

5

Aplicações de Opções Reais Híbridas em Petróleo

5.1.

Introdução

Esse capítulo desenvolve aplicações dos conceitos apresentados nos capítulos 2, 3 e 4. São aplicações de opções reais (OR) combinando conceitos tradicionais dessa literatura, sumarizados no cap. 2, com conceitos de outras teorias, desenvolvidas/mostradas nos capítulos 3 e 4. Em todas essas aplicações estarão presentes as incertezas técnicas e de mercado, sendo particularmente relevante e comum a todas essas aplicações o papel do *valor da informação*.

Essas aplicações analisam decisões de investimento e valores de oportunidades de investimento em exploração e produção de petróleo (E&P). Dessa forma, outra característica comum é que existe um tempo legal de expiração da OR para descobrir e/ou desenvolver uma reserva descoberta. Tendo a OR *maturidade finita*, serão requeridos métodos numéricos padrões.

O capítulo 5 é particularmente útil para mostrar o poder prático das OR híbridas, já que os problemas aqui abordados são considerados relativamente complexos. Será mostrada a utilidade dos métodos apresentados nos caps. 2 e 3. Aqui serão apresentadas duas aplicações, sendo que uma pode ser classificada como de OR Bayesianas e a outra pode ser classificada como um jogo de OR.

Na primeira aplicação se estudará o caso de um campo de petróleo já descoberto, com um certo grau de delimitação, mas com alguma incerteza técnica residual sobre o volume e a qualidade da reserva. Existe a opção de desenvolver o campo, mas existem também K alternativas de investimento em informação que podem reduzir essa incerteza técnica. Ao mesmo tempo, os preços do petróleo seguem um processo estocástico, assim como o investimento é permitido também seguir um processo estocástico correlacionado com os preços do petróleo. O exemplo procura responder perguntas como: qual o valor do campo na presença de incerteza técnica? É melhor investir em informação antes de desenvolver? Qual a melhor alternativa de investimento em informação? Os conceitos de distribuição

de revelações e de medidas de aprendizagem, desenvolvidas no cap. 3, serão bastante úteis nesse contexto. A solução é relativamente simples.

Na segunda aplicação será considerada a interação estratégica entre companhias de petróleo com ativos exploratórios vizinhos e correlacionados. Serão úteis os conceitos desenvolvidos no cap. 4 sobre a teoria dos jogos e sobre a teoria dos jogos de OR. Essa aplicação pode ser vista como a integração de dois modelos de jogos de OR, um jogo não cooperativo (guerra de atrito) e um jogo cooperativo (barganha). Esses jogos são relacionados no sentido que o equilíbrio de um jogo pode ser usado como dado de entrada do outro jogo. Aqui a incerteza sobre a existência de petróleo é a incerteza técnica primária. Sendo essa incerteza correlacionada entre os prospectos de duas diferentes companhias de petróleo, o conceito de processo de revelação é usado para ajudar a quantificar os valores envolvidos na interação estratégica entre as firmas. Esse valor depende de qual jogo é praticado. Essa aplicação procura responder perguntas tais como: qual o valor das firmas em cada jogo? Qual as estratégias ótimas em equilíbrio? Qual jogo jogar e qual o valor de trocar de jogo?

5.2.

Seleção de Alternativas de Investimento em Informação

5.2.1.

Introdução

Uma companhia de petróleo possui direitos de concessão sobre um campo de petróleo não desenvolvido com incertezas técnicas residuais sobre o volume e a qualidade da reserva de óleo³³⁴. Em adição, a companhia observa o mercado e faz decisões baseadas no preço de longo prazo do preço do petróleo, função dos mercados à vista e futuro. Esse preço de longo prazo segue um processo estocástico. O investimento pode ter também incerteza de mercado e ser correlacionado com o preço do petróleo. A firma pode investir em informação antes de desenvolver o campo. Existem K alternativas de investimento em informação. Cada uma com diferentes custos, prazos de revelação de informação e capacidades de reduzir a incerteza técnica. Nesse contexto deve ser considerado que existe um tempo legal que expira a opção de desenvolver esse campo: se até

³³⁴ Esse tópico é baseado no artigo Dias (2002).

essa data o campo não for desenvolvido, a firma perde os seus direitos de concessão e o governo readquire os direitos sobre esse campo de petróleo.

Aqui a modelagem do problema usará o desenvolvimento realizado no cap. 3. Em particular, se mostrará a força e a utilidade prática do conceito de *distribuição de revelações*, a distribuição de *expectativas condicionais* onde o condicionante é a informação revelada pelo investimento em informação. Cada alternativa de investimento em informação terá as suas distribuições de revelações (uma para cada incerteza técnica), que serão determinadas apenas pelas distribuições a priori das incertezas técnicas (distribuições comuns a todas as alternativas) e pelas medidas de aprendizagem (específicas de cada alternativa de investimento em informação) η^2 , medidas essas diretamente relacionadas com as variâncias da distribuições de revelações. Essas distribuições de revelações serão usadas numa simulação de Monte Carlo que, combinada com o método tradicional de solução de OR (solução de uma EDP), irá resolver o problema.

5.2.2.

O Efeito da Incerteza Técnica no VPL de Desenvolvimento

Para poder avaliar o valor da OR é necessário saber o valor que se obtém com o exercício da OR de desenvolvimento, i. é, o VPL de desenvolvimento³³⁵. A função VPL de desenvolvimento foi discutida com algum detalhe no cap. 2 (item 2.3). Nessa seção se verá principalmente como quantificar o efeito negativo da incerteza técnica na função VPL. Isso independe do modelo específico que se adote. O motivo é que o dimensionamento ótimo do investimento é feito assumindo valores para as variáveis técnicas tais como o volume e a qualidade da reserva ou é um investimento ótimo para um cenário mas não para os outros³³⁶. Na presença de incerteza técnica, quase certamente os verdadeiros valores dessas variáveis serão diferentes dos cenários nos quais foi projetado o sistema de produção. Isso só se saberá *ex post*, quando o investimento já tiver sido feito. É necessário pelo menos se saber a perda esperada no VPL causada pela incerteza técnica. Isso pode ser feito de forma natural com uma simulação de Monte Carlo.

³³⁵ Não se está considerando as OR operacionais tais como a de parada temporária e a de abandono, apenas as OR de aprendizagem e de momento ótimo do desenvolvimento do campo.

³³⁶ Ou, de forma equivalente, o valor do investimento I_D que maximiza o VPL para um cenário técnico, não necessariamente irá maximizar o VPL se ocorrer outro cenário *ex post*, a não ser que a diferença entre os cenários seja muito pequena.

Aqui será apresentada uma maneira específica de se fazer isso, considerando os principais fatos estilizados dessa análise, mas com simplificações práticas.

Como foi visto, o VPL é a diferença entre o valor do ativo básico “reserva desenvolvida” (V) e o valor do investimento para desenvolver o campo I_D , rever a eq. (1). O valor do ativo básico é uma função crescente do preço do petróleo (P), do volume de reservas (B) e da qualidade da reserva (q). Aqui se adotará o modelo de negócios para o valor do ativo básico V (eq. 23), por ser mais simples e resultar em valores de OR mais conservadores do que a alternativa do modelo de fluxo de caixa rígido. Mas a metodologia da aplicação aqui mostrada pode ser estendida facilmente, como menores adaptações, para outros modelos da função $V(P, B, q)$, já que a EDP do valor da OR é escrita na variável preço do petróleo, que segue um processo estocástico definido, com a função $V(P, B, q)$ aparecendo somente nas condições de contorno³³⁷.

O valor do investimento no desenvolvimento da reserva (o preço de exercício da OR de desenvolvimento) é, em geral, uma função do volume de reservas (ver eq. 28) e pode também seguir um processo estocástico (ver eq. 29), i. é, o caso geral é $I_D(B, t)$, em que se multiplica um choque estocástico à função determinística $I_D(B)$. A função $I_D(B)$ é uma função otimização do investimento com a informação sobre o volume de reserva do campo. Ou seja, dado um volume de reserva B , o dimensionamento ótimo do investimento para desenvolver essa reserva deve ser uma função crescente de B , refletindo a necessidade de mais poços, maior capacidade de processo, maior diâmetro de dutos, etc³³⁸. Ver no cap. 2 porque o investimento é assumido não ser função de q e porque uma função linear de B é razoável para o dimensionamento ótimo de I_D . No exemplo numérico não será considerada a incerteza de mercado em I_D , mas será mostrado que a metodologia de solução não muda, especialmente se essa incerteza de mercado for um MGB correlacionado com um MGB para os preços do petróleo. Em caso de outros processos estocásticos para essas variáveis, terá de haver uma pequena adaptação da metodologia³³⁹.

³³⁷ Note que *não* existe na EDP termos de “fluxo de caixa”, pois o valor da OR é o valor da reserva não-desenvolvida, que não gera fluxos de caixa antes de seu exercício.

³³⁸ Por simplicidade, não se está considerando alternativas de escala de investimento em função do preço do petróleo, como no item 2.4.2.

³³⁹ Com as variáveis P e I_D seguindo MGB's, se poderá usar uma curva de gatilhos *normalizada*, que reduzirá dramaticamente o tempo computacional. Para outros processos

Dessa forma, substituindo a eq. (23) na eq.(1) e considerando $I_D(B, t)$, pode-se escrever a equação do VPL de desenvolvimento, em valor presente na data de início de investimento, como a seguinte função das variáveis chaves q , B , P , e I_D :

$$\text{VPL} = V - I_D = q B P(t) - I_D(B, t) \quad (324)$$

Essa equação vale para o caso em que *não* existe incerteza técnica em B e q . No caso de haver incerteza técnica nesses parâmetros, o caminho natural é trabalhar com o *valor esperado* desses parâmetros, a fim de minimizar o erro técnico de dimensionamento. Por ex., na eq. (59) se usa $E[B]$ para estabelecer o valor de I_D . O problema é que, em geral, q e B *não* são independentes, ou seja, em geral o produto $q B < E[q] E[B]$, ver a eq. (60) e a discussão que se seguiu. O ponto é que se o investimento se mostrar subdimensionado, então mesmo que toda a reserva B possa ser extraída com a capacidade subdimensionada, o valor presente da reserva (produto $q B P$) será menor devido à taxa de extração mais lenta³⁴⁰. Isso porque, caso se faça um certo dimensionamento de capacidade e se descobrir *depois* que a reserva é maior ou mais produtiva, então a capacidade instalada será uma restrição e a reserva B não poderá ser produzida na velocidade refletida no valor de q . Esse é o lado da *ameaça* da incerteza técnica: o dimensionamento (leia investimento) será quase certamente sub-ótimo na presença da incerteza técnica, pois *ex post* a capacidade instalada com o investimento I_D se mostrará excessiva (produto $q B$ revelado maior que $E[q] E[B]$) ou se mostrará insuficiente (produto $q B$ revelado menor que $E[q] E[B]$) e apenas por sorte se mostrará igual (produto $q B$ revelado igual que $E[q] E[B]$). Quando o investimento for *excessivo*, existe um desperdício de investimento e o VPL é penalizado pelo excessivo I_D . Quando o investimento é *insuficiente* o VPL deve ser penalizado por um valor menor de V , por ex., da maneira discutida a seguir.

É necessário fazer um ajuste para poder usar o modelo da eq. (324) com valores esperados de q e B no lugar de valores determinísticos de q e B da eq. (324). No cap. 2 foi visto um exemplo mais simples (com apenas três cenários discretos), onde foi usado um fator γ para penalizar o valor do ativo básico V , ver eq. (61). Esse fator foi usado apenas para penalizar *um* cenário mais favorável,

estocásticos, essa curva de gatilhos não poderá ser normalizada, implicando *apenas* num aumento (relevante) do tempo computacional. Mas a metodologia é similar e os conceitos são os mesmos.

³⁴⁰ Lembrar que a qualidade q é relacionada com o valor presente de receitas líquidas, i.é, com a *velocidade* que as reservas são extraídas e vendidas no mercado.

rever o exemplo da Tabela 8. Mas foi dito que, no caso de distribuições contínuas ou com vários cenários, que esse fator γ deveria ser variável, i. é, deveria ser maior quanto maior for o desvio do produto $q B$ do valor pelo qual o investimento foi dimensionado. Ou seja, o fator de penalização deve ser crescente com o grau de subdimensionamento, dado pela diferença $q B - E[q] E[B]$.

Sejam os cenários de *subdimensionamento* do investimento. Para esses cenários, denote o fator de penalidade por γ^+ , definido no intervalo $(0, 1]$. Esse fator penaliza o valor da reserva desenvolvida V nos cenários $q B > E[q] E[B]$.

