (1965)). As séries de potência são expandidas nas amplitudes que são, por sua vez, funções desconhecidas dependentes apenas do tempo como proposto por Landau (1944). A forma espacial das flutuações é dada da mesma maneira do que as perturbações da teoria linear, isto é, estão presentes nos argumentos das exponenciais. Nesta teoria, interessa o comportamento de fluxos com a característica $\frac{dK(t)}{dt} = 0$, isto é, a energia das perturbações não decai (amortecendo as perturbações) e nem se amplifica (instabilidade), mas fica na fronteira destes dois fenômenos. Esse tipo de escoamento é classificado como *escoamento de equilíbrio* e faz parte dos fluxos *linearmente instáveis*. As perturbações inicialmente aumentam exponencialmente com o tempo, semelhante ao previsto pela teoria linear. Após a amplificação, a amplitude atinge um patamar consideravelmente alto assim como a transferência média de quantidade de movimento pelo mecanismo conhecido como *esforço de Reynolds*. Esta alta transferência de quantidade de movimento distorce o escoamento

médio, modificando assim a taxa de transferência de energia do escoamento médio (fluxo de base) para as flutuações e, por consequência, a taxa de crescimento ou decaimento das amplitudes. A taxa de amplificação das flutuações pode ser diminuída pelo escoamento médio e assim, pode-se haver um fluxo estável mesmo para uma configuração de $Re > Re_{CR}$. Este fenômeno é conhecido como *estabilidade supercrítica* e seu inverso também é válido: fluxos instáveis para $Re < Re_{CR}$. O equacionamento do equilíbrio energético não linear pode ser dado pela relação (Stuart, J. 1970):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) dx dy = \\ - \int_{\Omega} \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dx dy - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 dx dy \end{aligned} \quad (4.36)$$

Onde o operador integral adota um significado de integração dupla em x e y . Na equação (4.36), o termo $\overline{u'v'}$ representa o supracitado *esforço de Reynolds*, ou *tensão de Reynolds*, e a barra sobreposta indica o conjugado complexo. A tensão de Reynolds possui divergência negativa, indicando que tal parcela na equação de energia representa uma transferência de quantidade de movimento devido ao movimento randômico de pequenos “pacotes” de fluido chamados comumente de ‘*eddies*’. No mais, a tensão de Reynolds pode ser somada, admitindo sobreposição de efeitos na teoria linear, ao tensor de tensões de Cauchy. Tal característica torna-se importante pois, admitindo equilíbrio de forças entre a parede sólida dos poros com o fluido em movimento, torna-se possível calcular as tensões impostas pela turbulência na parede dos poros, modificando assim o conceito de poropressão (negativa ou positiva) e como essa tensão extra afeta a estrutura sólida do meio poroso ou sólido qualquer que esteja em contato com o escoamento. A descrição do tensor total de tensões se encontra no trabalho de Levicky (2016). Como os pacotes de fluido se deslocam dentro do fluxo médio, o local por onde ele passa tem sua energia acrescida pela quantidade de movimento inerente ao *eddy*. Sabe-se que a parcela associada ao número de Reynolds (parcela viscosa) é responsável pela transferência de energia em escoamentos laminares, uma vez que a

viscosidade emerge do atrito interno das moléculas do fluido, fazendo assim que se movam em velocidades diferentes e transportando a energia por condução. No regime turbulento, a tensão de Reynolds transfere energia por convecção. A utilização do conceito dos ‘eddies’ é simplesmente um artifício matemático para reescrever a equação de NS perturbada (com velocidade média e as flutuações) de maneira semelhante ao fluxo laminar. No mais, nas proximidades de uma interface solido-fluido, as flutuações tendem a zero e, por consequência, a tensão de Reynolds também. Devido as características citadas neste parágrafo sobre transferência de energia, o fluxo turbulento em um duto cilíndrico apresenta um perfil mais achatado (ou plano) no ponto médio do perfil de escoamento, porém com geometria muito semelhante ao escoamento laminar nas proximidades das paredes. Este comportamento é explicado pela semelhança com o fluxo laminar nas proximidades das paredes devido ao desaparecimento das flutuações e, no plano médio do escoamento, há um núcleo de turbulência que constantemente mistura o fluido (*Prandtl's Mixing Length*) e torna a distribuição de energia naquele ponto mais uniforme.

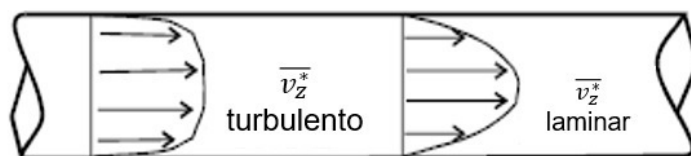


Figura 5. Comparação entre os perfis de velocidade em dutos cilíndricos para o caso laminar e turbulento. (adaptado de Levicky, 2016)

4.2. Solução geral linear para estabilidade de um campo de velocidade e pressão genérico.

Seja $A : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ um operador diferencial linear. A notação C_0^∞ indica que o operador age em elementos de um espaço de funções contínuas com infinitas derivadas (C^∞) que intercepta o espaço das funções de suporte compacto C_0 . Logo, C_0^∞ é o espaço de funções contínuas de infinitas derivadas e com suporte compacto. O contradomínio L^2 é um espaço normado de Lebesgue com $p = 2$. O problema:

$$A\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (4.37.a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.37.b)$$

Com condição de contorno homogênea

$$\mathbf{u}_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.38.c)$$

Possui uma solução fraca $\mathbf{u} \in N^1(\Omega)$ (N^1 é um subespaço do Sobolev $W^{1,2}$) que satisfaz a equação

$$(\mathbf{u}, A^+ \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (4.39)$$

Para qualquer $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}(\Omega)$, onde A^+ é o operador formalmente conjugado (adjunto) a A . Sabe também que a notação da equação (154) significa um produto escalar no espaço normado Lebesgue L^2 ($(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$). Se o operador A e seu conjugado pertencem a um espaço Sobolev $W^{l,2}$, l sendo a ordem da maior derivada, logo a relação abaixo pode ser satisfeita:

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A^+ \mathbf{v}); (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{l,2}) \quad (4.40)$$

A solução forte (ou exata, analítica) do problema seria um par (\mathbf{u}, p) onde $\mathbf{u} \in N^l(\Omega)$ e $\nabla p \in G(\Omega)$. O par deve satisfazer a equação (4.37.a). Se \mathbf{u} for uma solução fraca que pertença ao subespaço $N^l(\Omega)$, logo, a partir das equações (4.39) e (4.40), tem-se:

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}); (\mathbf{v} \in \mathfrak{R}) \quad (4.41)$$

Afirma-se por consequência que $A\mathbf{u} - \mathbf{f}$ é ortogonal ao subespaço \mathfrak{R} de L^2 , e então, também perpendicular ao seu fecho (ou aderência, *closure* em inglês) N . Existe também um elemento $\nabla p \in G(\Omega)$ tal que $A\mathbf{u} - \mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \nabla p$ (por construção a partir de 4.37.a), o que indica que o par (\mathbf{u}, p) é solução forte do problema (4.37.a) e, logo, \mathbf{u} também é solução fraca deste problema. Tal raciocínio vale para problemas com condições de contorno não homogêneas também. Georgescu (1985) provou que \mathbf{u} é solução fraca e forte do problema não linear.

4.3. A natureza da turbulência.

4.3.1. Uma visão qualitativa: a teoria de Kolmogorov.

Acredita-se que o último estágio de transição seja o gatilho da turbulência e que tal fenômeno possa ser explicado de maneira rigorosa e fenomenológica. Richardson (1922) propôs que o surgimento de grandes vórtices em fluxos instáveis gere vórtices menores como em uma reação em cadeia. A teoria de Richardson prevê que os vórtices menores desaparecem rapidamente pois sua parcela viscosa passa a ser suficientemente grande para que dissipe rapidamente a energia. De maneira aproximada, Richardson (1922) propôs:

$$\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \sim \frac{1}{Re} \frac{\delta \mathbf{u}}{\delta l^2} \quad (4.42)$$

Onde percebe-se que quanto menor o tamanho característico do vórtice δl , maior se torna a parcela dissipativa. Esta parcela ganha relevância ao se propor que o fenômeno da vorticidade dissipa energia do sistema.

Duas décadas foram necessárias para que, em cima dos trabalhos de Richardson, Kolmogorov (1941) fizesse uma extensão da teoria e explicasse com algumas hipóteses a dinâmica do balanço energético dos vórtices gerados pela turbulência. A teoria de Kolmogorov (1941) propõe a seguinte evolução da vorticidade, fazendo um paralelo com o tipo de regime:

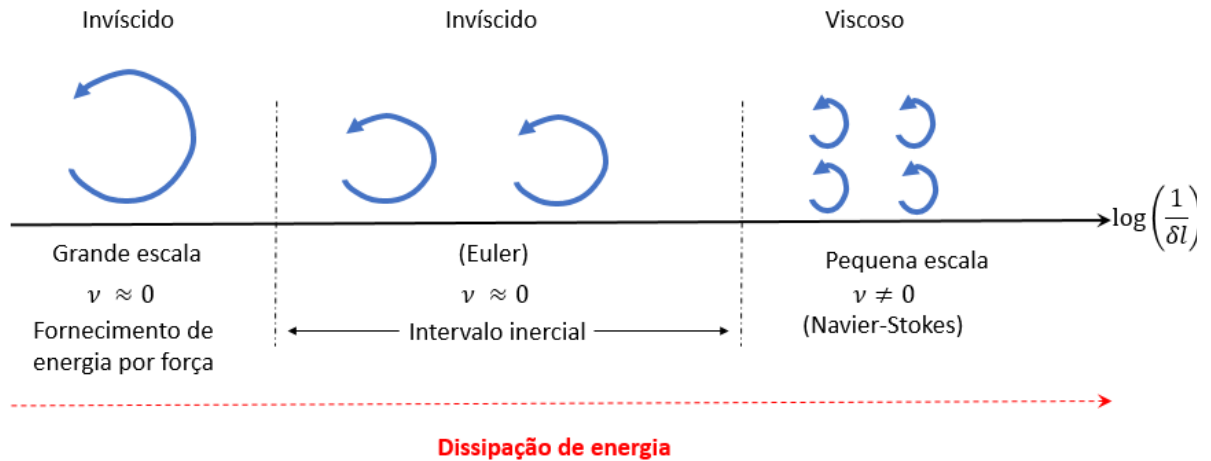


Figura 6. Esquema de evolução dos vórtices pela teoria de Kolmogorov, (Autor, 2020).

A teoria de Kolmogorov admite três fundamentais hipóteses:

- *Hipótese 1*: No limite onde $Re \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow 0$), pode-se pensar em uma solução estatística que preserva a simetria das equações de NS, logo, a solução deve ser estacionária, homogênea e isotrópica. Há vorticidade pois há diferença de velocidade entre pontos imediatamente vizinhos, logo:

$$\delta_l \mathbf{v} = \mathbf{v}(r + l) - \mathbf{v}(l) \quad (4.43)$$

- *Hipótese 2*: “Similaridade”. A diferença de velocidade pode ser deformada por um escalar mantendo as propriedades:

$$\delta_{\lambda l} \mathbf{v} \sim \lambda^h \delta_l \mathbf{v} \quad (4.44)$$

- *Hipótese 3* (Onsager 1953, 1975): A taxa de dissipação de energia pela parcela viscosa continua existindo e positiva mesmo que o número de Reynolds seja levado para o limite infinito:

$$\varepsilon > 0 ; Re \rightarrow \infty \quad (4.45)$$

A dimensão da velocidade no S.I é m/s . Seja então a variação de energia por unidade de tempo e massa:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho V} \frac{dE}{dt} \quad (4.46. a)$$

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} v^2 dx \quad (4.46.b)$$

A unidade de E é $kg.m^2/s^2$. Logo, a unidade de ε deverá ser m^2/s^3 .

Com as equações (4.46.a) e (4.46.b), deduz-se então que o módulo da diferença de velocidade pode ser reescrito como:

$$< |\delta_l v| > = c \varepsilon^{\frac{1}{3}} l^{\frac{1}{3}} \quad (4.47)$$

Onde nota-se que a constante h na equação (4.44) assume o valor de $1/3$.

Substituindo a velocidade dada na equação (4.26) dentro da equação de NS incompressível, deduz-se que:

$$\frac{Du}{Dt} \sim \frac{\delta_l u}{\delta_l t} \sim \varepsilon^{\frac{2}{3}} l^{-\frac{1}{3}} \quad (4.48.a)$$

$$\nu \nabla^2 u \sim \nu \frac{\delta_l u}{l^2} \sim \nu \varepsilon^{\frac{1}{3}} l^{-\frac{5}{3}} \quad (4.48.b)$$

Igualando (4.48.a) a (4.48.b) e supondo que ambas possuem aproximadamente a mesma ordem de escala, conclui-se:

$$l_{visc} = \eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.49)$$

Onde η , segundo Kolmogorov, é o tamanho aproximado do vórtice para que os efeitos viscosos e dissipativos comecem a aparecer de forma considerável. O problema encontrado nessa formulação é que para o caso limite onde a distância entre os pontos tende a zero, a função passa a ser não suave e se classifica como uma função $1/3$ - *contínua de Hölder*. A hipótese é que esta solução seja uma solução *Hölder-contínua* para o problema de Euler. Entretanto, ainda é um problema aberto.

4.3.2. O modelo de Leray

O modelo de Leray (1933) foi o primeiro modelo fenomenológico que descreveu o início da turbulência como uma perda de analiticidade da solução. Em uma abordagem pioneira, Leray propôs que a velocidade do fluido fosse modelada com um elemento de classe $L^2(\Omega)$. Uma velocidade de tal classe deixaria de satisfazer as equações de NS e, se tornada suficientemente suave, satisfaria a equação de NS para tempos pequenos. Para um certo tempo finito, a solução explodiria e a turbulência poderia ser descrita por um campo calculável. Entretanto, a analiticidade da solução turbulenta de Leray continua sendo um problema aberto. A teoria de Leray diz que: *Para uma energia inicial finita do sistema ($\|v_0\| < \infty$), existe uma sequência contável e finita (J_0, J_1, \dots) tal que o seu conjunto esteja contido nos reais positivos ($J_q \subset \mathbb{R}^+$), ou seja, $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$, $J_0 = \{t \mid t > a\}$ para um a qualquer, J_q sendo então um intervalo aberto para q positivo, disjunto e $\mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{q \geq 0} J_q$ possui norma de Lebesgue nula. Logo, o campo v pode ser modificado dentro de um conjunto de norma Lebesgue zero e sua restrição para cada $\mathbb{R}^3 \times J_q$ torna-se suave e a norma da soma de todos os J com q positivos elevada a $1/2$ é finita.*

O enunciado de Leray foi provado em forma de teorema por Scheffer (1976), constatando que a conjectura de Leray é válida em um espaço Hausdorff de dimensão $5/2$ e que a norma de $\mathbb{R}^+ \setminus \bigcup_{q \geq 0} J_q$ em um espaço Hausdorff de dimensão $1/2$ é nula. Foias e Temam (1979) provaram a analiticidade e continuidade de v em um espaço muito pequeno de tempo desde que v habite um espaço Hausdorff de dimensão 2. Em dimensão 3, a continuidade é restrita.

4.3.3. A conjectura de Landau-Hopf

Estudando a turbulência na hidrodinâmica a partir da ótica das equações de NS, Hopf (1952) propôs que a turbulência poderia ser modelada como uma série infinita de bifurcações das soluções das equações de NS. Para que se calcule a próxima bifurcação no modelo de Hopf, deve-se conhecer a última solução, mesmo que numericamente. A conjectura de Landau-Hopf ainda não foi provada. A conjectura foi formulada com equações do tipo Burgers, semelhantes as equações de NS. Segundo Hopf, para valores de μ (viscosidade) muito altos (tendendo a infinito), tem-se uma solução única, estacionária e estável contra qualquer perturbação inicial. Considere que o escoamento perca estabilidade para um valor μ_0 . Para um valor de viscosidade pertencendo a intervalo (μ_1, μ_0) com $\mu_1 < \mu_0$, o sistema possui algumas soluções (não únicas) que constituem uma variedade $M(\mu)$ de dimensão finita $N(\mu)$ no espaço de fases invariante à fase do fluxo. Quando o valor μ_1 é ultrapassado em sentido decrescente, há um salto em $N(\mu)$ e as soluções presentes em $M(\mu)$ perdem estabilidade mesmo sem perder sua analiticidade em $\mu = \mu_1$. Para este valor de viscosidade, uma nova variedade $M_1(\mu)$ emerge por bifurcação da solução estacionária anterior e torna-se posteriormente estável para o intervalo $\mu_2 < \mu < \mu_1$. A natureza das soluções que compõem $M_1(\mu)$ depende de como os seus autovalores das derivadas de Fréchet interceptam os eixos das partes imaginárias de μ e μ_1 . Assim como mencionado anteriormente, a conjectura de Landau-Hopf admite que haja uma infinidade de bifurcações à medida que $\mu \rightarrow 0$, logo, por análise de topologia diferencial, a dimensão da variedade $M(\mu)$, $N(\mu) \rightarrow \infty$ (Georgescu, 1985).

5. Conceitos gerais sobre fluxo em meios porosos, lei de Darcy e considerações sobre o regime laminar.

Até o momento, toda a discussão foi em relação a um fluido contínuo escoando em um espaço vazio. Entretanto, abordar o escoamento em meios porosos referindo-se ao transporte de fluidos estritamente nos espaços vazios não é prático e extremamente difícil devido a ignorância sobre a geometria detalhada do espaço poroso e as interfaces fluido-sólido. Neste caso, opta-se por uma aproximação do fenômeno pela teoria do contínuo. Os valores médios utilizados daqui em diante são calculados a partir de um volume representativo elementar (VRE) na vizinhança do ponto estudado. Para que essa abordagem pela teoria do contínuo seja realizada, algumas hipóteses devem ser assumidas. Admite-se que fluxo dentro do volume estudado é restrito a uma rede de canais bem definidos. No mais, devido a presença de paredes impermeáveis, o fluxo ocorre essencialmente na direção paralelas as paredes dos poros. O fluido é assumido como quimicamente inativo, viscoso, newtoniano e invariante a temperatura. O regime de fluxo (por enquanto) é assumido como laminar (Bear e Bachmat, 1966, 1967).

Para formular as subseqüentes equações que governam o fluxo e meio poroso, deve-se primeiramente reforçar a teoria das coordenadas de referência. Dois sistemas de coordenadas cartesianos serão explorados. O primeiro possui eixos x_1, x_2, x_3 fixos no espaço e compõe o versor (vetor unitário) $\mathbf{x} \rightarrow x_i$. Em um ponto qualquer deste primeiro sistema de eixos cartesiano existe um ponto M genérico. Neste ponto M se desenvolve um segundo sistema de eixos, tal qual um sistema local, baseado na regra da mão direita e que possui eixos representados pelos vetores unitários λ_1 (paralelo a tangente da curva de trajetória que passa por M), λ_2 perpendicular a trajetória que passa por M e em uma orientação horizontal

a esta (chamado de normal principal) e, por fim, λ_3 perpendicular aos dois últimos vetores e de atitude vertical, chamado de binormal. Estes vetores base do sistema de coordenada compõe o vetor $\lambda \rightarrow \lambda_i$.

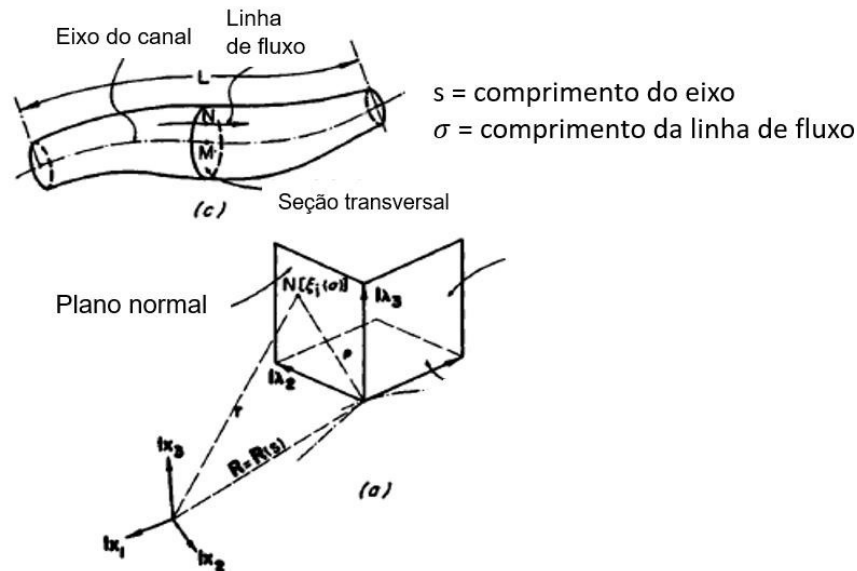


Figura 7. Modelo idealizado de canais de poro e sistema de coordenadas. (adaptado de Bear, 1972).

Um ponto qualquer na vizinhança de M, habitando algum dos planos formados pelos vetores locais de M ($\lambda \rightarrow \lambda_i$), pode ter sua posição descrita por um vetor \mathbf{r} com posição inicial centrada no sistema de coordenadas cartesianas x_1, x_2, x_3 . O vetor \mathbf{r} pode então ser descrito como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(s) + \mathbf{q} \quad (5.1)$$

Onde \mathbf{R} é o vetor de posição com referência no eixo cartesiano global x e que mapeia o ponto M e \mathbf{q} é o vetor radial de N no plano $\lambda_i \lambda_j$ qualquer. \mathbf{R} está normalizado em s , logo, diz-se que $\mathbf{R} = \mathbf{R}(s), x_i = x_i(s); 0 \leq s \leq L$. Supõe-se que pelo ponto N passe uma única linha de fluxo. Medindo o comprimento da linha de fluxo desde a coordenada inicial (onde $s = 0$ e $\sigma = 0$), as coordenadas do ponto N podem ser dadas por:

$$\xi \rightarrow \xi_i = \xi_i[\sigma(s)] \quad (5.2)$$

Onde σ e s são respectivamente o comprimento medido ao longo da linha de fluxo e o comprimento medido ao longo do eixo do canal. A

coordenada local de N, (ξ_i) , está relacionada com as coordenadas globais x_i pela relação linear:

$$\frac{d\xi_i}{ds} = (1 + \alpha) \frac{dx_i(s)}{ds} + \beta \frac{d^2x_i(s)}{ds^2} + \gamma \frac{d^3x_i(s)}{ds^3} \quad (5.3.a)$$

$$\alpha = -\frac{\rho_1}{\rho} \frac{d\lambda_3}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} \quad (5.3.b)$$

$$\beta = \frac{\rho}{\rho_1} \left[\lambda_3[\sigma(s)] + \rho_1 \left(\frac{d\lambda_2}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} \right) \right] + \frac{d\rho}{ds} \left[\lambda_2[\sigma(s)] - \rho_1 \left(\frac{d\lambda_3}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} \right) \right] \quad (5.3.c)$$

$$\gamma = \rho \left[\lambda_2[\sigma(s)] - \rho_1 \left(\frac{d\lambda_3}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} \right) \right] \quad (5.3.d)$$

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2}} \quad (5.3.e)$$

$$\rho_1 = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d\mathbf{R}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{R}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{R}}{ds^3} \right) \quad (5.3.f)$$

Os parâmetros ρ e ρ_1 são respectivamente os raios de curvatura e de torção do eixo no ponto considerado.

Para realizar uma análise considerando um meio poroso como contínuo, é necessário que algumas de suas propriedades sejam representadas por seus valores médios ao longo do domínio. Essas propriedades em geral são intensivas e não necessariamente intrínsecas ao meio poroso. Seja uma quantidade intensiva média $\tilde{g}(P)$, tomada no ponto P e sua vizinhança imediata. Esta quantidade pode ser calculada a partir de:

$$\tilde{g}(P) = \frac{1}{\Omega_{V_0}} \int_{\Omega_{V_0}|P} g(\mathbf{x}) d\Omega_V \quad (5.4)$$

Onde Ω_{V_0} e $\Omega_{V_0}|P$ são respectivamente o volume de vazios do domínio e o volume de vazios na vizinhança do ponto P. O domínio de integração depende diretamente do referencial global, logo, $\Omega_{V_0} \rightarrow \Omega_{V_0}(\mathbf{x})$. Seja agora uma variável escalar existente dentro do volume de vazios de

um meio poroso, representada por $g(\sigma)$. O valor médio desta quantidade pode ser calculado por:

$$\langle g(s) \rangle = \frac{1}{\omega(s)} \int_{\omega(s)} g(\sigma) d\omega(\sigma) \quad (5.5. a)$$

Ou, em sua forma extensa:

$$\langle g(s) \rangle = \frac{1}{\omega(s)} \int_{\omega(s)} g(s; \lambda_2, \lambda_3) d\lambda_2 d\lambda_3 \quad (5.6. b)$$

Onde $\omega(s)$ é a seção no ponto considerado e λ_i as coordenadas do ponto nessa seção. Se $g(\sigma)$ for diferenciável dentro do volume de vazios, afirma-se que:

$$\langle \nabla g \rangle = \left\langle \frac{\partial g}{\partial s} \right\rangle \lambda_1 + \left\langle \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} \right\rangle \lambda_2 + \left\langle \frac{\partial g}{\partial \lambda_3} \right\rangle \lambda_3 \quad (5.7)$$

Utilizando-se da notação da equação (5.7), o campo de velocidade do fluido dentro do volume de vazios pode ser escrito como:

$$\langle v \rangle = \langle v_s \rangle \lambda_1 + \langle v_{\lambda_2} \rangle \lambda_2 + \langle v_{\lambda_3} \rangle \lambda_3 \quad (5.8)$$

Logo, o vetor de velocidade tangente à linha de fluxo se dá por:

$$v_s = v \cdot \lambda_1 = |v| \sigma \cdot \lambda_1 = |v| \frac{d\xi_i}{d\sigma} \frac{dx_i(s)}{ds} \quad (5.9)$$

Onde σ é o vetor unitário tangente a linha de fluxo. O mapeamento da trajetória real do fluido (linha de fluxo) em relação ao eixo do canal por onde o fluido está escoando, remete ao conceito de tortuosidade que será abordado com mais profundidade posteriormente. Para a presente discussão, admite-se apenas que a tortuosidade é uma medida relativa entre o real trajeto da partícula de fluido e o trajeto retilíneo que liga o início ao final do canal. Considerando que a tortuosidade é muito pequena e combinando as equações (5.9) e (5.5.a), obtém-se:

$$v_s \approx v \frac{ds}{d\sigma} \quad (5.10)$$

Se as variações na seção transversal do canal ao longo de todo o canal considerado são tais que $|g - \tilde{g}| \ll \tilde{g}$, logo (Bear e Bachmat, 1966-1967):

$$\frac{\partial \langle g \rangle}{\partial s} \cong \left\langle \frac{\partial g}{\partial s} \right\rangle + (\tilde{g} - \langle g \rangle) \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{1}{\omega} \quad (5.11)$$

Se a seção transversal for perfeitamente circular e uniforme, ou seja, quando a média da função escalar g se aproxima da própria função g :

$$\frac{\partial \langle g \rangle}{\partial s} \cong \left\langle \frac{\partial g}{\partial s} \right\rangle \quad (5.12)$$

A presente, se faz necessário entender com profundidade e rigor matemático o conceito da tortuosidade e sua relação com o conceito de permeabilidade de um meio poroso.

Seja um operador linear $\mathbf{T} \rightarrow T_{ij}$ tal que:

$$\mathbf{T} = T_{ij} = \frac{d\xi_i}{d\sigma} \frac{d\xi_j}{d\sigma} \quad (5.13.a)$$

E seja também

$$\mathbf{T}^* = T_{ij}^* = T_{ij} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 \quad (5.13.b)$$

Onde, pela equação (5.13.b) nota-se que $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$ para $\frac{d\sigma}{ds} = 1$.

Interpreta-se que \mathbf{T} seja um operador linear adimensional que transforma as componentes das forças externas da equação de conservação de quantidade de movimento do fluido dentro dos poros em componentes da projeção das forças externas na direção da linha de fluxo em um ponto. \mathbf{T} então, existe pelo menos localmente, é definida positiva e possui inversa. Seja, em um ponto, a direção da linha de fluxo dada pelo vetor $\sigma = |\sigma|n$. A força F projetada na direção da linha de fluxo pode ser escrita como:

$$F_i \rightarrow F_i \frac{d\xi_i}{d\sigma} \quad (5.14.a)$$

A projeção na direção x_i possui componentes:

$$F \cos(\mathbf{F}, \boldsymbol{\sigma}) \rightarrow F \cos(\mathbf{F}, \boldsymbol{\sigma}) \cos(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}_j) \quad (5.14.b)$$

Em termos de x_i :

$$F_i \frac{d\xi_i}{d\sigma} \rightarrow F_i \frac{d\xi_i}{d\sigma} \frac{d\xi_j}{d\sigma} = F_i T_{ij} = F_j^\sigma \quad (5.14.c)$$

Por definição, seja \bar{T} um operador linear que transforma as componentes médias das forças externas em um ponto do meio poroso em componentes médias das projeções ao longo de toda a linha de fluxo. Seja \bar{B} uma condutância hidráulica média do meio poroso e que tenha dimensão de l^2 . Define-se então uma quantidade $\bar{B}\bar{T}_{ij}^*n = k_{ij}$ denominada permeabilidade do meio poroso, onde n é a porosidade volumétrica do sistema. Em um fluido homogêneo, se trabalha comumente com a condutância hidráulica dada por $\mathbf{K} = k\bar{\gamma}/\bar{\mu}$ ou, em notação indicial, $K_{ij} = k_{ij} \bar{\gamma}/\bar{\mu}$. Finalmente, o parâmetro macroscópico (médio) \bar{T}^* pode ser interpretado como a tortuosidade do meio poroso, e não somente a do canal específico em escala micro. Segundo Carman (1937), a tortuosidade do meio afeta diretamente a velocidade e a força externa imposta ao sistema. Uma estimativa numérica do valor da tortuosidade do meio foi feita ao longo dos anos por alguns pesquisadores. Entre os mais notáveis, se encontram Bear, Irmay e Zaslavsky (1968) e Kozeny-Carman (1927). O valor do coeficiente de permeabilidade (condutância hidráulica) dado semi-empiricamente por Kozeny-Carman é dado por:

$$k = \frac{c_0 T n^3}{M_s^2 (1-n)^2} = \frac{T n^3}{2 M_s^2 (1-n)^2} \quad (5.15.a)$$

Considerando a constante $c_0 = 1/2$. Na equação (5.15.a), T é a tortuosidade em módulo ($T = L/L_e$) onde L e L_e são respectivamente o tamanho do percurso do fluido medido em linha reta e o real (efetivo) percurso realizado pelas linhas de fluxo, M_s é a superfície específica por unidade de volume sólido e n é a porosidade. Outros pesquisadores propuseram valores de k baseados no tamanho dos grãos e outros fatores:

$$K = \frac{kg}{\nu}, \quad \text{Nutting(1930)} \quad (5.15.b)$$

Onde g é a aceleração da gravidade e ν é a viscosidade cinética do fluido.

$$k = 0,617 \cdot 10^{-11} d^2, \quad \text{Institut Français du Pétrole (1943)} \quad (5.15. c)$$

Onde d seria o diâmetro médio ou 'efetivo' dos grãos em micrometros, gerando k em cm^2 .

$$k = \frac{1}{m} \left[\frac{(1-n)^2}{n^3} \left(\frac{\alpha}{100} \sum \frac{P}{dm} \right)^2 \right]^{-1}, \quad \text{Fair e Hatch (1933)} \quad (5.15. d)$$

Onde m é o fator de empacotamento dos grãos, α é um fator de forma para corrigir a geometria dos grãos de areia que não são esferas regulares, P é a porcentagem de areia retida entre peneiras adjacentes e dm o diâmetro médio dos grãos retidos entre essas peneiras adjacentes.

5.1. Experimento e lei de Darcy

Fazendo todas as considerações necessárias, assumindo fluxo incompressível e irrotacional, admitindo que a teoria dos potenciais satisfaz o caso de fluxo em solos, maneiras mais simples de descrever a percolação de fluidos (principalmente água) emergem da Lei de Darcy. Em 1856, o matemático e engenheiro francês Henry Darcy, em seu trabalho sobre os chafarizes da cidade de Dijon, chegou à conclusão de que a equação de movimento da água através de elemento de solo poderia ser simplificada. Darcy realizou experimentos variando a densidade do solo, a diferença de carga hidráulica total e a seção transversal do solo. Dos seus experimentos, Darcy (1856) concluiu: a) a vazão Q é proporcional a diferença de carga hidráulica, b) é proporcional a seção transversal da amostra de solo e c) é inversamente proporcional ao tamanho L da amostra. Das constatações de Darcy, vem a conhecida formula:

$$Q = \frac{KA\Delta H}{L} \quad (5.16. a)$$

Onde

$$H = \frac{p}{\gamma_w} + z \quad (5.16.b)$$

Onde p , γ_w e z são respectivamente a pressão do fluido, o peso específico do fluido e a cota do ponto analisado em relação a uma referência arbitrária. Logo, fazendo um paralelo com a teoria dos potenciais, $\Delta H/L$ pode ser interpretado como um gradiente hidráulico, com propriedades semelhantes a um gradiente matemático de uma função escalar, porém com certas ressalvas. Admitindo a hipótese de Bishop de que a porosidade volumétrica é igual a porosidade de superfície para um meio homogêneo, e admitindo também por lógica que o fluido não percola através dos grãos sólidos, mas apenas pela área livre para fluxo, a velocidade média do fluido dentro do solo poderia ser calculada como:

$$v = \frac{Q}{nA} = \frac{q}{n} \quad (5.17.a)$$

Indo ainda mais detalhadamente nesta análise, em alguns meios porosos, nem todos os poros são comunicantes. Os poros comunicantes que permitem a percolação só compõem o que se denomina a porosidade efetiva n_e . Logo, a velocidade média de percolação neste tipo de material pode ser aproximada por:

$$v = \frac{q}{n_e} \quad (5.17.b)$$

Uma generalização da lei de Darcy pode ser proposta com ferramentas matemáticas mais rigorosas. Como mencionado, o gradiente hidráulico não é equivalente ao gradiente matemático de uma função escalar. Entretanto, tal correlação pode ser feita ao se transformar a lei de Darcy em uma lei vetorial como um potencial escalar que se enquadre na classe das funções escalares que descrevem processos conservativos. Seja \mathbf{q} (Eq. 5.17.a e 5.17.b) não mais uma velocidade (apesar das unidades serem equivalentes) mas sim um vetor de descarga específica com componentes $q_i \in \mathbb{R}^3$. O vetor pode ser descrito como:

$$\mathbf{q} = k\mathbf{J} = -K \nabla \varphi \quad (5.18)$$

Onde $J_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $J_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e $J_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Onde \mathbf{J} em uma dimensão assume a forma $J = (h_1 - h_2)/L$. Em um meio isotrópico, K é um escalar, entretanto, para não isotrópicos, \mathbf{K} deve ser considerado uma matriz de dimensão compatível com o vetor de descarga específica. Em algumas referências na literatura, autores escrevem a lei de Darcy considerando um potencial de velocidade tal que:

$$q = -\nabla \Phi, \quad \Phi(x, y, z) = K\varphi \quad (5.19)$$

Tal notação perde sentido físico pois:

$$\nabla \Phi = \nabla(K\varphi) = K\nabla\varphi + \varphi\nabla K \quad (5.20)$$

A equação (5.20) é absurda pois indica que haveria fluxo mesmo que não houvesse diferença de carga hidráulica, bastando que a condutividade hidráulica variasse ao longo do meio poroso (Bear, 1985). Logo, fluxo ocorreria sem que uma energia inicial fosse inserida no sistema. Se K for um escalar (meio isotrópico) têm-se $\varphi \nabla K = 0$, mas a equação não poderia tratar de um meio não isotrópico, logo, não funcionaria como uma generalização da Lei de Darcy. Seja uma função escalar definida a menos de uma constante no \mathbb{R}^3 tal que:

$$\varphi(x, y, z) = p(x, y, z) + \rho G'(z) \quad (5.21. a)$$

Onde G' é uma função potencial escalar da gravidade tal que $\nabla G' = \mathbf{g}$, considerando-a como um campo conservativo e ρ é admitido constante. O gradiente desta função é um vetor que se define por:

$$\nabla \varphi(x, y, z) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \right) = \frac{\Phi}{K} \quad (5.21. b)$$

Para K considerado um escalar. Para um K de grandeza vetorial dever-se-ia multiplicar o vetor Φ pela inversa de \mathbf{K} . Adaptando-se o teorema da conservação de energia de Bernoulli para fluxos potenciais, Hubbert (1940) propôs a hoje conhecida fórmula da energia por unidade de massa amplamente utilizada na geotecnia:

$$\varphi' = \frac{p}{\rho} + gz \quad (5.22. a)$$

Onde a unidade de cada termo é m^2/s^2 , que intuitivamente se interpreta como uma velocidade ao quadrado. Ao integrar-se a equação (5.22.a) em todo o domínio de possível fluxo, ou seja, o volume de vazios, obtém-se:

$$\int_{\Omega_{V_0}} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) d\Omega = \int_{\Omega_{V_0}} v^2 d\Omega = \int_{\Omega_{V_0}} |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \quad (5.22.b)$$

Recuperando-se assim a equação (4.16) que descreve a energia média do sistema (a menos de uma constante $1/2$).