A Figura 74 permitirá ter a intuição sobre esse efeito e também obter algumas equações para corrigir o efeito da incerteza técnica na função VPL, mais precisamente no cálculo de V . Esse gráfico é construído fazendo análise de fluxo de caixa do projeto considerando, além do caso $\bar{V} = E[q] E[B] P$, em que o investimento foi dimensionado, mais dois cenários para os casos em que o investimento ficaria subdimensionado e superdimensionado. Gráficos similares para corrigir o efeito da incerteza técnica no VPL, têm sido encontrados na literatura profissional de E&P de petróleo, por ex., Demirmen (1996, Fig. 3)³⁴¹.

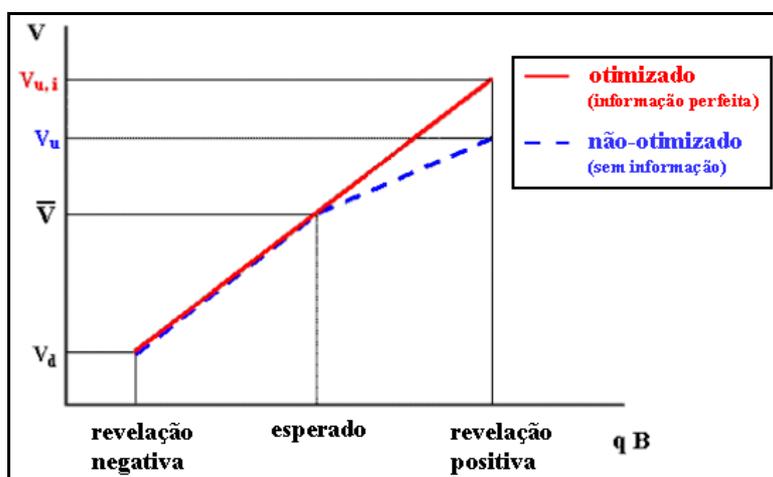


Figura 74 – Efeito da Incerteza Técnica no Valor do Projeto

Assim, se houvesse informação perfeita para dimensionar o investimento e se os valores verdadeiros de q e B fossem o do cenário mais favorável (“upside”), a otimização do investimento faria o valor da reserva ser $V_{u,i}$ (onde “i” significa informação perfeita), com $V_{u,i} = q B P$. O caso de informação *perfeita* como base de análise é conveniente na prática, pois se sabe que é muito mais fácil otimizar

³⁴¹ Em Demirmen o gráfico é do VPL versus o volume de reservas B . Aqui, o gráfico é de V em vez do VPL diretamente, já que é mais conveniente no contexto de OR separar o valor do ativo básico do investimento. Mas a idéia é a mesma: corrigir o VPL do efeito da incerteza técnica.

sob certeza do que sob incerteza, além do primeiro ser um caso limite (inferior) do outro. Existindo incerteza técnica e dimensionando pelo valor esperado de q e B , no caso de revelação positiva (“upside”), o ex post subdimensionado investimento é uma restrição para a produção, e assim se obtém apenas $V_u < V_{u,i}$. Para estabelecer o fator γ^+ de forma que essa penalização seja proporcional ao grau de subdimensionamento, i. é, incidindo só na diferença $V_{u,i} - \bar{V}$. Para isso, note que se pode escrever $V_{u,i} = V_{u,i} + \bar{V} - \bar{V} = \bar{V} + (V_{u,i} - \bar{V})$. Assim, a equação abaixo define o fator $0 < \gamma^+ \leq 1$:

$$V_u = \bar{V} + \gamma^+ (V_{u,i} - \bar{V}) \quad (325)$$

Logo, numa análise de fluxo de caixa³⁴² pode-se calcular esse fator γ^+ :

$$\gamma^+ = \frac{V_u - \bar{V}}{V_{u,i} - \bar{V}} \quad (326)$$

Esse fator é mais próximo de 1 quanto mais próximo V_u for de $V_{u,i}$. Para isso ocorrer, a incerteza técnica tem de ser a menor possível. Ou seja, o fator γ^+ deve ser menor (penalizar mais) quanto maior for a incerteza técnica. Também, para a mesma incerteza técnica, quanto *maior a flexibilidade* do sistema de absorver *poços opcionais*, mais próximo de 1 é esse fator. Por ex., em caso de revelação positiva para B , poderiam ser exercidas opções de expandir a produção através da perfuração de poços opcionais *previamente planejados*, mas isso em geral resulta num pequeno acréscimo no investimento I_D , ver item 2.4.3.

Assim, numa simulação de Monte Carlo para corrigir o VPL do efeito da incerteza técnica, a penalização nos cenários favoráveis faz a função VPL ser, para esses cenários, igual à equação abaixo (combine a eq. 325 com a eq. 324):

$$VPL = P \{ E[q] E[B] + \gamma^+ (q B - E[q] E[B]) \} - I_D \quad , \\ \text{se } q B > E[q] E[B] \quad (327)$$

Onde foram usados as definições $V_{u,i} = q B P$ e $\bar{V} = E[q] E[B] P$ e, mais importante, o investimento I_D é calculado com a eq. (59), i. é, com o valor esperado $E[B]$ e não com o B do cenário revelado ex post.

Agora considere os cenários de *superdimensionamento* do investimento. O fato de haver excesso de capacidade não significa que as reservas serão extraídas

³⁴² Lembre que o valor de V_u é calculado como o valor *presente* de receitas líquidas, numa simulação da produção considerando a restrição de capacidade da planta de processamento, etc. O cenário de subdimensionamento para essa análise pode ser qualquer, já que se assume linearidade.

mais rapidamente, especialmente se o sistema de produção for dimensionado para o pico de produção. Mas por questão de generalidade³⁴³, defina outro fator de penalidade por γ^- , para os cenários em que $q B < E[q] E[B]$. Na aplicação, γ^- será igual a 1 (a idéia é que o dimensionamento *não* é uma restrição), mas esse fator pode até ser um *pouco* maior que 1³⁴⁴. Assim, para os cenários simulados em que $q B < E[q] E[B]$, pode-se definir um $\gamma^- > 0$ de forma análoga ao γ^+ , i. é:

$$V_d = \bar{V} - \frac{1}{\gamma^-} (\bar{V} - V_{d,i}) \quad (328)$$

Onde se $\gamma^- < 1$, o valor V_d é penalizado (em relação a $V_{d,i}$); se $\gamma^- > 1$, V_d é aumentado; e se $\gamma^- = 1$, então $V_d = V_{d,i}$. Assim, numa simulação de Monte Carlo para corrigir o VPL do efeito da incerteza técnica (superdimensionamento), a correção em V para o cenários favoráveis faz a função VPL ser, para esses cenários, igual à equação abaixo (combine a eq. 328 com a eq. 324):

$$VPL = P \{E[q] E[B] - \frac{1}{\gamma^-} (E[q] E[B] - q B)\} - I_D, \quad \text{se } q B < E[q] E[B] \quad (329)$$

Onde, como sempre, o investimento I_D é fixo e calculado com a eq. (59), i. é, com o valor esperado $E[B]$. Para o caso de coincidir que $q B = E[q] E[B]$, o dimensionamento estaria correto e assim se poderia usar a eq. (324) para o VPL. Isso vale também para o caso sem incerteza técnica (informação perfeita).

Assim, uma simulação de Monte Carlo irá corrigir o VPL do efeito do dimensionamento (ou investimento) sub-ótimo causada pela incerteza técnica. Para isso, devem-se usar as distribuições a priori dos parâmetros q e B , para amostrar esses parâmetros e assim calcular o VPL com incerteza técnica através das eqs. (327), (324) e (329), para avaliar o VPL nos possíveis cenários de q e B .

A fim de simular o valor da OR com incerteza técnica, será útil também escrever a equação do valor do ativo básico com incerteza técnica $V(P, \tilde{q}, \tilde{B}, \gamma)$:

³⁴³ Apesar do sistema de produção instalado não ser uma restrição, *pode* ocorrer que a incerteza técnica tenha causado locações desfavoráveis para os poços, tal que γ^- seja menor que 1.

³⁴⁴ Se o dimensionamento *ótimo* for para um “plateau” (em vez do pico) de produção, ou se for possível alugar o excesso de capacidade de processo para outros campos, ver cap.2.

$$V(P, \tilde{q}, \tilde{B}, \gamma) = \begin{cases} P\{E[q] E[B]\} & \text{se } q B = E[q] E[B] \\ P\{E[q] E[B] + \gamma^+(q B - E[q] E[B])\} & \text{se } q B > E[q] E[B] \\ P\{E[q] E[B] - \frac{1}{\gamma^-}(E[q] E[B] - q B)\} & \text{se } q B < E[q] E[B] \end{cases} \quad (330)$$

Onde os valores $q B$ são produtos de amostras das distribuições a priori de q e B . A complexa dependência entre essas distribuições é considerada de uma forma simples usando a eq. (330). Com isso se obtém o valor da opção real com incerteza técnica $F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, \gamma, t)$ e antes de se obter informação adicional. Se considerar que $\gamma^+ < 1$ e $\gamma^- = 1$, então $F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t)$ será sempre menor que o valor da OR sem incerteza técnica em que se usa os valores esperados dos parâmetros q e B , i. é, $F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t) < F(P(t), E[q], E[B], \gamma, t)$. Assim, defina o parâmetro ψ_F como o fator de redução do valor da OR causada pela incerteza técnica, i. é, esse fator menor que 1 (e positivo) é dado pela equação:

$$\psi_F = \frac{F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t)}{F(P(t), E[q], E[B], \gamma, t)} \quad (331)$$

Esse fator é mais severo (menor) quanto maior for a incerteza técnica. Assim, quanto menor a incerteza técnica, mais próximo de 1 será o redutor ψ_F . Logo, se houver uma redução esperada da incerteza técnica através de um investimento em informação, o valor de $F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t)$ deve ficar mais próximo de $F(P(t), E[q], E[B], \gamma, t)$, i. é, ψ_F mais próximo de 1. Para calcular o valor da OR ainda com incerteza técnica, mas com nova informação (menor incerteza) advinda de um sinal S (ex.: a perfuração de um novo poço de delimitação), existem pelo menos dois caminhos.

O primeiro caminho é usar fatores γ mais próximos do caso de informação perfeita ($\gamma = 1$), revisando esses fatores para o caso de adquirir nova (embora imperfeita) informação. Em caso de um sinal S deve-se esperar uma redução desses fatores de forma monotônica com a capacidade de reduzir a incerteza desse sinal. Essa capacidade de reduzir a incerteza será aqui a medida de aprendizagem $\eta^2(X | S)$, a *redução percentual esperada de variância* da variável técnica X com o sinal S , bastante discutida no cap. 3. Quanto maior for $\eta^2(X | S)$, maior o valor

de $\gamma_{X|S}$. Assim, se propõe em geral a seguinte revisão (“upgrade”) do fator γ_X de uma v.a. X devido ao sinal S :

$$\gamma_{X|S} = \gamma_X + (1 - \gamma_X) \eta^2(X | S) \quad (332)$$

Ou seja, quando $\eta^2(X | S) = 1$, $\gamma_{X|S} = 1$ e quando $\eta^2(X | S) = 0$, $\gamma_{X|S} = \gamma_X$. Esse caminho, no entanto, exigiria a simulação das distribuições *posteriores* de q e B , i. é, $p(q | S)$ e $p(B | S)$, para *cada* cenário de S , fazendo o tempo computacional ser muito elevado. Para evitar isso, se propõe uma correção mais prática do valor da OR com incerteza técnica e com nova informação S .

Esse segundo caminho é muito mais simples e usa uma idéia análoga à usada na eq. (332). Considera que o fator de redução ψ_F (eq. 331) é mais próximo de 1, quanto menor for a incerteza esperada após a nova informação. Assim, se propõe simplesmente uma revisão desse fator de redução para considerar o sinal S , denotado por $\psi_{F|S}$. Como o fator ψ_F considera a incerteza do produto q B , a redução da incerteza em ambas as variáveis fará aumentar o fator $\psi_{F|S}$. Por isso, considere a seguinte atualização (“upgrade”) para o fator de redução $\psi_{F|S}$:

$$\psi_{F|S} = \psi_F + (1 - \psi_F) \left(\frac{\eta^2(q | S) + \eta^2(B | S)}{2} \right) \quad (333)$$

Se não houver aprendizagem, i. é, $\eta^2(q | S) = \eta^2(B | S) = 0 \Rightarrow \psi_{F|S} = \psi_F$. Se a aprendizagem for perfeita, $\eta^2(q | S) = \eta^2(B | S) = 1 \Rightarrow \psi_{F|S} = 1$. Com isso, o valor da OR com incerteza técnica mas com informação imperfeita, *antes* de considerar o custo de obter essa informação, denotado por $F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t | S)$, é obtido simplesmente por:

$$F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t | S) = \psi_{F|S} F(P(t), E[q], E[B], \gamma, t) \quad (334)$$

Ou seja, calcula-se o valor da OR usando os valores esperados revelados pela distribuição de revelações de q e B , como se não tivesse incerteza técnica, e depois se penaliza esse valor da OR multiplicando pelo fator de redução condicional $\psi_{F|S}$, dado pela eq. (331). Para usar a eq. (331), lembre que é necessário calcular o valor da OR com a incerteza técnica original, obtido com a simulação de Monte Carlo das distribuições a priori de q e B , onde o valor do ativo básico V é penalizado através da eq. (330).

Nesse item se mostrou como calcular o VPL sem incerteza técnica e com a incerteza técnica original, assim como o valor da OR sem incerteza técnica e com

a incerteza técnica original. Ambos usaram a simulação de Monte Carlo. Depois, se mostrou como calcular o valor da OR com incerteza técnica reduzida pela aprendizagem da nova informação S_t através de uma equação simples de correção.

5.2.3.

A Combinação das Incertezas e as Alternativas de Aprendizagem

Para calcular o valor da OR de desenvolvimento considerando também a evolução do mercado (preço do petróleo, principalmente), é necessário combinar cenários de incerteza técnica com os cenários de incerteza de mercado. Para isso, *novamente* a simulação de Monte Carlo deve ser usada e o valor da OR é função dessa combinação de cenários, ou seja, o valor tradicional da OR, denotado por $F(P, t)$, é condicional ao cenário de volume e qualidade da reserva, i. é, $F(P, t | q, B)$. No caso de incerteza técnica, a OR é calculada considerando as expectativas sobre esses parâmetros, $E[q]$ e $E[B]$, o(s) fator(es) de penalização γ sobre o valor do ativo básico V e o fator revisado $\psi_{F|S}$, conforme detalhado no item 5.2.2.

Na combinação dos dois tipos de incerteza para avaliar a OR, lembrar (cap. 2 e 3) que a OR tem de ser simulada como um processo neutro ao risco a fim de poder usar a taxa de desconto livre de risco r para descontar os valores resultantes dos possíveis exercícios da OR, nos diversos cenários. Lembrar que a incerteza técnica não demanda prêmio de risco, mas a incerteza de mercado demanda. Assim, deve ser simulado um *processo estocástico neutro ao risco* (ou seja, um processo real penalizado por um prêmio de risco). Para o caso do MGB, o processo neutro ao risco é dado pela eq. (9). Existe uma *discretização exata* (independe do intervalo de tempo Δt usado) para a eq. (9) que permite simular os preços do petróleo do MGB neutro ao risco:

$$P_t = P_{t-1} \exp\left\{ (r - \delta - \frac{1}{2} \sigma^2) \Delta t + \sigma N(0, 1) \sqrt{\Delta t} \right\} \quad (335)$$

Onde $N(0, 1)$ é a distribuição normal padronizada (média 0 e variância 1). Assim, pode-se simular recursivamente n amostras de caminhos do preço do petróleo. A divisão do intervalo de tempo entre o momento inicial ($t = 0$) e a maturidade da OR ($t = T$) em m sub-intervalos, permite traçar um caminho para P com $m + 1$ pontos. A precisão da simulação é maior quanto maior for n e/ou m .

Para o caso geral, o investimento I_D segue um processo estocástico dado pelo fator estocástico multiplicativo $v(t)$. Assim, pode-se escrever uma equação de

simulação para $v(t)$ análoga à eq. (335). Em adição, pode-se estimar um coeficiente de correlação positivo $\rho(P, v)$ entre esses processos estocásticos.

O gatilho de desenvolvimento dá a regra de decisão para o momento ótimo de desenvolvimento do campo (ver cap. 2). Para reduzir dramaticamente o tempo computacional do cálculo do valor da OR, é melhor trabalhar com uma curva normalizada de gatilho. Isso *reduz a dimensionalidade do problema*, ver item 2.4.6 (sobre OR de mudança de uso), especialmente a eq. (48). No caso da presente aplicação, considere o valor normalizado da reserva desenvolvida, ou seja, V / I_D , onde a equação do ativo básico V é a eq. (330). Note que para $V / I_D = 1$, o VPL é igual a zero, que é o gatilho da OR em $t = T$.

A curva de gatilho normalizada, denotada por $(V / I_D)^*$, a qual é função decrescente do tempo, dá os valores que fazem ser ótimo o imediato investimento (exercício da opção) a cada instante $t \in [0, T]$. Para o MGB, essa curva de gatilho $(V / I_D)^*$ depende só³⁴⁵ de σ , r , e δ . O uso da curva de gatilho normalizada em vez de P^* ou V^* , permite usar uma única curva de gatilho para todo cenário proveniente da combinação das incertezas técnicas e de mercado. Para isso, basta comparar o valor (V / I_D) simulado, a cada instante t , com o valor dessa curva de gatilho $(V / I_D)^*$ nesse mesmo instante, para decidir sobre o exercício ou não da OR. Assim, qualquer que seja a combinação de q e B , a curva de gatilho é a mesma, apesar do preço de exercício da OR (I_D) mudar com o cenário revelado $E[B]$. Sem essa normalização (por ex., usando V^*), depois da revelação de um novo cenário $E[B]$ a curva de gatilho V^* mudaria, pois o preço de exercício I_D mudaria. Isso aumentaria (quase multiplicaria pelo número de simulações) o tempo computacional, pois *cada* iteração de Monte Carlo demandaria o cálculo de uma nova curva de gatilhos.

Como visto no item 2.4.6, essa normalização só é possível porque a OR é homogênea de grau 1 no valor de V e de I_D , e a curva de gatilhos *normalizada* é homogênea de grau zero nas mesmas variáveis, desde que V e I_D sigam MGB's (que podem ser correlacionados). Para outros processos estocásticos, a mesma propriedade não foi provada e em geral não é válida.

³⁴⁵ Note que, pela Proposição 1, $\sigma_V = \sigma_P$. Se I_D também segue um MGB causada pelo choque v , essa curva depende de δ_I , δ e de σ_T , sendo que a taxa de dividendo de I_D , δ_I , pode ser assumida igual a taxa de juros r e σ_T é a “volatilidade total” dada por $\sigma_T^2 = \sigma_P^2 + \sigma_I^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_I$.

Considere que existem K alternativas distintas de investimento em informação, $k = 0, 1, 2, \dots, K$, sendo $k = 0$ a alternativa de não investir em informação. Cada alternativa tem um poder de revelação diferente, dada pela medida de aprendizagem $\eta^2(X | S_k)$ para cada v.a. com incerteza técnica (aqui q e B). Assuma que, para a alternativa k existe um *custo de aprendizagem* (custo do investimento em informação com a alternativa k) igual a C_k e um *tempo de aprendizagem* (“time to learn”) ou tempo de revelação t_k . Logo, o modelo considera o importante aspecto da realidade de que a aprendizagem leva tempo, penalizando as alternativas que demandam mais tempo para revelar a informação. Inicialmente, considere que o investimento em informação sempre comece no instante inicial ($t = 0$). Depois, será analisada a relevância, ou irrelevância, de considerar o momento ótimo de aprendizagem. Por simplicidade de notação, seja W_k o valor da opção real que inclui o custo C_k , o tempo t_k e seus dois benefícios $\eta^2(q | S_k)$ e $\eta^2(B | S_k)$ de aprendizagem com a alternativa k , i. é:

$$W_k = -C_k + F(P(t), \tilde{q}, \tilde{B}, t | S_k) \quad (336)$$

O objetivo é escolher a alternativa k^* que maximiza o valor da OR, i. é, com o maior valor W_k . Isso é formalizado na Proposição 9 a seguir.

Proposição 9: Seja o problema de OR de desenvolvimento de um campo de petróleo, com direitos de início de desenvolvimento que terminam na data legal T , onde o preço do petróleo P segue um MGB e o investimento I_D é dado pela eq. (59) e possivelmente multiplicado pelo fator $v(t)$, que segue um MGB correlacionado com P . Sejam q e B v.a. com distribuições a priori conhecidas representando a incerteza técnica residual. Sejam K alternativas de investimento em informação, cada alternativa com custo C_k , tempo de revelação t_k e revelando informação através do sinal S_k . Assuma que se a firma investir em informação, ela o fará em $t = 0$ e só pensará em desenvolver o campo após o resultado dessa aprendizagem, em $t = t_k$. Assuma que o valor do ativo básico (a reserva desenvolvida) $V(P(t), q, B)$ é dado pelo modelo de negócios, eq. (23). Então:

(a) o problema de seleção da melhor alternativa de investimento em informação k^* é dado por:

$$k^* = \underset{k \in \{0, 1, 2, \dots, K\}}{\mathbf{arg\,max}} \, W_k \quad (337)$$

(b) Com o valor da OR (o valor da reserva não-desenvolvida), que considera tanto a *opção de espera* (momento ótimo de desenvolvimento) como a *opção de aprendizagem* usando uma alternativa k , sendo dado por:

$$W_k = -C_k + E \left[\max_{t^* \in [t_k, T]} \left\{ E^Q \left[e^{-rt^*} (\tilde{q} \tilde{B} P(t) - I_D(\tilde{B}, t)) \right] \mid S_k \right\} \right] \quad (338)$$

Onde Q do operador E^Q significa que o valor esperado é tomado sob a medida neutra ao risco (medida equivalente de martingale) para os processos estocásticos de P e I_D . O operador expectativa externo é condicional à informação revelada S_k . O operador E^Q é maximizado pela escolha ótima do momento t^* de exercício da opção de desenvolvimento. Assim, a *solução* do problema de maximização da eq. (338) é dado por:

$$t^* = \inf \left\{ t \in [t_k, T] : \frac{q B P(t)}{I_D(B, t)} \geq \left(\frac{V}{I_D} \right)^*(t) \right\} \quad (339)$$

Com a convenção padrão que o *infimo de um conjunto vazio é + infinito*, de forma que para o um caminho i sem exercício (conjunto vazio) o valor dentro de $E^Q(\cdot)$ na eq. (338) é zero. Na eq. (339), $(V / I_D)^*(t)$ é a curva normalizada de gatilhos ao longo do tempo, que depende dos parâmetros do(s) processo(s) estocástico(s) (σ , r , e δ), mas não da particular combinação das v.a. q , B , P e I_D .

(c) Esse complexo problema pode ser resolvido de forma *mais simples*, assumindo que a informação S_k de cada alternativa k pode ser representada pela seguinte estrutura de informação flexível, eq. (63), que no atual contexto é:

$$\mathcal{I}_k = \{\eta^2(q \mid S_k), \eta^2(B \mid S_k), A\} \quad (340)$$

Onde A é a seguinte assertiva: *as distribuições de revelações de q e B são aproximadamente do mesmo tipo das suas distribuições de revelações do caso particular de informação perfeita*. Pelo Teorema 1, essas distribuições limites são as próprias distribuições a priori de q e B , que são dados do problema. Sendo que se pode trabalhar com q e B como se fossem independentes e usar os valores esperados dessas v.a. através da seguinte aproximação para W_k :

$$W_k = -C_k + E \left[\max_{t^* \in [t_k, T]} \left\{ E^Q \left[e^{-rt^*} (E[q \mid S_k] E[B \mid S_k] P(t) - I_D(E[B \mid S_k], t)) \right] \right\} \right] \Psi_{F \mid S_k} \quad (341)$$

Onde o fator $\psi_{F|S_k}$, dado pela eq. (333), permite trabalhar com q e B como se fossem v.a. independentes, pois corrige o efeito da incerteza técnica residual (após S_k) no valor da OR calculada pelo termo $\max\{.\}$ usando expectativas correntes de q e B que são reveladas pelo sinal S_k . Essas expectativas são amostradas das *distribuições de revelações* dessas variáveis para a alternativa k . O operador $E[.]$ externo calcula o valor esperado considerando os diversos cenários dessas distribuições de revelações.

Prova: (a) se forem calculados os valores de $K + 1$ opções reais W_k (i. é, K alternativas de investimento em informação mais a alternativa $k = 0$ de não investir em informação) e escolher a alternativa k^* , se estará maximizando o valor do campo considerando tanto as opções de aprendizagem como o momento ótimo de desenvolvimento, dadas as premissas assumidas e se os valores W_k puderem ser expressos pelas eqs. (338) e (339).

(b) O formato da eq. (338) é apenas uma maneira mais *conveniente* de se expressar o valor de uma opção do tipo americana, que já considera o exercício ótimo dessa opção americana, exs.: Neftci (2000, p. 494), Shreve (2004, p.345), Duffie (2001, p.185). No contexto de OR, ver, por ex., Murto (2004, p.7) ou Maeland (2001, eq. 7)³⁴⁶. Como os processos são neutros ao risco e a incerteza técnica não demanda prêmio de risco, o valor obtido com o exercício da opção em t^* pode ser descontado com a taxa livre de risco r . O tempo de parada (exercício) ótima t^* é considerado apenas no intervalo $[t_k, T]$, pois se assumiu que se a firma estiver investindo em informação, ela irá esperar pelo menos até obter essa informação em t_k , antes de exercer a opção de desenvolvimento. Esse tempo ótimo t^* é obtido pela curva de gatilho normalizada, que foi provada ser homogênea de grau zero em V e em I_D por McDonald & Siegel (1986, p.713, ver também e Dixit & Pindyck, 1994, pp.207-211) se V (e, logo, P) e I_D seguem MGB's (correlacionados), como aqui é assumido. Isso significa que a curva de gatilhos e, logo, t^* , independem da combinação particular i de cenários, i. é, da combinação particular de P_i , I_{Di} , q_i e B_i no intervalo de avaliação $[t_k, T]$ da alternativa k . Esse cálculo deve ser repetido para cada uma das $K + 1$ alternativas.