A prova de que φ' é uma função potencial escalar se dá pelo seguinte raciocínio: Suponha que exista uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3, S \in \mathbb{R}^2$, onde o valor de φ' seja constante. Seja o vetor $d\mathbf{s} = d\mathbf{s}(dx, dy, dz)$ tal que a superfície mencionada seja dada por:

$$\nabla\varphi' \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (5.23)$$

Define-se o vetor $\nabla\varphi' = \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}(Fx, Fy, Fz) = F_i(x, y, z)$, sendo \mathbf{F} uma função vetorial devidamente contínua, integrável e suficientemente suave. Suponha a existência de uma função escalar $G = G(x, y, z)$, devidamente contínua, tal que:

$$\alpha \nabla G = \mathbf{F} \quad (5.24)$$

Onde α é uma constante arbitrária. Por construção simples, a integração da equação (5.24) resultaria em $G(x, y, z) = \text{constante}$, gerando assim uma família de curvas ao variar-se a constante. Tendo suposto F devidamente contínua e suave, admite-se que a seguinte relação exista:

$$\mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (5.25)$$

Substituindo Eq.(5.24) na Eq.(5.25) e expandindo o resultado:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial G}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial G}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right] + \alpha \frac{\partial G}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial G}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial G}{\partial z} \right) \right] + \\ + \alpha \frac{\partial G}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial G}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial G}{\partial x} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Observa-se então que se existe uma função escalar $G(x, y, z)$ contínua e com pelo menos primeira e segunda derivada contínua, a

expressão dada pela equação (5.25) se iguala identicamente a zero. Seja uma função vetorial $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{F}$. A equação (5.25) pode então ser reescrita como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{H} = 0$, onde \mathbf{H} é então perpendicular a \mathbf{F} em qualquer ponto do domínio. Logo, torna-se possível obter a equação da superfície normal por simples integração gerando $G(x, y, z) = \text{constante}$. A função G é então chamada de pseudo-potencial, pois α pode assumir qualquer valor. Por definição matemática, um potencial tem a forma $\nabla G = -\mathbf{F}$, logo, G torna-se uma função potencial escalar quando $\alpha = -1$. Fim da demonstração.

A Lei de Darcy, por ser uma simplificação das equações de movimento dos fluidos, admite limites quanto ao intervalo de valores dos seus parâmetros, muitas vezes perdendo a coerência física pois os experimentos atestam um comportamento não linear enquanto a Lei de Darcy é rigorosamente linear. Logo, deve-se definir quem são esses limites físicos que balizam o modelo matemático empírico de Darcy. Assim como demonstrado nas equações de movimento rigorosas como as de NS apresentada no início deste trabalho, o número de Reynolds também é um parâmetro fundamental para a distinção dos tipos de regime e para identificação do intervalo de transição. Admitindo que por definição Re , com já explorado, é a razão entre as forças inerciais e viscosas, uma analogia para fluxos em meios porosos pode ser feita. Obtém-se o seguinte resultado (Bear, 1985):

$$Re = \frac{qd}{\nu} \quad (5.27)$$

Onde q é o módulo da descarga específica (velocidade), d é uma dimensão associada a um comprimento característico qualquer do meio poroso e ν é a viscosidade cinética do fluido. O valor de d foi e ainda é amplamente discutido na literatura, até mesmo pelo autor em sua dissertação de mestrado. Alguns outros autores propuseram valores de d que são aceitos na comunidade geotécnica tal como Collins (1961) e Ward (1964). Admite-se também, para fins práticos que d seja substituído pelo valor de d_{10} ou d_{50} . De maneira breve tem-se a seguinte lista:

$$d = d_{10} \quad (5.28. a)$$

$$d = d_{50} \quad (5.28. b)$$

$$d = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ Collins (1961),} \quad (5.28. c)$$

$$d = k^{\frac{1}{4}}, \text{ Ward (1964),} \quad (5.28. d)$$

Admite-se de maneira bem grosseira e imprecisa a máxima “a Lei de Darcy é válida apenas se o valor de Re , calculado em função do tamanho médio dos grãos, estiver entre 1 e 10”. Ainda se utilizando da teoria de mecânica dos fluidos, pode-se fazer uma aproximação do valor do fator de perda de carga hidráulica pela equação de Darcy-Weisbach do fator de atrito. A equação pode ser escrita como:

$$f = \frac{2gdJ}{v^2} \quad (5.29)$$

A equação (5.29) tem como unidade m^2/s^2 e pode então ser diretamente subtraída de φ . Fanning (1896) propôs uma equação alternativa para a perda de carga hidráulica de Darcy-Weisbach:

$$f = \frac{2RJ}{v^2} \quad (5.30)$$

Onde R é o raio do duto ou do canal onde ocorre o fluxo. Rose (1945) demonstrou que a equação de Fanning, e por consequência a de Darcy-Weisbach, ambas lineares, deixa de ser válida quando se relaciona o fator de atrito com o número de Reynolds, que supostamente deveria resultar em uma relação linear do tipo $f = a/Re$, onde a é uma constante qualquer. A perda de linearidade está mostrada na Figura 8.

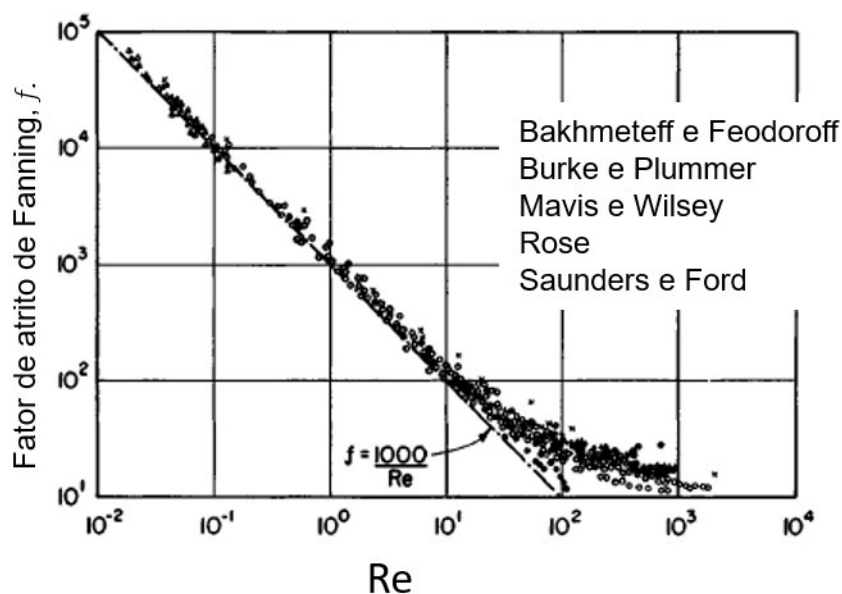


Figura 8. Relação de Re com f . (adaptado de Rose, 1945).

As afirmações a seguir são feitas considerando valores constantes de d e ν , alterando somente q para que haja mudanças no valor de Re . Para valores de Re baixos, o escoamento do fluido no meio poroso é considerado laminar, onde as forças viscosas predominam. Com o aumento gradual de Re , observa-se uma zona de transição. Na parte inferior da zona de transição, há uma transição de um regime laminar para outro regime também laminar (como mencionado no início deste trabalho). Entretanto, na parte superior da zona de transição, há uma migração do fluxo laminar para o turbulento. A literatura prevê que a transição para a turbulência ocorra para $Re \cong 100$. Ressalta-se aqui que mesmo na zona de transição, a Lei de Darcy ainda é válida, perdendo sua validade somente quando há uma real transição para o regime turbulento. Alguns pesquisadores citam um limite inferior para a validade da Lei de Darcy, onde o fluxo acontece em velocidades muito baixas. Esta análise não faz parte do escopo deste trabalho.

É possível fazer um paralelismo entre a teoria de Darcy e as equações rigorosas de escoamento em dutos cilíndricos. Tal comparação reafirma que a Lei de Darcy pode ser derivada a partir de equações de movimento mais complexas e fortes. Seja a equação de NSI em três dimensões, escrita somente em sua componente horizontal e desprezando as forças de corpo:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5.31.a)$$

Admite-se que o fluxo seja um escoamento desenvolvido, estacionário (fluxo permanente) e que a velocidade inicial dada em um dos contornos tenha perfil parabólico e que não varie em x . Tem-se então:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5.31.b)$$

Assume-se que a direção x coincida com o eixo do cilindro e, logo, qualquer distancia radial dentro do intervalo $[0; R]$, R sendo o raio máximo, é dada por $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. Transformando o Laplaciano de coordenadas cartesianas para polares obtém-se:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.31.c)$$

Integrando-se duas vezes a equação (5.31.c) em r :

$$u(x, r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + a \log(r) + b \quad (5.31.d)$$

Onde a e b são constantes de integração. Nota-se que, para que a integração fosse feita somente em r , admitiu-se que $\partial p / \partial x$ fosse constante em todo o domínio. Sabe-se que u é limitada em $r = 0$, logo o termo $a \log(0)$ não pode tender a valores assintóticos infinitos, então deduz-se que $a = 0$. Por simples substituição de valores, encontra-se $b = \frac{-R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$. A solução então se escreve sob a forma (Maylibaev, 2019):

$$u(x, r) = \frac{r^2 - R^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.31.e)$$

Nota-se uma clara semelhança entre as equações (5.31.e) e a equação (5.18). Substituindo $K = -(r^2 - R^2)/4\mu$ a equação (5.31.e) torna-se:

$$u(x, r) = -K \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.31.f)$$

Esta semelhança entre a equação de Darcy e a equação (5.31.f), conhecida como *equação de Hagen-Poiseuille*, permite que se afirme que o coeficiente de permeabilidade não é uma característica intrínseca do meio poroso (parte sólida), mas sim de uma interação entre propriedades do fluido e geometria do canal formado pelo poro.

5.2. Soluções clássicas para fluxo turbulento em solos

As teorias discutidas nas seções precedentes sobre fluxo potencial e lei de Darcy se enquadram em um intervalo de valores de Re para qual há uma relação linear, ou proporcional, entre a descarga específica q e o gradiente hidráulico J . Assim como visto na Figura 10, mesmo que para uma grandeza diferente da descarga específica, percebe-se que o aumento do número de Reynolds torna as equações de movimento não lineares. A Figura 11 ilustra a perda de linearidade no espaço das velocidades pelo gradiente hidráulico, espaço este que a tangente da inclinação da reta inicial em relação ao eixo das abscissas equivale a $1/K$.

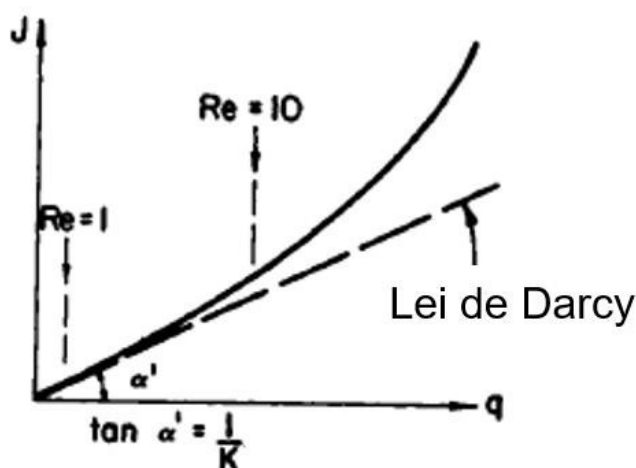


Figura 9. Relação entre q e J para valores crescentes de Re . (Bear, 1985)

O primeiro trabalho conhecido na literatura a abordar fluxo não linear em meios porosos é o realizado por Forchheimer (1901). Em uma comparação com fluxo turbulento em tubos rugosos, ele propôs que, para modelar o comportamento não linear visto na Figura 9, se deveria

considerar um gradiente hidráulico que não fosse linear. Forchheimer propôs então a seguinte relação entre J e q :

$$J = Wq + bq^2 \quad (5.32)$$

A relação de Forchheimer é unidimensional e por isso J e q estão formulados em escalares. Entretanto, a comparação entre fluxo não linear em meios porosos e fluxo turbulento em dutos rugosos deve ser feita com cautela pois algumas diferenças conceituais fazem com que o comportamento físico dos dois fenômenos tenha naturezas distintas. A primeira diferença entre fluxo não linear em meios porosos e fluxo turbulento em dutos é que a transição para a turbulência em dutos rugosos acontece de maneira rápida, quase que instantânea enquanto para meios porosos a transição é suave e considerada lenta. A segunda diferença aparece no valor absoluto do número de Reynolds para qual o fluxo fica instável. Em dutos este valor é da ordem de 2000 a 3000 enquanto para meios porosos, principalmente solos granulares, foi medido em laboratório por pesquisadores como Schneebeli (1955), Wright (1968) e Dudgeon (1966) que este número se encontra no intervalo entre 60 e 150. Logo, o questionamento que aparece é sobre a natureza da não linearidade do fluxo em meios porosos que aparece para $Re \cong 10$, uma vez que este valor é em torno de dez vezes menor do que o valor necessário para que o fluxo se torne turbulento. Com este argumento, pode-se propor que a não linearidade apresentada pelo modelo de Forchheimer (1901) não representa a transição para turbulência, mas sim outro fenômeno que torne o fluxo não linear. Alguns pesquisadores (Hubbert (1956), Scheidegger (1960), Lindquist (1933)) propuseram que este engatilhamento da não linearidade se dá pela aparição das forças inerciais que eram inicialmente desprezadas em fluxos de pequena velocidade pois a parcela viscosa dominava o comportamento. Para fluxos com velocidades um pouco maiores, a parcela inercial começa a ganhar importância na equação de movimento e, como esta parcela é proporcional ao quadrado da velocidade, a não linearidade aparece naturalmente. Scheidegger (1960) prova que o modelo de Hagen-Poiseuille não pode ser usado para dutos muito tortuosos (representativo de meios porosos) pois nestes casos as forças inerciais

nunca desaparecem, como acontece matematicamente em dutos retos (Eq. 214.b). Apesar dos modelos encontrados na literatura para fluxos não lineares em meios porosos representarem com certa precisão a relação entre as velocidades e os gradientes, até mesmo para valores muito altos de Re já em regime turbulento, nenhum modelo conseguiu prever a transição entre os regimes e os parâmetros que governam esta transição. Os modelos mais conhecidos na literatura para fluxos não lineares em meios porosos são:

$$J = Wq + bq^2; W, b = \text{constantes}, \text{ Forchheimer (1901)} \quad (5.33.a)$$

$$J = Wq + bq^2 + cq^3; W, b, c = \text{constantes}, \text{ Forchheimer (1901)} \quad (5.33.b)$$

$$J = Wq + bq^m; 1,6 \leq m \leq 2, \text{ Forchheimer (1930)} \quad (5.33.c)$$

$$J = Wq + bq^2 + c \frac{\partial q}{\partial t}, \text{ Polubarinova – Kochina (1952)} \quad (5.33.d)$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = aq^{1,8}, \text{ White (1935)} \quad (5.33.e)$$

$$J = C_1 \frac{\nu T^2}{gn} q + C_2 \frac{T^2}{gn^2} q^2, \text{ Scheidegger (1960)} \quad (5.33.f)$$

$$J = \frac{5\alpha(1-n)^2 \nu M_s^2}{gn^3} q + \frac{\beta(1-n)M_s}{8gn^3} q^3, \text{ Ergun e Orning (1949)} \quad (5.33.g)$$

$$J = \frac{K_0(1-n)}{gn^3 d^2} q^2, \text{ Burke e Plummer (1928)} \quad (5.33.h)$$

$$J = \frac{\alpha C_d}{n^2} \sqrt{\frac{(1-n)}{\lambda \beta k} \frac{q^2}{2g}}, \text{ Rumer e Drinker (1966)} \quad (5.33.i)$$

$$J = \alpha \frac{\nu(1-n)^2}{gd^2(n-n_0)^3} q + \frac{\beta(1-n)}{gd(n-n_0)^3} q^2 + \frac{1}{g(n-n_0)} \frac{\partial q}{\partial t}, \text{ Irmay (1964)} \quad (5.33.j)$$

$$J = \frac{180(1-n)^2 \nu}{n^3 g d^2} q + 2,87 \frac{\nu^{0,1}(1-n)^{1,1}}{n^3 g d^{1,1}} q^{1,9}, \text{ Carman (1937)} \quad (5.33.k)$$

$$\frac{dq}{dJ} = \frac{K \rho g}{\mu} \left(1 - e^{\frac{i}{J}}\right), \text{ Lei et.al (2018)} \quad (5.33.l)$$

$$J = \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{\lambda_c}{\frac{dp}{dx} + \lambda_c - \lambda_a} \right), \text{ Huang et.al (2013)} \quad (15.33.m)$$

Em todos esses modelos matemáticos, empíricos e semi-empíricos, busca-se relacionar propriedades do meio poroso, propriedades do fluido e do fluxo propriamente dito, com o gradiente hidráulico e a descarga específica. Alguns modelos mais simples como os de Forchheimer relacionam apenas q com J , outros utilizam a porosidade n , a viscosidade do fluido ν , a superfície específica M_s , diâmetro médio dos grãos d e parâmetros de correção tais como λ, β, α e K_0 que podem ter ou não significado físico. Ressalta-se que todos os modelos mencionados acima são válidos para meios isotrópicos.

6. Prova da convergência do problema de Stokes para células unitárias com condições de contorno não-Dirichlet.

Allaire (1991) provou a convergência do problema de Stokes em \mathbb{R}^N para três distintos limites, com fronteiras definidas apenas no obstáculo sólido. Por motivos de limitações numéricas, uma abordagem semelhante deverá ser feita em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com escolhas adequadas de condições de fronteira para que o problema final seja fisicamente coerente e compatível com a teoria desenvolvida na literatura.

O problema na escala global.

Seja o problema de Stokes estudado por Allaire (1991), sendo este:

Encontre $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times L^2(\Omega_\varepsilon)$ soluções do problema (P1)

$$\begin{aligned} \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon &= f, & em \Omega_\varepsilon \\ \nabla \cdot u_\varepsilon &= 0, & em \Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (P1)$$

Para $\varepsilon \rightarrow 0$. Para o problema com condições não-Dirichlet (deslizamento) em parte da fronteira e com condições de Dirichlet nas demais, o espaço funcional $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ não é mais adequado. Deve-se buscar soluções em $[H^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times L^2(\Omega_\varepsilon)$. Seja a formulação variacional do mesmo problema (P1):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p_\varepsilon \cdot v \, dV - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \cdot v \, dV &= \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad \forall v \in [H^1(\Omega_\varepsilon)]^N, & em \Omega_\varepsilon \\ \int_{\Omega_\varepsilon} q(\nabla \cdot u_\varepsilon) \, dV &= 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon), & em \Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (P2)$$

Tome $v = \phi w_\varepsilon^k$ e $q = \phi q_\varepsilon^k$ onde $\phi \in D(\Omega)$. As funções $w_\varepsilon^k \in [H^1(\Omega_\varepsilon)]^N$ e $q \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ são sequências cuja convergência será provada a partir de algumas hipóteses. Allaire (1991) assumiu o problema em \mathbb{R}^N , sem

condições de fronteira do domínio a não ser na superfície dos grãos (furos) periodicamente distribuídos no domínio todo. Neste trabalho, assumiremos que o problema está restrito a um aberto Ω tal que:

$$\Omega = \Omega_\varepsilon + \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} T_i^\varepsilon$$

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \text{ para } i \neq j$$

$$\partial\Omega \cap \partial T_i^\varepsilon = \emptyset$$

$$\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$$

Integrando por partes (P2):

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon (\nabla \cdot v) dV + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (p_\varepsilon v) \cdot n dS + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v dV \\ & = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v dV \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^N, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ & \int_{\Omega_\varepsilon} q (\nabla \cdot u_\varepsilon) dV = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon) \setminus \mathbb{R}, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (P2)$$

Note que a condição de fronteira foi omitida em (P2) pois a expressão se refere somente ao funcional dentro do domínio e não em seu bordo. Substituindo v e q por suas definições dadas previamente e expandindo (P2):

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon (\phi \nabla \cdot w_\varepsilon^k + w_\varepsilon^k \cdot \nabla \phi) dV + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot (\phi \nabla w_\varepsilon^k + w_\varepsilon^k \nabla \phi) dV \\ & = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \phi w_\varepsilon^k dV \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^N, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ & \int_{\Omega_\varepsilon} \phi q_\varepsilon^k (\nabla \cdot u_\varepsilon) dV = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon) \setminus \mathbb{R}, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (P2)$$

Sejam as seguintes seis hipóteses a respeito das funções w_ε^k e q_ε^k , como base no trabalho de Allaire (1991):

$$(H1): w_\varepsilon^k \in H^1(\Omega)^N, q_\varepsilon^k \in L^2(\Omega).$$

$$(H2): \nabla \cdot w_\varepsilon^k = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } w_\varepsilon^k = 0 \text{ dentro dos grãos } (T_i^\varepsilon).$$

$$(H3): w_\varepsilon^k \rightharpoonup e_k \text{ fracamente em } H^1(\Omega)^N \text{ e } q_\varepsilon^k \rightharpoonup 0 \text{ fracamente em } L^2(\Omega).$$

$$(H4): \exists \mu_k \in W^{-1,\infty}(\Omega)^N$$

$$(H5): \text{Para toda sequência } v_\varepsilon \text{ e para cada } v \text{ tal que:}$$

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ fracamente em } H^1(\Omega)^N, v_\varepsilon = 0 \text{ em } T_i^\varepsilon$$

E para cada $\phi \in D(\Omega)$, tem-se que:

$$\langle \nabla q_\varepsilon^k - \Delta w_\varepsilon^k, \phi v_\varepsilon \rangle_{H^{-1}, H^1(\Omega)} \rightharpoonup \langle \mu_k, \phi v \rangle_{H^{-1}, H^1(\Omega)}$$

$$(H6): \text{Existe um operador linear de extensão } R_\varepsilon \text{ tal que:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_\varepsilon \in L(H^1(\Omega)^N; H^1(\Omega_\varepsilon)^N) \\ u \in H^1(\Omega_\varepsilon)^N \Rightarrow R_\varepsilon u = u, \text{ em } \Omega_\varepsilon \\ \nabla \cdot u = 0 \text{ em } \Omega \Rightarrow \nabla \cdot (R_\varepsilon u) = 0 \text{ em } \Omega_\varepsilon \\ \|R_\varepsilon u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad C \text{ independente de } \varepsilon \end{array} \right.$$

As funções w_ε^k e q_ε^k , $1 \leq k \leq N$ são funções teste para o processo de homogeneização pelo método das energias, proposto inicialmente para o operador Laplaciano em Cioranescu e Murat (1982). No trabalho de Allaire (1991) todos os espaços de Hilbert citados nas hipóteses são de funções a suporte compacto em Ω . O objetivo desta seção é provar que a convergência ocorre também para os espaços H^1 com funções que garantem condições de contorno específicas que não sejam do tipo Dirichlet. Reescrevendo (P2) com respeito às seis hipóteses apresentadas, tem-se:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon w_\varepsilon^k \cdot \nabla \phi dV + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot w_\varepsilon^k \nabla \phi dV + \int_{\Omega_\varepsilon} \phi \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon^k dV \\ & = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \phi w_\varepsilon^k dV, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^N, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \phi q_\varepsilon^k (\nabla \cdot u_\varepsilon) dV = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon), \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \quad (P2)$$

O caso aqui estudado possui quatro fronteiras onde duas delas recebem condições de Dirichlet (para pressão) e as duas outras recebem condições de deslizamento (cisalhamento livre). As figuras Figura 10, Figura 11 e Figura 12 ilustram o problema que se deseja passar ao limite.

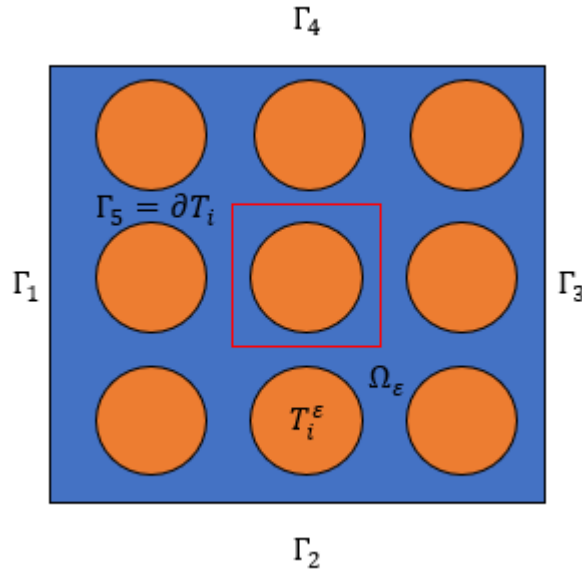


Figura 10. Domínio perfurado periódico

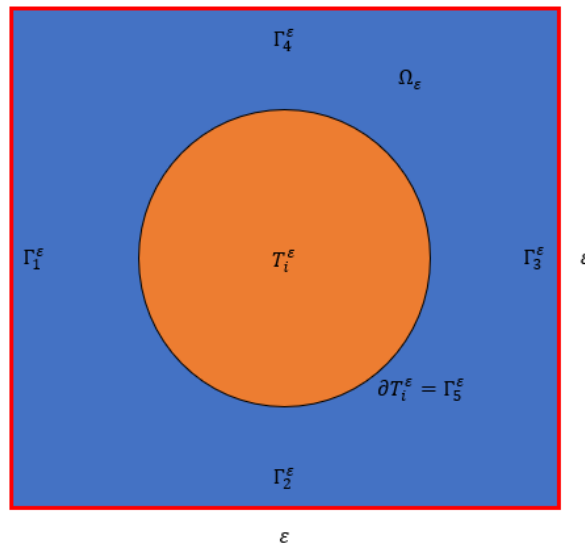


Figura 11. Célula unitária

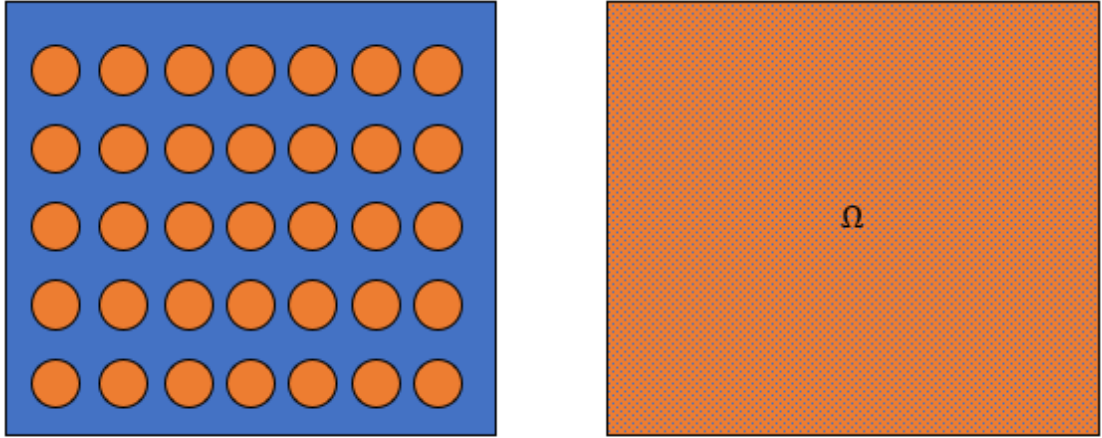


Figura 12. Domínio homogeneizado

Sejam as seguintes condições de contorno para Ω_ε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 \Rightarrow p_\varepsilon = p_\varepsilon^{ent} \\ \Gamma_2 \Rightarrow -n \cdot (-p_\varepsilon I + \mu(\nabla u_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon^T)) \cdot t = 0 \\ \Gamma_3 \Rightarrow p_\varepsilon = p_\varepsilon^{saí} \\ \Gamma_4 = \Gamma_2 \\ \Gamma_5 \Rightarrow u_\varepsilon = 0 \end{array} \right.$$

Como então se comporta o funcional para cada fronteira? Intuitivamente, espera-se que distintos funcionais atuem em cada tipo de fronteira. Resta saber se há compatibilidade entre eles.

Na fronteira Γ_1 pode-se escrever a pressão de entrada a partir da relação de Bernouilli tal que:

$$p_{\varepsilon_0} = p_\varepsilon + \frac{1}{2} \rho |u_\varepsilon|^2 \quad (6.1)$$

Onde p_{ε_0} é a pressão de estagnação imposta na fronteira e p é a pressão estática na fronteira. É importante ressaltar neste ponto que não existem condições de contorno para pressões nas equações de Stokes e Navier-Stokes; para tal, assume-se a relação de Bernouilli. Assumindo $\rho = 1$, a condição de contorno de pressão se transforma em uma condição de Dirichlet para velocidades, tal que a velocidade imposta seja:

$$|u_\varepsilon|_{\Gamma_1} = \sqrt{2(p_{\varepsilon_0} - p_\varepsilon)} \quad (6.2.a)$$

Assumindo que esta velocidade de entrada é puramente horizontal, torna-se possível construir o vetor de velocidades a partir de seu módulo tal que:

$$u_{\varepsilon\Gamma_1} = \left[\sqrt{2(p_{\varepsilon_0} - p_\varepsilon)} \right] e_k, \quad e_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.2.b)$$

Note que para que a igualdade em (6.2.b) seja verdadeira, o lado direito deve também estar em H^1 . Sabe-se que $p_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ e que, sendo $p_{\varepsilon_0} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ então, pela linearidade do espaço, $(p_{\varepsilon_0} - p_\varepsilon) = \hat{p}_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, logo, toda sequência ou subsequência \hat{p}_ε é contínua em Ω_ε . Da hipótese H6, o operador de extensão garante que $\nabla p_\varepsilon \in H^{-1}$, que pela reflexividade dos espaços de Hilbert, $\nabla p_\varepsilon \in H^1$. A partir disso, pode-se afirmar que $\nabla \hat{p}_\varepsilon \in H^1$ também. Por Rellich, $\hat{p}_\varepsilon \rightarrow \hat{p}$ fortemente em L^2 . Logo, ao impor a condição (6.2.b) na fronteira, não haverá problemas de traço ou de convergência à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nas fronteiras Γ_2 e Γ_4 atua a condição de deslizamento livre, onde a tensão cisalhante é considerada nula. Esta condição é oriunda da hipótese de Navier sobre a proporcionalidade entre a velocidade de deslizamento e a tensão cisalhante. Tem-se:

$$n^T \cdot (2\mu \mathbb{D}(u) - pI) \cdot t - \beta u \cdot t = 0 \quad (6.3.a)$$

Onde

$$\mathbb{D}(u) = \mu(\nabla u + \nabla u^T) \quad (6.3.b)$$

Onde β é o coeficiente de atrito entre o fluido e a fronteira, logo, $\beta = 0$ indica deslizamento livre. É importante ressaltar que a imposição de uma condição de contorno de deslizamento afeta a própria formulação do problema variacional, pois a condição age no próprio tensor de tensões, logo necessitando de uma outra formulação variacional para esta fronteira específica. Apesar disso, é possível descrever seus efeitos na formulação com o Laplaciano. Allaire (1991), em outro trabalho sobre homogeneização com condições de deslizamento na fronteira do obstáculo (furo), provou

coercividade e convergência do sistema de Stokes para uma lei de tipo Brinkman. Aqui, a condição de deslizamento livre é imposta na fronteira do domínio e não na superfície do grão (que é mantida com Dirichlet), mas o resultado se aplica igualmente. Pode-se propor que, por $\nabla \cdot u_\varepsilon = 0$, tem-se:

$$\Delta u_\varepsilon = 2\nabla \cdot \mathbb{D}(u) \quad (6.4)$$

O termo correspondente ao Laplaciano no variacional torna-se:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} 2\nabla \cdot \mathbb{D}(u) \cdot v \, dV \quad (6.5)$$

Cuja integração por partes resulta em:

$$-2 \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u) \cdot \nabla v \, dV + 2 \int_{\Gamma_{2,4}} \mathbb{D}(u) \cdot v \cdot n \, dS \quad (6.6)$$

O primeiro termo, por simetria, pode ser reescrito tal que:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u) \cdot \nabla v \, dV = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u) \cdot \frac{\nabla v}{2} \, dV + \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u) \cdot \frac{\nabla v^T}{2} \, dV = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u) \cdot \mathbb{D}(v) \, dV \quad (6.7)$$

Pois, por simetria, $\mathbb{D}(u)^T = \mathbb{D}(u)$. Sabendo que a equação de Stokes pode ser reescrita com o tensor explícito:

$$\nabla \cdot (pI - \mu \mathbb{D}(u)) = f \quad (6.8)$$

A formulação variacional pode então ser reescrita como:

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \cdot (-pI + \mu \mathbb{D}(u)) \cdot v \, dV = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad (6.9.a)$$

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} (-\nabla p_\varepsilon + \mu \nabla \cdot \mathbb{D}(u)) \cdot v \, dV = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad (6.9.b)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p_\varepsilon \cdot v \, dV - \mu \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \cdot \mathbb{D}(u) \cdot v \, dV = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad (6.9.c)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot v \, dV + \int_{\Gamma_{2,4}} p_\varepsilon v \cdot n \, dS + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(v) \, dV + 2\mu \int_{\Gamma_{2,4}} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot v \cdot n \, dS \\
& = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV, \text{ em } \Omega_\varepsilon \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \, \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \quad (6.9.d)
\end{aligned}$$

A expressão acima pode ainda ser condensada, juntando os termos na fronteira, como:

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot v \, dV + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(v) \, dV - \int_{\Gamma_{2,4}} (-p_\varepsilon I + 2\mu \mathbb{D}(u_\varepsilon)) \cdot v \, dS = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad (6.9.e)$$

Pela decomposição de $v \in H^1$ na fronteira em suas componentes normais e tangenciais:

$$v = v \cdot n + \sum_{i=1}^{N-1} v \cdot t_i, \quad v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^N \quad (6.10)$$

O variacional torna-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot v \, dV + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(v) \, dV - \int_{\Gamma_{2,4}} n^T (-p_\varepsilon I + 2\mu \mathbb{D}(u_\varepsilon)) n v \cdot n \, dS \\
& + \int_{\Gamma_{2,4}} n^T (-p_\varepsilon I + 2\mu \mathbb{D}(u_\varepsilon)) t v \cdot t \, dS = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Onde pela impenetrabilidade da fronteira, reduz-se o variacional para:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot v \, dV + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(v) \, dV + \int_{\Gamma_{2,4}} n^T (-p_\varepsilon I + 2\mu \mathbb{D}(u_\varepsilon)) t v \cdot t \, dS \\
& = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad (6.12)
\end{aligned}$$

Sendo, por condição imposta na fronteira de $\beta = 0$:

$$\int_{\Gamma_{2,4}} n^T (-p_\varepsilon I + 2\mu \mathbb{D}(u_\varepsilon)) t v \cdot t \, dS = 0 \quad (6.13)$$

Logo, em $\Gamma_2 \cup \Gamma_4 + \Omega_\varepsilon$:

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot v \, dV + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(v) \, dV = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad (6.14)$$

Com isso, temos o (aparente) resultado de que tais condições no bordo de Ω simulam (a menos de alguns possíveis ajustes) a condição de Allaire (1991) em \mathbb{R}^N visto que as condições de Dirichlet são apenas entradas de “velocidade no infinito” e as condições de deslizamento recuperam a EDP de Stokes propriamente dita. Logo, o problema torna-se apenas um fluxo de Stokes em torno do cilindro, amplamente conhecido da literatura, de onde podemos doravante analisar o problema do tamanho do grão e o surgimento dos “termos estranhos”.

O termo não linear de convecção em Navier-Stokes pode ser inserido sem que haja modificação na estrutura final do variacional pois trata-se de uma perturbação compacta e sua convergência será provada mais à frente.

Com o variacional definido para $\Omega_\varepsilon, \Omega$ (por extensão a ser utilizada posteriormente) e em suas fronteiras, assume-se a presente que:

$$v = w_\varepsilon^k \phi, \quad q = q_\varepsilon^k \phi$$

Com hipóteses semelhantes às de Allaire (1991). Verifica-se a presente que os variacionais gerados acima convergem para uma equação do tipo Brinkman, independentemente de ser na fronteira ou no domínio.

Para o variacional referente a Ω_ε :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon w_\varepsilon^k \cdot \nabla \phi \, dV + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot w_\varepsilon^k \nabla \phi \, dV + \int_{\Omega_\varepsilon} \phi \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon^k \, dV \\ & = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \phi w_\varepsilon^k \, dV, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^N, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ & \int_{\Omega_\varepsilon} \phi q_\varepsilon^k (\nabla \cdot u_\varepsilon) \, dV = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon) \setminus \mathbb{R}, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (P2)$$

Note que o terceiro termo a esquerda da igualdade possui a seguinte identidade:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \phi \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon^k dV + \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla w_\varepsilon^k dV = - \int_{\Omega_\varepsilon} \phi u_\varepsilon \cdot \Delta w_\varepsilon^k dV \quad (6.15)$$

A menos de um termo na fronteira que desaparece por ser um funcional em Ω_ε . Logo, o mesmo termo pode ser substituído por:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \phi \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon^k dV = - \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla w_\varepsilon^k dV - \int_{\Omega_\varepsilon} \phi u_\varepsilon \cdot \Delta w_\varepsilon^k dV \quad (6.16)$$

Integrando por partes a equação da continuidade (divergência livre):

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(\phi q_\varepsilon^k) \cdot u_\varepsilon dV = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon) \setminus \mathbb{R}, \quad em \Omega_\varepsilon \quad (6.17)$$

Expandindo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \phi \nabla q_\varepsilon^k \cdot u_\varepsilon dV + \int_{\Omega_\varepsilon} q_\varepsilon^k \nabla \phi \cdot u_\varepsilon = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon) \setminus \mathbb{R}, \quad em \Omega_\varepsilon \quad (6.18)$$

Por estarmos em um Hilbert real, a ordem de ϕ na primeira integral não altera o resultado, logo:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla q_\varepsilon^k \cdot \phi u_\varepsilon dV + \int_{\Omega_\varepsilon} q_\varepsilon^k \nabla \phi \cdot u_\varepsilon = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega_\varepsilon) \setminus \mathbb{R}, \quad em \Omega_\varepsilon \quad (6.19)$$

A equação da continuidade faz parte do sistema de EDPs e logo, por linearidade, pode ser somada a equação de Stokes, gerando assim a EDP:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon w_\varepsilon^k \cdot \nabla \phi dV + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot w_\varepsilon^k \nabla \phi dV - \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon \nabla \phi \cdot \nabla w_\varepsilon^k dV \\ & - \int_{\Omega_\varepsilon} \phi u_\varepsilon \cdot \Delta w_\varepsilon^k dV \\ & + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla q_\varepsilon^k \cdot \phi u_\varepsilon dV + \int_{\Omega_\varepsilon} q_\varepsilon^k \nabla \phi \cdot u_\varepsilon dV \\ & = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \phi w_\varepsilon^k dV, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon)^N, \quad em \Omega_\varepsilon \quad (6.20) \end{aligned}$$

A EDP (6.20) está apenas em Ω_ε . Toma-se então a decisão de usar o operador linear de extensão para avaliar o comportamento da EDP em Ω .