³⁴⁶ Em alguns casos se usa “sup” (supremo) em vez de “max”. Como aqui as quantidades são finitas, se preferiu usar o termo “max”. Aqui se preferiu não carregar na notação, dizendo que E^Q é condicional a uma filtração dos processos de P e I_D . Além disso, a definição de gatilho da eq. (339) dispensa dizer que o termo dentro de $E^Q(.)$ tem de ser positivo, como alguns especificam.

(c) Esse problema é complexo no formato geral, pois q e B não são independentes e o problema de dimensionamento ótimo do investimento leva a um complexo problema de otimização sob incerteza já que existem infinitas distribuições posteriores. Trabalhando com as expectativas condicionais de q e B (distribuições de revelações) se simplifica bastante o problema (usa-se apenas as médias dessas distribuições posteriores), conforme mostrado no cap. 3. As distribuições de revelações são totalmente definidas (médias, variâncias e tipos³⁴⁷ de distribuição) pelo Teorema 1, que usa as informações conhecidas dadas pelas distribuições a priori de q e B e pela estrutura de informação flexível da eq. (340), a qual demanda requisitos mínimos de especificação para a informação revelada S_k . Além disso, com o fator de correção $\psi_{F|S_k}$ pode-se usar no cálculo do valor do ativo básico V os produtos $E[q | S_k] E[B | S_k]$, conforme desenvolvido no item 5.2.2 e aplicado na eq. (341). Dessa forma, o problema é bastante simplificado e pode-se calcular o valor esperado $E^Q(\cdot)$ por simulação de Monte Carlo dos processos estocásticos neutros ao risco de P e de I_D , e das distribuições de revelações $R_q(S_k)$ e $R_B(S_k)$, conforme será mostrado a seguir, o que comprovará que o problema pode ser resolvido de uma maneira relativamente simples. \square

A Proposição 9 ilustra a utilidade das distribuições de revelações desenvolvida no cap. 3. Além disso, permite que se assumam uma descrição simplificada para o sinal S_k , através de uma estrutura de informação flexível, definida pela eq. (63) do cap. 3, i. é, $\mathcal{I} = \{\eta^2(X | S), \bullet\}$. Essa estrutura de informação (eq. 340) usa as medidas de aprendizagem $\eta^2(q | S_k)$ e $\eta^2(B | S_k)$.

A Figura 75 mostra como o valor esperado da eq. (338) é calculado. Essa figura mostra duas amostras de caminho da simulação de Monte Carlo. Essa abordagem combina a simulação de processos neutro ao risco das incertezas de mercado ao longo de todo o intervalo de tempo $[0, T]$ ³⁴⁸ com a simulação das incertezas técnicas através da simulação das distribuições de revelação no instante t_k , ou seja, a combinação de incertezas ocorre na data de revelação da alternativa

³⁴⁷ Se a distribuição demandar mais parâmetro(s) do que a média, a variância e a classe da distribuição (triangular, etc.), então o tipo inclui esse(s) parâmetro(s). Por ex., na distribuição triangular o adjetivo “simétrica”. Para distribuições como a normal, lognormal e outras, a média e a variância são suficientes se a classe estiver especificada. A idéia é ser *similar* com o caso limite.

³⁴⁸ Como a discretização é exata e o caminho entre $t = 0$ e $t = t_k$ não é relevante nesse problema, se poderia começar a simular o caminho apenas a partir de t_k até T .

k, onde quase certamente mudarão as expectativas de q e B nas quais se baseia o cálculo de V e, portanto, da OR. A Figura 75 também mostra a curva de gatilho normalizada (em vermelho) considerando dois anos para a expiração dos direitos de desenvolvimento do campo e como dois desses caminhos são avaliados no modelo de OR.

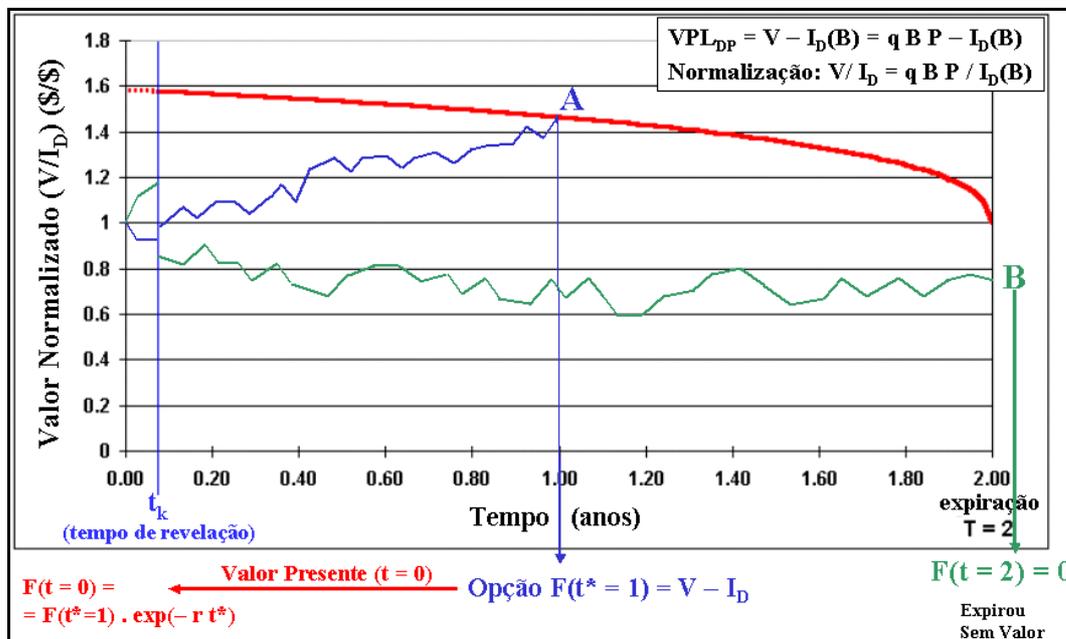


Figura 75 – Valoração duma Alternativa de Investimento em Informação

Na Figura 75, o valor normalizado começa ($t = 0$) perto de 1, ou seja, tem VPL perto de zero. O valor normalizado do projeto V/I_D evolui estocasticamente por causa da simulação das incertezas de mercado (P e I_D) e na primeira amostra de caminho (azul escuro) esse valor começa caindo. Na data t_k , o investimento em informação (que começou em $t = 0$) gera um sinal S_k , e assim são sorteados um cenário de $E[q]$ e um de $E[B]$ das suas distribuições de revelação para essa alternativa k . Essa revisão dos valores de q e B usados em V , causa (q.c.) um salto no valor normalizado V/I_D , que para esse caminho foi um pequeno salto para cima³⁴⁹. Após esse salto da distribuição de revelações, o valor normalizado (com as novas expectativas sobre q e B) continua a sua trajetória de oscilar continuamente ao longo do tempo devido aos processos estocásticos de P e I_D . Esse caminho (azul) atinge a curva de gatilhos no ponto A, no caso em $t = 1$ ano, que pela definição da eq. (339) é o tempo de parada ótima t^* para esse caminho. Nesse ponto, a opção é otimamente exercida, obtendo o valor $V - I_D$ (em $t = t^*$) e

³⁴⁹ Lembrar que a distribuição de revelações é centrada nas expectativas correntes, i. é, sua média é o valor esperado anterior (da distribuição a priori).

esse valor é trazido em valor presente usando a taxa livre de risco r . Esse valor é armazenado, já que é um dos cenários do cálculo da expectativa E^Q .

A segunda amostra de caminho (verde), evolui de forma similar (com outros sorteios das distribuições envolvidas), mas sofrendo um salto para baixo em $t = t_k$ (revelação negativa sobre q e/ou B), e depois disso continua a sua trajetória, mas sem conseguir atingir a curva de gatilhos durante todo o período, de forma que a opção expira sem ser exercida (ponto B) e assim ela vale zero. O valor dessa opção para esse caminho é zero. Após n iterações (milhares) se soma todos os valores das opções dos n caminhos e divide-se pelo número de iterações n . Esse é o valor do termo $\text{Max}\{E^Q[. | .]\}$ da eq. (341). Multiplica-se pelo redutor $\psi_{F|S_k}$, a fim de corrigir o efeito da incerteza técnica no cálculo da OR. Em seguida subtrai-se o custo de adquirir essa informação, C_k , e assim obtém-se o valor de W_k para a alternativa k . Repete-se o mesmo procedimento para todas as alternativas e assim se obtém um conjunto de $K + 1$ valores de W_k . Conforme a eq. (337), escolhe-se a alternativa de investimento em informação que gera o maior valor desse conjunto.

Em resumo, basta conhecer as medidas $\eta^2(q | S_k)$ e $\eta^2(B | S_k)$ de cada alternativa e mais algumas premissas simples para obter as distribuições de revelações e resolver esse complexo problema. Serão vistos a seguir alguns exemplos numéricos para ilustrar melhor o modelo, assim como a questão do momento ótimo de adquirir informação.

5.2.4.

Exemplo Numérico e Momento de Adquirir Informação

Os seguintes resultados são de interesse serem calculados no exemplo:

- VPL sem incerteza técnica: É o VPL calculado pela eq. (324), onde existe informação perfeita sobre q e B ;
- Opção real sem incerteza técnica: é o valor tradicional de OR considerando só a incerteza de mercado e usando os valores verdadeiros (informação perfeita) sobre q e B , conforme discutido no cap. 2;
- VPL com incerteza técnica: é o VPL em que existe incerteza técnica em q e B , de forma que, para minimizar o erro técnico de dimensionamento, se usa os valores esperados de q e B . Como eles não são independentes, faz-se uma

simulação de Monte Carlo com as eqs. (327), (324) e (329), a depender do cenário simulado. Ele é menor que o VPL sem incerteza técnica;

- Opção real com incerteza técnica e sem informação: é um valor menor que o caso o valor tradicional OR sem incerteza técnica, e é obtida por simulação de Monte Carlo usando a eq. (330) para V , com I_D fixo dado pela eq. (59);
- Opção real com incerteza técnica e com informação S_k : Essa OR considera o custo e o benefício da informação da alternativa k . É obtida com as eqs. (341) e (339) da Proposição 9. Além de considerar o custo C_k da informação, considera que ela demanda um tempo de aprendizagem (ou de revelação) t_k .
- Valor dinâmico líquido da informação S_k : É a diferença entre o valor da OR com e sem o investimento em informação S_k , dado que existe incerteza técnica. Esse valor é o VOI (líquido) no contexto dinâmico de OR.

Embora o valor dinâmico líquido da informação seja um importante indicador, visto que ele é a diferença entre dois valores simulados, é preferível (menor erro) selecionar a melhor alternativa de investimento em informação através da eq. (337), como manda a Proposição 9, i. é, através do maior valor da OR com a informação (penúltimo item da lista acima).

Considere dois campos de petróleo (são dois exemplos), com duas alternativas de investimento em informação para cada caso. Qual é a melhor alternativa em cada caso? É melhor investir em informação do que não investir em informação (alternativa $k = 0$)?

Serão assumidos os seguintes dados de entrada para o processo estocástico (MGB) do preço do petróleo: $r = 6\%$ p.a.; $\delta = 6\%$ p.a.; e $\sigma = 20\%$ p.a. Assuma que o preço inicial do petróleo é 20\$/bbl. Considere por simplicidade que o investimento não segue um processo estocástico e é dado só pela eq. (59). Assuma que V é dado pelo modelo de negócios.

Considere primeiro o campo de petróleo 1. As *distribuições a priori* das incertezas técnicas sobre q (em %) e B (em milhões de barris) são modeladas com as seguintes distribuições triangulares (mínimo; mais provável; máximo) obtidas com ajuda de análises estatísticas geológicas e de reservatórios:

- $B \sim \text{Triang}(300; 600; 900)$
- $q \sim \text{Triang}(8\%; 15\%; 22\%)$

Análises de fluxo de caixa com capacidade restringida, mostraram que o fator $\gamma^+ = 75\%$ e o fator $\gamma^- = 1$.