Pela sexta hipótese, ao se aplicar o operador em todos os termos da EDP (6.20), recupera-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}) w_{\varepsilon}^k \cdot \nabla \phi dV + \int_{\Omega} \nabla \widetilde{u}_{\varepsilon} \cdot w_{\varepsilon}^k \nabla \phi dV - \int_{\Omega} \widetilde{u}_{\varepsilon} \nabla \phi \cdot \nabla w_{\varepsilon}^k dV \\
& \quad - \int_{\Omega} \phi \widetilde{u}_{\varepsilon} \cdot \Delta w_{\varepsilon}^k dV \\
& \quad + \int_{\Omega} \nabla q_{\varepsilon}^k \cdot \phi \widetilde{u}_{\varepsilon} dV + \int_{\Omega} q_{\varepsilon}^k \nabla \phi \cdot \widetilde{u}_{\varepsilon} dV \\
& = \int_{\Omega} f \cdot \phi w_{\varepsilon}^k dV, \quad \forall v \in H^1(\Omega_{\varepsilon})^N, \quad em \Omega \quad (6.21)
\end{aligned}$$

Reagrupando alguns termos, especificamente o quarto e o quinto termo a esquerda da igualdade:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}) w_{\varepsilon}^k \cdot \nabla \phi dV + \int_{\Omega} \nabla \widetilde{u}_{\varepsilon} \cdot w_{\varepsilon}^k \nabla \phi dV - \int_{\Omega} \widetilde{u}_{\varepsilon} \nabla \phi \cdot \nabla w_{\varepsilon}^k dV \\
& \quad + \int_{\Omega} (\nabla q_{\varepsilon}^k - \Delta w_{\varepsilon}^k) \cdot \phi \widetilde{u}_{\varepsilon} dV + \int_{\Omega} q_{\varepsilon}^k \nabla \phi \cdot \widetilde{u}_{\varepsilon} dV \\
& = \int_{\Omega} f \cdot \phi w_{\varepsilon}^k dV, \quad \forall v \in H^1(\Omega)^N, \quad em \Omega \quad (6.22)
\end{aligned}$$

Onde reconhece-se imediatamente o par de dualidade

$$\int_{\Omega} (\nabla q_{\varepsilon}^k - \Delta w_{\varepsilon}^k) \cdot \phi \widetilde{u}_{\varepsilon} dV = \langle \nabla q_{\varepsilon}^k - \Delta w_{\varepsilon}^k, \phi \widetilde{u}_{\varepsilon} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)} \quad (6.23)$$

Sejam as seguintes convergências:

$$\widetilde{u}_{\varepsilon} \rightharpoonup u \in H^1(\Omega)^N \text{ fracamente};$$

$$w_{\varepsilon}^k \rightharpoonup e_k \in H^1(\Omega)^N \text{ fracamente};$$

$$q_{\varepsilon}^k \rightharpoonup 0 \in L^2(\Omega) \text{ fracamente};$$

$$P_{\varepsilon}(p_{\varepsilon}) \rightharpoonup p \in L^2(\Omega) \text{ fracamente}.$$

Finalmente, o funcional em Ω_{ε} converge para um funcional em Ω sob a forma:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} p e_k \cdot \nabla \phi dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot e_k \nabla \phi dV \\
& + \langle \mu_k, \phi u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)} \\
& = \int_{\Omega} f \cdot \phi e_k dV, \quad \forall v \in H^1(\Omega)^N, \quad em \Omega \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Uma vez que $\nabla e_k = 0$. Integrando por partes novamente a expressão limite em Ω :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla p \cdot \phi dV - \int_{\Omega} \Delta u \cdot \phi dV \\
& + \langle \phi \mu_k, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)} \\
& = \int_{\Omega} f \cdot \phi e_k dV, \quad \forall \phi \in D(\Omega), \quad em \Omega \quad (6.25)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
& \nabla p - \Delta u + Mu = f, \quad em \Omega \\
& \nabla \cdot u = 0, \quad em \Omega \quad (EDP)
\end{aligned}$$

Onde M independe de u . Os valores que M pode assumir serão discutidos posteriormente no problema de célula.

A mesma dedução deve ser feita para os outros funcionais que atuam nas fronteiras. Para as fronteiras onde atuam as condições de Dirichlet, a solução já é conhecida e não há necessidade de resolver a EDP. Basta, neste caso, provar que não há problema de traço (compatibilidade) entre a solução e a condição de contorno na vizinhança de $\Omega \cup \partial\Omega$. Essa compatibilidade já foi discutida e o leitor será poupado da discussão tediosa.

Debruça-se agora sobre as fronteiras de deslizamento livre, onde as tensões cisalhantes são nulas. Como já visto, esta condição não impõe um valor de solução na fronteira, mas sim gera um outro funcional que deve ser resolvido nesta variedade. Seja então a formulação variacional na fronteira:

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot v \, dV + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(v) \, dV = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot v \, dV \quad (6.26)$$

Substituindo v por sua definição previamente estabelecida:

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot (\phi w_\varepsilon^k) \, dV + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(\phi w_\varepsilon^k) \, dV = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \phi w_\varepsilon^k \, dV \quad (6.27)$$

O primeiro termo a esquerda da igualdade já foi discutido previamente para o funcional em Ω_ε . Deve-se a presente analisar o segundo termo a esquerda da igualdade, referente ao tensor de tensões, especificamente sua parte desviadora. Neste ponto, parece difícil extrair qualquer propriedade do funcional acima que possa se assemelhar com os resultados obtidos até então. Entretanto, basta recuar alguns passos no desenvolvimento da formulação variacional para que se possa usufruir da incompressibilidade do campo da função teste e do campo de velocidades propriamente dito.

Sabe-se que:

$$2\mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(\phi w_\varepsilon^k) = 2\mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \mathbb{D}(v) = \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \nabla v \quad (6.28)$$

Disso, a integração por partes a seguir segue naturalmente:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \nabla v \, dV = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \cdot (\nabla u_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon^T) \cdot v \, dV + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_\varepsilon=\Gamma_{2,4}} (\nabla u_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon^T) \cdot v \cdot n \, dS \quad (6.29)$$

Onde o último termo a direita da igualdade se anula pois $v \cdot n = 0$ em $\Gamma_{2,4}$. Em relação ao primeiro termo a direita da igualdade, sabe-se que:

$$\nabla \cdot \nabla u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon \quad (6.30.a)$$

$$\nabla \cdot \nabla u_\varepsilon^T = \nabla(\nabla \cdot u_\varepsilon) = 0 \quad (6.30.b)$$

Logo:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbb{D}(u_\varepsilon) \cdot \nabla v \, dV = - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \cdot v \, dV = - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \cdot \phi w_\varepsilon^k \, dV \quad (6.31)$$

Sendo então a formulação variacional reescrita tal que:

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot (\phi w_\varepsilon^k) dV - \mu \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \cdot \phi w_\varepsilon^k dV = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \phi w_\varepsilon^k dV \quad (6.32)$$

Onde se recupera Stokes para toda função teste $v = \phi w_\varepsilon^k$. O ponto ainda mais interessante é que, uma vez com o sistema de Stokes em mãos, para funções teste $v = \phi w_\varepsilon^k$, chega-se a mesma equação homogeneizada:

$$\nabla p - \Delta u + Mu = f, \quad \mu = 1 \quad (EDP)$$

Desta vez, desenvolvida na fronteira e com mesma matriz M . Este resultado é o cerne da questão sobre a compatibilidade dos variacionais na fronteira e no domínio, para condições de contorno não-Dirichlet.

Os resultados obtidos são referentes ao problema no aberto Ω composto por Ω_ε e furos T_i^ε . Do procedimento estabelecido por Allaire (1991), o problema de célula deve ser uma representação em microescala do problema global, isto é, há de se resolver o problema de Stokes em um domínio cujas condições nos bordos reflita (ou simule) as condições no problema macroscópico. Quando o problema global está em \mathbb{R}^N é mais fácil gerar o problema de célula pois diretamente trata-se de um problema de Poisson com valor mínimo na fronteira do furo e valor máximo atingido para $r \rightarrow \infty$ (ou longe o suficiente do furo). Mas quando o domínio é limitado por um bordo, como deve ser formulado o problema de célula? Este assunto será tratado na próxima sessão e, com ele, resultados sobre os limites de M em relação ao tamanho do grão.

6.1. O problema de célula

Parafraseando Allaire (1991), “as funções $w_\varepsilon^k \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $q_\varepsilon^k \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ parecem misteriosas a princípio. Mas estas possuem sentido físico”. De fato, estas necessitam ter sentido físico e esta condição será tratada nesta sessão. Diferente de um problema variacional genérico, a função teste em um problema de homogeneização pelo método das energias é uma função específica, escolhida minuciosamente para satisfazer critérios matemáticos (regularidade) e físicos (coerência com o modelo).

A geometria da célula unitária

Nesta subseção discute-se a própria geometria do problema de célula para dois casos distintos, sendo estes:

- i) O caso com um único grão (furo) no domínio.
- ii) Com mais de um grão (furo) no domínio; aqui o exemplo será com quatro círculos.

Mais adiante neste trabalho, as condições para que se determine se a célula unitária possuirá um ou mais grãos será discutida. Por hora, analisa-se apenas a geometria dos dois casos. Para o primeiro caso, as medidas são trivialmente encontradas. O círculo B_ε^k possui raio $R = \varepsilon/2$ e o grão T_ε^k possui raio a_ε , isto é, o raio depende do valor de ε . A zona denominada D_ε^k possui área igual a $\varepsilon^2 - \pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

O segundo caso é um pouco mais delicado. Sabe-se diretamente que a célula tem dimensões $\varepsilon \times \varepsilon = \varepsilon^N$ para $N = 2$, mas nada pode ser dito de forma simples sobre as dimensões dos subdomínios. O problema geométrico a ser resolvido é o seguinte:

Seja a figura geométrica representada na Figura 13, composta por um quadrado de lado ε e quatro círculos idênticos de raio R . Determine o raio dos círculos sabendo que estes tangenciam os lados do quadrado em seus pontos médios.

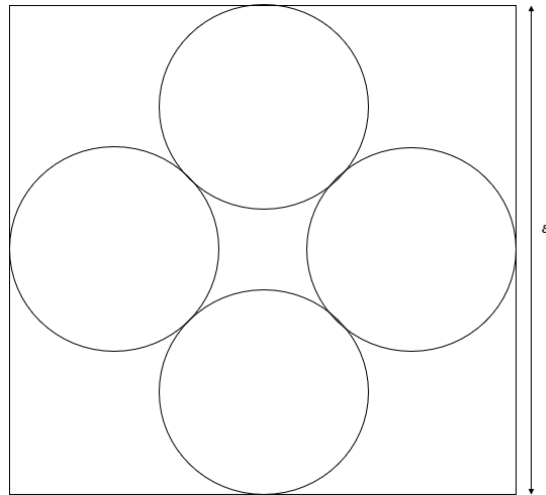


Figura 13. Célula unitária com quatro grãos.

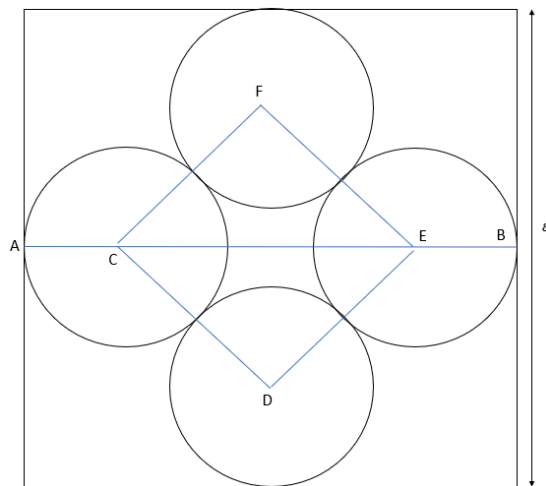


Figura 14. Relações geométricas na célula unitária.

O quadrado CDEF conecta os centros dos quatro círculos. Sabe-se a priori que:

- a) $CE = CD\sqrt{2} = 2R\sqrt{2}$;
- b) $CE = AB - 2R = \varepsilon - 2R$

Com as duas informações acima, tem-se:

$$\varepsilon - 2R = 2R\sqrt{2}$$

$$\varepsilon = 2R\sqrt{2} + 2R = 2R(1 + \sqrt{2})$$

$$R = R(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2(1 + \sqrt{2})} \quad (6.33)$$

Onde, para este caso, $\alpha = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$. Logicamente, o raio do grão $a_\varepsilon < R(\varepsilon)$.

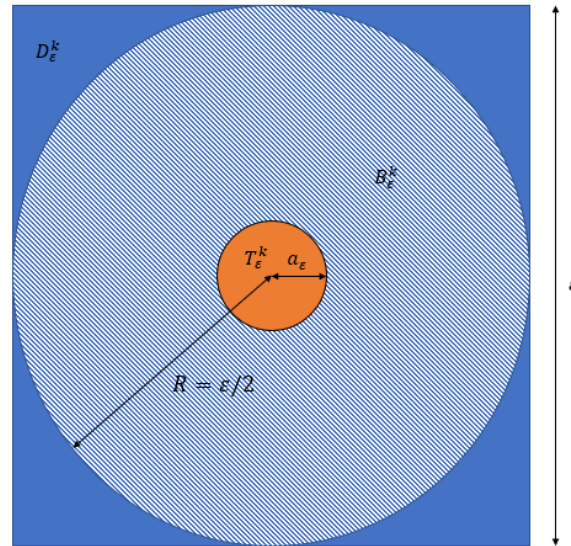


Figura 15. Domínio para solução analítica do problema de célula.

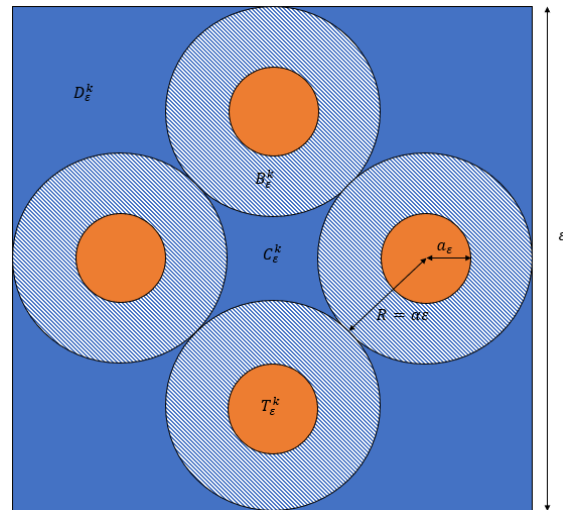


Figura 16. Domínio para solução analítica do problema de célula com quatro grãos.

6.2. A EDP na célula unitária e sua solução.

Para que haja solução analítica do problema de Stokes, sabe-se que fortes restrições devem ser impostas sobre a geometria do domínio sobre as condições de fronteira que nele atuam. Apesar da natureza numérica deste trabalho, a análise da convergência do problema de Stokes para um dos seus três limites possíveis – Stokes, Brinkman ou Darcy – deve ser feita a partir da solução analítica. Esta subseção será então dedicada a apresentar as hipóteses que permitirão a resolução do sistema de Stokes na célula unitária, inspirada nas hipóteses apresentadas por Allaire (1991) e Cionarescu & Murat (1985).

Ressalta-se aqui que o problema será resolvido para a hipótese de Stokes, isto é, com $Re \rightarrow 0$. É amplamente difundido na literatura que não existe solução estacionária para este problema em $N = 2$, devido ao paradoxo de Stokes. Entretanto, pelo problema de célula existir apenas em um domínio limitado muito pequeno, autoriza-se a utilização da aproximação de Stokes. Um problema de célula resolvido com a formulação de Oseen possa, talvez, representar com maior acurácia o problema de escoamento ao redor de um cilindro (ou círculo) em $N = 2$. Mais ainda, tal aproximação pode justificar a utilização do termo inercial de Navier-Stokes, sob a ótica deste ser uma perturbação compacta que converge amigavelmente em um espaço adequado.

Seja o seguinte problema diferencial:

Encontre $(w_\varepsilon^k, q_\varepsilon^k)$ soluções do sistema

$$\begin{aligned} \nabla q_\varepsilon^k - \Delta w_\varepsilon^k &= 0, & \text{em } \Omega_\varepsilon^{\text{unitária}} \\ \nabla \cdot w_\varepsilon^k &, & \text{em } \Omega_\varepsilon^{\text{unitária}} \end{aligned} \quad (6.34. a)$$

Com as seguintes condições

$$\begin{aligned} \nabla q_\varepsilon^k - \Delta w_\varepsilon^k &= 0, & \text{em } B_\varepsilon^k \\ w_\varepsilon^k &= 0, & \text{em } T_\varepsilon^k \\ w_\varepsilon^k &= U_\infty, & \text{em } D_\varepsilon^k \end{aligned}$$

$$w_\varepsilon^k = U_\infty, \quad \text{em } \partial\Omega_\varepsilon^{\text{unitária}} \quad (6.34.b)$$

Considera-se aqui que U_∞ é puramente horizontal. Isto é, uma hipótese implícita na formulação acima é que para $r \cong R$, as linhas de fluxo já estariam horizontalizadas e, assim, o campo de velocidade nas fronteiras horizontais coincidiria com o caso em que estas estariam sob imposição de um deslizamento livre.

Para que seja matematicamente coerente a escolha das condições de contorno acima, assume-se que, de certa forma, $\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon} \cong 0$, alternativamente, o máximo tamanho de B_ε^k garante que a solução seja semelhante a condição no infinito, como em um problema em \mathbb{R}^N . Considere a presente que $u_\varepsilon(r, \theta)$ em coordenadas esféricas. A solução, assumindo um fluxo da direita para a esquerda (para que haja compatibilidade com o sinal de θ) é:

$$w_\varepsilon^k = w_r^k + w_\theta^k \quad (\text{Solução velocidade})$$

$$w_r^k = U_\infty \cos\theta \left[1 + \frac{a_\varepsilon^3}{2r^3} - \frac{3a_\varepsilon}{2r} \right]$$

$$w_\theta^k = -U_\infty \sin\theta \left[1 - \frac{a_\varepsilon^3}{4r^3} - \frac{3a_\varepsilon}{4r} \right]$$

E para o campo de pressão:

$$q_\varepsilon^k = q_\infty^k + \frac{3\mu}{2} \frac{U_\infty}{a_\varepsilon} \left(\frac{a_\varepsilon}{r} \right)^2 \cos\theta \quad (\text{Solução pressão})$$

Resultado clássico que indica dois pontos de estagnação da velocidade e logo, valores de máximo para o campo de pressão.

Recapitula-se aqui alguns dos prováveis e interessantes limites. Uma vez que a matriz M é oriunda da integração do campo de velocidades, $M \sim \int \nabla w_i : \nabla w_j dV_\varepsilon$, tem-se que

$$\nabla p - \Delta u + Mu = f \quad (EDP)$$

Vai para

$$\nabla p - \Delta u = f, \quad M \rightarrow 0 \text{ (Stokes)} \quad (\text{Lim } 1)$$

$$\nabla p + Mu = f, \quad M \rightarrow \infty \text{ (Darcy)} \quad (\text{Lim } 2)$$

Reescrevendo

$$u = M^{-1}(-\nabla p + f), \quad (\text{Darcy}) \quad (\text{Lim } 2)$$

Ou então

$$\nabla p - \Delta u + Mu = f, \quad 0 < M < \infty \text{ (Brinkman)} \quad (\text{Lim } 3)$$

Provar que M pode ir para infinito é tarefa fácil. Mas como fazer M ir para zero? Somente pelas velocidades a tarefa parece impossível devido a própria estrutura da solução de Stokes.

Defina a presente a matriz M tal que:

$$M = \frac{M_0}{\sigma^2} \quad (6.35)$$

Tal que $M_0 = \int \nabla w_i : \nabla w_j dV_\varepsilon$. O fator σ é uma forma de medir a razão entre o tamanho dos grãos e o tamanho da célula unitária. Será o limite de σ que definirá para qual EDP o sistema irá convergir. Apesar de σ ser amplamente debatido por Allaire (1991) e Cionarescu (1985), uma outra forma de medir a convergência da razão entre o tamanho dos grãos e o tamanho da célula será proposta neste trabalho.

Para entender como Allaire evita o paradoxo de Stokes, é preciso não somente ler seu artigo de 1991, mas também voltar em sua tese de doutorado de 1990. Neste documento, Allaire (1990) assume que a velocidade não tende para U_∞ em $r \rightarrow \infty$ mas sim para $r \rightarrow \varepsilon$. Este artifício é bastante semelhante ao utilizado neste trabalho. Com isso, Allaire se utiliza da clássica solução de Stokes em $N = 2$ periódica com período ε podendo ser representada sob a forma de uma série de inteiros e um termo logarítmico para que a solução decaia. É esta aproximação que faz surgir a dependência do tamanho crítico dos buracos em uma forma logarítmica.

Aqui, para propor uma nova forma de quantificar o tamanho crítico dos grãos, se propõe uma nova forma de resolver o problema de célula. Esta forma é, certamente, menos impressionante e rebuscada do que a solução

de Allaire, mas garante a convergência da EDP e a construção de uma matriz M adequada para fins numéricos.

Seja o seguinte problema diferencial:

Encontre $(w_\varepsilon^k, q_\varepsilon^k)$ soluções do sistema

$$\begin{aligned} \nabla q_\varepsilon^k - \Delta w_\varepsilon^k &= 0, & \text{em } \Omega_\varepsilon^{\text{unitária}} \\ \nabla \cdot w_\varepsilon^k &, & \text{em } \Omega_\varepsilon^{\text{unitária}} \end{aligned} \quad (\text{Pb célula})$$

Com as seguintes condições

$$\begin{aligned} \nabla q_\varepsilon^k - \Delta w_\varepsilon^k &= 0, & \text{em } B_\varepsilon^k \\ w_\varepsilon^k &= 0, & \text{em } T_\varepsilon^k \\ w_\varepsilon^k &= U_\infty, & \text{em } D_\varepsilon^k \\ w_\varepsilon^k &= U_\infty, & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon^{\text{unitária}} \end{aligned}$$

Porém aqui, considere o problema em coordenadas polares (radial) e que o campo de pressão tem um “comportamento” previamente conhecido: será adotado um campo de pressão periódico tal que:

$$q_\varepsilon^k = \sum_{k=1}^{\infty} q_\varepsilon e^{\frac{ir}{\varepsilon}k} = f(r) \quad (6.36)$$

Simétrico (não depende de φ ou θ) e k é a frequência espacial da solução. Logo, o problema a ser resolvido torna-se um problema de Poisson no anel, tal que a solução satisfaça:

$$\begin{aligned} \Delta w_\varepsilon^k &= f(r), & \text{em } B_\varepsilon^k \\ w_\varepsilon^k &= 0, & \text{em } T_\varepsilon^k \\ w_\varepsilon^k &= U_\infty, & \text{em } D_\varepsilon^k \\ w_\varepsilon^k &= U_\infty, & \text{em } \partial\Omega_\varepsilon^{\text{unitária}} \end{aligned}$$

O problema pode ainda ser reescrito como:

$$\frac{\partial^2 w_\varepsilon^k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varepsilon^k}{\partial r} = f(r), \quad \text{em } B_\varepsilon^k \quad (6.37.a)$$

$$w_\varepsilon^k = 0, \quad \text{em } T_\varepsilon^k$$

$$w_\varepsilon^k = U_\infty, \quad \text{em } D_\varepsilon^k$$

$$w_\varepsilon^k = U_\infty, \quad \text{em } \partial\Omega_\varepsilon^{\text{unitária}}$$

Alternativamente

$$\frac{\partial^2 w_\varepsilon^k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\varepsilon^k}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} q_\varepsilon e^{\frac{ir}{\varepsilon}k}, \quad \text{em } B_\varepsilon^k \quad (6.37.b)$$

$$w_\varepsilon^k = 0, \quad \text{em } T_\varepsilon^k$$

$$w_\varepsilon^k = U_\infty, \quad \text{em } D_\varepsilon^k$$

$$w_\varepsilon^k = U_\infty, \quad \text{em } \partial\Omega_\varepsilon^{\text{unitária}}$$

O lado direito da EDP pode ser reescrito de acordo com a fórmula de Voss-Weyl tal que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_\varepsilon^k}{\partial r} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} q_\varepsilon e^{\frac{ir}{\varepsilon}k}, \quad \text{em } B_\varepsilon^k \quad (6.38)$$

A solução geral torna-se mais fácil de ser encontrada a partir desta abordagem, sendo assim:

$$w_\varepsilon^k(r, \theta) = -\frac{\varepsilon i}{k} E_i \left(\frac{ikr}{\varepsilon} \right) + \frac{\varepsilon^2}{k^2} E_i \left(\frac{ikr}{\varepsilon} \right) + C_1 \log(r) + C_2 \quad (6.39.a)$$

Onde $E_i(r)$ é a função integral-exponencial que pode ser expressa pela série convergente de Ramanujan (para r pequeno):

$$E_i(r) = \gamma + \ln(r) + e^{\frac{r}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} r^n}{n! 2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2k+1} \quad (6.39.b)$$

Com γ sendo a constante de Euler-Mascheroni.

Note que aplicando as condições de contorno em $r = a_\varepsilon$ e $r = R = \varepsilon$, considerando que:

$$e^{\frac{r}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} r^n}{n! 2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2k+1} \rightarrow \alpha r^p e^{\frac{r}{2}} \quad (6.40)$$

Para n, k grandes, espera-se um resultado da forma:

$$w_{\varepsilon}^k(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\varepsilon i}{k} \left(\gamma + \ln\left(\frac{ikr}{\varepsilon}\right) + \alpha i k r^p e^{\frac{ikr}{2\varepsilon}} \right) + \frac{\varepsilon^2}{k^2} \left(\gamma + \ln\left(\frac{ikr}{\varepsilon}\right) + \alpha i k r^p e^{\frac{ikr}{2\varepsilon}} \right) + C_1 \log(r) + C_2 \quad (6.41)$$

Simplificando:

$$w_{\varepsilon}^k(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\varepsilon i}{k} + \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right) \left(\gamma + \ln\left(\frac{ikr}{\varepsilon}\right) + \alpha i k r^p e^{\frac{ikr}{2\varepsilon}} \right) + C_1 \log(r) + C_2 \quad (6.42)$$

Gera-se algo como:

$$w_{\varepsilon}^k(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\varepsilon i}{k} + \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right) \left(\gamma + \ln\left(\frac{ik\beta a_{\varepsilon}}{\varepsilon^2}\right) + \alpha i k \left(\frac{\beta a_{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^p e^{\frac{ik\beta a_{\varepsilon}}{2\varepsilon^2}} \right) + C_1 \log\left(\frac{\beta a_{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) + C_2 \quad (6.43)$$

Para $\beta \in \mathbb{R}$. Onde nota-se que a limitação da solução dependerá explicitamente da relação entre os raios (do grão e da célula unitária) e que esta razão será controlada pelo produto de r pelo logaritmo da razão. Resultado este bem semelhante ao encontrado por Allaire (1990,1991). Aqui, precisamente, pode-se estimar a convergência para os limites $0, +\infty$ ou $0 < C_0 < +\infty$ com:

$$\varepsilon \left| \ln\left(\frac{a_{\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \right|^{\frac{1}{p}}, p \in \mathbb{R}^+ \quad (6.44)$$

Fato importante é notar que tomando $p \rightarrow \infty$ a expressão (6.44) tende a 1. Ou seja, a matriz homogeneizada não é corrigida por fator algum. Matematicamente, tem-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, p \rightarrow \infty} \|\sigma_{\varepsilon}\|_p = \|\sigma_{\varepsilon}\|_{\infty} = \max\{\sigma_{\varepsilon}\} = 1 \quad (6.45)$$

Logo,

$$M = \frac{\mu M_0}{\sigma_\varepsilon^2} = \mu M_0 \quad (6.46)$$

7. A curva granulométrica e o decaimento do tamanho dos grãos.

Na engenharia geotécnica é comum classificar os solos a partir de sua distribuição granulométrica, isto é, analisar a composição do solo em função do tamanho (diâmetro) dos grãos que o compõe. Tendo em vista que esta tese foca em solos fundamentalmente granulares, os ensaios de peneira são suficientes para esta classificação.

O ensaio de peneira avalia quanto da massa total do solo passa, ou é retido, por cada peneira com furos de tamanhos distintos. A Figura 17 é um exemplo deste tipo de ensaio. Nota-se que a curva granulométrica, apesar de não ser, pode ser representada por uma curva contínua. Esta propriedade será explorada nessa seção do trabalho.

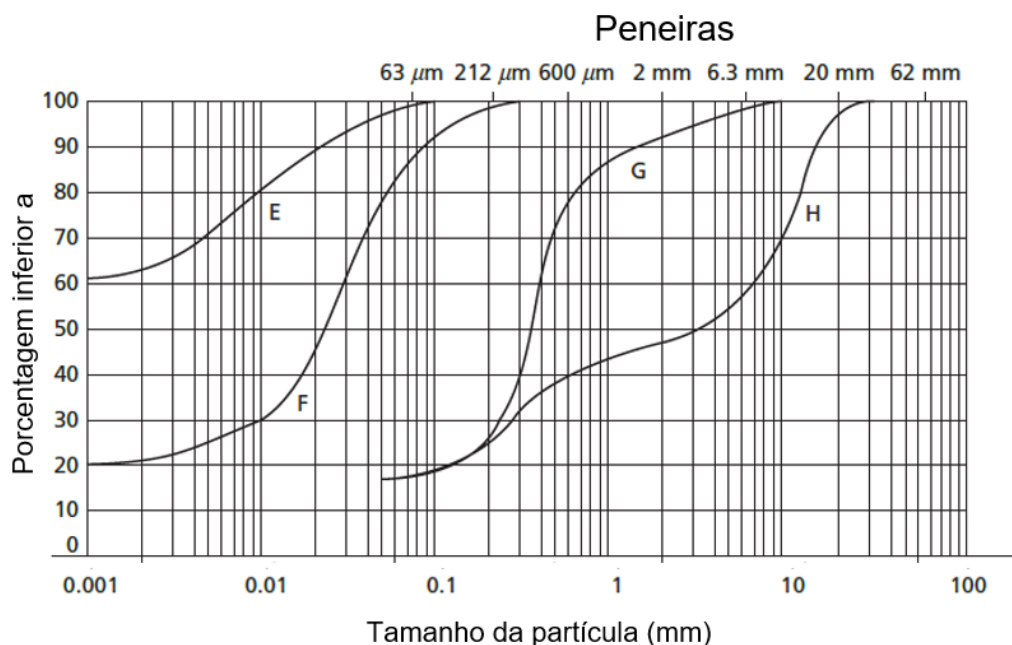


Figura 17. Distribuição granulométrica dos solos (adaptado de Craig, 2012).

Alguns parâmetros podem ser extraídos deste tipo de análise, como o coeficiente de uniformidade (C_u) e o coeficiente de curvatura (C_c), calculados como:

$$C_u = \frac{D_{60}}{D_{10}} \quad (7.1.a)$$

$$C_c = \frac{D_{30}^2}{D_{60} \times D_{10}} \quad (7.1.b)$$

Onde D_{60} , D_{10} e D_{30} indicam que 60%, 10% e 30% dos grãos possuem diâmetro menor do que X mm. A título de exemplo, na curva F da Figura 17, 60% dos grãos possuem diâmetro menor do que 0,03 mm, logo, $D_{60} = 0,03 \text{ mm}$. Ambos os parâmetros C_u e C_c caracterizam o quanto um solo é uniforme, isto é, o quão bem distribuída é sua granulometria. A ABNT-NBR-6502/95 propõe que um solo é considerado uniforme se $C_u < 5$. Já a ASTM-D2487-17 propõe que um solo é uniforme se $C_c > 3$. Com estas definições em mãos, propõe-se o seguinte ansatz que será justificado posteriormente:

Ansatz (decaimento do tamanho dos grãos): a função $a(\varepsilon)$ utilizada na teoria da homogeneização pode ser representada como

$$a(\varepsilon) = e^{-\frac{C_u}{\varepsilon^{C_c}}} \quad (7.2)$$

Onde ε deve ser compreendido como o tamanho do volume elementar representativo. Note que em (50), se $C_c \rightarrow +\infty$, a curva torna-se uma reta vertical com patamares em 0 e 1, como mostrado na Figura 18.

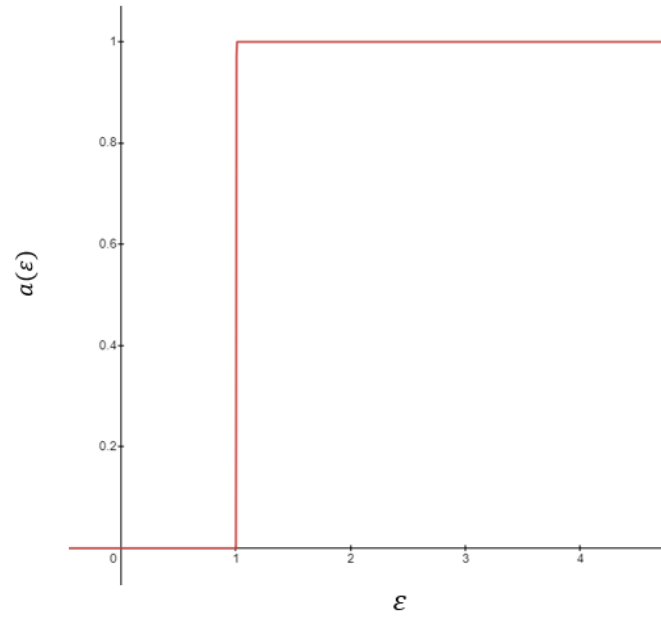


Figura 18. $a(\varepsilon)$ com $C_c \rightarrow +\infty$.

E, analogamente, para valores moderados de C_c :

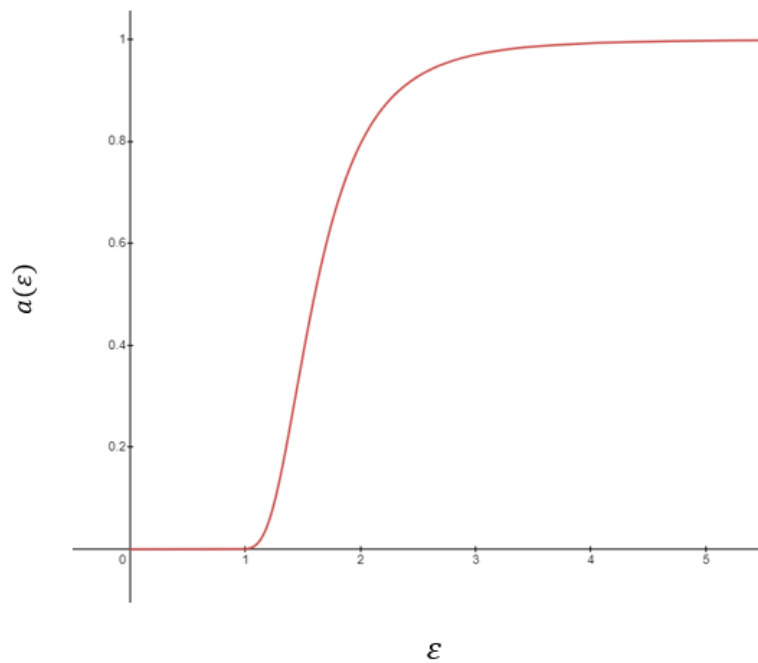


Figura 19. (ε) com $C_c = 5$.

A semelhança geométrica entre esta curva e a curva granulométrica é óbvia aos olhos. Entretanto, as semelhanças são somente em termos da forma e não das informações que estas curvas transmitem. Para gerar um

paralelismo entre as informações, outros elementos da teoria devem ser incrementados na análise.

Aplicando a equação (7.2) diretamente na equação do tamanho crítico dos grãos (6.44), utilizando $p = 2$ como sugerido por Allaire (1991), tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se que:

$$\sigma^2 \rightarrow 0, \quad C_c < 2 \text{ (Darcy)} \quad (7.3.a)$$

$$\sigma^2 \rightarrow +\infty, \quad C_c > 2 \text{ (Navier-Stokes)} \quad (7.3.b)$$

$$\sigma^2 \rightarrow 0 < C_0 < +\infty, \quad C_c = 2 \text{ (Brinkman)} \quad (7.3.c)$$

Cabe agora provar que estes limites fazem algum sentido físico nesta nova abordagem proposta. Antes de provar, pode-se fazer o seguinte análogo geotécnico:

- *Situação 1:* $C_c < 2$ implica um solo bem graduado, tornando possível a observação de grãos para qualquer tamanho de amostra. Logo, os vazios dos grãos maiores são ocupados por grãos menores, aumentando a superfície específica total, por consequência aumentando o atrito do fluido nos sólidos e impossibilitando o desenvolvimento de não linearidades por altas velocidades. Forma-se então a lei de Darcy.