A Alternativa 1 (S_1) é a mais barata e consiste da perfuração de um poço *vertical*. O custo de aprendizagem é $C_1 = \text{US\$ } 10 \text{ MM}$ e leva $t_1 = 45$ dias para obter a informação e revisar as expectativas sobre q e B . O poder de revelação dessa alternativa (percentagem de redução esperada de variância) é dado pelas medidas $\eta^2(q | S_1) = 40\%$ e $\eta^2(B | S_1) = 50\%$.

A Alternativa 2 (S_2) consiste de perfurar um poço *horizontal*. O custo de aprendizagem é $C_2 = \text{US\$ } 15 \text{ MM}$ e leva $t_2 = 60$ dias para obter a informação e revisar as expectativas sobre q e B . O poder de revelação dessa alternativa é dado pelas medidas $\eta^2(q | S_2) = 60\%$ e $\eta^2(B | S_2) = 75\%$.

O custo de desenvolvimento é função de $E[B]$ e, para essa faixa de lâmina d'água, uma regressão mostrou que é dada por: $I_D (\text{MM\$}) = 310 + (2,1 \times E[B])$.

Os resultados³⁵⁰ do Campo de Petróleo 1 são dados na Tabela 15³⁵¹.

Tabela 15 – Opções de Aprendizagem: Resultados para o Campo 1

Alternativas	S_1	S_2
(1) VPL sem incerteza técnica	230	230
(2) OR sem incerteza técnica	302,1	302,1
(3) VPL com incerteza técnica	178,5	178,3
(4) OR com incerteza técnica mas sem informação	264,2	263,7
(5) OR com incerteza técnica e com informação (W_k)	285,2	298,8
(6) Valor dinâmico líquido da informação [(5) – (4)]	21,0	35,1

Existem alguns valores na Tabela 15 (entre as colunas das alternativas S_1 e S_2) que diferem apenas pelo erro da simulação (linhas 3 e 4). As duas últimas linhas são valores líquidos do custo de aquisição de informação. Os valores positivos da linha 6 mostram que é melhor investir em informação do que a alternativa $k = 0$ de não investir em informação. Olhando a linha 5 (ou a 6), se

³⁵⁰ Esses e outros casos podem ser resolvidos pela planilha *timing_inv_inf-hqr.xls* que está disponível em http://www.puc-rio.br/marco.ind/xls/timing_inv_inf-hqr.xls e no CD-Rom.

³⁵¹ Foram usadas 10.000 iterações para a Alternativa 1 e 100.000 para a Alternativa 2, usando um algoritmo de simulação *híbrido de quase-Monte Carlo* (é mais eficiente que o Monte Carlo tradicional) desenvolvido pelo autor, ver http://www.puc-rio.br/marco.ind/quasi_mc.html. Os módulos dos erros estimados são menores que 0,3% para ambas as alternativas. O tempo computacional usando um processador Pentium III, 1 GHz, foi de menos de 2 minutos para 10.000 iterações e cerca de 16 minutos para 100.000 iterações, com uma planilha Excel 97.

conclui que a alternativa 2 (sinal S_2) é melhor mesmo sendo 50% mais cara que a alternativa 1. Em caso de diferenças pequenas entre as alternativas, é recomendável aumentar o número de simulações.

Agora considere o Campo de Petróleo 2. Esse estudo de caso foi apresentado em Souza Jr. & Dias & Maciel (2002). O investimento no desenvolvimento é o mesmo do Campo 1, i. é, I_D (MM\$) = 310 + (2,1 x E[B]). As *distribuições a priori* das incertezas técnicas sobre q (em %) e B (em milhões de barris) são modeladas também com distribuições triangulares (mínimo; mais provável; máximo) dadas por:

- $B \sim \text{Triang}(145; 320; 560)$
- $q \sim \text{Triang}(6\%; 15\%; 25\%)$

Análises de fluxo de caixa com capacidade restringida, mostraram que o fator $\gamma^+ = 65\%$ e o fator $\gamma^- = 1$.

A Alternativa 1 (S_1) é a mais barata e consiste da perfuração de um poço vertical, mas *sem realizar um teste de produção*. O custo de aprendizagem é $C_1 = \text{US\$ } 6 \text{ MM}$ e leva $t_1 = 35$ dias para obter a informação e revisar as expectativas sobre q e B . O poder de revelação dessa alternativa (percentagem de redução esperada de variância) é dado pelas medidas $\eta^2(q | S_k) = 60\%$ e $\eta^2(B | S_k) = 75\%$.

A Alternativa 2 (S_2) consiste de perfurar um poço vertical, mas dessa vez *realizando um teste de produção*. O custo de aprendizagem é $C_2 = \text{US\$ } 12 \text{ MM}$ e leva $t_2 = 65$ dias para revelar a nova informação sobre q e B . O poder de revelação de S_2 é dado pelas medidas $\eta^2(q | S_k) = 70\%$ e $\eta^2(B | S_k) = 80\%$.

Os resultados para o Campo de Petróleo 2 são dados na Tabela 16.

Tabela 16 – Opções de Aprendizagem: Resultados para o Campo 2

Alternativas	S_1	S_2
(1) VPL sem incerteza técnica	20,3	20,3
(2) OR sem incerteza técnica	116,2	116,2
(3) VPL com incerteza técnica	- 32,5	- 33,1
(4) OR com incerteza técnica mas sem informação	87,8	86,6
(5) OR com incerteza técnica e com informação (W_k)	128,3	126,6
(6) Valor dinâmico líquido da informação [(5) - (4)]	40,5	39,9

No caso do Campo de Petróleo 2, a alternativa mais barata é a melhor (linha 5). Entretanto, a diferença é muito pequena, de forma que é recomendado fazer outra simulação com maior número de iterações para confirmar essa diferença.

Esses exemplos numéricos mostram as duas fontes básicas de valor para a aprendizagem através de investimento em informação para reduzir a incerteza. Primeiro é a variância da distribuição de revelações que aumenta o valor da OR (ver cap. 3). Lembrar que quanto maior a redução esperada da incerteza (variância), maior é a variância da distribuição de revelações. Segundo, a incerteza técnica reduz o valor presente do fluxo de caixa esperado (ver discussão do item 5.2.2) devido à restrição da capacidade para os eventuais cenários positivos, causando uma assimetria que não permite tomar vantagem plenamente do lado positivo (“upside”) da incerteza técnica. Esse efeito é levado em conta no fator de penalização γ^+ na simulação da função VPL e da OR. Essa penalização é menos severa quanto menor for a incerteza residual esperada.

Simulações adicionais mostraram que o efeito da volatilidade dos preços do petróleo no *valor da informação* não é monotônico. Essa análise e outras sensibilidades são deixadas para futuros trabalhos.

Uma discussão interessante é a questão do momento ótimo de aquisição de informação. Esse foi o tema do artigo de Murto (2004), comentado antes de forma crítica no item 3.1.3.1. Investimento em informação é caro, por ex., o custo de um poço marítimo varia de US\$ 4 MM (poço “slim”) a US\$ 20 MM (e talvez bem mais se fosse poço pioneiro) e revela só informação parcial sobre o volume e a qualidade da reserva. Entretanto, o custo de investimento para o desenvolvimento (I_D) de um campo de petróleo é muito maior que o custo de adquirir informação adicional: o desenvolvimento típico de um campo marítimo requer mais de US\$ 1 bilhão (o campo de Marlim demandou mais de US\$ 4 bilhões). Logo, o custo de desenvolvimento é tipicamente cerca de 100 vezes o custo de aprendizagem com um poço adicional de delimitação!

Logo, para o caso de petróleo, o tópico de *momento ótimo de aprendizagem* não é tão relevante quanto o tópico de *momento ótimo de desenvolvimento*. A diferença de importância é muito grande pelos valores envolvidos que estão sendo postergados. O adiamento do investimento em informação tem o benefício de adiar o custo C_k , mas tem a desvantagem de adiar o exercício de possíveis OR de

desenvolvimento que estão “deep-in-the-money” (para os cenários de revelação de boas notícias).

Para ter uma idéia da questão da relevância do momento ótimo de aprendizagem, considere os estudos de casos apresentados acima, mas considerando também os adiamentos do investimento em informação de 6 meses e de 1 ano. O valor presente do investimento em informação é reduzido pelo fator de desconto³⁵², e o exercício da OR de desenvolvimento só é permitida após essa postergação (6 meses ou 1 ano) e mais o tempo de aprendizagem t_k . Os resultados obtidos para o Campo de Petróleo 1 são mostrados na Tabela 17.

Tabela 17 – Análise de Momento Ótimo de Aprendizagem para o Campo 1

Alternativas	S ₁	S ₂
OR sem informação (sem aprendizagem)	267,9 (a)	263,3 (b)
OR com aprendizagem imediata	298,4 (a)	307,0 (b)
OR com aprendizagem adiada de 6 meses	293,9 (c)	305,9 (d)
OR com aprendizagem adiada de 1 ano	291,2 (e)	299,7 (f)

Ordem dos erros da simulação³⁵³: (a) 0,26%; (b) 0,29%; (c) 0,03%; (d) 0,16%; (e) 0,36%; e (f) 0,43%.

Assim, a aprendizagem imediata é melhor para a alternativa 1 e um pouco melhor para a alternativa 2. Lembrar que a alternativa 2 é mais cara que a alternativa 1. A opção de adiar o aprendizagem pode ser de alguma relevância para os casos de alto custo de aprendizagem, baixo poder de revelação, baixo fator de penalização (planta com flexibilidade de expandir a produção, com γ^+ perto de 1) e OR “out-of-money” ($VPL < 0$).

A formulação do problema de momento ótimo de aprendizagem é dada pela equação seguinte, similar a Murto (2004, eq. 2)³⁵⁴, mas considerando o problema de expiração finita da OR, de $K + 1$ alternativas (sendo K alternativas de investimento em informação) e que o aprendizado leva um intervalo de tempo t_k (t_k não é uma data, é um intervalo de tempo). Em relação à eq. (338), aparece

³⁵² O fator de desconto é e^{-rt} . Para $r = 6\%$, os fatores de desconto são 0,970 e 0,942, respectivamente para os casos de 6 meses e 1 ano.

³⁵³ Esses valores são para 10.000 simulações, exceto itens (b) e (d), nos quais foram usadas 100.000 simulações devido aos valores próximos. O erro é só uma estimativa, pois compara o valor *tradicional* de OR que resulta da simulação de Monte Carlo com o resultado “teórico” da aproximação analítica eficiente (opção americana de compra) de Bjerksund & Stensland (ver Haug, 1998, p.26-29).

³⁵⁴ Mas aqui se corrige uma imprecisão de Murto (onde está τ' , o correto é $\tau' - \tau$).

também o instante ótimo t^{**} (que tem de ser menor que t^*) para investir em informação de forma a maximizar W_k .

$$W_k = \max_{t^{**} \in [0, T-t_k]} E \left[e^{-r t^{**}} \left[E \left[\max_{t^* \in [t^{**} + t_k, T]} \left\{ E^Q \left[e^{-r(t^* - t^{**})} (\tilde{q} \tilde{B} P(t) - I_D(\tilde{B}, t)) \right] \right\} | S_k \right] - C_k \right] \right] \quad (342)$$

Em palavras, para a alternativa k se escolhe o momento ótimo t^{**} para investir em informação que maximiza o valor esperado externo, sendo que essa data pode ser qualquer uma entre $t = 0$ e $t = T - t_k$, de revelar a informação, que toma o tempo t_k , e a fim de ter tempo de eventualmente usá-la para desenvolver o campo. Como C_k está em valor presente na data de início de investimento em informação, o fator de desconto $\exp(-r t^{**})$ atualiza o valor obtido líquido de C_k para a data $t = 0$. Note que investindo em informação em t^{**} , a escolha da data ótima de desenvolvimento fica limitado para o intervalo $[t^{**} + t_k, T]$. Em caso de exercício da OR de desenvolvimento, o VPL obtido é trazido dessa data de exercício t^* até a data t^{**} com o termo $\exp(-r(t^* - t^{**}))$, já que depois esse termo irá ser trazido para valor presente em $t = 0$ pelo outro fator de desconto mais externo. Esse é um problema bastante complexo³⁵⁵. O exemplo anterior apenas testou três valores para t^{**} (0, 6 meses e 1 ano), que no caso mostraram que assumir $t^{**} = 0$ pode ser bastante razoável devido aos valores relativos de investimentos do caso petróleo.

5.3.

Jogo Não-Cooperativo de Opções Exploratórias: Guerra de Atrito

Nesse item será mostrada uma aplicação de jogos de OR para o caso exploratório, em que duas companhias de petróleo jogam o jogo não-cooperativo de guerra de atrito³⁵⁶. Como foi visto no item 4.1.2, a guerra de atrito é um jogo de momento ótimo (ou parada ótima) de externalidade positiva, em que as estratégias são *tempos de parada*, onde na verdade ocorrem as *ações* de fazer investimento. No contexto de jogos de OR, as ações são {exercer; não-exercer} uma OR. A maior parte da notação e dos conceitos, segue o tópico do cap. 4 sobre guerra de atrito (item 4.1.2), que deve ser consultado para casos de dúvidas. Também será

³⁵⁵ No caso de Murto (2004), as simplificações – não adequadas para a realidade do caso de petróleo, forçaram uma solução analítica. Ver item 3.1.3.1.

³⁵⁶ Esse tópico é baseado em Dias & Teixeira (2004).

usado nessa aplicação o cap. 3 (item 3.4), sobre modelagem de incerteza técnica exploratória com processos de revelação de Bernoulli.

Duas companhias de petróleo têm prospectos exploratórios vizinhos correlacionados. A incerteza técnica primária é sobre a existência de petróleo nos prospectos, expressa pelo fator de chance (FC), que é uma v.a. de Bernoulli. O preço do petróleo (de longo prazo) é outra variável chave e segue um MGB. Existe um tempo legal T para descobrir e se comprometer com um imediato plano de investimento para desenvolver o eventual campo descoberto. Ou seja, a OR tem maturidade finita.

A perfuração de um poço pioneiro num prospecto, a um custo I_w , comum a ambos os jogadores, gera uma informação relevante para o prospecto da *outra* firma. Essa revelação de informação é parcialmente pública gerando uma *externalidade positiva*, o que incentiva ambas as firmas a adiarem a perfuração de seus prospectos para tentar obter informação grátis. Para simplificar e poder ilustrar de forma clara os pontos de maior interesse, será assumida que a perfuração do poço pioneiro é instantânea. Essa premissa é usual na literatura por razões didáticas e conveniência de cálculo, como discutido no cap. 4.

O jogo é resolvido em retro-indução (“backwards”), como é padrão em jogos de parada ótima e em OR. Para isso é necessário saber os resultados (“payoffs”) para as estratégias ótimas no subjogo terminal jogado na data $t = T$. Será usado o *método diferencial* (ver item 4.2.1.2) para resolver o jogo de OR e a condição terminal será colocada como condição de contorno. Considere o caso mais geral que, num instante $t \in [0, T]$, o seguidor (F) já conseguiu a informação adicional revelada pela perfuração do prospecto do líder (L). O seguidor irá revisar as suas expectativas sobre o fator de chance exploratório, a fim de calcular o seu VME (eq. 3), em caso de exercício. No contexto de OR, o seguidor irá verificar se sua opção exploratória de perfurar o seu prospecto está “deep-in-the-money” ou não. Assim, como nos exemplos dos itens 4.2.2 e 4.2.3, o problema do seguidor é um problema puro de OR pois a interação estratégica termina com o primeiro exercício da OR no caso de exploração de petróleo sem considerar outros ativos do portfólio de exploração (o jogo aqui é focado em só dois prospectos).

Considere que o seguidor perfura o poço pioneiro. Em caso de sucesso (confirmando a existência de reserva de óleo), o seguidor tem a *opção de*

desenvolver o campo³⁵⁷. Assim, existe uma OR composta: a opção de perfurar o poço dá, em caso de sucesso, a OR de desenvolver o campo. Uma *condição necessária* para a opção exploratória ser exercida é que, em caso de sucesso, a opção de desenvolvimento esteja madura para o imediato exercício (“deep-in-the-money”). É sub-ótimo gastar mais cedo I_w e, no melhor cenário (sucesso), manter o projeto parado esperando mais algum tempo³⁵⁸ (ver uma situação similar em Dixit & Pindyck, 1994, p.190). Entretanto, a OR de desenvolvimento pode estar madura para o exercício ótimo, mas não a OR exploratória.

O exercício da OR de desenvolvimento é feito pagando o investimento no desenvolvimento I_D para receber o valor da reserva desenvolvida V , i. é, a eq. (1) $VPL = V - I_D$ que aqui é o resultado do exercício dessa OR de desenvolvimento. Como antes, o valor dessa reserva é a função $V(P(t), q, B)$, que aqui será dada pelo *modelo de negócios*, eq. (23).

Para não confundir com a notação de seguidor, denote por $R(P, t)$ o valor da opção real de desenvolvimento do campo. As variáveis de estado aqui são o preço (de longo prazo) do petróleo P (que segue um MGB) e o tempo. Por simplicidade não se considera a incerteza técnica nos parâmetros q e B , mas poderia ser feito com ajuda do modelo desenvolvido no item 5.2. Assumindo mercado completo para usar o método dos ativos contingentes (nesse caso é útil a seção 1D do cap. 6 de Dixit & Pindyck, 1994), se obtém a seguinte EDP para a opção de desenvolvimento $R(P, t)$:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 R}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial R}{\partial P} - r R + \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad (343)$$

Onde os parâmetros do processo estocástico neutro ao risco (σ, δ, r) do preço do petróleo são os discutidos anteriormente (ver cap. 2). As 4 condições de contorno dessa EDP, eq. (343), no problema de maximização de $R(P, t)$, são:

$$R(0, t) = 0, \quad \text{se } P = 0 \quad (344)$$

$$R(P, T) = \max(q B P - I_D, 0), \quad \text{se } t = T \quad (345)$$

$$R(P^*, t) = q B P^* - I_D, \quad \text{se } P = P^* \quad (346)$$

³⁵⁷ Por simplicidade, não está sendo considerada a fase de delimitação. Para uma incorporação simples dessa fase no modelo de jogos de OR, ver Dias (1997). Aqui se pode imaginar que o custo e o benefício dessa fase já está sendo incluído no VPL de desenvolvimento.

³⁵⁸ Outra forma de ver isso: o *ativo básico* é outra opção, mas esse ativo básico-opção não paga dividendos ($\delta = 0$). Uma conhecida propriedade de opções americanas diz que nunca é ótimo o exercício *antecipado* dessa opção. Mas se o ativo básico-opção tornar-se “deep-in-the-money”, o exercício antecipado *pode* ser ótimo, pois o ativo básico passa a gerar fluxo de caixa ($\delta > 0$).

$$\frac{\partial R(P^*, t)}{\partial P} = q B, \quad \text{se } P = P^* \quad (347)$$

Essas condições são padrões na literatura de OR³⁵⁹. Resolve-se esse problema por métodos numéricos tais como diferenças finitas ou aproximações analíticas, obtendo o valor da OR, $R(P, t)$, e a regra de decisão ótima dada pela curva de gatilho $P^*(t)$. Apesar dos exercícios em circunstâncias diferentes, a metodologia apresentada para a OR de desenvolvimento é válida tanto para o líder como para o seguidor. Entretanto, nos casos de assimetria nos parâmetros da reserva esperada (q, B, I_D), se usará subscritos adicionais (i ou j) quando conveniente para distinguir os valores e OR dos jogadores.

Note que se obtém a OR de desenvolvimento somente se a OR exploratória tiver sido exercida antes e \underline{e} tiver obtido sucesso (descobrimo reservas não desenvolvidas, a opção real R). Seja o valor da opção real exploratória $E(P, t)$ de perfurar o poço pioneiro (“wildcat”) uma função das variáveis de estado preço do petróleo (P) e tempo (t). Outra vez usando o método de ativos contingentes, se obtém uma EDP similar para a opção exploratória $E(P, t)$.

$$\frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 E}{\partial P^2} + (r - \delta) P \frac{\partial E}{\partial P} - r E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (348)$$

Os parâmetros do processo estocástico neutro ao risco (σ, δ, r) do preço do petróleo são como antes. As 4 condições de contorno dessa EDP dão padrões:

$$E(0, t) = 0, \quad \text{se } P = 0 \quad (349)$$

$$E(P, T) = \max[-I_W + FC(q B P - I_D), 0], \quad \text{se } t = T \quad (350)$$

$$E(P^{**}, t) = -I_W + FC(q B P^{**} - I_D), \quad \text{se } P = P^{**} \quad (351)$$

$$\frac{\partial E(P^{**}, t)}{\partial P} = FC q B, \quad \text{se } P = P^{**} \quad (352)$$

Como antes, resolve-se esse problema por métodos numéricos tais como diferenças finitas ou aproximações analíticas, obtendo a superfície de valores da OR, $E(P, t)$, e a curva de gatilho $P^{**}(t)$ para essa opção. Por enquanto, está sendo considerado apenas o problema de OR, não se modelou a interação estratégica. Se o preço do petróleo está abaixo do gatilho P^{**} , a firma irá esperar otimamente e isso independe da possibilidade de revelação de informação. Ou seja, se $P < P^{**}$, a firma espera independentemente do jogo guerra de atrito. Assim, esse jogo

³⁵⁹ São, respectivamente, a condição trivial para $P = 0$, a condição terminal (expiração legal) em $t = T$, a condição de continuidade em P^* e a condição de contato suave em P^* .

(interação estratégica) realmente *começa* quando pelo menos um dos prospectos está maduro para o exercício. Somente nesse caso aparece um custo de lutar (esperar), que é o custo de adiar o exercício de uma OR que está “deep-in-the-money”. Logo, esse argumento indica que o gatilho do líder P_L não pode ser menor que o gatilho da opção “pura” (sem interação estratégica) P^{**} e em geral pode ser maior, i.é:

$$P_L \geq P^{**} \quad (353)$$

Portanto, em contraste com o jogo de preempção, a guerra de atrito aumenta o valor da espera. Ou seja, o *prêmio da espera* no contexto estratégico é maior que o de OR tradicional, que por sua vez é maior que nos jogos de preempção.

O valor da opção exploratória depende do parâmetro técnico chave que é o fator de chance FC. Será usada uma notação similar ao do item 3.4 (e mesmo do exemplo básico do cap. 2, Figura 3). Para cada prospecto existem três possibilidades para o conjunto de informação no qual os especialistas se baseiam para estimar FC: (a) sem (ou antes) da revelação de informação do prospecto vizinho, FC; (b) com revelação de informação positiva FC^+ (o vizinho descobriu petróleo); e (c) com revelação de informação negativa, FC^- (o vizinho perfurou e achou um *poço seco*). Naturalmente, a EDP, eq. (348) e suas condições de contorno (eqs. 349, 350, 351 e 352) se aplicam para todos os três casos, apenas o valor do fator de chance usado FC é que muda. O caso (a) é usado para a valoração do líder $L(P, t)$, enquanto que os casos (b) e (c) são usados na valoração do seguidor (o jogador *informado*) $F(P, t)$.

Assim, para valorar essas opções, é necessário as relações entre as variáveis FC, FC^+ , e FC^- , que são v.a. de Bernoulli que foram estudadas em detalhes no item 3.4. Essas relações são dadas pelas eqs. (198) e (199). Além disso, no exemplo numérico será assumido que os fatores de chance dos jogadores i e j serem intercambiáveis, o que faz simplificar as relações entre FC, FC^+ , e FC^- , uma vez que se pode usar equações ainda mais simples, i. é, as eqs. (213) e (214), além de evitar complicações, já que não é necessário se preocupar com os limites de Fréchet-Hoeffding para a consistência da distribuição bivariada de Bernoulli, desde que se use a medida de aprendizagem $\eta^2(X | S)$, ver Proposição 7. No contexto estratégico, o sinal S_j é o próprio FC_j . Assim, a estrutura de informação

flexível proposta para esse problema, para o jogador i que recebe um sinal (resultado da perfuração) FC_j do jogador j , é:

$$\mathcal{I}_i = \{\eta^2(FC_i | FC_j), \text{v.a. intercambiáveis}\} \quad (354)$$

Que inclui a assertiva “v.a. intercambiáveis” o que significa, por ex., que os fatores de chance iniciais dos dois jogadores têm as mesmas probabilidades de sucesso. Essa estrutura de informação, mais as probabilidades a priori, i. é, os fatores de chances iniciais (que são iguais), define totalmente o problema, permitindo resolver o problema de valor da informação, i. é, o problema da revisão de probabilidades com o exercício das OR exploratórias. A medida de aprendizagem $\eta^2(FC_i | FC_j)$, que aqui (v.a. de Bernoulli) é simétrica, dá o grau de correlação entre os prospectos numa escala de 0 a 1 e é interpretada como a redução percentual esperada da incerteza (cap. 3).

Na notação estratégica, as eqs. (213) e (214) para a revisão dos fatores de chance intercambiáveis, ficam sendo:

$$FC_i^+ = FC_i + (1 - FC_i) \eta(FC_i | FC_j) \quad (355)$$

$$FC_i^- = FC_i - FC_i \eta(FC_i | FC_j) \quad (356)$$

Em que se está usando a *raiz positiva* de $\eta^2(FC_i | FC_j)$ para obter uma equação linear. O valor da firma i como líder $L_i(P, t)$, i. é, o valor da firma i quando exercendo a opção *exploratória* é:

$$L_i(P, t) = -I_W + FC_i \cdot R_i(P, t) \quad (357)$$

Em palavras, o líder gasta o investimento em perfuração I_W e obtém a opção exploratória $R_i(P, t)$ com probabilidade FC_i (e obtém zero de outro modo). A OR de desenvolvimento $R_i(P, t)$ é calculada com a EDP (eq. 343) e suas condições de contorno (eqs. 344, 345, 346 e 347).