- *Situação 2:* $C_c > 2$ implica um solo uniforme, mal graduado, fazendo com que a partir de um certo tamanho de ε suficientemente pequeno, não se observe mais grãos e sim fluido livre. Os poros tornam-se maiores e a superfície específica total não atinge valores altos. O fluido percola quase que de forma livre, semelhante ao fluxo governado diretamente por Navier-Stokes. O termo “semelhante” aqui se torna necessário pois posteriormente se provará que a presença de grãos irá gerar uma viscosidade aparente para o fluxo.

- *Situação 3:* $C_c = 2$ implica um solo medianamente uniforme. É a distribuição crítica para que não seja nem um fluxo livre, nem um fluxo por difusão tal qual previsto por Darcy. Tem-se um fluxo do tipo Navier-Stokes, mas com a presença de um termo de arrasto, multiplicando a velocidade,

como uma forma de amortecimento gerado pela presença de alguns grãos. Entretanto, os termos não lineares continuam relevantes.

É relevante comentar que, fisicamente, não se toma uma amostra com tamanho $\varepsilon \rightarrow 0$, por menor que seja. Este problema também aparecerá quando o problema for tratado numericamente, já que existe um limite computacional que não permite levar o tamanho do grão para zero. Logo, trataremos os limites apresentados acima como “candidatos a Darcy”, “candidatos a Navier-Stokes” e “candidatos a Brinkman”. Veremos que a depender do tamanho do REV (ε) a diferença entre os limites pode ser tornar imperceptível. Por outro lado, para alguns tamanhos a diferença pode ser fundamental para o entendimento do fenômeno de percolação.

Seja então a equação (46) reescrita como:

$$\sigma(\varepsilon) = \varepsilon \left| \ln \left(\frac{a_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right|^{\frac{1}{2}} \quad (7.4)$$

Os diferentes limites de (7.4) estão representados na Figura 20. Tome por exemplo uma reta vertical passando por $\varepsilon = 0,4$. Para valores abaixo deste tamanho de amostra, as curvas granulométricas de Navier Stokes e Brinkman não apresentam mais grãos com tamanho não nulo. Já a curva granulométrica de Darcy ainda possui grãos. Esta interpretação corrobora com os situações específicas listados acima.

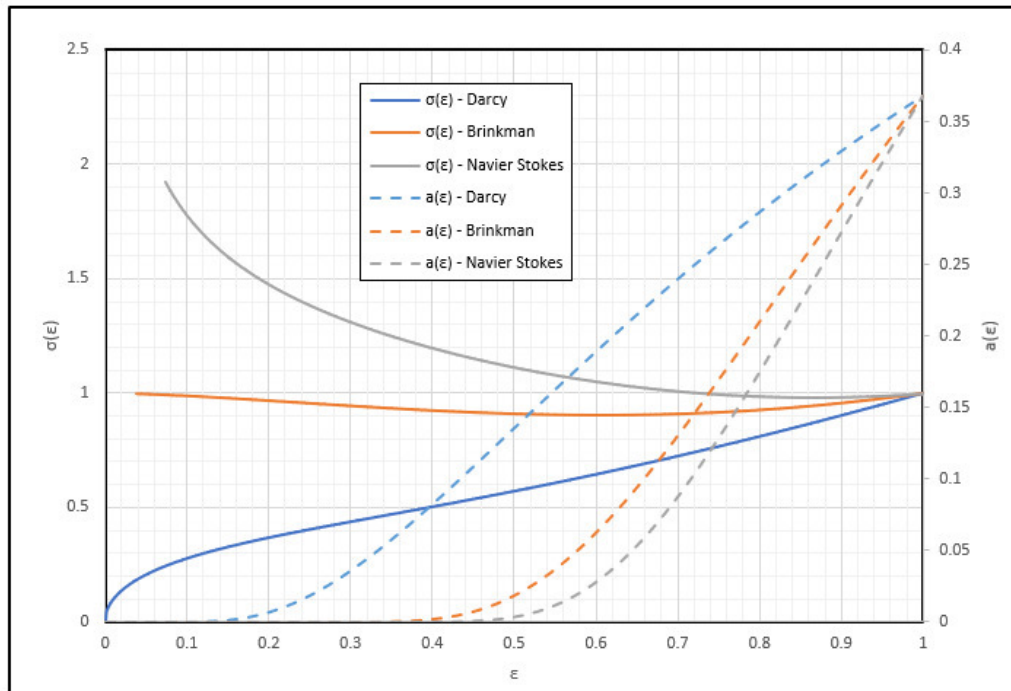


Figura 20. Representação dos diferentes limites para $a(\varepsilon)$ e $\sigma(\varepsilon)$

8. Convergência numérica do problema de homogeneização das equações de Navier Stokes em duas dimensões.

Nesta seção discute-se como as convergências, pautadas e provadas nas duas primeiras seções, se aplicam em um contexto numérico, especificamente com o método dos elementos finitos. Primeiro, deve-se apresentar os parâmetros e configurações numéricas utilizadas para as simulações. Após esta etapa, um roteiro das simulações será explicado e finalmente, os resultados teóricos serão apresentados. Adianta-se nesta breve introdução que, por motivos de limitação numérica, a teoria da homogeneização de Allaire teve que ser modificada em aspectos fundamentais, afetando as hipóteses sobre as funções teste que não poderão mais adotar certos limites. Todas as modificações serão explicadas e provadas ao longo desta parte.

8.1. Os primeiros passos e primeiros obstáculos.

Seja o seguinte problema a ser homogeneizado numericamente pelo método dos elementos finitos convencional (Bubnov-Galerkin):

Encontre $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times L^2(\Omega_\varepsilon)$ soluções do problema (P1-Num)

$$\rho u_\varepsilon(u_\varepsilon \cdot \nabla) + \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon$$

$$\nabla \cdot u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon$$

$$p_\varepsilon = p_{\text{entrada}}, \quad \text{em } \Gamma_1$$

$$p_\varepsilon = p_{\text{saída}}, \quad \text{em } \Gamma_3$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_4 \quad (P1 - Num)$$

De forma que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \rightharpoonup (u, p)$ fracamente, de alguma forma que faça sentido. O domínio Ω_ε é representado pelas figuras Figura 10, Figura 11 e Figura 12. Ou seja, trata-se de um domínio perfurado periodicamente, cujo tamanho dos furos (ou grãos) diminuem de forma a manter a mesma relação entre a área perfurada e a área total. Em termos geotécnicos, diminui-se o tamanho relativo dos grãos em relação a amostra (isso induz que a amostra pode ser maior e não necessariamente o grão ficando menor) e mantém-se a porosidade. Na teoria da análise em espaços abstratos, era possível levar o tamanho do grão, ou do furo, para zero. Isso não causaria a aparição de nenhum artifício estranho ou algum fenômeno físico que invalidasse a teoria. Entretanto, ao lidar com o problema numérico, o tamanho do grão não pode ser levado para zero.

Sabe-se que um fluido perde energia ao percolar através de um meio poroso por atrito com as paredes sólidas. Logo, é sabido que quando maior a superfície específica do grão, maior será o atrito com o fluido e maior será a dissipação de energia ao longo da percolação. Uma maior perda de energia, induz na teoria geotécnica, um menor coeficiente de permeabilidade, se assumir Darcy como lei. A consequência numérica é relevante: uma vez que não se pode desaparecer com os grãos no limite $\varepsilon \rightarrow 0$, a cada simulação com grãos menores, aumenta-se consideravelmente a superfície específica por mais que a porosidade seja mantida. Logo, haverá uma redução da permeabilidade mesmo mantendo a mesma razão entre a área dos furos e a área total do domínio.

Na teoria de Allaire (1991), propõe-se um problema de célula com um único obstáculo, de forma a representar em uma célula unitária, a mesma porosidade do domínio total, uma vez que este é apenas uma repetição infinita e periódica destas células. No tratamento numérico aqui realizado, foi necessário encontrar uma forma de introduzir a superfície específica dos grãos e a porosidade na célula unitária. Sabe-se que ambas as propriedades são relativas ao raio do furo (ou do grão), mas não se pode determinar um tamanho de grão que cumpra os dois quesitos. Então, como fazer?

O problema de célula multigrão

Com o impasse matemático levantado no parágrafo precedente, tornou-se necessário propor uma nova forma de representar a célula unitária, contemplando a porosidade e a superfície específica dos grãos. A proposta é utilizar mais de um grão na célula unitária e que a distribuição destes grãos seja, por sua vez, periódica e simétrica. Para isso, basta resolver o seguinte sistema não linear de duas equações algébricas:

$$1 - n\pi r^2 = \phi \quad (8.1.a)$$

$$\frac{2n}{r} = M_s^{unit} \quad (8.1.b)$$

Onde (8.1.a) é a porosidade para um domínio quadrado de lados unitários e (8.1.b) representa a superfície específica unitária do grão. Esta segunda equação necessita uma mais detalhada explicação.

Suponha que se deseja gerar uma célula unitária com apenas um grão que cumpra os quesitos de porosidade e superfície específica. Suponha também que este problema tenha solução para um certo raio r do grão. Logo, a superfície específica deste grão se calcula, em duas dimensões, como:

$$M_s^{unit} = \frac{A_s}{V_s} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{r} \quad (8.2)$$

Mas foi dito anteriormente que é improvável, a menos de uma coincidência, que um raio r cumpra os quesitos de porosidade e superfície específica. Logo, torna-se natural questionar se é possível dividir este grão em grãos de raio menor tal que uma maior quantidade de grãos cumpra os dois quesitos citados. Isto é, quantos n grãos de raio r são necessários para que os parâmetros ϕ e M_s^{unit} sejam obtidos? O sistema acima possui solução única para $r > 0$, o que é uma excelente notícia. Pode se pensar que o problema se tornou um problema em pelo menos três escalas, onde um domínio maior Ω_ε é composto por células periódicas de tamanho ε e que estas células periódicas sejam por sua vez composta por células ainda

menores. Há então uma certa relação com a teoria da homogeneização baseada na expansão assintótica em potências de ε .

Uma vez o sistema de equações (8.1.a) e (8.1.b) resolvido, gera-se uma célula com mais de um grão, tal qual representada pela Figura 21.

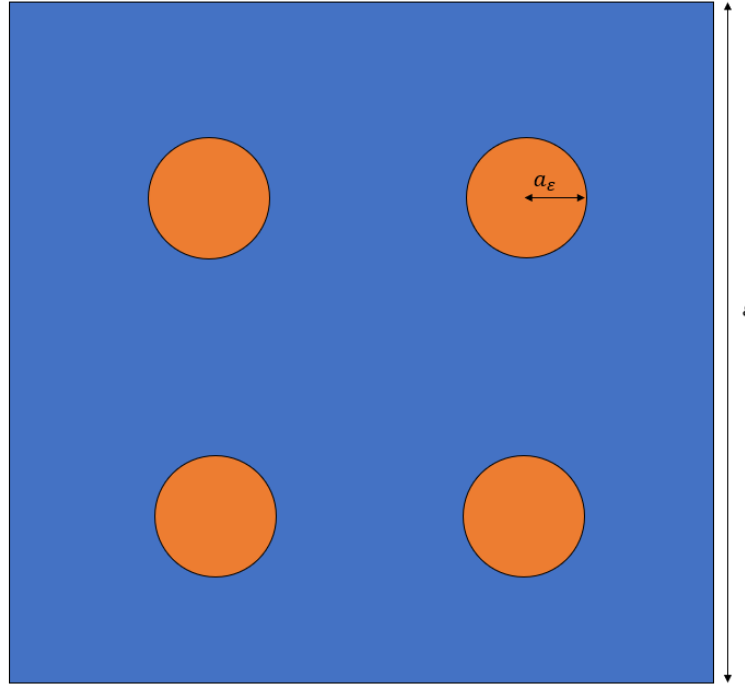


Figura 21. Representação da célula unitária com mais de um grão.

Na célula unitária, resolve-se o seguinte problema:

Encontre (w, q) soluções do problema (P1-Num)

$$\rho w(w \cdot \nabla) + \nabla q - \Delta w = f, \quad \text{em } \Omega_{unit}$$

$$\nabla \cdot w = 0, \quad \text{em } \Omega_{unit}$$

$$w = w_0, \quad \text{em } \Gamma_1$$

$$w = w_0, \quad \text{em } \Gamma_3$$

$$n^T \cdot (2\mu \mathbb{D}(w) - qI) \cdot t - \beta w \cdot t = 0, \quad \text{em } \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_4 \quad (P_{cel} - Num)$$

Em algum espaço funcional adequado ao espaço dos elementos finitos construído. A discussão sobre esses espaços está feita em outra seção (4.2.1). É notável que (w, q) são análogos aos campos de velocidade e pressão mencionados na escala global Ω_ε . O domínio no qual se deseja

resolver o problema $(P_{cel} - Num)$ está graficamente representado na Figura 22. Recapitula-se aqui, que $M_0 = \int_{\Omega_{unit}} \nabla w : \nabla w \, d\Omega_{unit}$, segundo Alaire (1991). A presente, será discutido como resolver $(P_{cel} - Num)$ a partir do método dos elementos finitos, identificar os espaços funcionais onde vivem estas soluções e trazer à tona os problemas que surgem ao lidar com limites infinitos e nulos numericamente.

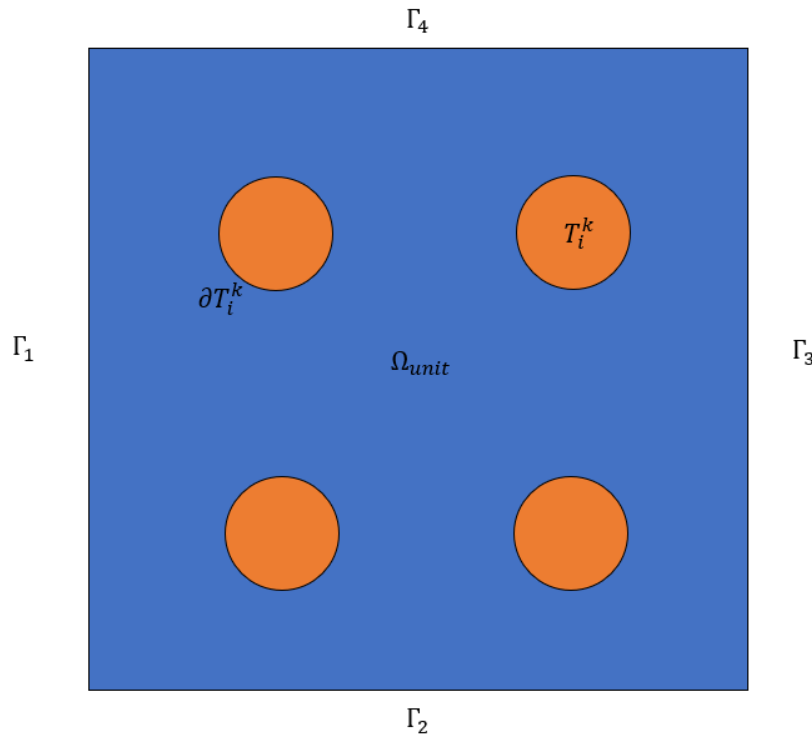


Figura 22. Domínio do problema $P_{cel} - Num$.

8.2. A homogeneização via simulação numérica direta (DNS).

O objetivo desta subseção é investigar a convergência, em qualquer que seja seu sentido, de um processo de homogeneização por simulação numérica direta, isto é, diminuindo gradativamente o tamanho dos grãos em relação ao domínio, aumentando sua quantidade para manter a porosidade e respeitando uma função específica de decaimento do tamanho dos grãos. Tome por exemplo o caso de Darcy. O tamanho dos grãos irá diminuir mais lentamente do que o tamanho do próprio domínio. Com isso, haverá um momento em que o domínio não poderá mais diminuir

pois não comportará todos os grãos necessários para manter os parâmetros de porosidade determinados previamente. O mesmo será realizado para grãos que decaem muito mais rápido do que o domínio (limite em Navier-Stokes) e grãos que decaem de forma crítica (limite em Brinkman).

8.2.1. Construindo o espaço dos elementos finitos.

Seja o problema (P1-Num) o que se deseja resolver pelo método dos elementos finitos convencionais. As equações de conservação de quantidade de movimento podem ser escritas de forma variacional tal que:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \rho u_\varepsilon (u_\varepsilon \cdot \nabla) \cdot \varphi \, d\Omega_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p_\varepsilon \cdot \varphi \, d\Omega_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} \mu \Delta u_\varepsilon \cdot \varphi \, d\Omega_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \varphi \, d\Omega_\varepsilon \quad (8.3.a)$$

Onde, integrando por partes:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} \rho u_\varepsilon (u_\varepsilon \cdot \nabla) \cdot \varphi \, d\Omega_\varepsilon - \int_{\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \nabla \cdot \varphi \, d\Omega_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \mu \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, d\Omega_\varepsilon \\ & + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} p_\varepsilon \varphi \cdot n \, dS + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \mu \nabla u_\varepsilon \cdot \varphi \cdot n \, dS = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \varphi \, d\Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (8.3.b)$$

Observa-se que o campo de velocidades necessita apenas ser integrável uma vez, no sentido fraco, e que o campo de pressão seja apenas integrável para que (8.3.b) faça sentido. Em outras palavras, $u_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ e $p_\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, pelo menos. Seja $V \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$ um subespaço linear que herda as propriedades de completude e estabilidade do Hilbert no qual está incluso. Tendo V dimensão finita, usufruindo das propriedades de projeção ortogonal em espaços de Hilbert já mencionadas nesse trabalho, propõe-se um elemento de V :

$$u'_\varepsilon = \sum_{n=0}^N U_n \Phi_n, \quad N < +\infty \quad (8.4)$$

Com $U_n \in \mathbb{R}^N$ e $\Phi_n \in V \subset H^1(\Omega_\varepsilon)$. Similarmente, há um elemento de V :

$$p'_\varepsilon = \sum_{n=0}^M P_n \Phi_n, \quad M < N \quad (8.5)$$

Com $P_n \in \mathbb{R}^M$. Pela ortogonalidade de V em relação à $H^1(\Omega_\varepsilon)$, sabe-se que:

$$\|u'_\varepsilon - u_\varepsilon\|_2 + \|p'_\varepsilon - p_\varepsilon\| \leq \|z - u_\varepsilon\|_2 + \|w - p_\varepsilon\| \quad (8.6)$$

$$\forall z, w \in V$$

Isto é, u'_ε e p'_ε minimizam o erro da aproximação da solução.

Na ótica da formulação convencional dos elementos finitos, utiliza-se funções polinomiais para Φ_n .

Já a equação da continuidade pode ser formulada em sua forma variacional como:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla \cdot u_\varepsilon) \Psi \, d\Omega_\varepsilon = 0 \quad (8.7)$$

Onde $\Psi \in E$, sendo $E \subset L^2(\Omega_\varepsilon)$.

Para a simulação numérica direta, utilizou-se então uma função polinomial (polinômio de Lagrange) de primeira ordem para Φ_n e uma função constante, meramente contínua, para Ψ_n . Em termos da teoria dos elementos finitos, escolheu-se elementos triangulares do tipo T2, com as velocidades e derivadas calculadas nos vértices, e pontos centrais em cada lado das arestas para cálculo das pressões. A representação gráfica deste elemento está na Figura 24.

A formulação assumiu que o tamanho característico dos elementos fosse 1% do tamanho do domínio, gerando cerca de 10^4 elementos em um domínio quadrado de lados unitários. Nas proximidades dos furos a malha foi refinada para 1% do perímetro do furo (Figura 23). A não linearidade do termo convectivo foi tratada com o método iterativo de Newton-Raphson e nenhum esquema numérico em diferenças finitas foi utilizado para a passagem do tempo visto que a análise se fez de forma estacionária.

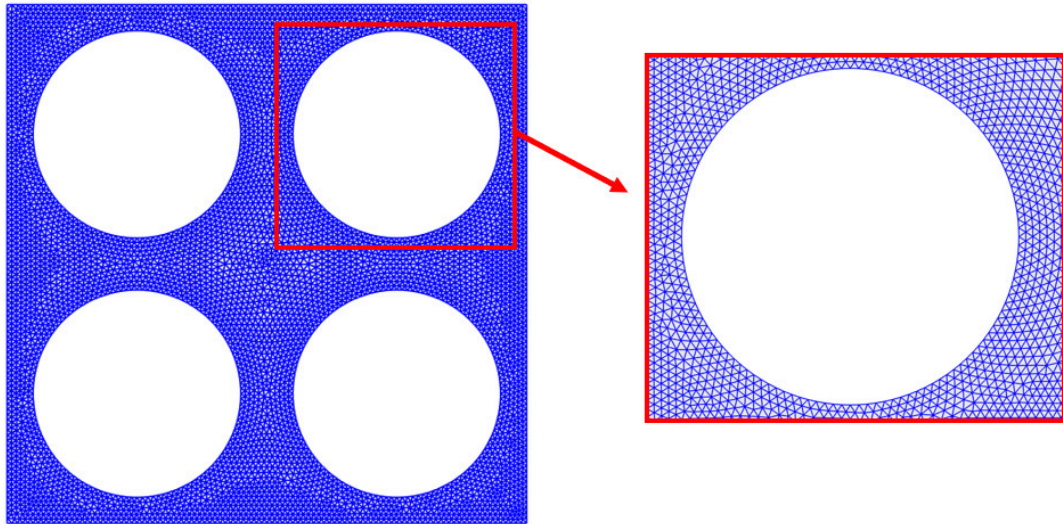


Figura 23. Discretização do espaço em elementos finitos triangulares tipo T2.

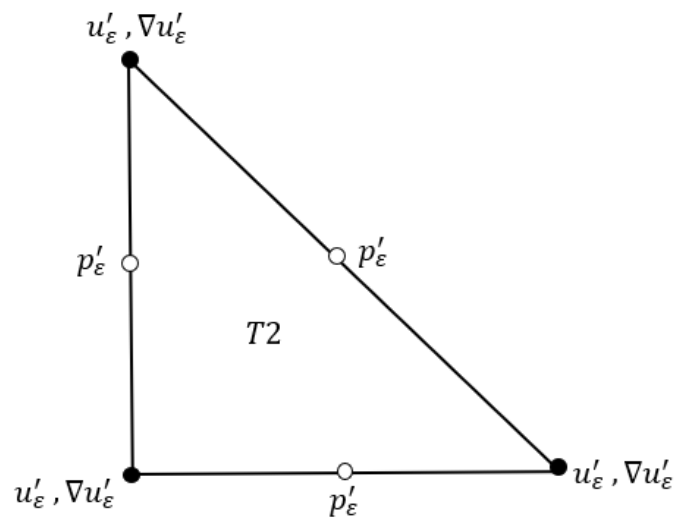


Figura 24. Elemento do tipo T2

Estimativa de erro e a influência da não-linearidade convectiva: uma perturbação compacta.

Para estimar o erro devido a aproximação da solução, necessita-se de um teorema (Brenner & Scott, 2008):

Teorema (*estimativa do erro*): Suponha que a relação em (8.6) seja verdadeira. Seja $u \in H^k(\Omega)$ e também $u \in H^s(\Omega)$. Seja também $m < s < k$. Então $\forall u \in H^s(\Omega)$:

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{s-m} \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

Onde $u_h \in M \subset H^m(\Omega)$.

A prova deste teorema pode ser obtida em (Brenner & Scott, 2008). O teorema se aplica também a espaços de Sobolev e permite que se obtenha:

$$\|u - u_h\|_{W_p^1(\Omega)} = o(h^{s-1}) \quad (8.8)$$

Aplicando ao problema a ser resolvido neste trabalho, obtém-se:

$$\|u_\varepsilon - u'_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(h^{2-1}) \quad (8.9.a)$$

Visto que $u_\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon)$. Assumindo um domínio quadrado de lados unitários e uma malha com tamanho característico de 1% do tamanho do domínio:

$$\|u_\varepsilon - u'_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(0,01^1) \quad (8.9.b)$$

Ou seja, as velocidades calculadas possuem um erro limitado por cima em 1% do valor real.

Notou-se após a execução de simulações numéricas diretas com e sem o termo não linear convectivo que a diferença entre os campos de velocidades encontrados com e sem este termo são irrelevantes para fins desta análise. Apesar de ser mantido nas simulações posteriores pois se deseja observar as não linearidades na lei de Darcy, existe uma justificativa teórica para ignorar o termo convectivo em algumas situações, como por exemplo, no problema de célula.

O termo convectivo é classificado como uma perturbação compacta. Em outros termos, o operador:

$$Tu'_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} u'_\varepsilon (u'_\varepsilon \cdot \nabla) \cdot \Phi \, d\Omega_\varepsilon \quad (8.10)$$

É dito compacto pois pertence ao espaço dos operadores lineares de $V \subset H_1(\Omega_\varepsilon)$. O espaço V é compacto e logo todo operador linear em seu dual também é compacto. Em termos práticos, para campos de baixas velocidades, o termo em questão não afeta a estrutura da solução numérica em seus valores ($u'_\varepsilon{}^2 \sim 0$) tampouco sua topologia.

8.3. Roteiro das simulações

Como mencionado anteriormente, as simulações numéricas diretas consistem em resolver (P1-Num) para domínios perfurados periodicamente, cujo tamanho dos furos (grãos) diminui segundo alguma função de decaimento, buscando um limite entre os três possíveis: Darcy, Brinkman ou Navier-Stokes.

Primeiramente, constrói-se um domínio quadrado de dimensões unitárias de 1m x 1m. Escolhe-se em seguida qual será a função de decaimento do tamanho dos grãos. Adote, por exemplo a equação dada pelo ansatz (7.2), tal que (6.44) tenda a zero para $\varepsilon \rightarrow 0$, com $p = 2$. Tome um valor inicial de $\varepsilon < 1$ (menor que o domínio todo) e calcule o tamanho dos grãos. Em seguida, escolha uma porosidade ϕ e usando a relação (8.1.a), determine quantos grãos serão necessários para cumprir a porosidade desejada. Note que, nesta abordagem, a superfície específica total não é controlada.

Gera-se uma malha com tamanho característico de 1% do tamanho do domínio, assim como discretiza-se o perímetro do furo com 1% de seu tamanho para refinar a malha na vizinhança do furo. Determina-se os parâmetros $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 0,001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Utilizando a Figura 10 como referência, impõe-se as seguintes condições de fronteira:

$$u_\varepsilon = 0, \text{ em } \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_4$$

$$p_\varepsilon = 0 \text{ Pa}, \text{ em } \Gamma_3$$

$$p_\varepsilon = p_{0_\varepsilon}, \text{ em } \Gamma_1$$

Onde aumenta-se gradativamente o valor de p_{0_ε} para se investigar a evolução do campo de velocidades com a variação do gradiente hidráulico. Como a velocidade varia pontualmente, determinou-se que se utilizaria a velocidade média no domínio como referência, isto é:

$$\overline{u_\varepsilon} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon d\Omega_\varepsilon \quad (8.11)$$

Onde, para o caso bidimensional, $|\Omega|$ é simplesmente a área do domínio sem excluir os furos. Assumindo que o fluxo será fundamentalmente horizontal, o gradiente hidráulico é escrito de forma simplificada como:

$$i = \nabla p_\varepsilon \cong \frac{1}{L} p_\varepsilon \cong \frac{p_{0_\varepsilon}}{1} = p_{0_\varepsilon} \quad (8.12)$$

Logo, busca-se algo da forma:

$$\overline{u_\varepsilon} = Ki \quad (8.13)$$

A simulação é feita, calcula-se (8.11) e (8.12), em seguida determina-se o valor de K a partir de (8.13). Aumenta-se o valor de p_{0_ε} e refaz-se o processo até que se construa uma curva da relação entre a velocidade média e o gradiente hidráulico. Um exemplo deste processo é dado pela Tabela 2 e o gráfico gerado está representado na Figura 25. Para este exemplo, foi escolhida uma porosidade de $\phi = X$ e o tamanho dos grãos decai com razão $a_\varepsilon = 0,25\sqrt{\varepsilon}$. Assumiu-se um valor inicial de $\varepsilon_0 = 1/3$. Em seguida, refez-se a mesma série de operações para $\varepsilon = \varepsilon_0/2$ e $\varepsilon_0/4$. A Tabela 2 apresenta os resultados para $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Tabela 2. Relação entre velocidade e gradiente hidráulico para $\varepsilon =$

1/3

p_0 (Pa)	dp (Pa/m)	L (m)	i (Pa/m)	u (m/s)	k (m ² /Pa.s)
1,00E-15	1,00E-15	1	1,00E-15	8,31E-16	0,83086
5,00E-15	5,00E-15	1	5,00E-15	4,15E-15	0,83086
1,00E-14	1,00E-14	1	1,00E-14	8,31E-15	0,83086
5,00E-14	5,00E-14	1	5,00E-14	4,15E-14	0,83086
1,00E-13	1,00E-13	1	1,00E-13	8,31E-14	0,83086
5,00E-13	5,00E-13	1	5,00E-13	4,15E-13	0,83086
1,00E-12	1,00E-12	1	1,00E-12	8,31E-13	0,83086
5,00E-12	5,00E-12	1	5,00E-12	4,15E-12	0,83086
1,00E-11	1,00E-11	1	1,00E-11	8,31E-12	0,83086
5,00E-11	5,00E-11	1	5,00E-11	4,15E-11	0,83086
1,00E-10	1,00E-10	1	1,00E-10	8,31E-11	0,83086
1,00E-09	1,00E-09	1	1,00E-09	8,31E-10	0,83086
1,00E-08	1,00E-08	1	1,00E-08	8,31E-09	0,83086
1,00E-07	1,00E-07	1	1,00E-07	8,31E-08	0,83085
1,00E-06	0,000001	1	1E-06	8,31E-07	0,83079
1,00E-05	0,00001	1	0,00001	8,25E-06	0,82492
1,00E-04	0,0001	1	0,0001	6,59E-05	0,65919
1,00E-03	0,001	1	0,001	0,00033	0,32842
1,00E-02	0,01	1	0,01	0,00877	0,87651

Após realizar as simulações para os demais tamanhos de grãos, obteve-se o gráfico representado pela Figura 25.

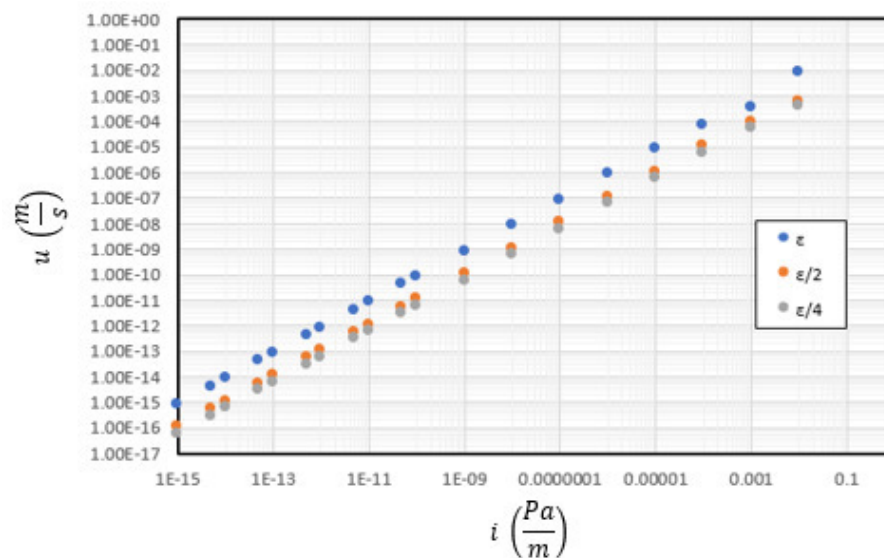


Figura 25. Representação gráfica da relação entre velocidade e gradiente hidráulico.

Note que a distância entre as curvas tende a diminuir à medida que o tamanho dos grãos diminui, indicando uma possível convergência para um valor estável de K . A Figura 26 representa a variação de K em função de ε . A variação mostrou-se ser de caráter exponencial, com $R^2 = 0,9985$.

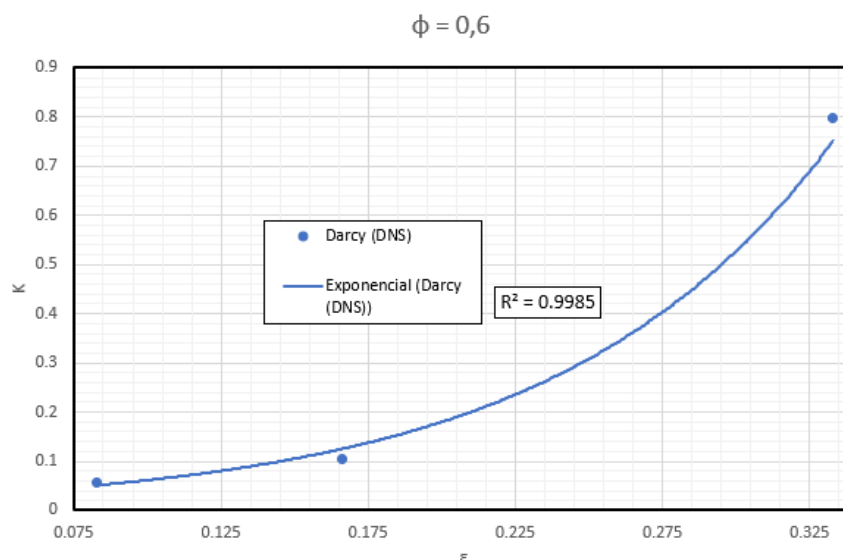


Figura 26. Variação de K em função de ε para $\phi = 0,6$.

As análises se limitaram a estes três tamanhos de grão por motivos de capacidade numérica. Uma quantidade maior de grãos, com refinamento de malha em seu perímetro, geraria uma malha com uma quantidade de elementos além do tolerável pela máquina. No mais, os erros implícitos de arredondamento do MatLab (por floating point) começariam a se tornar tão relevantes quanto os erros da aproximação numérica por si mesmo. Na próxima seção deste trabalho, serão apresentados os resultados obtidos para diversas porosidades e funções de decaimento do tamanho dos grãos.

8.3.1. Resultados das DNS

Para estas simulações, não foi utilizada uma função de decaimento do tipo (50) pois a quantidade de grãos necessária para cumprir o quesito da porosidade aumentaria exponencialmente, atingindo rapidamente

valores que estão fora da capacidade numérica da máquina disponível. Para tal, as exponenciais foram aproximadas por polinômios de Taylor de segunda ordem. Entretanto, para fins de observação teórica da convergência, basta que as funções possuam uma taxa de decaimento menor ou maior do que a diminuição do tamanho de ε , já que efetivamente não se levará o limite para zero.

A Figura 27 apresenta os resultados de três simulações com $\phi = 0,3$ e função de decaimento dos grãos com limite em Navier-Stokes. O valor médio de K obtido para cada tamanho de grão parece evoluir de forma exponencial até um limite estável. É importante ressaltar que o limite apenas seria encontrado de fato caso fosse possível levar o tamanho do domínio para zero.

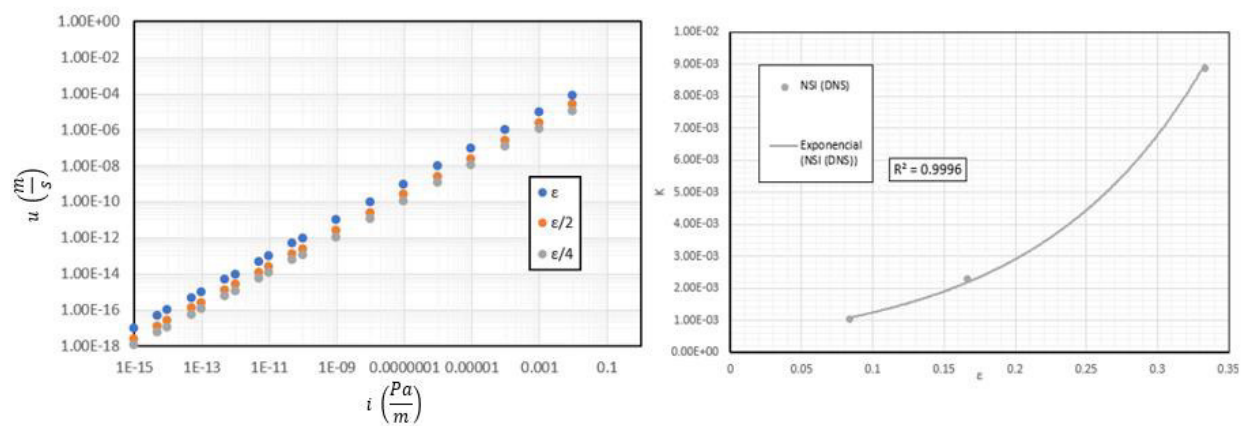


Figura 27. $\sigma(\varepsilon) \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,3$

Já no caso da Figura 28, com mesma porosidade de $\phi = 0,3$ porém com tamanho de grãos evoluindo para um limite em Darcy, a velocidade de convergência da permeabilidade está entre o linear e o quadrático. Entretanto, um ajuste de curva exponencial foi imposto para que se compare com os demais casos. De toda forma, nota-se uma evolução monotônica até um suposto limite, assim como no caso anterior.