O valor de seguidor $F_i(P, t)$ para a firma informada (“free-rider”) i , considera o valor *esperado* do ganho da revelação de informação com o exercício da opção da firma j (líder). Para a firma i , uma revelação de informação positiva ocorre com probabilidade FC_j e uma revelação de informação negativa ocorre com probabilidade $(1 - FC_j)$. Assim, o valor do seguidor (informado), para a firma i como “free-rider” é:

$$F_i(P, t) = FC_j \cdot E_i(P, t; FC_i^+) + (1 - FC_j) \cdot E_i(P, t; FC_i^-) \quad (358)$$

Onde $E(P, t; FC_i^+)$ e $E(P, t; FC_i^-)$ são os valores das OR exploratórias calculados com os parâmetros FC_i^+ e FC_i^- , respectivamente. Esses parâmetros são

calculados com as eqs. (355) e (356) e as opções com a EDP (eq. 348) e suas condições de contorno (eqs. 349, 350, 351 e 352).

Para uma guerra de atrito simétrica, o (informado) seguidor irá exercer a sua opção em caso de revelação positiva (i.é, sua opção E foi melhorada com um “salto” no parâmetro FC_i^+) e deve esperar em caso de revelação negativa. Isso segue porque o líder exerce otimamente a sua opção exploratória somente se ela está madura (“deep-in-the-money”), condição necessária vista antes. Se a opção estiver madura antes da revelação – usando FC_i , ela também estará com FC_i^+ , pois $FC_i^+ > FC_i$ e a OR exploratória é uma função monotônica crescente do parâmetro FC. Se ela não estava madura antes, então não havia interação estratégica antes.

Agora imagine um valor inicial ($t = 0$) para o preço P muito alto. Para esse P as OR exploratórias podem estar tão atrativas (mais que maduras) para ambos os jogadores, que o exercício simultâneo pode ser ótimo para ambos os jogadores. Isso ocorre quando os valores do líder e do seguidor são iguais, desaparecendo o incentivo para ser seguidor (guerra de atrito com prêmio igual a zero). No caso de jogadores simétricos, existe um valor de gatilho para P a partir do qual ambos os jogadores têm de jogar otimamente a estratégia de exercício simultâneo, renunciando ao prêmio de revelação de informação. Nesse caso de jogo simétrico, se pode ter um único gatilho de exercício simultâneo P_S , i. é, o menor valor de P no qual $L(P, t) = F(P, t)$. Na guerra de atrito *assimétrica* se manterá essa notação, mas com o significado que P_{S_i} e P_{S_j} são os gatilhos acima dos quais a interação estratégica não é mais relevante para as firmas i e j, respectivamente. Por simplicidade, considere inicialmente o caso do jogo simétrico. Métodos numéricos simples, resolvem a equação $F(P, t) = L(P, t)$ obtendo P_S . Como aqui não estará mais sendo usada a notação S para sinal, denote, como nos itens 4.2 e 4.3, o valor do exercício simultâneo pela firma i por $S_i(P, t)$ ($= L_i(P, t)$). Formalmente³⁶⁰, o gatilho de exercício simultâneo P_S é dado por:

$$P_S(t) = \inf \{ P(t) > 0 \mid L(P, t) = F(P, t), t \in [0, T] \} \quad (359)$$

Com a convenção padrão de que o ínfimo de um conjunto vazio é $+\infty$. Uma situação em que o exercício simultâneo é claramente ótimo é quando o preço é tão alto que mesmo em caso de revelação negativa o valor da opção $E_i(P, t; CF_i^-)$ está

³⁶⁰ Essa definição é mais adequada do que a alternativa de estabelecer P_S com uma condição de contorno *adicional* (continuidade ou contato suave) para a EDP (eq. 348), pois P_S pode ser ∞ para os casos extremos de intensidade de aprendizagem, como será visto abaixo.

maduro para o exercício imediato. Nesse caso a revelação de informação não muda o exercício ótimo da OR, ou seja, a informação é irrelevante para propósitos pragmáticos de exercício da opção, que vai ser exercida em todos os casos.

É possível a situação no qual $P_S = \infty$ para qualquer $t < T$? A resposta é sim, mas para o caso de revelação total (informação perfeita ou correlação perfeita entre os prospectos). Nesse caso $\eta^2(FC_i | FC_j) = 100\%$, um caso extremo de revelação de informação. Nesse caso, $FC_i^+ = 1$ e $FC_i^- = 0$ de forma que a revelação de informação é valiosa para *qualquer* valor finito de P , pois mesmo a possibilidade de descobrir um campo de petróleo gigante, o produto de um valor alto, mas finito, por zero é zero, e portanto $F(P) > L(P)$ para qualquer valor finito de P (ver eqs. 357 e 358, e note que $E(\cdot)$ é estritamente crescente em FC). No caso de revelação total, a aprendizagem sempre é valiosa se o custo de aprendizagem é zero como no caso de “free-rider”.

Ilustrando os conceitos e equações apresentadas, considere o seguinte exemplo numérico³⁶¹ para a guerra de atrito simétrica, com os parâmetros:

- Parâmetros do processo estocástico (MGB): $r = \delta = 5\%$ p.a.; $\sigma = 15\%$ p.a.; $P(t = 0) = 20$ \$/bbl;
- Parâmetros dos prospectos³⁶² (valores simétricos, i. é, $i = j$): $FC = 20\%$; $B = 300$ MM bbl; $q = 15\% \times \exp(-2 \delta)$; $I_w = 30$ MM \$; I_D (MM\$) = $[300 + (2 B)] \times \exp(-2 r)$
- Outros parâmetros: $T = 2$ anos; $\eta^2(FC_i | FC_j) = \eta^2(FC_j | FC_i) = 10\%$ ³⁶³.

Com esses valores, a *opção de desenvolvimento* (dado o sucesso exploratório) torna-se “deep-in-the-money” somente quando o preço do petróleo sobe para $P^* = 26,08$ \$/bbl, enquanto que a *opção exploratória* torna-se “deep-in-the-money” somente quando o preço do petróleo sobe para $P^{**} = 30,89$ \$/bbl. Logo, para preços do petróleo abaixo de 30,89 \$/bbl, a estratégia de esperar é ótima para ambos os jogadores não por causa do jogo (da revelação de informação), mas por causa da teoria das OR que diz que a espera é melhor

³⁶¹ Esse exemplo pode ser analisado com a planilha war_attrition.xls do CD-Rom.

³⁶² Os termos $\exp(-2 \delta)$ e $\exp(-2 r)$ que aparecem respectivamente nos parâmetros q e I_D são fatores de desconto: depois de uma descoberta, está sendo considerado que a fase de delimitação e o estudo de viabilidade levarão cerca de dois anos. Somente depois é que a OR será exercida. Esses fatores de desconto apenas trazem os valores dos parâmetros de entrada usados da data de exercício da OR de desenvolvimento para a data de exercício da OR exploratória. A alternativa seria já fornecer os dados numéricos atualizados para a data de exercício de $E(\cdot)$.

³⁶³ Logo, as raízes positivas são: $\eta(FC_i | FC_j) = \eta(FC_j | FC_i) = 0,3162$.

quando a opção exploratória não está madura para o exercício ótimo, independentemente da existência do prêmio do jogo guerra de atrito.

A Figura 76 mostra as curvas do líder e do seguidor assim como os gatilhos para esse exemplo numérico. Na parte de baixo da Figura 76 é mostrado a forma estratégica para um subjogo desse jogo de OR, quando a variável de estado é igual a $P = 31$ US\$/bbl e $t = 0$ (faltando $T = 2$ anos para a expiração). Essa figura foi inspirada e adaptada de Smit & Trigeorgis (2004).

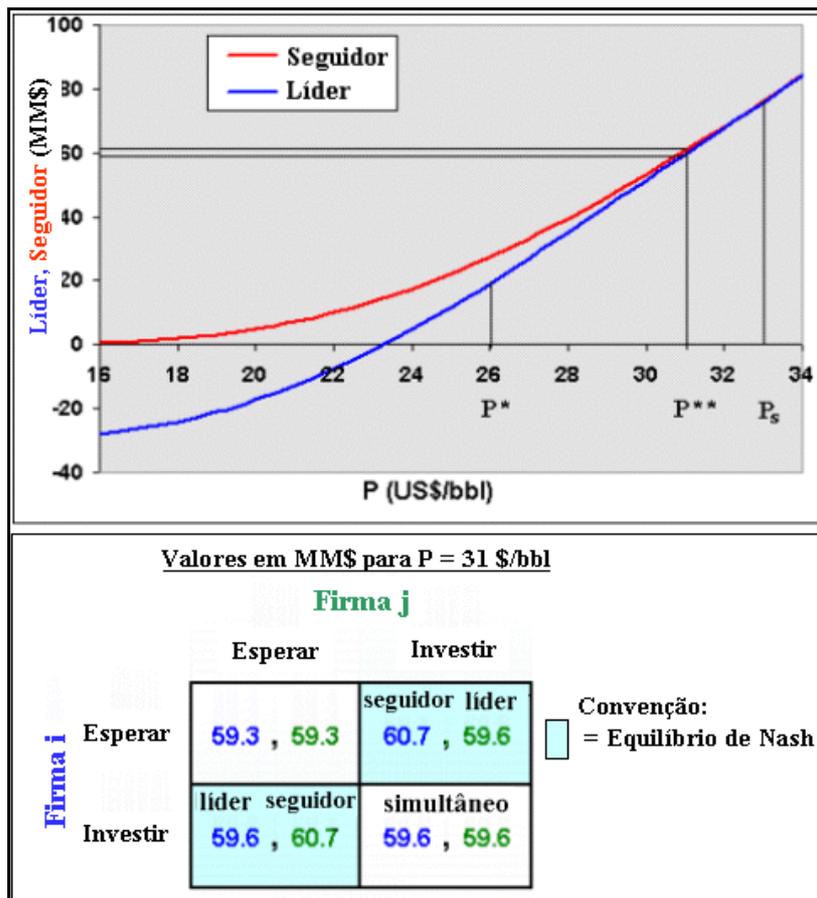


Figura 76 – Líder e Seguidor na Guerra de Atrito Exploratória Simétrica

A Figura 76 facilita a discussão de pontos importante do jogo guerra de atrito. Primeiro, as curvas tanto do líder como do seguidor são convexas na variável estocástica P . Lembrar que no jogo de preempção (itens 4.2.2 e 4.2.3) a curva do líder era côncava (ex.: Figura 60), pois lá um aumento da demanda gerava efeitos opostos no valor do líder: aumentava o lucro de curto prazo, mas aumentava a chance do seguidor exercer a sua opção, o que diminuía o valor do líder. Em contraste, aqui o exercício do seguidor não afeta o valor do líder, de forma que a curva do líder tem o formato convexo padrão de opções. Isso porque, como mostrado na eq. (357), o valor do líder é uma opção (de desenvolvimento)

multiplicada por uma constante (FC) menos uma constante (I_w). Logo, é apenas uma curva convexa padrão de opções com uma translação para baixo de I_w . Essa curva do líder somente torna-se linear em P depois de $P^* = 26,08$ \$/bbl, quando o componente de opção $R(P, t)$ torna-se “deep-in-the-money” e vale a equação linear do VPL com P. Em contraste, a tradicional opção *exploratória* (não mostrada na Figura 76) somente torna-se madura para o imediato exercício (e linear) depois de $P^{**} = 30,89$ US\$/bbl.

A curva do seguidor, a qual é função do conjunto de resultados possíveis do exercício do líder (cenários de revelação de informação), é também convexa pois é apenas uma combinação convexa (linear) de duas funções convexas (opções padrões com diferentes parâmetros), ver eq. (358).

A Figura 76 também mostra a forma estratégica para o jogo no estado $P(t) = 31$ \$/bbl e com dois anos antes da expiração da opção, a fim de discutir os aspectos de equilíbrio em estratégias puras. Nesse estado P e nesse subjogo (t) se tem dois equilíbrios de Nash (EN) em estratégias puras, (F_i, L_j) e (L_i, F_j) , como no jogo do medroso analisado no cap. 4 (item 4.1.2.1 e Figura 54). Em termos dinâmicos, a retro-indução mostra que se um jogador está considerando se tornar líder, é sempre melhor ser líder no primeiro instante em que o preço do óleo atinge P^{**} , do que após esse instante, pois existe um *custo de lutar* (“fighting cost”) em adiar uma opção exploratória que está “deep-in-the-money”³⁶⁴. O equilíbrio perfeito de Markov (EPM) em estratégias puras para o líder é escolher o tempo de parada (ou estratégia de gatilho) t_L dado por:

$$t_L = \inf \{ t \mid P(t) \geq P^{**}(t) \} \quad (360)$$

Analogamente, a estratégia pura do seguidor é escolher um $t_F > t_L$ no primeiro instante em que a opção exploratória *com a informação revelada*, torna-se madura para o exercício ótimo imediato. Denote o gatilho da opção exploratória *após* a revelação de informação por P_F . O tempo de parada t_F irá ocorrer imediatamente após a revelação de informação em caso de revelação positiva e mais tarde (ou nunca) em caso de revelação negativa.