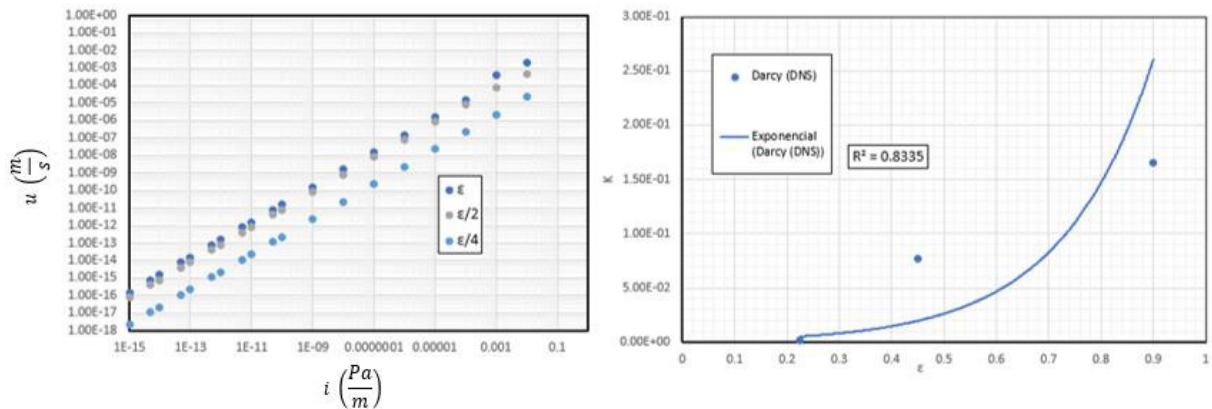


Figura 28. $\sigma(\epsilon) \rightarrow 0$, $\phi = 0,3$

A Figura 29 mostra a evolução do coeficiente de permeabilidade para uma função com limite em Navier-Stokes e com porosidade $\phi = 0,4$. A aproximação exponencial para a velocidade de convergência de $K(\epsilon)$ é praticamente exata, com $R^2 = 0,9999$.

O caso apresentado pela Figura 30 é interessante. Perceba que a curva da relação entre velocidade média e gradiente hidráulico para o menor tamanho de grão encontra-se entre duas curvas cujo tamanho dos grãos era maior. No gráfico da convergência de K é possível observar esta tendência com maior clareza. Note que o valor de K não converge monotonicamente para um valor limite, mas sim, oscila em torno do suposto valor limite. À primeira vista, tal comportamento pode parecer inusitado ou até mesmo errado. Mas cabe aqui lembrar que na teoria da homogeneização, nos primeiros trabalhos de Tartar e Allaire, as funções teste eram ditas “funções oscilatórias”, uma vez que estas variavam rapidamente e qualquer modificação nos parâmetros de base poderiam gerar resultados consideravelmente diferentes. Posteriormente, se discutirá se o limite teórico previsto pela teoria da homogeneização confirma a hipótese de oscilação em torno do limite ou não.

Da Figura 31 à Figura 38, para diversas porosidades, nota-se o mesmo comportamento de convergência para uma permeabilidade limite, com velocidade exponencial e com $R^2 > 0,95$. Apenas as Figura 30, Figura 32 e Figura 38 mostram novamente um suposto comportamento oscilatório na convergência para uma permeabilidade limite. O próximo passo é

natural: investigar se estes limites condizem com os limites teóricos previstos pela teoria da homogeneização de Allaire (1991) com pequenas modificações na abordagem numérica do problema.

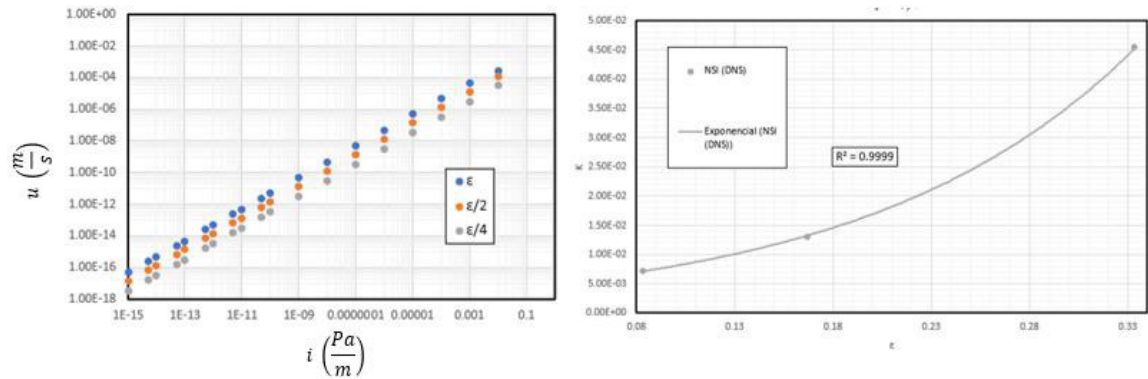


Figura 29. $\sigma(\epsilon) \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,4$

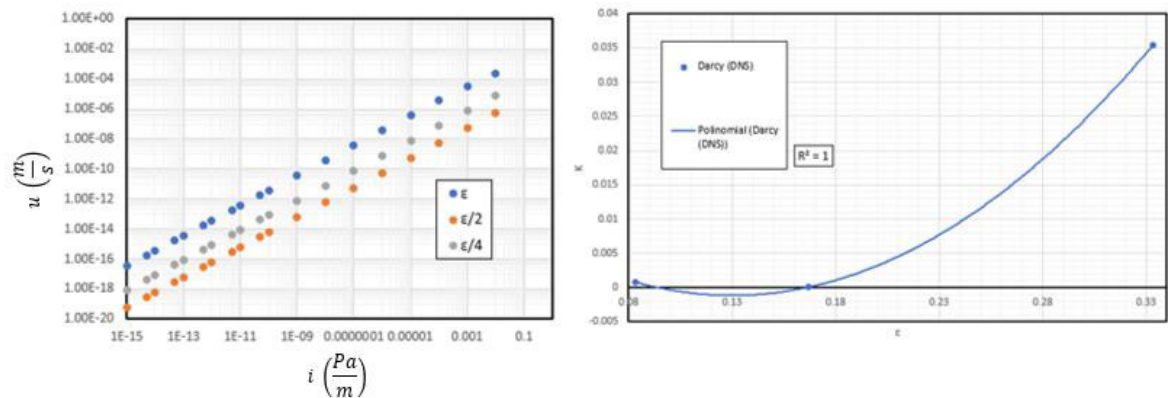


Figura 30. $\sigma(\epsilon) \rightarrow 0$, $\phi = 0,4$

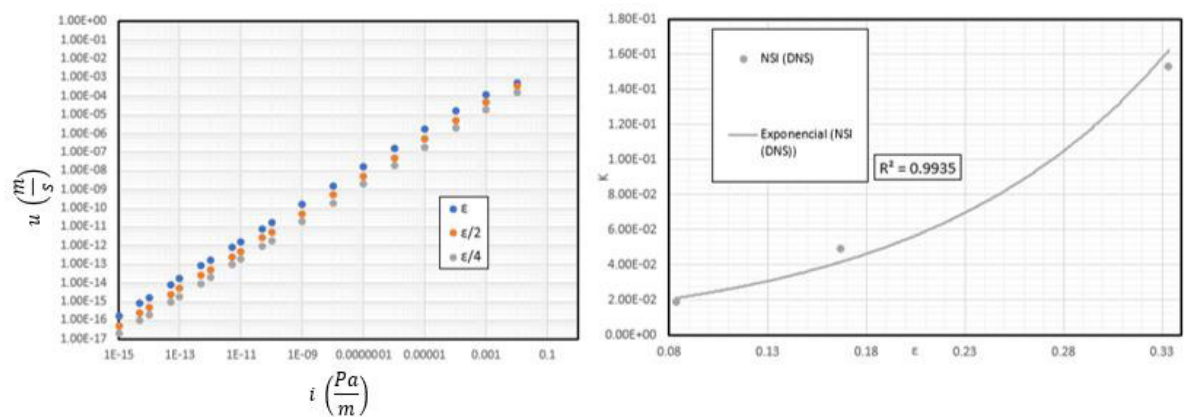


Figura 31. $\sigma(\epsilon) \rightarrow +\infty$, $\phi = 0,5$

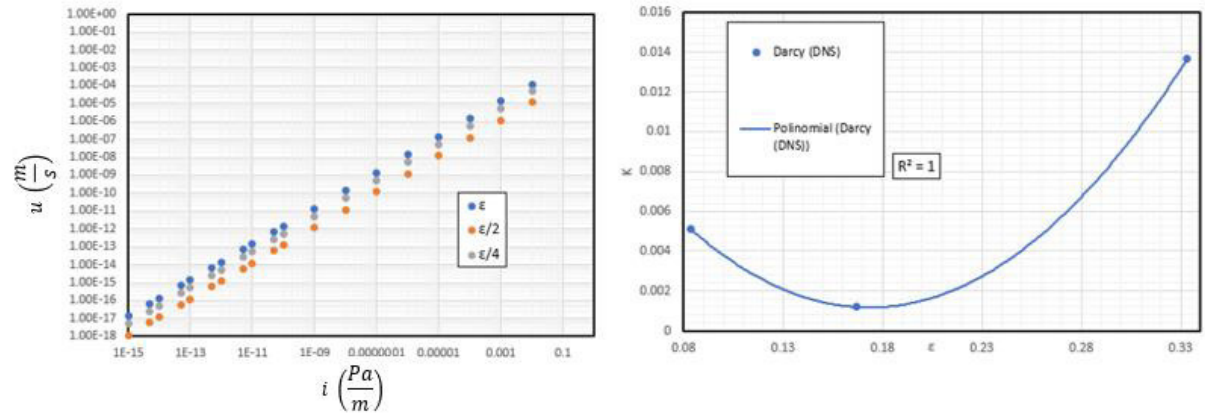


Figura 32. $\sigma(\epsilon) \rightarrow 0, \phi = 0,5$

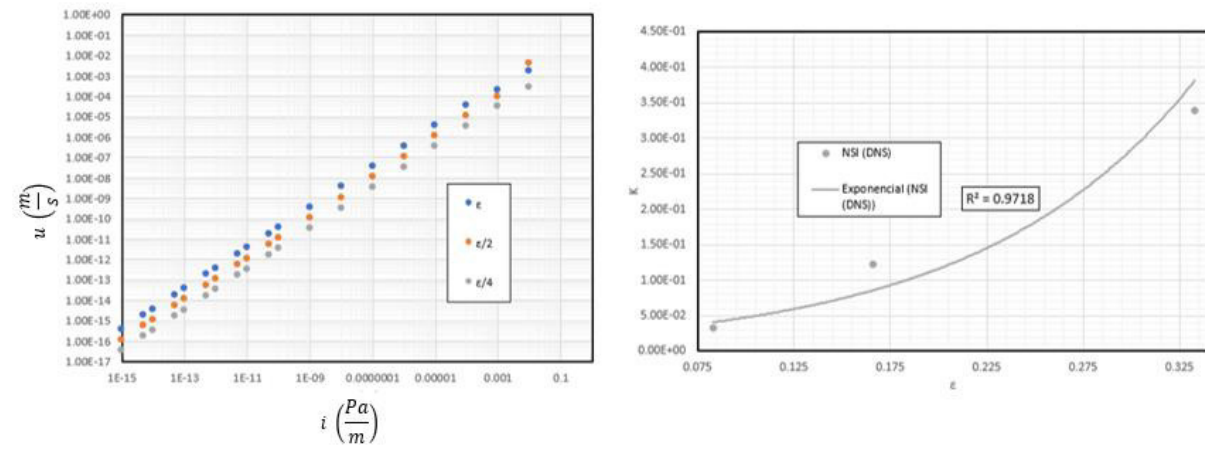


Figura 33. $\sigma(\epsilon) \rightarrow +\infty, \phi = 0,6$

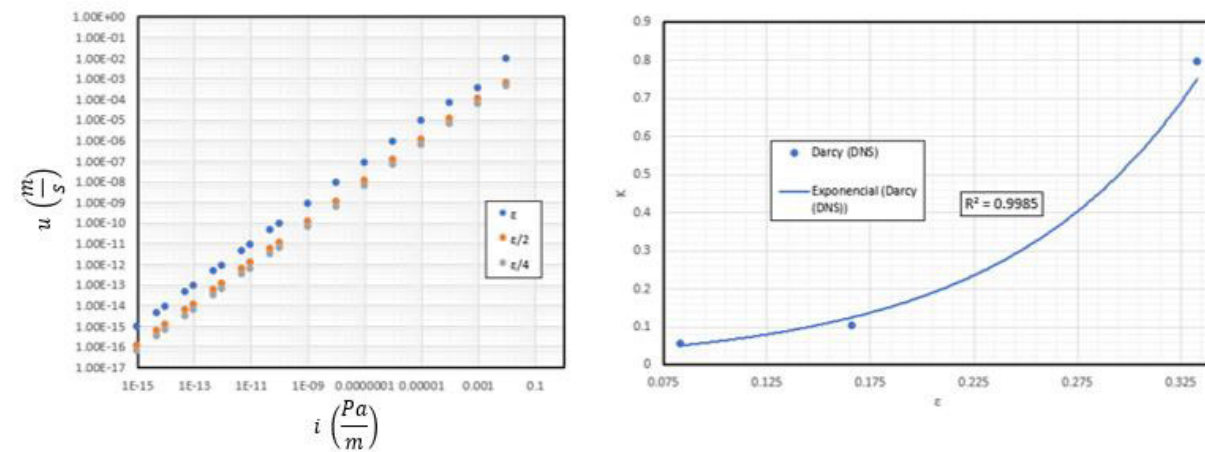


Figura 34. $\sigma(\epsilon) \rightarrow 0, \phi = 0,6$

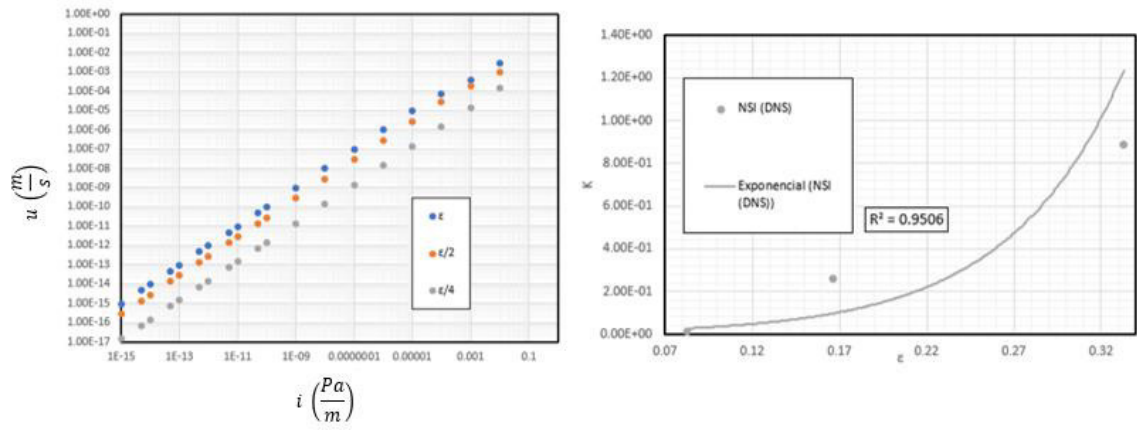


Figura 35. $\sigma(\epsilon) \rightarrow +\infty, \phi = 0,7$

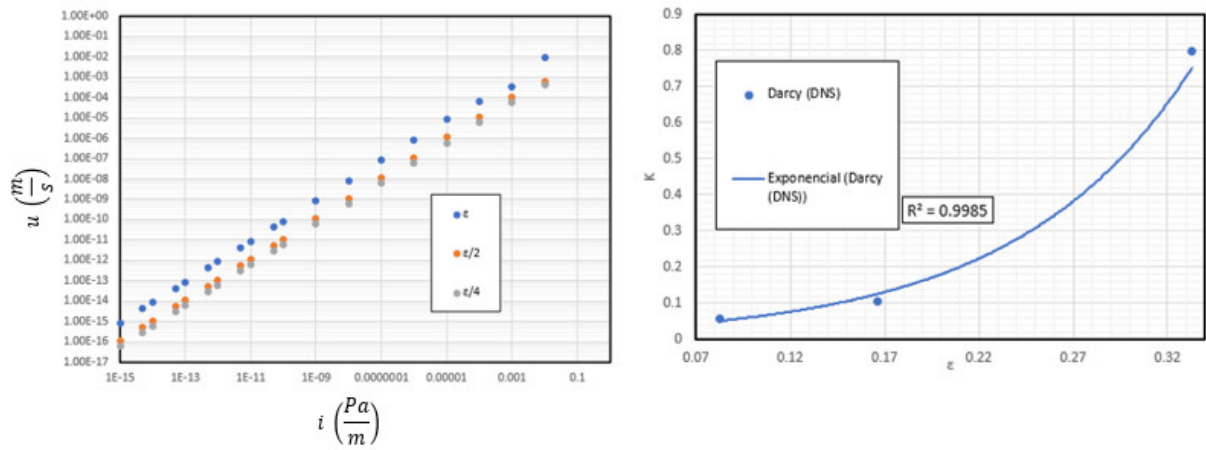


Figura 36. $\sigma(\epsilon) \rightarrow 0, \phi = 0,7$

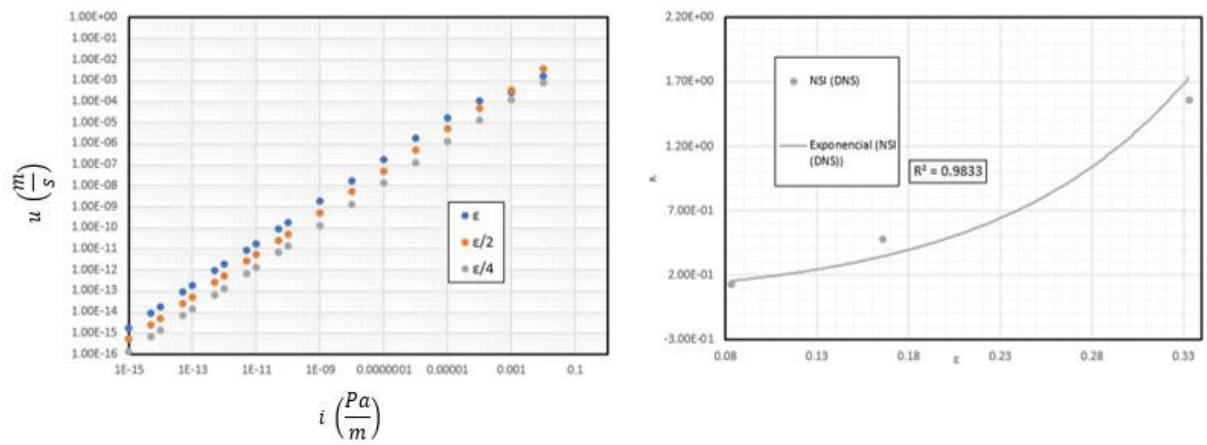


Figura 37. $\sigma(\epsilon) \rightarrow +\infty, \phi = 0,8$

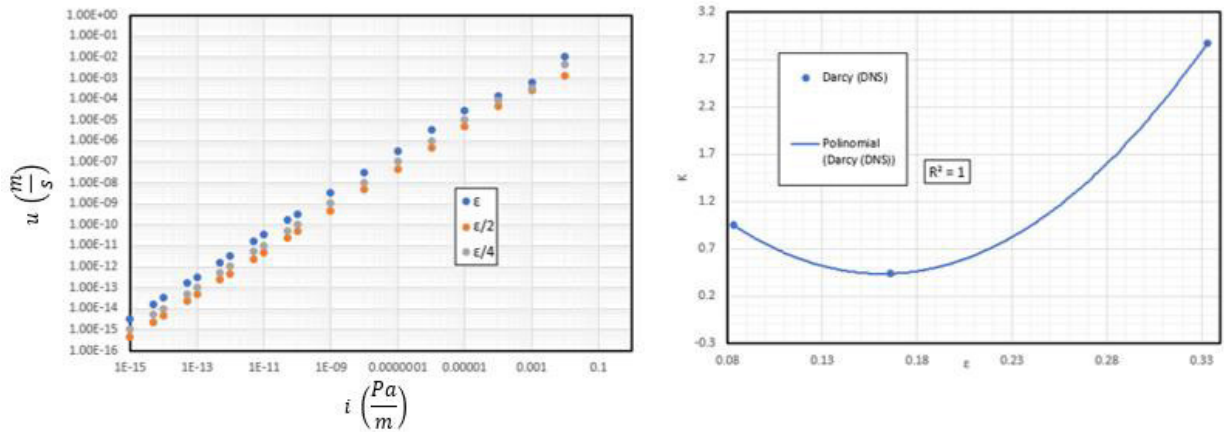


Figura 38. $\sigma(\epsilon) \rightarrow 0$, $\phi = 0,8$

8.4. A homogeneização utilizando o problema de célula multigrão: o caso de Darcy.

A comparação do limite previsto por teoria e o limite encontrado por simulação numérica direta deve começar pelo caso do limite em Darcy. Não por este ser mais simples, pois não é, mas por ser o limite natural esperado no estudo de fluxo através de meios porosos. Assuma uma função de decaimento dos tamanhos dos grãos $a(\epsilon)$ que faça $\sigma(\epsilon) \rightarrow 0$ para $\epsilon \rightarrow 0$. Como reforçado previamente, por motivos de limitação numérica, não se pode levar ϵ para seu limite em zero. Então, como tratar o problema? Para fins de exemplo e para tornar o que será comentado aqui menos abstrato, assuma o caso apresentado pela Figura 34, isto é, $\phi = 0,6$ e $\sigma(\epsilon) \rightarrow 0$.

Primeiramente, deve-se calcular a quantidade de grãos o raio destes para que seja criada a célula unitária multigrãos. Assumindo que as simulações numéricas diretas conseguiram ir até $\epsilon = 0,0833m$ e que a função que define o tamanho dos grãos seja $a(\epsilon) = 0,2\sqrt{\epsilon}$ e $\sigma(\epsilon) = \epsilon \left| \ln \left(\frac{a(\epsilon)}{\epsilon} \right) \right|^{\frac{1}{2}}$, tem-se:

$$a(\epsilon) = a(0,0833) = 0,0577m$$

Sabendo que $\phi = 0,6$, então o sistema não linear a ser resolvido se torna:

$$1 - n\pi r^2 = 0,6 \quad (8.1.a)^*$$

$$\frac{2n}{r} = \frac{2}{0,0577} \quad (8.1.b)^*$$

Resultando em $n = 3,369$ e $r = 0,1944$. Como não se pode obter um número não inteiro de grãos, assume-se o valor do inteiro mais próximo, logo, $n = 3$. Constrói-se então uma célula unitária com três grãos de $0,1944\text{m}$ de raio, onde se resolve o problema especificado pelas equações de $(P_{cel} - Num)$ e suas devidas condições de fronteira. Uma vez com a solução do campo de velocidades em mãos, calcula-se o M_0 , dado por:

$$M_0 = \int_{\Omega_{unit}} \nabla w : \nabla w \, d\Omega_{unit} \quad (8.14)$$

Onde o produto tensorial do integrando, em duas dimensões, se escreve forma extensa como:

$$M_0 = \int_{\Omega_{unit}} (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 + (\partial_x v)^2 + (\partial_y v)^2 \, d\Omega_{unit} \quad (8.15)$$

Onde $M_0 \in \mathbb{R}$. Lembra-se aqui que o produto tensorial $A:B$ para $\dim(A) = m$ e $\dim(B) = n$ possui dimensão $\dim(A : B) = m + n - 4$. Logo, para o caso bidimensional, M_0 é um escalar.

O valor encontrado foi de $M_0 = 46,40$. Sabe-se que:

$$K = \left(\frac{\mu M_0}{\sigma^2} \right)^{-1} \quad (8.16)$$

Logo, já se conhece $\mu M_0 = 0,001 \times 46,40 = 0,04640$. Basta então encontrar o valor de $\sigma(\varepsilon)$ retirado diretamente da curva:

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma(0,0833) = 0,0833 \left| \ln \left(\frac{a(0,0833)}{0,0833} \right) \right|^{\frac{1}{2}} = 0,05045$$

Logo

$$\sigma^2 = 0,05045^2 = 0,00254$$

Então, aplicando em (66):

$$K = \left(\frac{0,04640}{0,00254} \right)^{-1} = 0,0549$$

O valor médio encontrado pela simulação numérica direta foi de 0,0604. Colocando o K encontrado pela teoria da homogeneização modificada como limite, percebe-se que a convergência para um limite observada anteriormente se confirma e que, felizmente, este limite é previsto pela teoria modificada de Allaire (1991) para fins numéricos. A representação gráfica deste resultado se encontra na Figura 39.

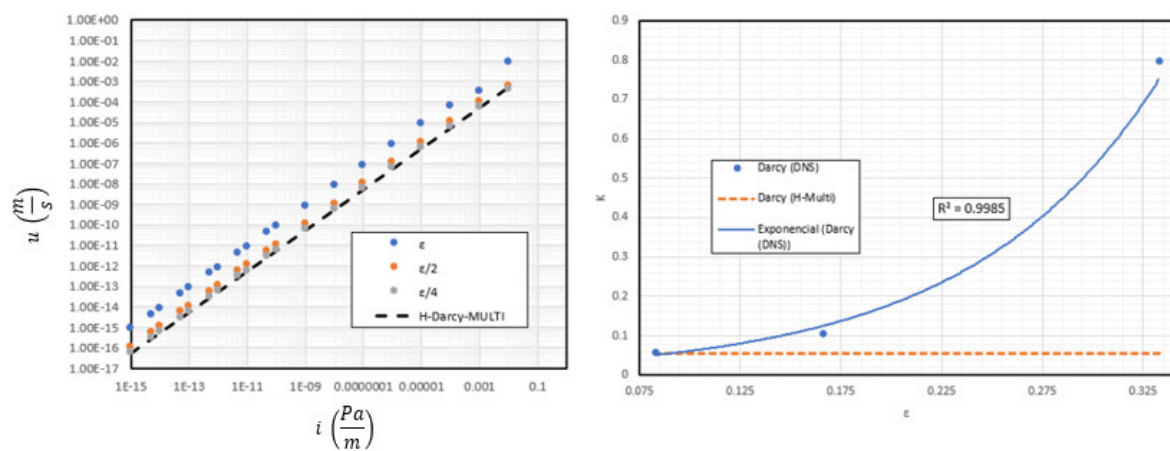


Figura 39. Convergência em relação a teoria da homogeneização para $\phi = 0,6$, $a(\epsilon) = 0,2\sqrt{\epsilon}$.

Outros demais resultados para limites em Darcy foram encontrados para diversas porosidades. Estes resultados estão apresentados nas figuras abaixo que vão da Figura 40 a Figura 44.

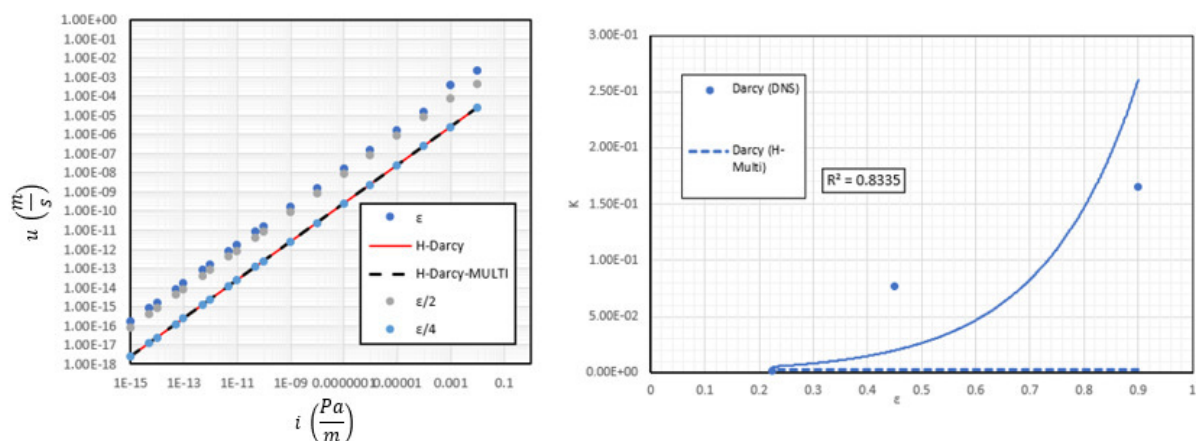


Figura 40. Convergência para Darcy com $\phi = 0,3$ e $M_s^{unit} = 21,10$.

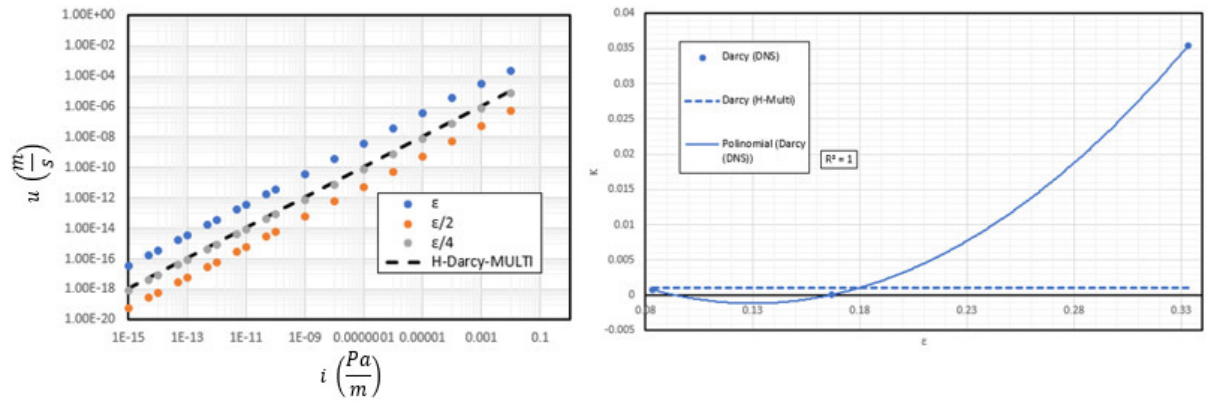


Figura 41. Convergência para Darcy com $\phi = 0,4$ e $M_s^{unit} = 34,66$.

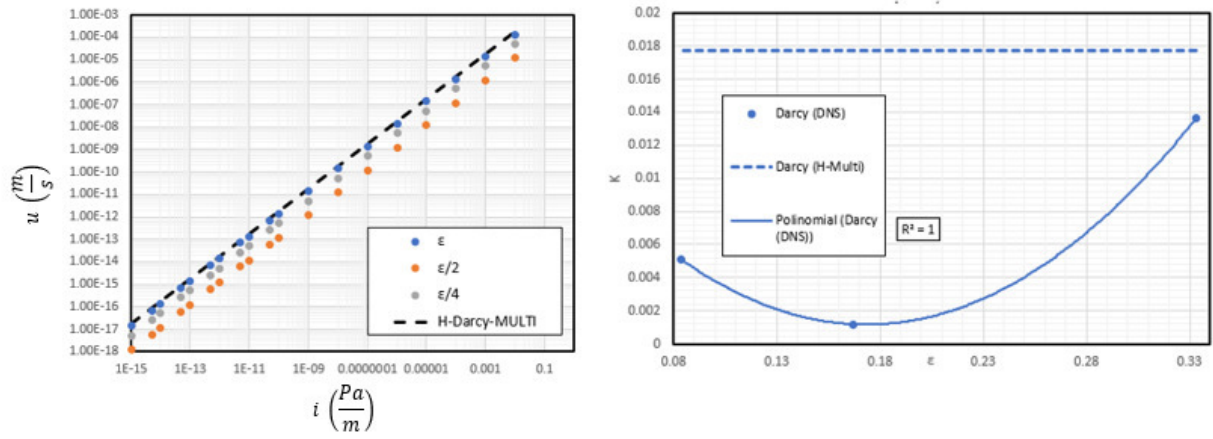


Figura 42. Convergência para Darcy com $\phi = 0,5$ e $M_s^{unit} = 34,66$.

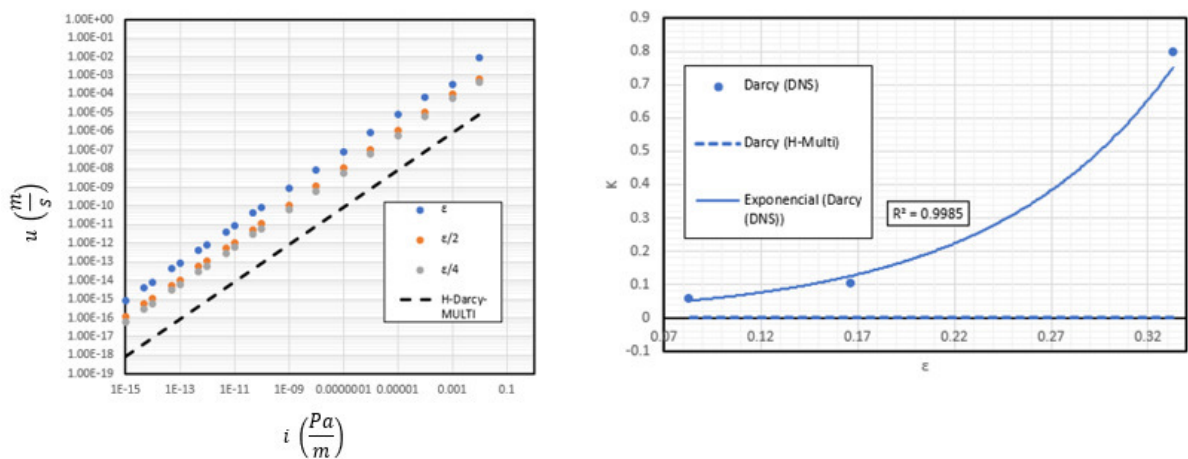


Figura 43. Convergência para Darcy com $\phi = 0,7$ e $M_s^{unit} = 34,66$.

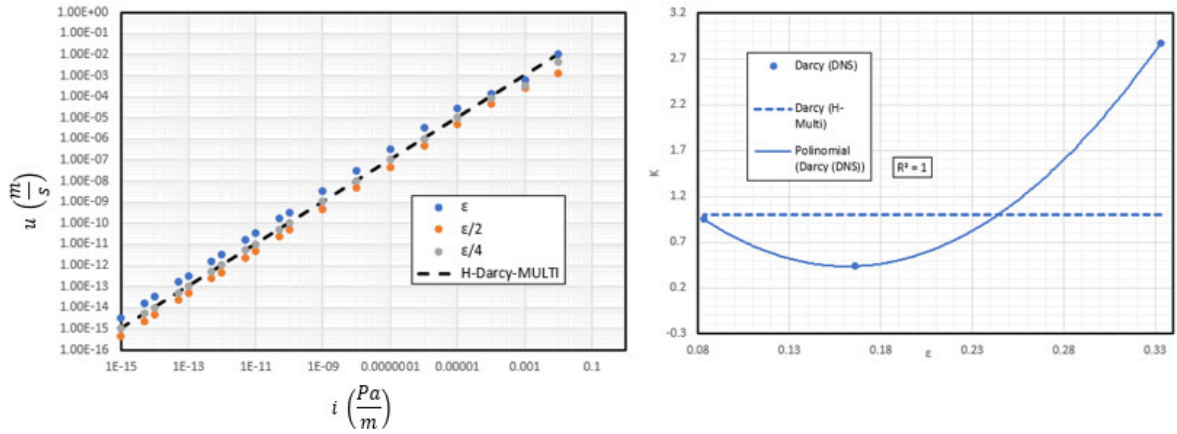


Figura 44. Convergência para Darcy com $\phi = 0,7$ e $M_s^{unit} = 34,66$.

8.5. A homogeneização para limites diferentes de Darcy: a viscosidade aparente de Navier-Stokes e o problema de Brinkman.

Assim como mencionado diversas vezes ao longo deste trabalho, sabe-se da existência de dois outros limites para a EDP além de Darcy. Também já foi mencionado que os limites encontrados por Allaire (1991) não podem ser obtidos de forma numérica por limitação das máquinas utilizadas. Para que limites equivalentes sejam alcançados, modificações na teoria serão propostas aqui. Estas modificações atuam no cerne da dedução de Allaire, fazendo com que termos que outrora em seu trabalho desapareciam, ganhem importância não negligenciável na solução das equações diferenciais parciais aqui apresentadas.

Seja o coeficiente $M = \mu M_0$ onde M_0 está representado na equação (8.14):

$$M_0 = \int_{\Omega_{unit}} \nabla w : \nabla w \, d\Omega_{unit} \quad (8.14)^*$$

Onde $w \in H^1(\Omega_{unit})$ e sabe-se que $v = w\phi \in H^1(\Omega_\epsilon) \forall \phi \in D(\Omega)$. Pela teoria da representação de Riesz, $\exists ! z \in H^1(\Omega_\epsilon)$ tal que:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \beta z \cdot u_\epsilon \, d\Omega_\epsilon = \Delta u_\epsilon \quad (8.17)$$

Para $\beta \in \mathbb{R}$. O resultado acima também se verificar para a extensão em Ω pela linearidade dos espaços de Hilbert. Perceba agora que:

$$\frac{\mu}{\sigma^2} \int_{\Omega_{unit}} \nabla w : \nabla w \, d\Omega_{unit} = z \in H^1(\Omega_{unit}) \quad (8.18)$$

Sendo Ω_{unit} um homeomorfismo de Ω_ε , e a EDP na célula unitária sendo idêntica a EDP no domínio perfurado, a menos das constantes de viscosidade e densidade que são, obviamente, limitadas. Com isso, deduz-se que:

$$\frac{\mu M_0}{\sigma^2} u = \beta \Delta u \quad (8.19)$$

Tornando a EDP homogeneizada geral (EDP):

$$\rho u \cdot (u \cdot \nabla) + \nabla p - (\mu + \beta) \Delta u = f \quad (8.20)$$

Perceba que para o limite em Navier Stokes encontrado por Allaire (1991), $\beta \rightarrow 0$ para $\sigma^2 \rightarrow +\infty$. A equação (8.20) pode ser interpretada como um sistema de Navier-Stokes com uma viscosidade aparente, sendo esta maior do que a viscosidade real do fluido:

$$\rho u \cdot (u \cdot \nabla) + \nabla p - \mu^* \Delta u = f \quad (8.21)$$

Esta viscosidade aparente só existe no problema numérico pois os grãos não atingem o limite de zero e logo M_s passa a ter um efeito de arrasto e atrito grande o suficiente na solução para que seja desprezada. Olhando a solução de forma macroscópica, a presença de grãos no domínio de fluxo realiza um efeito aparente de viscosidade do fluido em questão. Esta viscosidade pode ter valores moderados, ainda permitindo que a parcela inercial tenha importância no fluxo, ou pode ter valores extremamente altos gerando apenas um fluxo por difusão, que será visto posteriormente como um fluxo potencial, característico da teoria de Darcy. O problema ficará um pouco mais abstrato e de difícil compreensão quando se buscar entender o que acontece no tamanho crítico dos grãos para que se obtenha a EDP de Brinkman.

Suponha a existência de uma solução para o campo de velocidades em que as velocidades não variem muito dentro do domínio e que estas variações também não sejam abruptas. Matematicamente, esta hipotética solução possui primeira e segunda derivadas moderadas e com mesma ordem de grandeza. Suponha que se deseje fazer uma aproximação por polinômio de Taylor dessa função solução da EDP e que esta função seja apenas unidimensional para fins práticos. Tem-se:

$$u(x + \delta) = u(x) + \frac{du}{dx} \delta + \frac{d^2u}{dx^2} \delta^2 + O(\delta^3) \quad (8.22. a)$$

Rearranjando:

$$u(x + \delta) - u(x) - \frac{du}{dx} \delta = \frac{d^2u}{dx^2} \delta^2 + O(\delta^3) \quad (8.22. b)$$

Truncando na ordem do erro e dividindo os dois lados por δ^2 :

$$\frac{u(x + \delta) - u(x)}{\delta^2} - \frac{du}{dx} \frac{1}{\delta} = \frac{d^2u}{dx^2} \quad (8.22. c)$$

Note que, por $u(x + \delta) \sim u(x)$, $\delta \ll 1$ e $\frac{du}{dx} \cong u(x)$ pela moderação da função, então:

$$\frac{u(x + \delta) - u(x)}{\delta^2} > \frac{du}{dx} \frac{1}{\delta} \quad (8.23)$$

E logo

$$\frac{d^2u}{dx^2} \cong u(x) \quad (8.24)$$

Este simples argumento permite entender que, para campos de velocidade nos quais as velocidades não variam de forma abrupta, como a presença de oscilações, a função pode ser substituída por um termo proporcional a sua segunda derivada. Tal manipulação em (EDP) resultaria na aparição da viscosidade aparente do fluido pois um novo termo surgiria junto ao Laplaciano, aumentando a viscosidade real do fluido.

Para fluxos onde o campo de velocidade varia abruptamente (rápida queda de energia cinética), os termos:

$$\frac{u(x + \delta) - u(x)}{\delta^2}$$

E

$$\frac{du}{dx} \frac{1}{\delta}$$

Possuem valores muito maiores do que a função propriamente dita. Todavia, são valores limitados por cima, pois $u \in W^1(\Omega)$. Logo:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Nu \quad (8.25)$$

Onde $|N| \gg 1$, $Nu \gg u(u \cdot \nabla)$ e $Nu \gg \mu \Delta u$ Tal condição aproximaria a EDP de um limite em Darcy.

Para exemplificar o procedimento e torná-lo menos abstrato, considere o caso de um solo com porosidade $\phi = 0,5$ e $a(\varepsilon) = e^{-\frac{0,8}{\varepsilon^{2,1}}}$, isto é, com limite em Navier-Stokes. A simulação numérica direta conseguiu chegar até ao valor de $\varepsilon = 0,5m$. Com isso, o valor de $a(\varepsilon) = a(0,5) = 0,033$.

A célula unitária deve ser construída para $\phi = 0,5$ e $M_s^{unit} = \frac{2}{0,033} = 60,60$. A solução do sistema de equações algébricas não lineares para definir a configuração da célula unitária resultou em $n = 5,267$ e $r = 0,174$. O valor de M_0 calculado na célula unitária foi de 11931,06. No mais, encontrou-se $\sigma = 0,99$, logo:

$$\mu^* = \frac{\mu M_0}{\sigma^2} = \frac{0,001 \times 11931,06}{0,99^2} = 11,93 \quad (8.26)$$

Utilizando 11,93 como viscosidade aparente e calculando a velocidade média dentro do domínio, com gradiente hidráulico variando de $1 \times 10^{-15} Pa/m^2$ a $1 \times 10^{-2} Pa/m^2$, encontrou-se um valor de coeficiente de permeabilidade médio de 0,007892. As simulações numéricas diretas mostraram um coeficiente de permeabilidade que tendia para um limite em 0,01. A convergência está representada graficamente na Figura 45.

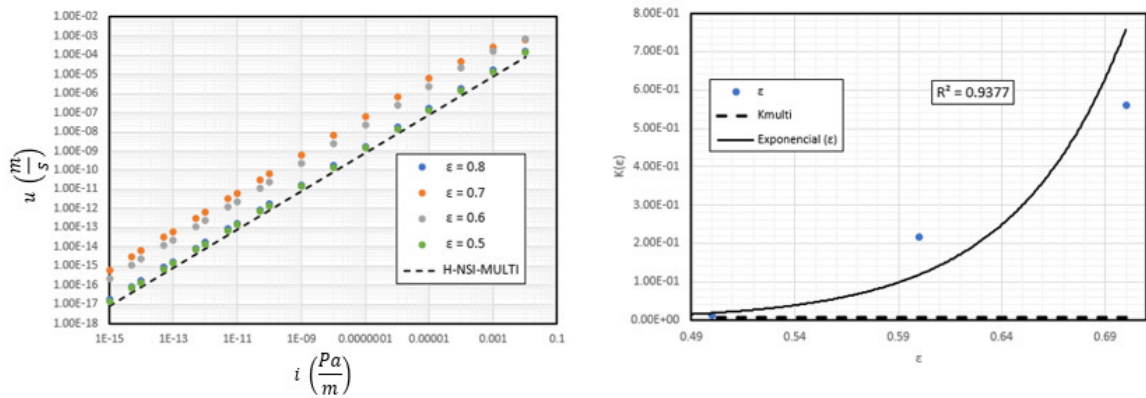


Figura 45. Exemplo de convergência para Navier Stokes.

Na próxima seção, outros resultados de convergência para Navier Stokes serão apresentados, variando-se as porosidades e superfícies específicas. Note, entretanto, que ainda não foram apresentados resultados sobre a convergência para o limite em Brinkman. Para este limite, uma subseção será dedicada.

8.6. Resultados de convergência para o problema teórico da convergência em Navier Stokes.

As figuras Figura 46, Figura 47, Figura 48, Figura 49, Figura 50 e Figura 51 apresentam resultados de convergência para o limite em Navier Stokes para porosidades variando de 0,3 a 0,8. Percebe-se que, em todos os casos se identifica uma convergência estável ou, pelo menos, uma tendência exponencial de convergência para um limite estável.

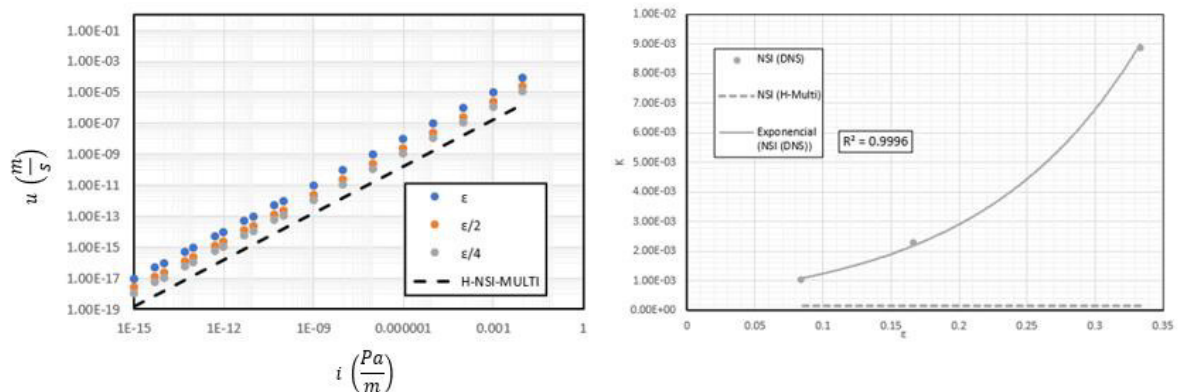


Figura 46. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,3$ e $M_s^{unit} = 51,15$.

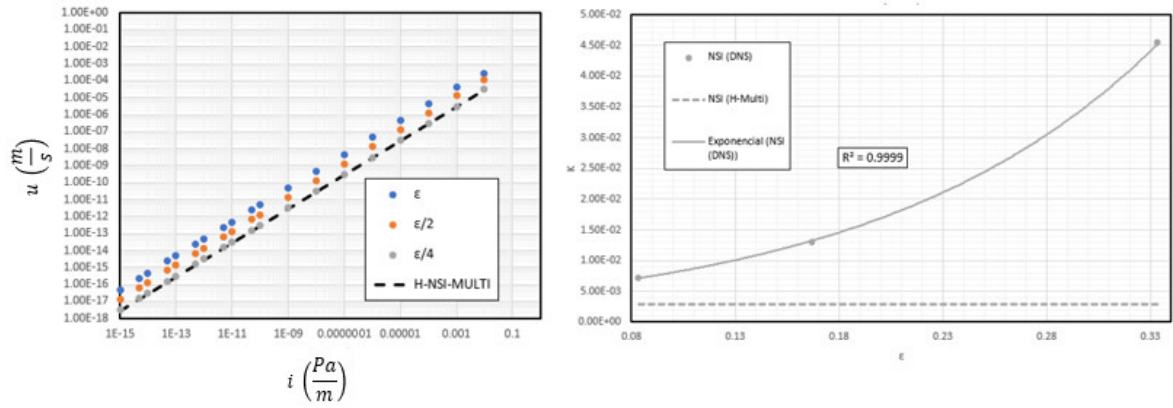


Figura 47. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,4$ e $M_s^{unit} = 54,94$.

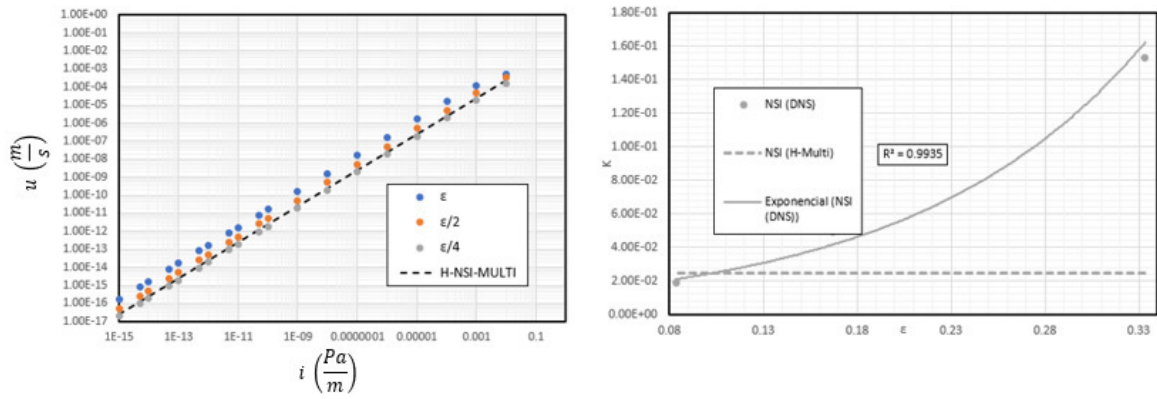


Figura 48. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,5$ e $M_s^{unit} = 60,06$.

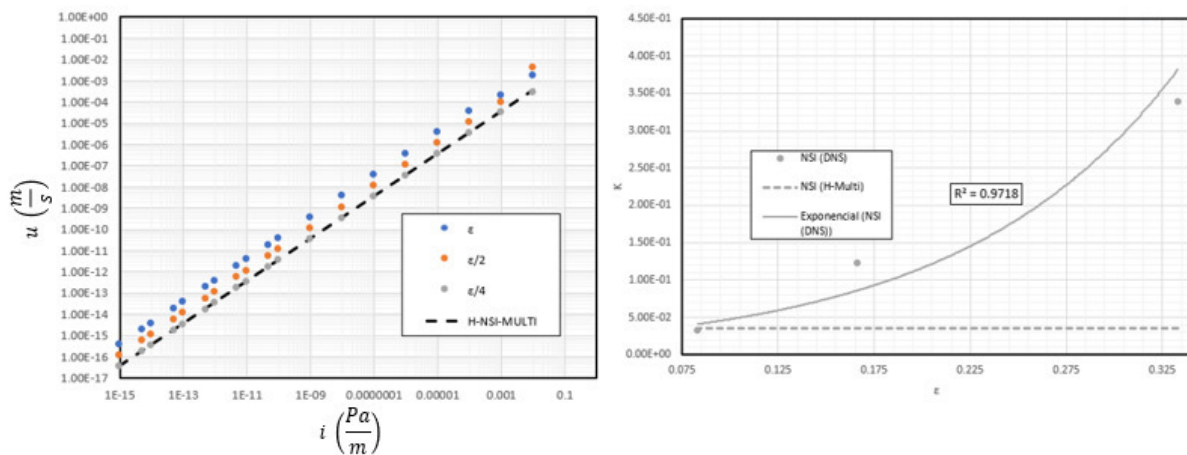


Figura 49. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,6$ e $M_s^{unit} = 67,61$.

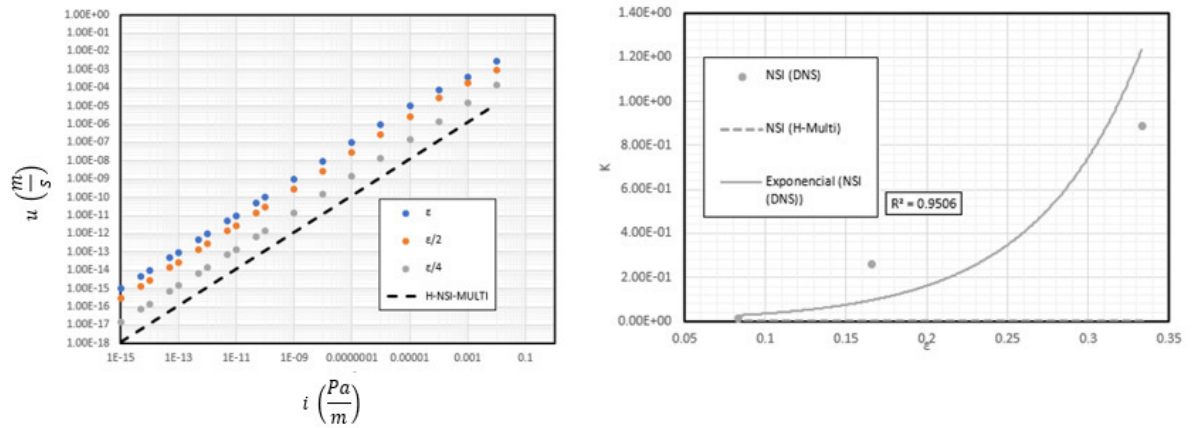


Figura 50. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,7$ e $M_s^{unit} = 76,80$.

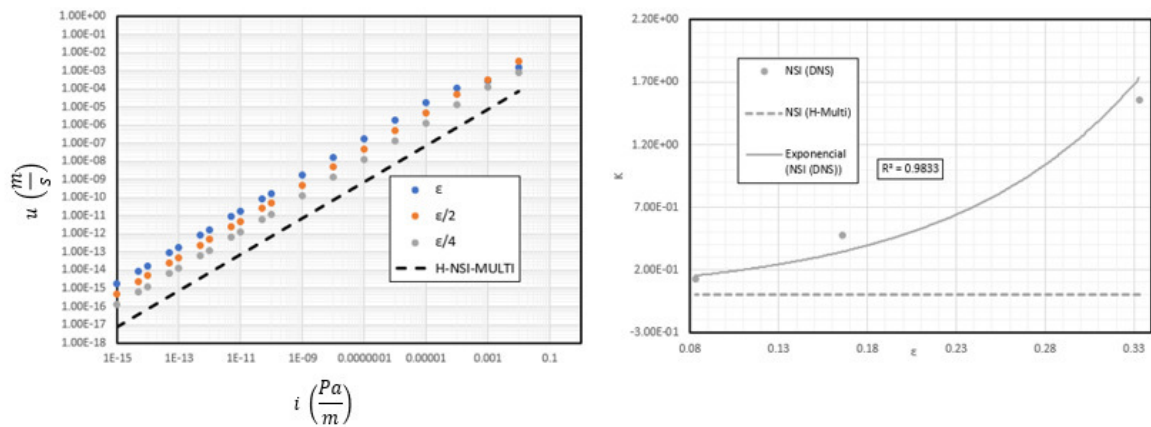


Figura 51. Convergência para Navier Stokes com $\phi = 0,8$ e $M_s^{unit} = 96,15$.

8.7. O limite em Brinkman: uma zona cinzenta entre Darcy e Navier Stokes.

Até o momento somente a convergência numérica para Darcy e Navier-Stokes foi apresentada. Estes dois limites são os dois extremos para os quais as equações de Navier Stokes podem convergir quando tratadas pelo processo de homogeneização pelo método das energias de Allaire (1991). Entretanto, assim como levantado inicialmente por Allaire (1991) e estudado com maior afinco por Cionarescu e Murat (1997), existe um limite

para Brinkman quando $\sigma \rightarrow 0 < C_0 < +\infty$. Como então identificar este limite na abordagem numérica aqui proposta?

Apegando-se diretamente a teoria de Allaire (1991), a única maneira de conseguir convergência para Brinkman seria com uma função do tipo

$$a(\varepsilon) = e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon^2}} \quad (8.27)$$

Onde α pode ser qualquer real positivo, mas o expoente de ε deve ser necessariamente 2. Isso se deve ao fato que $\sigma(\varepsilon)$ é escrita sob a forma de um logaritmo natural elevado a potência $1/2$. Ao tentar trazer este conceito para uma perspectiva mais aplicada, apenas solos cuja variação do tamanho dos grãos variasse exatamente com a expressão (8.27) seriam tratados com a formulação de Brinkman. Como já foi mencionado aqui anteriormente, a própria abordagem numérica não consegue levar $\varepsilon \rightarrow 0$, logo, seria até mesmo perigoso afirmar que o limite em Brinkman apenas surgiria sob a condição necessária de $a(\varepsilon)$ ser exatamente a apresentada em (8.27).

A hipótese que se levanta é que para alguns solos, a depender do tamanho do volume representativo, uma função $a(\varepsilon)$ igual a (8.27) ou com expoentes próximos a 2, gerariam aproximadamente o mesmo valor de σ^2 . Isso induziria a que solos com limites teóricos em Navier Stokes, poderiam ser representados por Brinkman. Mas o que fisicamente representa um solo cujo limite acontece em Brinkman?

O limite em Brinkman acusa que o tamanho dos grãos não varia rápido o suficiente para que haja espaços intersticiais largos o suficiente para o fluxo obedecer às equações de Navier-Stokes com viscosidade aumentada, mas também não possuem grãos menores o suficiente nos interstícios para que seja válida a aproximação pela lei de Darcy. Logo, é um fluxo governado por Navier Stokes (com viscosidade real) porém com um termo de arrasto que causa um efeito de amortecimento. A palavra amortecimento não é escolhida aqui por acaso: o termo de Brinkman é uma constante que multiplica a velocidade do fluxo, gerando assim uma

componente de força idêntica ao amortecimento viscoso previsto na teoria clássica de vibrações de sólidos elásticos.

Utilizando a mesma função $a(\varepsilon)$ escolhida para o exemplo da seção 8.7, pode-se demonstrar por via de simulações numéricas que a permeabilidade encontrada com o limite de Brinkman é próximo o suficiente da permeabilidade encontrada com Navier Stokes com viscosidade aumentada. Assumindo (EDP) com $M = 11,93$ encontra-se uma permeabilidade média de $K = 8,2 \times 10^{-2}$, ou, 0,082. Ou seja, apesar de diferente do valor encontrado pelo limite em Navier Stokes, a ordem de grandeza da permeabilidade ainda é a mesma.

O que se sugere neste trabalho é que o limite em Brinkman, na abordagem numérica, seja apenas um regime de transição entre Navier Stokes e Darcy, atuando como uma sobreposição entre estes dois limites.

9. Comparação com resultados de laboratório.

Não se deve perder de vista que este trabalho é uma tese de doutorado em engenharia geotécnica. Resultados teóricos são bons, mas resultados que condizem com a realidade são ainda melhores. Neste sentido, esta seção irá se dedicar à construção de um simples modelo matemático de previsão de condutividade hidráulica, baseado nos resultados da teoria da homogeneização de Allaire, utilizando parâmetros conhecidos da engenharia geotécnica. O modelo também se propõe a prever qual conjunto de equações representa melhor o solo estudado: Darcy, Brinkman ou Navier Stokes. Por que este modelo é importante?

O objetivo primário desta tese é identificar os casos em que há uma possível não linearidade na relação entre gradiente hidráulico e vazão específica (velocidade de fluxo). Esta não linearidade não é possível de ser atingida (ou muito difícil de ser atingida) quando a equação utilizada é a lei de Darcy. Mas para os dois outros limites, a não linearidade pode aparecer para gradientes hidráulicos moderados.

9.1. Um modelo de condutividade hidráulica baseado em D_{50} , C_u e C_c .

Sejam as definições de C_c , C_u e $\sigma(\varepsilon)$ dadas em (7.1.a), (7.1.b) e (7.2). O modelo que se propõe a partir daqui dependerá apenas destes parâmetros e de um tamanho característico das partículas de solo, representado pelo D_{50} .

Pretende-se prever a condutividade hidráulica de um solo homogêneo e isotrópico a partir da seguinte sequência de etapas:

- i) A partir da curva granulométrica do solo em questão, identificar os valores de D_{10} , D_{30} , D_{50} e D_{60} para que se calcule os valores de C_u e C_c .

- ii) A curva típica de decaimento do tamanho dos grãos em função do tamanho do elemento representativo elementar será dada por (7.2), isto é:

$$a(\varepsilon) = e^{-\frac{C_u}{\varepsilon C_c}} \quad (7.2)$$

- iii) O valor de ε que representa a amostra escolhida será arbitrado como seis vezes o valor de D_{50} , isto é, $\varepsilon_{ref} = 6D_{50}$. Esta aproximação não é *ad-hoc*. O trabalho de Hattamleh et. al (2009) aponta que esta relação é viável para solos granulares quando se deseja encontrar um tamanho mínimo para o qual propriedades do solo cessem de oscilar em função do tamanho da amostra.
- iv) O valor de $\sigma(\varepsilon)$ será ajustado por uma função A que depende apenas da razão de C_u/C_c . De outra forma, tem-se:

$$\sigma(\varepsilon)^* = A\left(\frac{C_u}{C_c}\right) \sigma(\varepsilon) \quad (9.1)$$

- v) Sabendo-se a porosidade do solo e calculando a superfície específica unitária como:

$$M_s^{unit} = \frac{2}{D_{50}} \quad (9.2)$$

Resolve-se o sistema não linear de equações proposto em (8.1.a) e (8.1.b) para se encontrar o raio e a quantidade de grãos utilizados na célula unitária multigrãos.

- vi) Na célula unitária multigrãos se resolve o problema ($P_{cel} - Num$) com $w_0 = 1$ e calcula-se o valor de M_0 dado por (8.14).
- vii) O valor da condutividade hidráulica média do solo, diretamente em cm/s, é dado por:

$$K = \frac{\sigma(\varepsilon)^{*2}}{\mu M_0} \quad (9.3)$$

Sendo μ a viscosidade do fluido que satura o solo estudado, em Pa.s. Lembra-se aqui que a relação entre permeabilidade e condutividade hidráulica é dada por $K = \frac{k}{\mu} \rho g$ onde K , k , μ , ρ e g são respectivamente a condutividade hidráulica, a permeabilidade intrínseca, a viscosidade do fluido, a densidade do fluido e a constante gravitacional. Quando se calcula diretamente a relação entre velocidade média e gradiente hidráulico pela teoria da homogeneização, o que se obtém é k/μ .

Note que este procedimento fornece um valor de condutividade hidráulica médio, isto é, independente da equação limite. Caso se deseje conhecer o ponto de não linearidade, deve-se simular o problema (EDP) assumindo $\mu^* = \frac{\mu M_0}{\sigma^{*2}}$ como viscosidade aumentada para Navier Stokes ou $M = \frac{\mu M_0}{\sigma^{*2}}$ para o termo de arrasto (amortecimento) no limite em Brinkman.

A equação $A\left(\frac{C_u}{C_c}\right)$ foi ajustada para 36 ensaios de permeabilidade diferentes (como mostra a Tabela 3), com solos de distintas porosidades e curvas granulométricas. O ajuste se fez verificando para qual valor de A , o valor de K correspondia ao encontrado em laboratório. Em seguida, traçou-se gráficos de A em relação a superfície específica dos grãos, porosidade e tamanho médio dos grãos. Nenhuma destas relações ofereceu um resultado de ajuste com R^2 próximo o suficiente de 1 para que se estabelecesse uma correlação. Entretanto, quando se comparou A com C_u/C_c obteve-se uma curva em lei de potência com R^2 acima de 0,46 mesmo com os ensaios cujos valores destoavam drasticamente do esperado para o material ensaiado. Desprezando os valores que destoam, o valor de R^2 atingiu 0,86. A função encontrada para A foi:

$$A\left(\frac{C_u}{C_c}\right) = 0,0428 \left(\frac{C_u}{C_c}\right)^{-1,754} \quad (9.4)$$

Tabela 3. Ensaios de calibração do modelo.

(Yang., 2016)	e	ϕ	D50(mm)	Cc	Cu	A	R(mm)	Ms	K-Lab (cm/s)
	0.525	0.344262	0.5	0.75	3	0.0055	0.25	8000	1.84E-03
	0.525	0.344262	1	1.03	5.6	0.002	0.5	4000	3.83E-03
	0.525	0.344262	2	1.45	11	0.0015	1	2000	3.68E-03
	0.559	0.358563	2	0.75	5.6	0.0017	1	2000	1.23E-03
	0.559	0.358563	0.5	1.03	11	0.001	0.25	8000	3.35E-03
	0.559	0.358563	1	1.45	3	0.0011	0.5	4000	8.99E-03
	0.572	0.363868	1	0.75	11	0.002	0.5	4000	1.36E-03
	0.572	0.363868	2	1.03	3	0.0006	1	2000	3.18E-02
	0.572	0.363868	0.5	1.45	5.6	0.0002	0.25	8000	9.44E-04

{Akbulut e Wiszniewski, 2014}	e	ϕ	D50(mm)	Cc	Cu	A	R(mm)	Ms	K-Lab (cm/s)
	0.664	0.399038	1.27	2.14	7.1	0.001	0.635	3149.606	1.89E-01
	0.796	0.443207	1.63	0.89	1.35	0.075	0.815	2453.988	1.26E+00
	0.892	0.471459	0.84	0.93	1.41	0.05	0.42	4761.905	4.18E-01
	0.641	0.390615	1.27	2.14	7.1	0.007	0.635	3149.606	1.73E-01
	0.788	0.440716	1.63	0.89	1.35	0.073	0.815	2453.988	1.23E+00
	0.843	0.457406	0.84	0.93	1.41	0.05	0.42	4761.905	3.75E-01
	0.495	0.331104	1.27	2.14	7.1	0.001	0.635	3149.606	1.39E-01
	0.645	0.392097	1.63	0.89	1.35	0.07	0.815	2453.988	1.07E+00
	0.707	0.414177	0.84	0.93	1.41	0.05	0.42	4761.905	3.96E-01
	0.966	0.491353	1.27	2.14	7.1	0.001	0.635	3149.606	2.69E-01
	1.059	0.514327	1.63	0.89	1.35	0.09	0.815	2453.988	1.46E+00
	1.153	0.535532	0.84	0.93	1.41	0.07	0.42	4761.905	5.97E-01

{Calabar e Akbulut, 2016}	e	ϕ	D50(mm)	Cc	Cu	A	R(mm)	Ms	K-Lab (cm/s)
	0.86	0.462366	3.1	0.93	1.5	0.03	1.55	1290.323	1.61
	0.82	0.450549	1.63	0.89	1.35	0.036	0.815	2453.988	0.35
	0.77	0.435028	0.84	0.93	1.41	0.034	0.42	4761.905	0.13
	0.72	0.418605	0.5	1	1.19	0.02	0.25	8000	0.05
	0.6	0.375	0.35	0.98	1.16	0.018	0.175	11428.57	0.03
	0.87	0.465241	1	0.73	4.39	0.011	0.5	4000	0.03
	0.82	0.450549	0.69	1.01	3.63	0.006	0.345	5797.101	0.02
	0.79	0.441341	0.5	1.44	3.47	0.011	0.25	8000	0.02
	0.7	0.411765	0.39	1.74	3.27	0.0004	0.195	10256.41	0.02
	0.63	0.386503	0.32	1.29	3.09	0.0015	0.16	12500	0.01
	0.56	0.358974	0.16	0.92	2.07	0.012	0.08	25000	0.01
	0.74	0.425287	2.2	0.98	2.6	0.015	1.1	1818.182	0.26
	0.67	0.401198	1.18	0.88	1.93	0.022	0.59	3389.831	0.12
	0.52	0.342105	2	1.22	3.28	0.0083	1	2000	0.14
	0.7	0.411765	0.99	0.8	2.41	0.025	0.495	4040.404	0.06
	0.55	0.354839	0.7	0.93	1.71	0.016	0.35	5714.286	0.04

A relação entre o parâmetro A e o valor da razão entre C_u e C_c está representada graficamente na Figura 52. Nota-se que o valor de A tende a uma assíntota vertical para $\frac{C_u}{C_c} \rightarrow 3/2$.

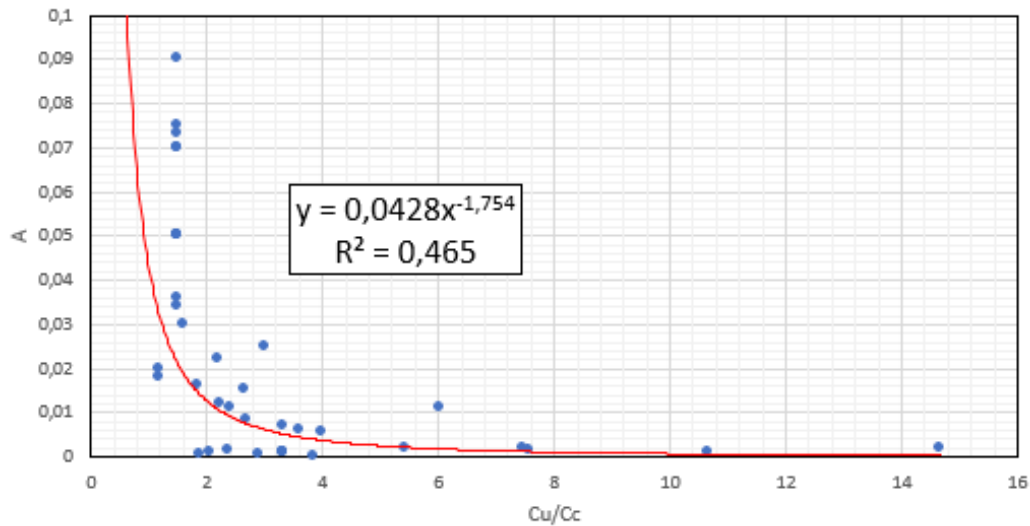


Figura 52. Relação entre A e C_u/C_c .

A Figura 53 mostra dois conjuntos de dados diferentes. Os pontos azuis são os valores das condutividades hidráulicas medidas em laboratório para 36 diferentes ensaios. Estes mesmos dados foram utilizados para alimentar o modelo. Já os pontos laranjas representam a previsão destas permeabilidades pelo próprio modelo. O ajuste de curva em lei de potência para ambos os casos ressalta o comportamento similar entre os dados de laboratório e os previstos pelo modelo proposto. Note também que para altos valores de C_u/C_c tem-se os menores erros do modelo. Isto significa que para solos com tendência de convergência para Darcy, o modelo tem maior precisão.

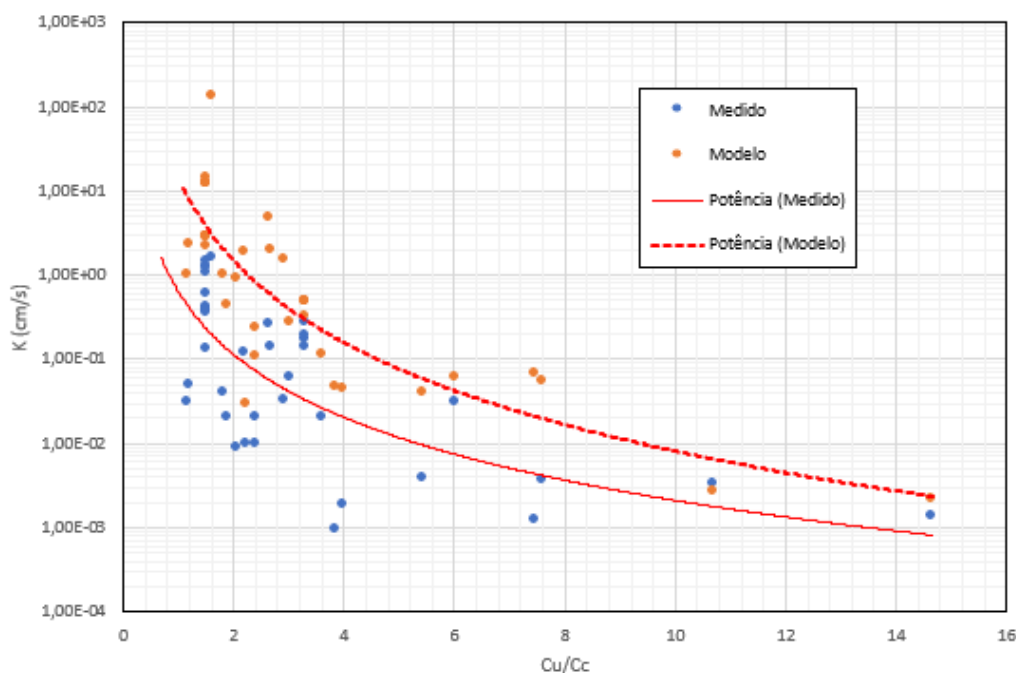


Figura 53. Comparação dos valores de laboratório com resultados do modelo para $K \left(\frac{C_u}{C_c} \right)$.

Para uma melhor visualização dos limites de convergência para os limites de Darcy, Brinkman ou Navier-Stokes, foi proposto o seguinte exercício:

Suponha que o solo a ser estudado possui uma porosidade ϕ e um D_{50} que, a partir do sistema de equações (8.1.a) (8.1.b) gere uma solução $n = 49$ e $r = 0,054m$. Sabe-se que, caso o modelo limite para este solo seja Navier-Stokes, a viscosidade aumentada seria calculada por $\mu^* = \mu M_0 / \sigma^{*2}$. Admitindo que o fluido real que permeia o solo seja água com $\mu = 0,001$ Pa.s e que na simulação da célula unitária tenha-se encontrado $M_0 = 12848,4$. Ao arbitrar-se valores de μ^* pode-se calcular qual deveria ser o valor de σ^{*2} para que este valor de viscosidade aumentada fosse atingido. Esta operação encontra os valores apresentados na coluna $\sigma^{*2} - \text{ajuste}$ da **Error! Reference source not found.**

Assume-se agora que a curva de decaimento do tamanho dos grãos seja governada por (50), fixando-se o valor de $C_u = 1$. Em seguida, assume-se que A varia com a expressão (81) e que $\sigma^{*2} \left(\frac{C_u}{C_c} \right)$ seja calculado

como o quadrado da expressão (78). A partir deste ponto, varia-se os valores de C_c até que os valores da coluna $\sigma^{*2} \left(\frac{C_u}{C_c} \right)$ se aproxime o suficiente da coluna $\sigma^{*2} - \text{ajuste}$. Caso o valor de $C_c \gg 2$, sabe-se que a equação limite para este solo é Navier-Stokes com a viscosidade aumentada. Caso $C_c \cong 2$ o limite seria Brinkman e para $C_c \ll 2$ o limite seria a lei de Darcy.

Tabela 4. Relação entre a viscosidade aumentada e o limite da EDP

μ^*	M0	Cc	a(ϵ) (mm)	ϵ (mm)	A	σ^2	σ^2 -ajuste	Modelo Limite
0,001	12848,4	27,3	1	6	14,14077	912,1269	908,6068789	NSI
0,01	12848,4	14,2	1	6	4,493218	289,8276	285,9509524	NSI
0,1	12848,4	7,3	0,999997913	6	1,39866	90,21833	91,86223482	NSI
1	12848,4	3,8	0,998896467	6	0,445025	28,72327	28,87120264	NSI
10	12848,4	1,95	0,970075661	6	0,138091	9,058346	9,304319069	Brinkman
100	12848,4	1	0,846481725	6	0,0428	3,017543	3,00196278	Darcy
1000	12848,4	0,5	0,664813791	6	0,012689	1,004995	1,012539363	Darcy
10000	12848,4	0,25	0,527850012	6	0,003762	0,329204	0,341521877	Darcy

A Figura 54 mostra os resultados de simulações numéricas diretas das equações de Navier-Stokes com viscosidade variando, simulando assim os diversos cenários de viscosidade aumentada. Percebe-se que não linearidade aparecem rapidamente para valores baixos de viscosidade e que, para solos com viscosidade aumentada acima de 100, a relação entre o gradiente hidráulico e a velocidade de fluxo é perfeitamente linear para gradientes de até 1000 Pa/m.

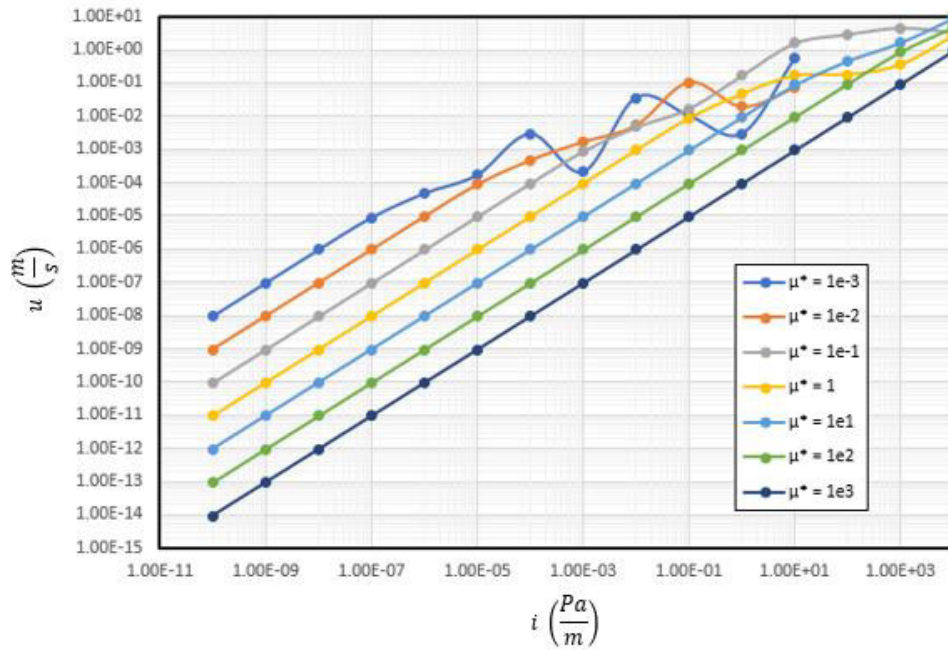


Figura 54. Perda da linearidade na relação gradiente hidráulico – velocidade média para diferentes viscosidades aumentadas.

Identificou-se na Figura 54 para quais valores de gradiente a não linearidade começa a ser observada. Ao relacionar estes valores com seus respectivos valores de C_u/C_c identifica-se um comportamento em lei de potência com $R^2 = 1$. A mesma relação ocorre entre o gradiente crítico e a condutividade hidráulica do solo. Estas relações estão representadas na Figura 55 e na Figura 56.

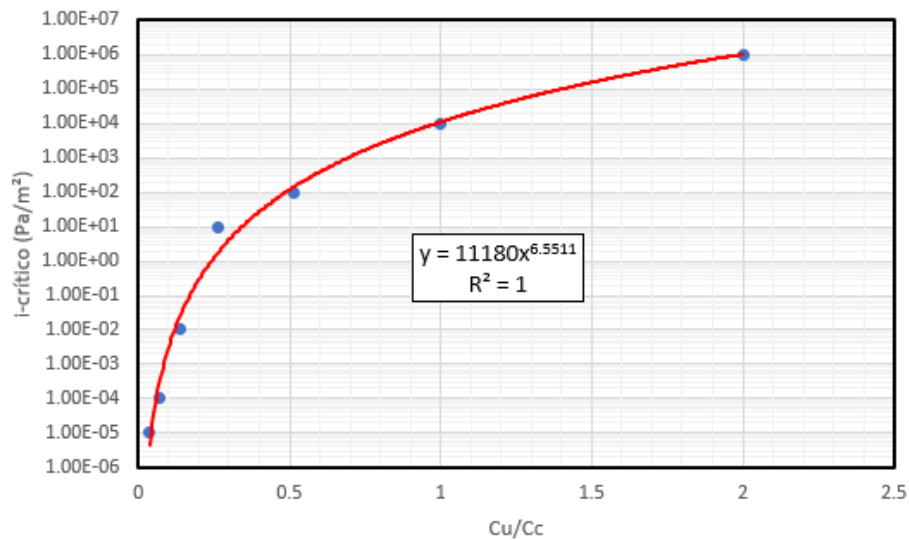


Figura 55. Relação entre a razão Cu/Cc com o gradiente crítico de perda de linearidade.

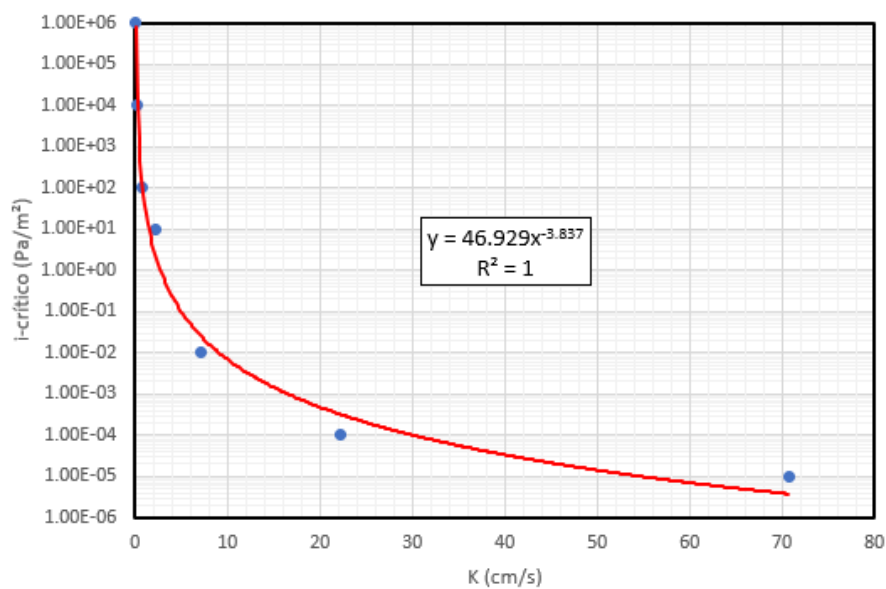


Figura 56. Relação entre a condutividade hidráulica estimada e o gradiente crítico.

Utilizando a formulação apresentada em Bear (1985) para o número de Reynolds em meios porosos, calculou-se para quais valores de Reynolds a linearidade da lei de Darcy deixa de se aplicar. Em Bear (1985), diz-se que ao se considerar

$$R_e = \frac{uD_{50}}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{uD_{50}}{\nu} \quad (9.5)$$

Valores de Reynolds $1 \leq R_e \leq 10$ indicam transição do regime linear para o não linear, isto é, a lei de Darcy deixaria de se aplicar. Ao comparar esta faixa de intervalo limite com os encontrados nas simulações numéricas e listados na Tabela 5, percebe-se que estes valores de Reynolds são os calculados para o último limite em Navier-Stokes e o limite em Brinkman. No experimento numérico, os solos que perdiam a linearidade da relação entre gradiente hidráulico e velocidade de fluxo possuíam uma relação $0,26 < \frac{C_u}{C_c} < 0,52$. A pergunta que surge imediatamente é: este intervalo de C_u/C_c para o qual há transição do regime linear para o não linear encontrado teoricamente em simulações numéricas, é factível com os valores comuns de C_u/C_c encontrados na natureza? Em outras palavras, solos com C_u/C_c nesta faixa de valores são comuns?

Tabela 5. Reynolds crítico em função de C_u/C_c

Cc	Cu	Cu/Cc	i-crítico	μ^*	K (cm/s)	u-crítico (m/s)	Re	Modelo Limite
27,3	1	0,03663	1,00E-05	0,001	70,71751	7,07E-07	7,07E-04	NSI
14,2	1	0,070423	1,00E-04	0,01	22,25576	2,23E-06	2,23E-03	NSI
7,3	1	0,136986	1,00E-03	0,1	7,149702	7,15E-06	7,15E-03	NSI
3,8	1	0,263158	1,00E+00	1	2,247066	2,25E-03	2,25E+00	NSI
1,95	1	0,512821	1,00E+02	10	0,724162	7,24E-02	7,24E+01	Brinkman
1	1	1	1,00E+04	100	0,233645	2,34E+00	2,34E+03	Darcy
0,5	1	2	1,00E+06	1000	0,078807	7,88E+01	7,88E+04	Darcy

A Figura 57 auxilia na resposta a esta pergunta. Dos 36 solos ensaiados no laboratório utilizados para alimentar o modelo, 30 estão na zona $1 < \frac{C_u}{C_c} \leq 4$. Os outros 6 solos possuem valores de C_u/C_c ainda maiores. A média dos valores de C_u/C_c dos 36 solos ensaiados foi de 3,29 e o desvio padrão de 2,82. Isso significa que, nos valores mais extremos, poderia-se obter C_u/C_c na ordem de 0,4, mas que seria estatisticamente improvável encontrar valores menores do que isso. O valor de 0,4 condiz com o encontrado nos ensaios numéricos listados na Tabela 5 para os valores cuja não linearidade aparece para gradientes hidráulicos previstos na literatura. Logo, comparando com a Tabela 5, nota-se que estes valores

“impossíveis” correspondem aos limites em Navier-Stokes para viscosidades baixas.

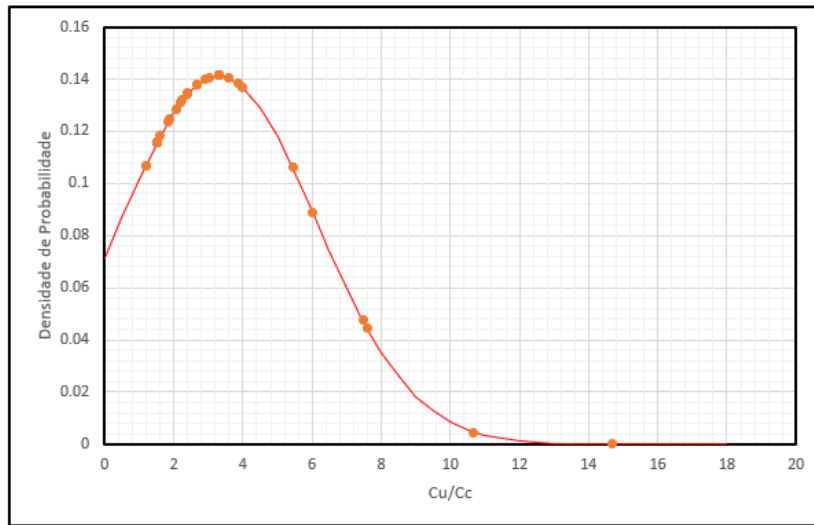


Figura 57. Distribuição de densidade de probabilidade dos ensaios de permeabilidade.

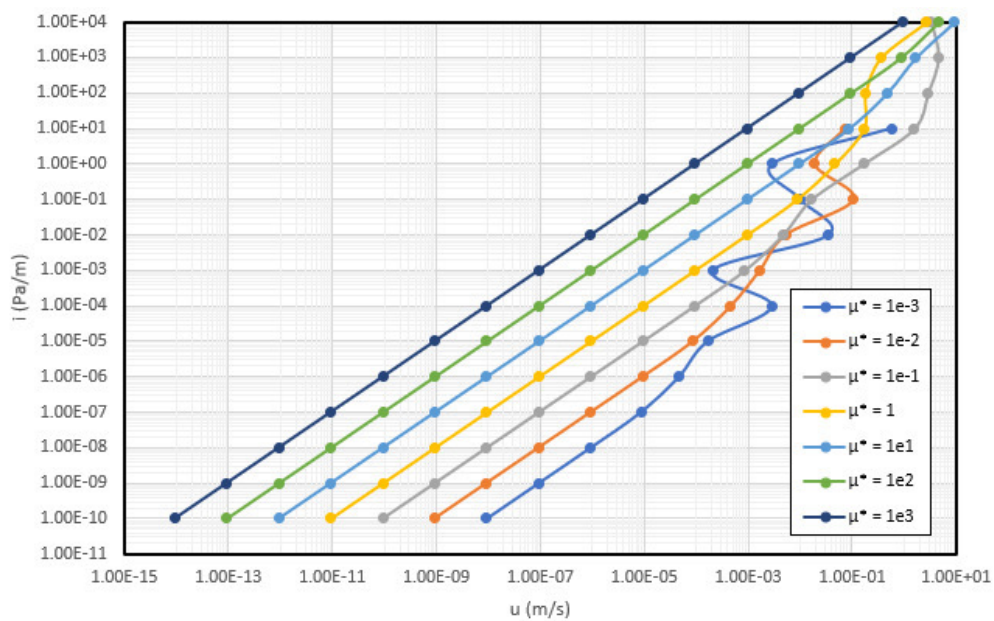


Figura 58. Relação do gradiente hidráulico com a velocidade média de fluxo

A Figura 58 foi gerada para que se compare com o exemplo dado na Parte I deste trabalho, na Figura 9. A não linearidade da lei de Darcy torna-se mais evidente para solos que possuem $\frac{C_u}{C_c} < 0,5$.

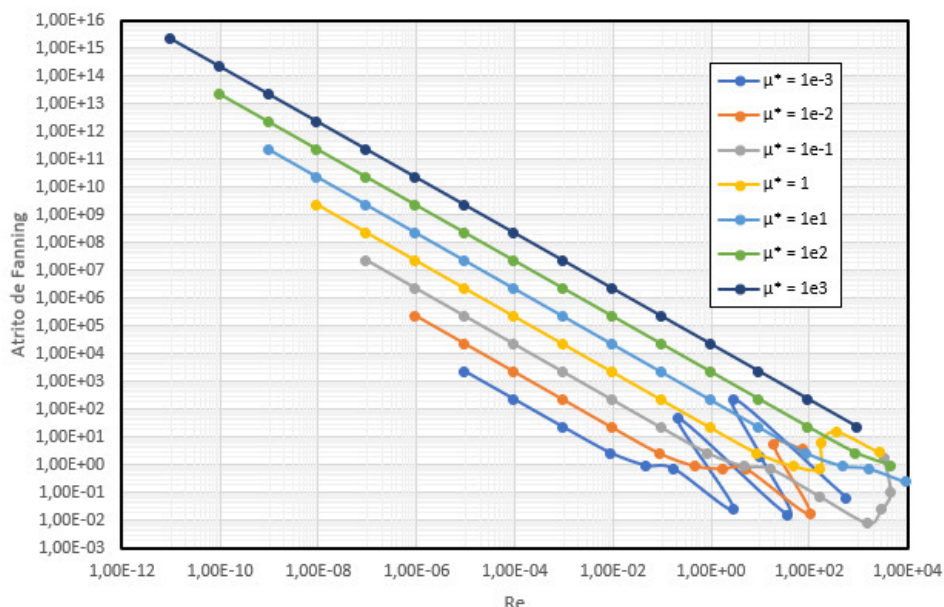


Figura 59. Relação entre número de Reynolds e atrito de Fanning para diferentes viscosidades aumentadas.

A Figura 59 apresenta a perda de linearidade na relação entre o número de Reynolds e o atrito de Fanning. Esta perda de linearidade já foi mencionada na Parte I desta tese e se refere a uma possível transição de um regime laminar para um regime turbulento. Os ensaios de laboratório apresentados em Bear (1985) sugerem que a perda de linearidade aconteça para $Re \cong 10$ e $F \cong 10^2$. Para esta mesma faixa de valores, a perda de não linearidade entre Re e F acontece para os solos com viscosidade aumentada de $1 \leq \mu^* \leq 10$, coincidindo com os solos que possuem como equação limite as equações de Brinkman e Navier-Stokes. Mais ainda, esta zona proposta na literatura (Bear, 1985) condiz com os solos cuja razão de C_u/C_c está entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Pode-se propor, a princípio, que para estes tipos de solo, haja não linearidade na relação entre gradiente hidráulico e vazão específica (velocidade média) por motivos de turbulência através das escalas. Todavia, esta afirmação necessita de provas mais robustas.

10. Conclusão

Diversas hipóteses, análises e resultados foram apresentados ao longo deste extenso trabalho. Nesta seção, busca-se sintetizar os principais resultados assim como trazê-los em uma forma menos complexa, com um jargão menos específico da matemática e mais voltado para a audiência geotécnica.

O primeiro relevante resultado é a comprovação teórica de que fluxo de água em solos saturados podem apresentar uma relação não linear entre o gradiente hidráulico e a vazão específica, ou velocidade média de fluxo. Isto ocorre pois, como visto ao longo desta tese, para alguns solos, o modelo linear de Darcy não é o mais recomendado.

O segundo resultado é consequência do primeiro e responde a seguinte questão: para quais solos e situações a lei de Darcy deixa de ser válida? Notou-se que o que governa o tipo de modelo matemático a ser utilizado para fluxo é a distribuição granulométrica do solo. Por distribuição granulométrica, entende-se dois principais artefatos: a uniformidade do solo (o quão rápido decai a função de distribuição de partículas) e o tamanho médio dos grãos.

Ainda sobre o segundo resultado, notou-se que solos para os quais a razão C_u/C_c é inferior a 0,5 possuem tendência a desenvolver fluxos com relação não linear entre o gradiente hidráulico e a vazão específica. É importante sublinhar que estes gradientes não são de amplitude improváveis na natureza, isto é, diferenças de pressão que são muito maiores do que o esperado. Os fluxos podem se tornar não lineares para gradientes hidráulicos moderados. No mais, quando maior for D_{50} , isto é, o tamanho médio dos grãos, mais rápido o fluxo se torna não linear. Ou seja,

o gradiente hidráulico crítico para o qual a relação passa a ser não linear, torna-se menor à medida que se aumenta D_{50} .

O terceiro resultado não é inédito, mas sofreu modificações ao longo da tese. Trata-se dos diferentes limites para os quais pode tender o processo de homogeneização das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis. Se a lei de Darcy se torna menos desejável e recomendável para alguns tipos de solo, independente do gradiente hidráulico atuante, então quais outros modelos devem ser adotados para resultados mais acurados e precisos?

Allaire em 1991 já havia demonstrado que as equações de Stokes poderiam migrar para dois distintos limites: Darcy ou Stokes. Aproveitando-se dos resultados de Cionarescu e Murat em 1985, apresentados no famoso artigo “Um termo estranho vindo do nada”, Allaire propôs um terceiro limite: as equações de Brinkman. Cabe ressaltar que Brinkman já havia proposto sua equação quarentas anos antes, mas sua dedução não era rigorosa. O que então foi proposto de novo nesta tese de doutorado?

Allaire não havia previsto que os limites que ele mesmo demonstrou em 1991 poderiam ser atingidos para condições de contorno mais complexas. É normal que isso não tenha ocorrido, uma vez que Allaire demonstrou os limites para casos em que se podia resolver analiticamente as equações de Stokes em domínios periodicamente perfurados. Nesta tese de doutorado, foi demonstrado que os limites propostos por Allaire podem ser atingidos para condições de contorno mais complexas, como entrada de pressão, condições de deslizamento livre em algumas fronteiras e condições de Dirichlet nas demais. No mais, o trabalho de Allaire foi todo desenvolvido para domínios periódicos infinitos. Aqui, propõe-se um processo de homogeneização em um domínio limitado. E neste ponto, apresenta-se o terceiro resultado relevante desta tese.

Um processo de homogeneização numérico foi proposto, baseado no método dos elementos finitos, em sua formulação padrão (Bubnov-Galerkin). A homogeneização em um domínio limitado teve sua existência impulsionada pela necessidade de se impor condições nas fronteiras de um

espaço de elementos finitos. Este processo consiste na simulação numérica direta (DNS) de uma célula unitária multigrãos, que leva em conta duas principais variáveis que afetam a permeabilidade do solo: a porosidade e a superfície específica dos grãos. O problema da célula unitária de Allaire admitia apenas um grão. A partir da resolução de um sistema de equações algébricas, determina-se quantos grãos devem ser colocados de forma simétrica na célula unitária e qual é o raio destes grãos. Na célula unitária, simula-se um fluxo horizontal com condições de contorno específicas justificadas ao longo da tese. Com o campo de velocidades calculado, determina-se o tensor (que para $N = 2$ torna-se um coeficiente) M , que é relacionado a tortuosidade do meio, sua porosidade e a superfície específica do esqueleto sólido.

Na teoria de Allaire, o tensor M é dividido por um fator σ^2 que é uma forma de medida da razão entre o tamanho dos grãos e o tamanho do domínio. O valor de σ depende da curva de decaimento dos grãos e pode ter seu limite indo para $+\infty$, 0 ou $0 < C_0 < +\infty$. No primeiro caso, a EDP convergiria para Navier-Stokes, no segundo para Darcy e no terceiro para Brinkman. Porém, estes limites seriam alcançados para $\varepsilon \rightarrow 0$, ou seja, levando a relação entre o tamanho dos grãos e o tamanho do domínio para zero. Numericamente torna-se inviável, se não impossível, levar o tamanho dos grãos para zero, e com isso, o valor de σ jamais atingiria seu limite. Já que os grãos podem se tornar muito pequenos, porém não nulos, a superfície específica nas simulações numéricas assume valores grandes, não desprezíveis. Lembre-se que o fluido perde energia por atrito com as paredes sólidas, e a superfície específica é uma medida desta área disponível para atrito entre o fluido e os grãos. O que se propôs então nesta tese foi:

- i) Modificar a medida $\sigma(\varepsilon)$ por um pré-fator $A\left(\frac{C_u}{C_c}\right)$.
- ii) Definir um tamanho para o volume elementar representativo a partir do tamanho médio dos grãos, mais especificamente $\varepsilon = 6 \times D_{50}$.

- iii) Calcular $\sigma(\varepsilon) = \sigma(6D_{50})$ e dividir o valor de M encontrado pelo valor de σ^2 .
- iv) A depender do valor de C_c , definir se o valor de M/σ^2 será utilizado como viscosidade aumentada para Navier-Stokes, coeficiente de arrasto de Brinkman ou o inverso da condutividade hidráulica em Darcy.

A última conclusão que, honestamente, apresenta-se mais como uma sugestão e hipótese é que os fluxos não lineares refletem um possível fluxo turbulento no solo. Sabe-se, da literatura, que fluxos turbulentos ocorrem na microescala. Mas sabe-se também que este estado turbulento de fluxo não consegue migrar para uma escala maior, e isso se justificaria pela teoria de Kolmogorov.

Entretanto, o que se levanta aqui como futura investigação é a prova da seguinte conjectura: Para alguns tipos de solos granulares, com certa granulometria, a turbulência na escala micro consegue migrar e sobreviver na escala macroscópica, gerando o que se conhece como fluxo não linear de Darcy.

Admite-se que pode haver fluxo não linear sem turbulência, sendo apenas fruto da parcela de convecção que é de natureza não linear. Mas não se descarta aqui a possibilidade de que em alguns casos, a não linearidade seja sintoma de um fluxo turbulento através de escalas.

Anexo

Elementos da análise funcional e topologia geral.

O espaço métrico

O conceito de espaço métrico e topologia geral é de suma importância no desenvolvimento e implementação de métodos numéricos voltados para a solução de equações diferenciais. Por mais que seja uma ciência a priori abstrata, alguns fortes teoremas podem ser invocados durante a implementação de um algoritmo baseado no método dos elementos finitos por exemplo.

Espaços normados, definições e entendimento físico.

Por ser um campo abstrato da matemática, aplicar os conceitos da topologia em um trabalho de engenharia não é trivial. Por esse motivo, propõe-se primeiro uma definição informal dos espaços métricos e espaços normados, para que posteriormente estes sejam tratados com mais rigor. Tome como exemplo os conjuntos numéricos. Um espaço métrico é um conjunto no qual consegue-se medir a distância entre seus pontos com uma régua específica e bem definida. Estes pontos, ditos também elementos do conjunto, podem ser números reais, complexos, funções, vetores ou qualquer objeto matemático que possa ser classificado em um conjunto.

Esta “régua bem definida”, para que assim seja, deve satisfazer algumas propriedades como:

- i) A distância entre dois pontos só é nula quando os pontos se confundem ou quando se mede a distância entre um ponto e ele mesmo.
- ii) A distância de a para b deve ser exatamente a mesma que de b para a .
- iii) A distância entre dois pontos satisfaz a desigualdade triangular, conhecida por ser aplicada em diversos teoremas como o de

Pitágoras sobre a relação entre os catetos menores a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Pode-se então propor uma definição formal de um espaço métrico.

Definição (*Métrica ou medida*): Seja M um conjunto qualquer. Uma métrica, ou medida, em M é uma função que toma valores em M e transforma em números reais. Diz-se então:

$$d = M \times M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

Tal que, para quaisquer três elementos em M definidos como x, y e z :

$$d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in M \quad (2.a)$$

$$d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in M \quad (2.b)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in M \quad (2.c)$$

Definição (*Espaço métrico*): Seja M um conjunto qualquer e d a métrica e ele associada, o par (M, d) é chamado de espaço métrico.

Dentro do escopo deste trabalho, se faz suficiente manter-se nos espaços métricos lineares. Estes são espaços nos quais as relações entre seus elementos são fundamentalmente lineares. Isto não impõe, entretanto, que os elementos do conjunto, caso sejam funções por exemplo, sejam lineares. Tome como exemplo o espaço P dos polinômios. Pode-se estabelecer um espaço métrico linear de polinômios mesmo que este contenha o elemento $y_n(x) = x^2$ que é não linear em x .

Definição (*Espaço métrico linear*): Um espaço métrico é dito linear se ele satisfaz as seguintes propriedades entre seus elementos:

- i) Comutativo: $\forall x, y \in M, x + y = y + x$
- ii) Associativo: $\forall x, y, z \in M, x + (y + z) = (x + y) + z$
- iii) Grupo: $\exists 0 \in M$ tal que $0 + x = x$ e $\exists -x \in M$ tal que $-x + x = 0$

As propriedades se aplicam também na interação entre escalares e elementos de M tal que:

$$\text{iv)} \quad \text{Associativo: } (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall x \in M, \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

$$\text{v)} \quad \text{Distributivo: } (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall x \in M, \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Deve também existir o elemento neutro do conjunto:

$$\text{vi)} \quad \exists 1 \in \mathbb{K} \text{ tal que } 1x = x, \quad \forall x \in M \text{ e } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

Espaços maiores podem conter espaços menores em seus interiores e fronteiras. Estes espaços imersos totalmente ou parcialmente em espaços maiores são chamados de subespaços e podem ser lineares ou não. Este trabalho direciona-se com mais foco para os subespaços lineares, cabendo assim a necessidade de uma definição formal.

Definição (*Subespaços lineares*): Seja M um espaço definido em um campo \mathbb{K} . O espaço $N \subseteq M$ é um subespaço linear se $\forall x, y \in N, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha x + y) \in N$.

É natural pensar que dentro de um espaço maior possa haver mais de um subespaço linear. Os vários subespaços lineares formam uma família de subespaços lineares. Tem-se logo uma nova definição:

Definição (*Família de subespaços lineares*): Seja M um espaço definido em um campo \mathbb{K} . Uma família de subespaços é definida pelo conjunto:

$$\{N_\theta : \theta \in I\} \tag{3}$$

Onde cada N_θ é um subespaço linear de M . Pode-se afirmar então que:

$$\bigcap_{\theta \in I} N_\theta = N \tag{4}$$

E N é então um subespaço linear de M .

Um objeto matemático importante na teoria dos espaços lineares é o span, ou também conhecido em português como o espaço gerado. Este objeto se mostrará importante posteriormente no voltado a teoria moderna das equações diferenciais parciais e métodos numéricos. No momento, sem maior necessidade de aprofundar-se no conceito, basta que este seja definido formalmente.

Definição (*Span ou espaço gerado*): Assuma um subespaço $S \subseteq M$. Assuma também que S seja um subespaço linear. O span de S , ou o espaço gerado por S é definido como:

$$LinearSpan(S) = LS(S) = \bigcap_{\theta \in I} N_{\theta} \quad (5)$$

$LS(S)$ é então também um subespaço linear. Em outras palavras, o espaço gerado por S é a interseção de todos os subespaços lineares N_{θ} que contém S . Tal espaço não é vazio pois M contém S . Sabe-se também que $LS(S)$ é o menor subespaço linear que contém S .

Uma forte consequência da existência de $LS(S)$ é que este mesmo pode ser definido como uma combinação linear dos elementos de S . Assim, tem-se que:

$$LS(S) = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j : \alpha_j \in \mathbb{K}, x_j \in S, \forall n \geq 1 \right\} = Z \quad (6)$$

Caso S seja um espaço vetorial, dentro do $LS(S)$ haverá vetores que são independentes. Neste caso, diz-se que estes vetores são as bases do espaço vetorial S .

Mapas lineares e convexidade do espaço.

Mapas são funções que tomam um elemento em um dado espaço e o transportam para um outro espaço ou transformam-no em um outro elemento do mesmo espaço. Ainda que o assunto seja mais aprofundado somente nos s subsequentes, mapas lineares são comumente encontrados em diversas áreas da matemática: transformações afins, derivadas, funções afins, polinômios em geral etc. Sejam dois espaços lineares M e M^* postos sobre um corpo (ou campo) \mathbb{K} . Considere também a existência de um mapa qualquer $T: M \rightarrow M^*$.

Definição (Mapa linear): Um mapa T é dito linear se:

- i) $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in M$
- ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall x \in M, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

Definição (Isomorfismo): M e M^* são ditos isomorfos se existe um mapa linear $T: M \rightarrow M^*$ que seja uma bijeção.

Sem precisar de demonstrações, torna-se evidente que se N é um subespaço linear de M , T é um mapa linear, logo, $T(N)$ é um subespaço linear. Logo, se M é um espaço linear e T um mapa linear, logo M^* é um espaço linear.

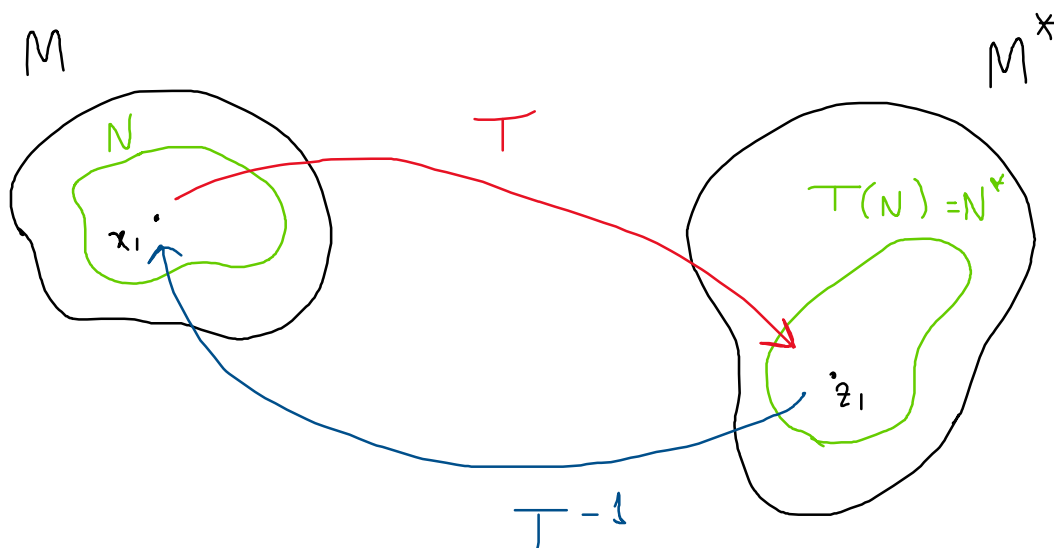


Figura 60. Mapa linear em espaços isomorfos (autor, 2020).

Um questionamento importante do mapeamento linear dos elementos de um espaço ou subespaço linear é se a combinação linear realizada resulta em um elemento do próprio espaço. Um espaço, ou subespaço, por mais que linear, não necessariamente permite que toda e qualquer combinação linear de seus elementos resulte em um elemento dentro do espaço original (Kühlkamp, 2016; Landim, 2020). Ao espaço onde isso é sempre verdade atribui-se o nome de espaço convexo.

Definição (*Espaço linear convexo*): Seja M um espaço linear posto sobre \mathbb{R} . Seja K um subespaço linear de M . K é dito convexo se $\forall x, y \in K, \forall \alpha \in [0, 1], \alpha x + (1 - \alpha)y \in K$.

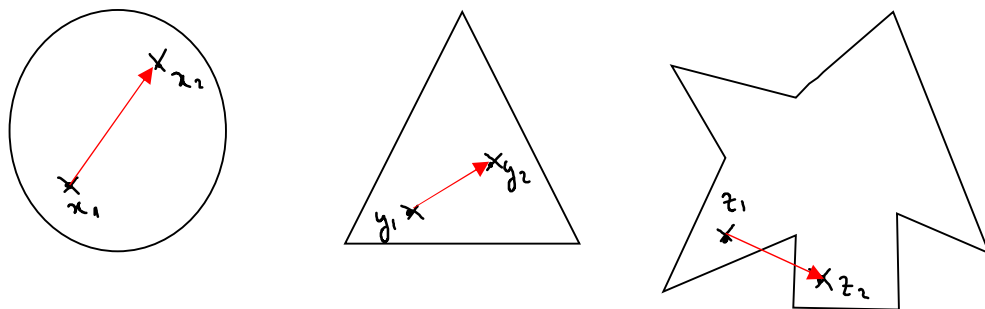


Figura 61. Exemplos de espaços convexos e um não convexo (autor, 2020).

A Figura 15 ilustra este conceito abstrato. Qualquer ponto dentro de um espaço circular pode ser descrito pela combinação linear de outro ponto qualquer. O mesmo é verdade para um espaço triangular. Esta afirmação não é válida para a figura em formato de estrela. Diz-se, de maneira informal, que um espaço está em *formato de estrela* quando de pelo menos um ponto deste espaço, alguém não conseguiria enxergar todas as arestas do espaço.

Por analogia a definição, diz-se que uma combinação linear é uma *combinação convexa* quando $\sum \alpha_j = 1$. Suponha um espaço linear não

totalmente convexo. Suponha também conjuntos menos deste espaço cujos pontos foram um conjunto convexo. A interseção destes conjuntos forma o *envelope convexo* do espaço (Kühlkamp, 2016; Landim, 2020). Logo, dado um certo espaço no qual se deseja trabalhar com a combinação linear de seus elementos, é desejável que se trabalhe apenas com os subespaços ou subconjuntos que estejam dentro do envelope convexo do espaço. A recíproca é óbvia: se um espaço é totalmente convexo então seu envelope convexo é idêntico ao espaço propriamente dito. Estas noções de convexidade do espaço são fundamentais na elaboração dos domínios materiais na teoria dos elementos finitos.

Normas

Elementos de um espaço métrico são relacionados entre eles por uma forma de medida. Na matemática aplicada e na física em geral, esta medida está fortemente ligada com o conceito de distância física. Entretanto, ainda nesta seção do trabalho, tenta-se manter a definição mais geral e abstrata dessa medida de distância entre elementos de um conjunto ou espaço métrico. Esta métrica, ou medida, é comumente chamada de norma. Uma norma deve satisfazer algumas propriedades fundamentais.

Definição (Norma): Uma norma num espaço vetorial V é uma função $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

- i) $|v| \geq 0$ e $|v| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- ii) $|\lambda v| = |\lambda||v|$
- iii) $|u + v| \leq |u| + |v|$

Na definição de norma, utilizou-se um novo conceito de um espaço específico, o espaço vetorial. Sua definição segue:

Definição (Espaço vetorial): Um espaço vetorial é um conjunto (ou espaço) de elementos chamados vetores que satisfazem os seguintes axiomas:

- i) Para cada par u e v , vetores de V , existe um vetor $u + v$ chamado de soma de u e v tal que:
 - a) A adição seja comutativa: $u + v = v + u$
 - b) A adição é associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$
 - c) Existe em V um único vetor 0 , denominado como origem, tal que $u + 0 = u$, $\forall u \in V$.
 - d) Para cada vetor u em V , existe um correspondente e único vetor $-u$ tal que $u + (-u) = 0$.
- ii) Para cada par, α e u , onde $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$, existe um vetor correspondente $\alpha u \in V$ chamado produto de α e u , tal que:
 - a) A multiplicação por escalares é associativa: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$.
 - b) $1u = u$, $\forall u \in V$
 - c) A multiplicação por escalares é distributiva com respeito a soma de vetores: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$, $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
 - d) A multiplicação de vetores por escalares é distributiva em relação a soma de escalares: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$.

Os axiomas acima não são independentes entre si, isto é, alguns podem ser consequência da associação de outros e vice-versa. Entretanto, são fundamentos teóricos necessários para o estudo destes objetos matemáticos que serão explorados ao longo de todo este trabalho. Em respeito à notação, quando um espaço vetorial está associado por estes axiomas a um espaço escalar, diz-se que o espaço V existe sobre o corpo ou campo de escalares \mathbb{K} .

O que se percebe com as definições acima é que obviamente não existe apenas uma norma, mas sim várias que obedecem aos axiomas

imposto (Landim, 2020; Volker, 2013; Halmos, 2017). Mais ainda, pode-se construir normas adequadas ao espaço no qual se deseja trabalhar. A construção de espaços e normas adequados é fundamental para análise de alguns problemas físico-matemáticos. Seja uma outra função que tome valores em um espaço vetorial V e devolva valores nos reais \mathbb{R} , chamada de produto interno.

Definição (*Produto Interno*): O produto interno em um espaço vetorial é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall u, v, w \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

- i) $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- ii) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- iii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
- iv) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

Percebe-se que o produto interno por si só não configura ser uma norma. É importante que se saiba previamente que uma norma não necessariamente é uma métrica. Uma métrica pode ser obtida a partir de uma norma. A partir de um produto interno uma norma pode ser facilmente construída. Propõe-se:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (7)$$

Nota-se que o produto interno nos reais é uma *forma bilinear* simétrica, propriedade amplamente explorada nos métodos numéricos para solução de equações diferenciais.

O objeto indicado pela equação (7) é uma norma construída a partir de um produto interno. Nota-se facilmente que tal construção obedece a todos os requisitos da definição de norma previamente explicada. Normas construídas com produtos internos são essenciais para o entendimento das relações dentro de espaços de Hilbert e Sobolev, espaços fundamentais na compreensão e resolução das equações de transporte que serão

abordadas neste trabalho. Assim como existem diversas normas, pode-se munir um espaço vetorial com diversas normas, gerando assim um espaço métrico diferente para cada tipo de norma a ele associado. Entretanto, apenas uma norma por vez pode ser fornecida a um espaço. Diz-se então que devido a pluralidade de normas que podem ser associadas a um dado espaço, estas normas podem ser correlacionadas. A relação entre normas permite que os extremos e limites de alguns espaços sejam determinados, mesmo que nem todas as normas a ele associado sejam correlacionáveis entre si. A correlação entre normas será explorada com maior detalhe nas próximas seções.

Sequências de Cauchy, espaços abertos, fechados e completos.

A caracterização dos espaços métricos é fundamental para a avaliação da continuidade e limitação dos elementos que nele habitam. Espaços métricos ditos fechados, abertos ou completos possuem informações diferentes sobre as relações entre seus elementos. A avaliação dessas condições de fechamento dos espaços parte do estudo do comportamento das sequências formadas por elementos deste mesmo espaço. Entre as sequências estudadas, tem-se a conhecida sequência de Cauchy.

Definição (*Sequência de Cauchy*): Uma sequência de Cauchy, ou sucessão de Cauchy, é uma sequência de elementos de um dado conjunto arbitrário (reais, espaço vetorial, racionais etc) que converge para um limite bem definido, isto é, a distância entre os termos se torna arbitrariamente pequena. Formalmente, diz-se que se em uma sucessão $x_j, j = 0, \dots, n$, $\exists \varepsilon > 0, \exists m, n > 0$ tal que $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$, então esta sequência é Cauchy.

Quando aplicada em espaços métricos, as sequências de Cauchy determinam o tipo de espaço no qual o problema se define. A avaliação das sequências de Cauchy dos elementos de um dado espaço determina a completude deste último.

Definição (*Espaço métrico completo*): Um espaço métrico M é dito completo em sua norma quando toda sequência de Cauchy de seus elementos converge para um elemento de M . Logo, afirma-se que $\forall x_j \in M, x_j \rightarrow x \in M$.

Além de completo, um espaço pode ser fechado ou aberto. Propõe-se então as seguintes definições.

Definição (*Espaços abertos e fechados*): Um espaço M é considerado aberto se, em relação a sua métrica, $\forall x, y \in M, \exists \varepsilon > 0$ tal que $d(x, y) \leq \varepsilon$. Define-se também um espaço aberto se todo elemento de M é o centro de uma bola aberta de raio ε tal que a bola aberta pertença a M . Os espaços fechados se definem pela recíproca.

Da definição acima seguem corolários fundamentais tal como:

- i) Qualquer união de subconjuntos ou subespaços abertos de M gera um espaço aberto.
- ii) Qualquer interseção finita de subespaços ou subconjuntos de M gera um espaço aberto.
- iii) Se em um espaço maior M existe o subespaço dos conjuntos vazios e M está contido na família de subespaços que o compõe, então M é aberto.

Todas as definições apresentadas até agora permitem que uma grande classe matemática seja definida, que será levada a partir deste subtema como base para a elaboração dos outros subtemas.

Definição (*Topologia*): No ramo da matemática voltado para o estudo dos espaços métricos e conjuntos, as relações espaciais entre o espaço métrico maior, suas famílias de subespaços métricos e suas respectivas métricas é chamado de *topologia*. Para ser considerado rigorosamente uma topologia, deve-se satisfazer:

- i) Seja N o conjunto de famílias de subespaços de M , espaço vazio \emptyset e M ele mesmo são elementos de N .
- ii) Qualquer união de elementos de N pertence a N .

iii) Qualquer interseção finita de elementos de N pertence a N .

O par (M, N) é chamado então de espaço topológico. Em alguns textos da literatura, encontra-se a notação M_N para se referir a um espaço M munido da topologia N .

Espaços Lebesgue e espaços de Banach.

Dentro da topologia aplicada a resolução de problemas de matemática aplicada, física e engenharia, se destacam alguns espaços métricos fundamentais, cujas propriedades topológicas são amplamente estudadas e revisadas frequentemente. Os espaços de Lebesgue e Banach talvez sejam os blocos fundamentais da construção da teoria moderna das equações diferenciais e serve como espaço de base para a construção de espaços mais ricos e complexos de grande importância para a análise numérica de diversos problemas (Brenner e Scott, 2008; Volker, 2013). Deseja-se então fazer uma breve introdução aos seus conceitos.

O espaço de Lebesgue recebe seu nome do matemático francês Henri Léon Lebesgue, conhecido por suas importantes contribuições na teoria da integração. Uma função é dita Lebesgue-integrável se:

$$\int_{\Omega} f(x) dx < \infty, \quad \forall x \in \Omega \quad (8)$$

Um espaço métrico é chamado de espaço de Lebesgue se seus elementos forem funções Lebesgue-integráveis e que este espaço seja munido da norma de Lebesgue. Para esta última, traz-se uma definição formal.

Definição (Norma de Lebesgue): Seja um escalar p tal que $1 \leq p < \infty$. A norma de Lebesgue se define por:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

Um subespaço do espaço de funções Ω posto sobre um corpo de escalares \mathbb{K} e munido da norma (9) é chamado de *espaço de Lebesgue* e é simbolizado pela notação $L^p(\Omega)$.

$$L^p(\Omega) = \left\{ f(x) : \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, x \in \Omega \right\} \quad (10)$$

Para o caso especial onde $p = \infty$, tal norma ganha o nome de supremo, ou *supremum*, e pode ser escrita como:

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} \quad (11)$$

Para que seja desfeita a ambiguidade, sugere-se distinguir supremo de máximo da função. O supremo é o maior valor alcançado pela função no dado subespaço Ω . O seu máximo é o maior valor alcançado em todo o espaço maior. Se o máximo da função for atingido dentro do subespaço definido, então o supremo se torna idêntico ao máximo. Por esta definição, nota-se que em todo espaço fechado munido de uma função contínua, o máximo coincide com o supremo.

O espaço de Banach, que recebe seu nome do matemático polonês Stefan Banach, possui uma definição mais simples, entretanto não menos importante.

Definição (*Espaço de Banach*): Seja um espaço vetorial munido de uma norma. Se toda sequência de Cauchy converge, em respeito a norma, para um elemento deste mesmo espaço, então este espaço é completo e é chamado de espaço de Banach.

As definições representadas em (8-11) foram dadas em relação a uma função $f(x)$. É importante reforçar que estas definições se aplicam também aos espaços vetoriais uma vez que cada elemento dos espaços vetoriais podem ser funções. Nota-se também que a função utilizada é avaliada em uma variável x , dita como variável de integração. De maneira mais geral, em topologia, as normas podem ser tomadas em relação a qualquer propriedade dos elementos dos espaços métricos. Sem aprofundar-se mais ainda na abstração matemática que exige tal teoria, diz-se que um espaço maior M , uma família de subespaços N e uma variável de medida μ , chamada somente de *medida* muitas vezes, formam o trio (M, N, μ) e as relações matemáticas entre os elementos de N e o espaço maior M são denominadas *σ -álgebra de Borel*.

Espaços de Hilbert e Sobolev

Com os espaços de Banach e Lebesgue apresentados formalmente, alguns espaços mais ricos devem ser agora abordados. Nesta parte, os espaços de Hilbert, que recebe o nome do matemático alemão David Hilbert, e Sobolev, que recebe o nome do matemático russo Sergei Sobolev, serão brevemente introduzidos em definições sucintas. Estes espaços fundamentam os teoremas de existência e unicidade das soluções rigorosas e aproximadas de equações diferenciais de natureza diversa. As consequências da existência de tais espaços serão abordadas ao longo do trabalho quando for necessário que sejam pontuadas.

Definição (*Espaço de Hilbert*): Seja M um espaço vetorial ou espaço de funções. Seja uma norma $\|\cdot\|_H$ construída a partir de um produto interno tal qual a norma apresentada em (7). Munindo o espaço vetorial M com a norma $\|\cdot\|_H$, obtém-se um espaço completo denominado espaço de Hilbert.

A norma $\|\cdot\|_H$ pode ser expressa por:

$$\sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|_H = \left(\int_{\Omega} u \cdot u \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Analogamente ao espaço de Hilbert, o espaço de Sobolev se define:

Definição (*Espaço de Sobolev*): Seja M um espaço vetorial ou espaço de funções. Seja os elementos deste espaço Lebesgue-integráveis, ou ao menos localmente Lebesgue-integráveis e de até α -ésima derivada fraca existente e Lebesgue-integrável. Seja este espaço munido de uma norma $\|\cdot\|_{W_p^k}$ tal que:

$$\|f\|_{W_p^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (13)$$

Onde $\alpha \in I, \alpha > 0, 1 \leq p < \infty, k < \infty$ e w simboliza que se trata de uma derivada fraca (*weak derivative*). Em (13), p é o grau de Lebesgue, α é o contador do grau da derivada e k é o maior grau da derivada fraca.

O conceito de derivada fraca será explicado com mais detalhes no segundo subtema deste trabalho. No momento, pode-se definir uma derivada fraca de uma função como uma derivada que não necessita existir em todos os pontos do domínio, mas que possa existir em quase todo o domínio, com exceção de pontos muito bem definidos. Um espaço de Sobolev então, de maneira informal, é um espaço de Lebesgue, completo, cujas funções são p -Lebesgue-integráveis em relação a norma e suas derivadas também.

Desigualdades notáveis das normas

Os espaços definidos até aqui são munidos de normas definidas pelas propriedades dadas na seção 1.3. Entendendo essas normas como uma forma abstrata de medir os elementos e distância entre os elementos de um espaço métrico, faz com que apareçam desigualdades notáveis e importantes de serem compreendidas. As desigualdades não serão demonstradas nesta seção, porém suas demonstrações aparecem de maneira clara em Brenner (2008) e Kühnkamp (2016).

- i) *Desigualdade de Minkowski*: Para $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$ tem-se que:

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

- ii) *Desigualdade de Hölder*: Para $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que p e q sejam conjugados pela forma $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e:

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

- iii) *Desigualdade de Schwarz*: É equivalente a desigualdade de Hölder para o caso especial onde $p = q = 2$, logo se $f, g \in L^2(\Omega)$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e:

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Estas séries de desigualdades são ferramentas poderosas para estimar valores médios, máximos ou mínimos de soluções para problemas integro-diferenciais.

Imersões de Sobolev

Os espaços de Sobolev são ricos em informações e a partir de restrições sobre a natureza dos seus elementos, outros espaços imersos no Sobolev podem ser identificados. Subespaços embebidos (ou imersos)

em espaços de Sobolev de ordem maior podem trazer informações importantes sobre o comportamento e regularidade das funções que nele habitam (Brenner e Scott, 2008). A primeira proposição torna-se óbvia quando se entende que quanto mais informações são impostas em um espaço, menor ele se torna. Propõe-se então:

Proposição (*Espaços de Sobolev ordenados pela derivada*): Seja Ω um domínio qualquer dentro de um espaço posto sobre um corpo de escalares. Seja também $k, m \in I$ tal que $k, m > 0$ e $k \leq m$. Seja p um número real, $p \in \mathbb{R}$ que satisfaça $1 \leq p \leq \infty$. Afirma-se então que $W_p^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$.

A proposição, de maneira mais informal, pode ser entendida como: Um espaço em que seus elementos sejam funções Lebesgue-integráveis e pelo menos segunda derivada seja Lebesgue-integrável, é necessariamente um subespaço de um espaço maior cujas funções devem ter pelo menos a primeira derivada Lebesgue-integrável, no caso de $m = 2, k = 1$.

Proposição (*Espaços de Sobolev ordenados pelo grau de Lebesgue*): Seja um domínio limitado Ω , tal que este seja espaço ou subespaço posto sobre um corpo de escalares. Seja p e q tal que $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $k \in I, k > 0$. Afirma-se então que $W_q^k(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$.

A proposição acima traz um importante resultado das imersões de Sobolev. Caso Ω seja um domínio limitado, um espaço de funções com pelo menos a k -ésima derivada q -Lebesgue-integrável é necessariamente subespaço do espaço maior das funções com pelo menos a k -ésima derivada p -Lebesgue-integrável.

Estas proposições permitem encontrar relações entre espaços de Sobolev de um mesmo domínio Ω , entretanto, não permitem ainda que relações sejam estabelecidas com qualquer outro espaço de Sobolev em todo \mathbb{R}^n . Para que o argumento ganhe informações necessárias para que tais tipo de relação sejam estabelecidas, define-se o conceito de espaços com fronteiras (contornos) Lipschitz-contínuas.

Definição (*Fronteiras Lipschitz-contínuas*): Um domínio Ω possui uma fronteira $\partial\Omega$ dita Lipschitz-contínua se e somente se existe uma coleção (ou família) de conjuntos abertos O_i , $\exists \varepsilon > 0, N \in I, M < \infty$ tal que $\forall x \in \partial\Omega$ a bola de raio ε centrada em x é contida em algum dos O_i , não mais do que N conjuntos da família dos O_i se interceptam não trivialmente, e cada domínio gerado por $O_i \cap \Omega = O_i \cap \Omega_i$ tal que Ω_i seja um domínio cuja fronteira seja uma função Lipschitz ϕ_i tal que $\|\phi_i\|_{Lipschitz(\mathbb{R}^{n-1})} \leq M$.

De definição de uma fronteira Lipschitz-contínua, emerge o teorema de extensão:

Teorema (*Extensão em espaços de Sobolev*): Seja um domínio limitado Ω com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz-contínua. Existe então uma extensão $E: W_p^k(\Omega) \rightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n)$ definida $\forall k \in I, k > 0$ e $\forall p$ tal que $1 \leq p \leq \infty$ que satisfaz a relação $E(v)|_{\Omega} = v$, $\forall v \in W_p^k(\Omega)$ e que se limita na desigualdade $\|E(v)\|_{W_p^k(\mathbb{R}^n)} \leq C \|v\|_{W_p^k(\Omega)}$, onde C é independente de v .

O teorema da extensão em espaços de Sobolev é o caso especial do *teorema da extensão de Hanh-Banach* sobre a extensão de funcionais em um subespaço para o espaço maior. Finalmente, pode-se introduzir o principal teorema das imersões e relações em geral dos espaços de Sobolev, conhecido como o teorema da desigualdade de Sobolev.

Teorema (*Desigualdade de Sobolev*): Seja Ω um domínio n -dimensional com fronteira Lipschitz-contínua. Seja $k \in I, k > 0$ e seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq q$ tal que:

- i) $k \geq n$ quando $p = 1$
- ii) $k > n/p$ quando $p > 1$

Afirma-se então que existe uma constante C tal que $\forall u \in W_p^k(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^k(\Omega)} \quad (14)$$

A equação (14) é a definição básica de uma função limitada. O resultado resumido pela equação (14) é importante pois afirma que qualquer função com desejável regularidade em suas derivadas fracas

pode ser vista como uma função limitada e contínua. Com este resultado, aproximações como a expansão em polinômios ou séries de potência em geral podem ser, com certo cuidado, obtidas.

Funcional linear, teorema da representação de Riesz e teorema de Lax-Milgram.

Esta última parte do subtema traz definições formais e sucintas de objetos matemáticos e teoremas neles aplicados que são importantes para o entendimento da validade matemática dos métodos numéricos modernos.

Definição (*Funcional linear*): Toda função cujo domínio é um espaço vetorial e o contradomínio é o corpo dos escalares é chamada de funcional. Logo, tem-se a forma geral $L: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Apesar da curta definição, um funcional (podendo assim omitir o termo linear) é entendido com uma função que toma valores de funções em um espaço de vetorial e a transforma em um número. Neste trabalho, trata-se apenas de funcionais lineares.

Teorema (*Representação de Riesz*): Todo funcional L linear, contínuo e limitado aplicado em um espaço de Hilbert H pode ser representado de maneira única por:

$$L(v) = (u, v) \quad (15)$$

Para um fixo $u \in H$. Afirma-se também que $\|L\|_{H^*} = \|u\|_H$, isto é, a norma do funcional do espaço dual ao Hilbert H é igual a norma de u no espaço de Hilbert original.

Devido a importância deste teorema em todo o desenvolver deste trabalho, decide-se que sua prova seja apresentada.

Prova: A prova deve ser realizada em duas etapas. A primeira etapa provará a unicidade de uma suposta representação dada pela equação (15). A segunda etapa provará sua existência.

A unicidade da representação (15) emerge da *não-degeneração* do produto interno, isto é, da propriedade do produto interno em ser uma aplicação isomorfa. Verifica-se então:

$$L(u_1 - u_2) - L(u_1 - u_2) = 0 \quad (16.a)$$

Logo, se (15) for verdade:

$$(u_1, u_1 - u_2) - (u_2, u_1 - u_2) = 0 \quad (16.b)$$

Gerando finalmente:

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \quad (16.c)$$

Onde (16.c) implica que $u_1 = u_2$ e prova-se a unicidade da representação de Riesz.

Seja M o espaço $M := \{v \in H : L(v) = 0\}$, isto é, um hiperplano do espaço de Hilbert H tal que o valor do funcional seja nulo. Este espaço também pode ser chamado de espaço nulo ou núcleo de H . Seja também o seguinte lema:

Lema (*Decomposição em projeção ortogonal*): Seja M um subespaço do espaço de Hilbert H e $v \in H$. Afirma-se que existe uma única decomposição $v = P_M v + P_{M^\perp} v$, onde $P_M: H \rightarrow M$ e $P_{M^\perp}: H \rightarrow M^\perp$. Qualquer elemento de H pode então ser escrito como a soma direta de um elemento

de M e um elemento do espaço perpendicular a M , dito M^\perp , logo, $H = M \oplus M^\perp$.

Sabe-se então que $H = M \oplus M^\perp$. O caso em que o espaço perpendicular é composto apenas pelo elemento $\{0\}$ corresponde a solução trivial $L \equiv 0$. Admita então o caso em que o espaço perpendicular a M não seja somente o elemento $\{0\}$. Fixe um $z \in M^\perp$ tal que $z \neq 0$. Tome um $v \in H$ e admita um escalar $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $\beta = L(v)/L(z)$. Pela linearidade do funcional:

$$L(v - \beta z) = L(v) - L(\beta z) = L(v) - \beta L(z) = 0 \quad (17)$$

O que diretamente implica que $(v - \beta z) \in M$. Decompõe-se o elemento $v - \beta z$ pelo lema da decomposição em projeção ortogonal tal que $P_M v = v - \beta z$ e $P_{M^\perp} v = \beta z$. No caso particular onde $v \in M^\perp$, obtém-se $v - \beta z = 0$ e então $v = \beta z$, provando que M^\perp é um espaço, ou hiperplano, unidimensional. Tome um elemento u tal que:

$$u := \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z \quad (18)$$

Onde $u \in M^\perp$. Pela proposta do teorema da representação de Riesz, pode-se escrever:

$$(u, v) = (u, (v - \beta z) + \beta z)$$

$$(u, v) = (u, v - \beta z) + (u, \beta z)$$

Como sabe-se que $u \in M^\perp$ e que $(v - \beta z) \in M$:

$$(u, v) = (u, \beta z)$$

Pela própria definição de u :

$$(u, v) = \beta \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} (z, z)$$

$$(u, v) = \beta L(z)$$

Finalmente, pela própria definição de β :

$$(u, v) = L(v) \quad (19)$$

Pela definição de uma norma em um espaço dual e utilizando-se da desigualdade de Schwarz, demonstra-se facilmente a equivalência entre as normas propostas no teorema. ■

Neste ponto, um outro teorema fundamental da topologia e análise funcional aplicada a resolução de problemas físicos é o teorema de Lax-Milgram. O teorema é forte o suficiente para provar que funcionais determinados pela representação de Riesz, simétricos e assimétricos, caso bem postos, possuem uma única solução (Landim, 2020; Brenner e Scott, 2008).

Teorema (Lax-Milgram): Seja um espaço de Hilbert V . Seja também uma forma bilinear $a(.,.)$ coerciva e contínua e um funcional linear contínuo $F \in V^*$. Afirma-se então que exista um único $u \in V$ tal que: $a(u, v) = F(v)$, $\forall v \in V$.

Prova: A prova deste teorema pode ser feita de maneira sucinta uma vez que várias propriedades necessárias para a prova já foram determinadas ao longo desta seção. Se a forma bilinear é coerciva e contínua, então ela pode ser escrita como:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad (20. a)$$

Pela representação de Riesz, pode-se dizer que exista uma relação $a(u, v) = Au(v)$, e logicamente $a(u, v) = Au(v) \in V^*$. Assuma agora que exista um mapa um-para-um, τ , que toma valores do espaço de Hilbert V e devolva valores em seu dual, V^* . Ainda pelo teorema da representação de Riesz, sabe-se que $\forall \phi \in V^*, \exists \tau\phi \in V$ tal que $\tau\phi$ seja único e que $\phi(v) = (\tau\phi, v), \forall v \in V$. Logo, existe um único u tal que:

$$Au = F, \text{ em } V^* \quad (20. b)$$

Ou, pelo mapa:

$$\tau Au = \tau F, \quad em V \quad (20.c)$$

Devido a propriedade de ser um mapa um-para-um, a equação (20.c) se resolve utilizando-se o lema dos mapas de contração, explicado com clareza no livro de Brenner e Scott (2008) e Ramanujan (1997). Pelo princípio dos mapas de contração, sabe-se que existe um único $u \in V$ tal que:

$$Tu = u - \rho(\tau Au - \tau F) = u \quad (20.d)$$

Ou seja, $\rho(\tau Au - \tau F) = 0$, onde se sabe que um ρ existe e é único. ▀

Com isso, conclui-se a exposição sobre a base teórica necessária sobre topologia e espaços métricos que fundamentarão os próximos subtemas.

Referências bibliográficas

AKBULUT, N.; WISZNIEWSKI, M.; CALABAR, A. F. Influences of grain shape and size distribution on permeability, **Proceedings of the TC105 ISSMGE International Symposium on Geomechanics from Micro to Macro**, IS-Cambridge, p.1451-1454, 2014.

ALLAIRE, Grégoire. Homogénéisation des équations de Navier-Stokes, **Tese de doutorado**, Université Pierre et Marie Curie, matemática, 1990.

ALLAIRE, Grégoire. Homogenization of the Navier Stokes equations in open sets perforated with tiny holes I. Abstract Framework, a Volume Distribution of Holes, **Archives of Rational Mechanics**, 113, p.209-259, Springer Verlag, 1991.

ALLAIRE, Grégoire. Homogenization of the Navier-Stokes equations with a slip boundary condition, **Communications on Pure and Applied Mathematics**, 44, issue 6, p.605-641, 1991.

ALLAIRE, Grégoire. Introduction to Homogenization Theory, Ecole Polytechnique, **Notas de Aula**, 2, 13 a 16 de Dezembro, 2010.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS. **ASTM-D2487-17**: Standart Practice for Classification of Soils for Engineering Purposes (Unified Soil Classification System), 2017.

ARBIETO, A; OBATA, D. J. On attractors and its basins for generic diffeomorphisms, **Mathematics Subject Classification**, Brasil, 1991.

ARSENEY, A. A. Construction of a turbulence measure for the system of Navier-Stokes equations, **Mathematical USSR Society**, 30, pg. 179–186, 1976.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR-6502**: Solos e rochas – terminologia, 1995.

BEAR, Jacob. **Dynamics of fluids in porous media**, Dover Publications, 1985. (originalmente 1972).

BEAR, Jacob; BACHMAT, Y. A generalized theory on hydrodynamic dispersion in porous media, **I.A.S.H. Symp. Artificial Recharge and Management of Aquifers**, Haifa, Israel, IASH, P.N. 72, 7-16, 1967.

BEAR, Jacob; BACHMAT, Y. Hydrodynamic dispersion in non-uniform flow through porous media, taking into account density and viscosity differences, **Technion**, Israel, P.N, 1966.

BEAR, Jacob; ZASLAVSKY, D; IRMAY, S. Physical properties of water percolation and seepage, **UNESCO**, Paris, 1968.

BIEZENO, C. B., KOCH, J. J. Sobre o cálculo de asas de avião em balanço (alemão), **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, 6(2), pg 97-105, 1926.

BLANCO, P. J.; CLAUSSE, A.; FEIJÓ, R. A.; Homogenization of the Navier-Stokes equations by means of the Multi-scale Virtual Power Principle, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 315, p760-779, 2016.

BRENNER, Suzane; SCOTT, Ridgway. The mathematical theory of finite element methods, **Texts in applied mathematics 15**, Springer-Verlag New York, s 0 – 3, 2008.

BRINKMAN, Henry. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, **Appl. Sci. Res.** Vol A1, 1947.

BUESCU, J. Exotic Attractors, 1, **Birkhäuser Verlag**, Switzerland, 1997.

BUNOIU, Renata; DONATO, Patrizia. Unfolding homogenization in doubly periodic media and applications, **International Journal of Applicable Analysis**, Vol 96, Issue 13, 2017.

BURKE, S. P; PLUMMER, B. Gas flow through packed columns, 2nd. **Eng. Chem.**, 1928.

CALABAR, A.; AKBULUT, N. Evalutation of actual and estimated hydraulic conductivity of sands with different gradation and shape, **Spring Open**, 2016.

CARMAN, P. C. Fluid flow through a granular bed, **TICE**, Londres, 15, 1937.

CARVALHO, Márcio; VALÉRIO, Juliana. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos: Aplicação em Dinâmica dos Fluidos**, SBMAC, 2012.

CHIPOT, M. Variational Inequalities and Flow in Porous Media, **Springer-Verlag New York**, 1984.

CHORIN, Alexander J. Vorticity and Turbulence, **Applied Mathematical Sciences**, vol. 103, Springer-Verlag, New York, 1994.

CHORIN, Alexander. J.; MARSDEN, Jerrold. E. **A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics**, Springer Verlag, 1993

CHRISTENSEN, Ole. **Functions, Spaces, and Expansions: Mathematical Tools in Physics and Engineering**, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Basel, 2010.

CIORANESCU, Doina; MURAT, François. A strange term coming from nowhere, **Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications**, vol 31, p.45-93, Birkhäuser, 1997.

CIORANESCU, Doina; MURAT, François. Un terme étranger venu d'ailleurs 1 et 2, **Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Collège de France Seminar**, Vol II e III, ed. Brézis e Lions, p98-138, p.154-178, 1985.

COLLINS, R. E. **Flow of Fluids Through Porous Materials**. Reinhold, New York, 1961.

CONSTANTIN, P.; FOIAS, C.; TEMAM, R. Attractors representing turbulent flows. **Memoirs American Mathematical Society**, 314, 1985.

COSTA, David G. **An Invitation to Variational Methods in Differential Equations**, Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbcher, Birkhäuser Boston, 2007.

DARCY, Henry. **Les fontaines publiques de la ville de Dijon**, Dalmont, Paris, 1856.

DUDGEON, C. R. An experimental study of the flow of water through coarse granular media, **La Houille Blanche** 7, 785-801, 1966.

E. GUSTAFSON, Karl. **Introduction to Partial Differential Equations and Hilbert Space Methods**, Dover, s 2 e 3, 1982. [1] VOLKER, John. *Numerical Methods for Partial Differential Equation*, Weierstrass Institute, Berlim, 2013.

ECKHAUS, W. Studies in nonlinear stability theory, **Springer Verlag**, New York, 1965.

ERGUN, S; ORNING, A. Fluid flow through randomly packed columns and fluidized beds, **Ind. Eng. Chem.**, 41, 1949.

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society, 1998.

FAIR, G. M; HATCH, L. P. Fundamental factors governing the streamline flow of water through sand, **J. Amer. Water Works Ass.** 26, 1651-1666, 1933.

FANNING, J. T. A practical treatise on hydraulic and water-supply engineering, **D. Van Nostrand**. ISBN 978-5-87581-042-8, 1896.

FINLAYSON, Bruce A. The method of weighted residuals and variational principles, **Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)**, 2014.

FOIAS, C.; TEMAM, R. Some analytic and geometric properties of the solution of the evolution Navier-Stokes equations, **Journal of Pure and Applied Mathematics**, 58, p.339-368, 1979.

FORCHHEIMER, Phillip. **Wasserbewegung durch Boden**, 2ª versão, (alemão), 1901.

GEORGESCU, Adelina, **Hydrodynamic Stability Theory**, Springer-Science + Business Media, 1985.

HALMOS, Paul R. **Finite-Dimensional Vector Spaces**, Segunda Edição, Dover Publications, 2017.

HATTAMLEH, O.; RAZAVI M.; MUHUNTHAN, B. Experimental determination of representative elementary volume of sands using X-ray computed tomography, **WIT Transactions on Engineering Sciences**, 64, p.145-153, 2009.

HEINRICH, Juan C.; PEPPER, Darrell W. **The finite element method: Basic concepts and applications with MATLAB, MAPLE and COMSOL**, Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences, 3ª Edição, CRC Press, 2017.

HEISENBERG, W. Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen, **Ann. d. Phys.**, Leipzig, (4), 74, 577-627, 1924.

HÖFER, Richard. Homogenization of the Navier-Stokes equations in perforated domains in the inviscid limit, **arXiv**, Analysis of PDEs, 2022.

HOPF, E. Statistical hydromechanics and functional calculus. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, 01, pg. 87–123, 1952.

HUANG, Y; ZHENGMIN, Y; YING, H; XUEWU, W. An overview on nonlinear porous flow in low permeability porous media, **Theoretical and Applied Mechanics Letters**, 3, 2013.

HUBBERT, M. K. Darcy law and the field equations of the flow of underground fluids, **Trans. Amer. Znsf. Min. Metal. Eng.** 207. 222-239, 1966.

HUBBERT, M. K. The theory of ground water motion, **J. Geol.** 48, 786-944, 1940.

IRMAY, S. Réfraction d'un écoulement à la frontière separant deux milieux poreux anisotropes differents, **C.R.H. Acad. Sci.**, 269, 1964.

KHENNANE, Amar. **Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB® and Abaqus**, Boca Raton, Taylor & Francis, 2013.

KOLLMANN, Wolfgang. **Navier Stokes Turbulence: Theory and Analysis**, Springer Nature Switzerland AG, 2019.

KOLMOGOROV, A. N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, **Proceedings of the USSR Academy of Sciences**, 1941.

KÜHLKAMP, Nilo. **Introdução à Topologia Geral**, Editora UFSC, 3º edição, 2016.

LANDAU, L. On the problem of turbulence, **C.R. Acad. Sc. USSR**, 44, 1944.

LANDIM, Cláudio. **Notas de aula do curso de Análise Funcional do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)**, 2020.

LANGTANGEN, Hans Petter; LOGG, Anders. **Solving PDEs in Python**, The FEniCS Tutorial-Springer, 2016.

LEI, G; NAI, C; DI, L; HUIJIE, W. A non-linear flow model for porous media based on conformable derivative approach, **MDPI**, 2018.

LERAY, J. **Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique**, Dissertação de mestrado, École Normale Supérieure, 1933.

LEVICKY, R. **Introduction to Turbulent Flow**, Lecture Notes, 2016.

LI, Yibao; CHOI, Jung-II; CHOIC, Yongho; KIM, Junseok. A simple and efficient outflow boundary condition for the incompressible Navier–Stokes equations, **Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics**, 11:1, 69-85, 2017.

LINDQUIST, E. On the flow of water through porous soil, **Premier Congrès des Grands Barrages**, Estocolmo, 6, 81-101, 1933.

MAYLIBAEV, Alexey. **Fluid Dynamics**, notas de aula, IMPA, Brasil, 2019.

MEISE, Reinhold; VOGT, Dietmar; RAMANUJAN, M. S. **Introduction to Functional Analysis**, Clarendon Press, Oxford University Press, 1997

NUTTING, P. G. Physical analysis of oil sands, **Bull. Amer. Ass. Petr. Geol.** 14, 1337-1349, 1930.

ODEN, J. Tinsley; REDDY, J. N. **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**, John Winley & Sons, 1976.

ONSAGER, L. Fluctuations and irreversible processes, **Physical Review**, 51-1505, 1953.

ONSAGER, L. **notas privadas**, LOA, NTNU, 1975.

ORR, W; ME, F. The stability or instability of the steady motion of a liquid, Part II, A viscous liquid, **Proc. Roy. Irish Acad.**, A 27, 69-138, 1907.

POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Y. **Theory of ground water movement**, Princeton University Press, Moscow/Princeton, 1952.

QUINTARD, Michel; DAVIT, Yohan. Technical Notes on Volume Averaging in Porous Media I: How to Choose a Spatial Averaging Operator for Periodic and Quasiperiodic Structures, **Transport in Porous Media**, 119, pg 555-584, 2017.

QUINTARD, Michel; WHITAKER, Stephen. Coupled, Nonlinear Mass Transfer and Heterogeneous Reaction in Porous Media, **Handbook of Porous Media**, CRC Press, ISBN 9780429104268, 2005.

REMPFER, Dietmar. On Boundary Conditions for Incompressible Navier-Stokes Problems, **Applied Mechanics Review**, ASME, Vol. 59, 2006.

RICHARDSON, L. F. **Weather prediction by numerical process**, Cambridge University Press, 1922.

ROMANEL, Celso. **Métodos Numéricos em Engenharia Civil**, Notas de aula, PUC-Rio, 2019.

ROSE, H. E. An investigation into the laws of flow of fluids through beds of granular material, **Proc. Znst. Mech. Eng.** 168, 141-148, 1946.

RUAS, Vitoriano. **An Introduction to the Mathematical Foundations of the Finite Element Method**, Universidade Federal Fluminense, 2002.

RUELLE, D. **Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory**, Academic Press, 1989.

SCHEFFER, V. **Turbulence and Hausdorff dimension**, Lecture Notes in Mathematics, 565, Springer, Berlin, 1976.

SCHEIDEGGER, A. E. **The Physics of Flow Through Porous Media**, 2ª ed., University of Toronto Press, Toronto, 1960.

SCHNEEBELI, G. Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration, **La Huille Blanche No. 2**, 10, 141-149, 1966.

SERRIN, J. **Mathematical principles of classical fluid mechanics**, Springer-Verlag, Berlin (West) - Gottingen - Heidelberg, 1959.

SIMPSON, Guy. **Practical Finite Element Modelling in Earth Science using MatLab**, Wiley, 2017.

STUART, J. T. Nonlinear stability theory, **Annual Review of Fluid Mechanics**, 3, 1971.

STUART, J. T. On the non-linear mechanics of disturbances in stable and unstable parallel flows (parte I, The basic behaviour in plane Poiseuille flow), **J. Fluid Mech.** , 9, 353, 1960.

STUART, J. T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability, **J. Fluid Mech.**, 4, 1958.

SVANSTED, Nils; WELLANDER, Niklas. Multiscale Homogenization of the Navier–Stokes Equation, **Springer-Berlin Heidelberg**, 2006.

TARTAR, Luc. Compensated compactness and partial differential equations, **Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium, volume IV**, p.136-212, Pitman, 1979.

TARTAR, Luc. **The General Theory of Homogenization**, Lecture notes of the Unione Matematica Italiana, 7, Springer, 2010.

TAYLOR, G. I. Statistical theory of turbulence. **Proceedings of Royal Society**, Londres, 151, pg. 421–478, 1935.

VOLKER, John. **Numerical Methods for Partial Differential Equation**, 3, Weierstrass Institute, Berlim, 2013.

WARD, J. C. Turbulent flow in porous media, **Proc. Amer. SOC. Civil Eng.** No. HY5, 90, 1964.

WATSON, J. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, (Parte II, The development of a solution for plane Poiseuille flow and plane Couetteflow, **J. Fluid Mech**, 9, 371-389, 1960.

WHITAKER, Stephen. Flow in Porous Media I: A Theoretical Derivation of Darcy's Law, **Transport in Porous Media I**, p.3-25, D. Reidel Publishing Company, 1986.

WHITE, A. M., **Notas**, Trans. Amer. Inst. Chem. Eng. 81, 390f., 1935.

WOOD, Brian D.; Xiaoliang HE, Xiaoliang; SOURABH, V., Modeling Turbulent Flows in Porous Media, **Annual Review of Fluid Mechanics**, 2020.

WRIGHT, D. E. Nonlinear flow through granular media, **Proc. Amer. Soc. Civil Eng. Hydraul. Div.** No. HY4, 94, 851-872, 1968.

YANG, Bing; LIU, Yifei; WAN, Fentao; YANG, Tao; FENG, Jun; ZHAO, Xingquan; ZHENG, Dongsheng. Experimental Study on Influence of Particle-Size Distribution on Permeability Coefficient of Sand, **Journal of Southwest Jiaotong University**, vol 51, 5, 2016.