³⁶⁴ Na parte inferior da Figura 76, os valores da estratégia (esperar, esperar) consideram o custo de adiar o exercício da opção por um mês com a taxa livre de risco. Entretanto, o raciocínio é válido para qualquer custo de espera estritamente positivo, de forma que um método mais rigoroso para estimar o custo de adiar o exercício de uma opção madura, não é necessário nesse contexto.

$$t_F = \inf \{ t \mid P(t) \geq P_F(t) \} \quad (361)$$

A Figura 77 mostra uma ampliação (“zoom”) de uma região da Figura 76, a fim de destacar o intervalo $[P^{**}, P_S)$, o conjunto de estados no qual o jogo guerra de atrito é relevante³⁶⁵.

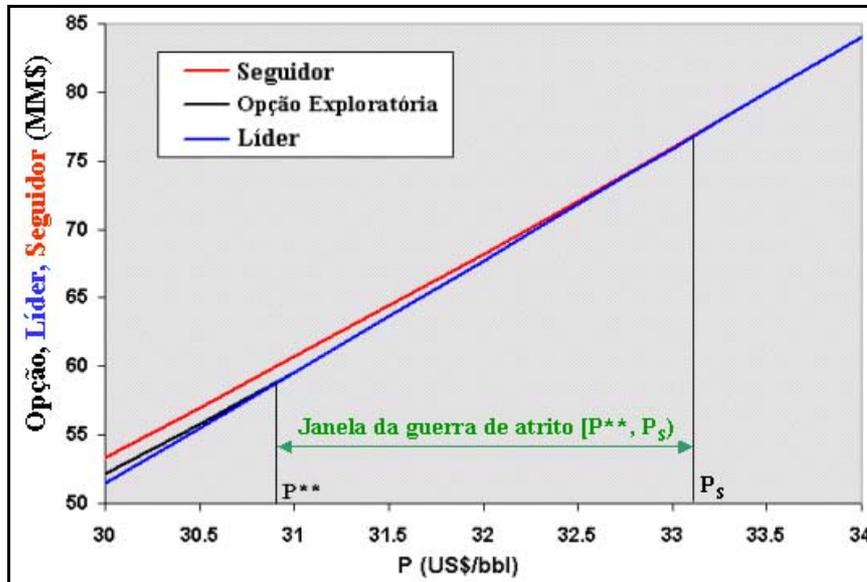


Figura 77 – Região Onde o Jogo Guerra de Atrito é Relevante

A Figura 77 também mostra o valor da (tradicional) opção exploratória, a qual é maior que o valor do líder para $P < P^{**}$ (o valor da espera é a diferença), que faz um contato suave no valor do líder em P^{**} , e é igual ao valor do líder quando madura para exercício imediato ($P \geq P^{**}$). Em $P = 31$ $\$/bbl$ ($> P^{**}$) ambos os jogadores tem opções exploratórias “deep-in-the-money”, de forma que a guerra de atrito tem relevância: existe um incentivo devido ao jogo para esperar (o prêmio da revelação de informação) e um custo de lutar (o custo de adiar o exercício dessa opção madura para exercício imediato ótimo). Para $P < 30,89$ $\$/bbl$, não existe o jogo (o jogo não importa) porque a política ótima é esperar e ver, independentemente da presença da outra firma. Em adição, para $P = P_S = 33,12$ $US\$/bbl$, o preço é tão alto que o exercício simultâneo das opções é ótimo para ambos os jogadores, de forma que o jogo acaba para $P > P_S$. Para os valores numéricos adotados, o jogo guerra de atrito só existe na janela $P \in [30,89, 33,12)$.

³⁶⁵ Logo, para toda a região remanescente ($P < P^{**}$ and $P \geq P_S$) o jogo não é relevante! Num artigo de jogos de OR com guerra de atrito, Murto (2002) também identifica uma região de estados (janela) em que não há interação estratégica. Entretanto, seu artigo tem muitas diferenças com o modelo da tese: aplicação para abandono de duopólio, opção perpétua (aqui é finita), opção de abandono simples (aqui é composta), etc.

Naturalmente esse intervalo é pequeno porque o prêmio de revelação de informação é relativamente pequeno com o adotado valor de $\eta^2(FC_i | FC_j) = 10\%$, além de não ter sido considerado revelação de informação sobre a qualidade da reserva q . Se aumentasse o prêmio do jogo aumentando o valor de $\eta^2(FC_i | FC_j)$, a janela do jogo guerra de atrito aumentaria porque o valor do líder seria o mesmo, mas o prêmio maior iria aumentar o valor do seguidor e, logo, o valor de P_S .

A Tabela 18 mostra a janela de relevância do jogo guerra de atrito usando diferentes valores de $\eta^2(FC_i | FC_j)$. Note que se $\eta^2(FC_i | FC_j) = 0$, não existe revelação de informação e assim não existe janela para o jogo (conjunto vazio) pois $P_S = P^{**}$ (e em P_S o jogo acaba). Para $\eta^2(FC_i | FC_j) = 100\%$, o caso de revelação total, a aprendizagem grátis é sempre mais valiosa que ser líder e assim $P_S = \infty$. Assim, para o caso de revelação total, o jogo guerra de atrito é relevante em qualquer caso de opção exploratória “deep-in-the-money” (qualquer $P \geq P^{**}$).

Tabela 18 – Revelação de Informação x Janela Relevante da Guerra de Atrito

$\eta^2(FC_i FC_j)$ (%)	0	10	20	30	50	70	90	100
$[P^{**}, P_S]$ (\$/bbbl)	\emptyset	[30,9, 33,1)	[30,9, 34,8)	[30,9, 36,7)	[30,9, 42,5)	[30,9, 55,5)	[30,9, 120)	[30,9, ∞)

Análise de Equilíbrio: Para o jogo *simétrico* de guerra de atrito, existem duas estratégias puras que são equilíbrios perfeitos. A primeira com a firma i exercendo primeiro a sua opção no tempo de parada (exercício) t_L e a firma j exercendo a sua opção em t_F . O segundo equilíbrio é o mesmo mas com os papéis das firmas i e j invertidos. Os pares de estratégias que são equilíbrio são (t_{Fi}, t_{Lj}) e (t_{Li}, t_{Fj}) . Note que o clássico resultado da guerra de atrito com $t_{Lk} = 0$ ocorre se o preço inicial do petróleo for $P(t=0) \geq P^{**}_k(t=0)$, $k = i, j$.

O caso de guerra de atrito *assimétrica* é um caso de interesse prático maior, pois é mais comum. Nessa aplicação, as companhias de petróleo têm diferentes taxas de desconto, diferentes prospectos (registros sísmicos indicam diferentes volumes esperados de reserva em caso de sucesso), diferentes interpretações dos mesmos dados geológicos, etc. Conforme discutido no cap. 4 (item 4.2.1.1), apenas o preço de exercício I_w deve ser o mesmo para ambos os jogadores. Um conhecido resultado (ver Hammerstein & Selten, 1994, p.978) para guerra de atrito assimétrica é que, tipicamente a razão custo-benefício V/C deve ser

decisiva, i. é, o jogador com o maior V/C (a firma mais forte) deve ganhar (ser seguidora). Aqui o benefício é o ganho de revelação de informação, dado pela diferença $F_i - L_i$ para o jogador i. O custo de lutar C_i aqui depende em quão “deep-in-the-money” está a opção de perfurar da firma e da taxa de desconto, i. é, o custo de adiar o exercício de uma opção madura por unidade de tempo. O custo de adiar por um intervalo infinitesimal dt, com a taxa livre de risco r, uma opção exploratória madura para exercício ótimo que vale L_i , é:

$$C_i(P, t) = L_i(P, t) [1 - \exp(-r dt)] \quad (362)$$

Fazendo $\exp(-r dt) \cong 1 - r dt$ para um dt muito pequeno e substituindo, se obtém a seguinte expressão para o quociente benefício-custo Q_i da firma i:

$$Q_i(P, t) = (F_i - L_i)/C_i = (F_i - L_i)/(L_i r dt) \quad (363)$$

No contexto de opções, em vez do quociente Q, a assimetria das firmas pode ser caracterizada de forma mais adequada pela diferença de valores de gatilhos, as em Murto (2002) e em Lambrecht (2001). No presente caso, o gatilho relevante para firmas assimétricas é P_S . Se a firma i é mais forte que a firma j, então se tem $P_{Si} > P_{Sj}$. Lembrar que em P_S o imediato exercício é ótimo independentemente do outro jogador. Então, *a firma com o maior gatilho P_S é mais paciente*. Para ver isso, considere um preço P abaixo³⁶⁶ dos dois gatilhos P_S . A firma i pode estar certa que *antes* que o preço do petróleo alcance seu gatilho P_{Si} , o preço irá primeiro atingir o gatilho do oponente P_{Sj} , de forma que a firma j irá exercer antes a opção. Em outras palavras, não é crível a ameaça da firma j de esperar no intervalo $[P_{Sj}, P_{Si}]$. Com isso, esse EN não é perfeito (lembrar que o critério da perfeição demanda que o equilíbrio precisa ser de Nash em *todos* os subjogos).

Portanto existem dois critérios (quociente benefício-custo e gatilho) para estabelecer a assimetria no jogo assimétrico. No entanto, se a taxa livre de risco é a mesma para as duas firmas, a eq. 363 diz que a análise do quociente benefício-custo pode ser reduzida para a análise da razão F/L, i. é, simplesmente o jogador mais forte possui a maior razão F/L. Dada a definição de P_S , na maioria dos casos esses critérios são equivalentes. Para ver isso, ver as curvas de F e L na Figura 77. Se *aumentar* o valor do líder, diminuindo a razão F/L, o gatilho P_S diminui

³⁶⁶ Preço acima de P_S terminaria o jogo em $t = 0$, já que pelo menos a firma de menor P_S exerceria a opção.

também³⁶⁷ (para o mesmo I_w). Logo, esses dois critérios são equivalentes para P_S finitos. A desvantagem do critério de gatilho é que para os casos extremos de revelação da informação esses gatilhos podem ser *infinito* para ambas as firmas ($P_{Si} = P_{Sj} = \infty$), mesmo quando existem algumas diferenças entre os valores (“payoffs”) das firmas. Nesse caso, o critério do quociente pode distinguir a firma fraca da firma forte, mas é difícil provar o ENPS como indicado abaixo.

A assimetria na guerra de atrito geralmente descarta um equilíbrio perfeito em estratégias puras, apontando para um *único* equilíbrio em estratégias puras o equilíbrio intuitivo com a firma mais *fraca* exercendo sua opção imediatamente e a mais *forte* (mais paciente) sendo o seguidor. Mesmo uma vantagem pequena (“ε advantage”) é suficiente para fazer a firma mais forte a vencedora sem lutar, gerando um único ENPS. Esse resultado é mostrado em ambos, na literatura tradicional de guerra de atrito (Ghemawat & Nalebuff, 1985; Fudenberg & Tirole, 1991, pp.124-126) e na literatura de jogos de OR de guerra de atrito (Lambrecht, 2001; Murto, 2002). Murto (2002) descartou os equilíbrios perfeitos “paradoxais” com a firma mais forte exercendo primeiro, tanto se o grau de incerteza for de pequeno para moderado (mesmo para pequena assimetria), ou se a assimetria é suficientemente alta em caso de alto grau de incerteza. Entretanto, Murto (2002) principal contribuição é mostrar que, para um grau suficientemente alto de incerteza e para uma suficientemente pequena assimetria, o ENPS não-intuitivo com a firma mais forte concedendo primeiro, pode emergir porque o gatilho de exercício não é único³⁶⁸. Como em Lambrecht (2001, p.771-772) e por razões similares, (manter simples para *outras* extensões), a análise aqui fica restrita a simples gatilho de exercício P_S para cada firma, em vez de *conjuntos de exercícios desconectados*.

Logo, para a guerra de atrito assimétrica, o *único* ENPS é: a firma mais *fraca*, firma j (a firma com o menor P_S) perfura o poço em t_{Lj} (quando P alcança P^{**j}) e a firma mais forte i torna-se seguidora exercendo sua opção em t_{Fi} , o

³⁶⁷ Em adição, é intuitivo que um campo de petróleo mais valioso deve ter menores gatilhos de investimento P^* , P^{**} e P_S .

³⁶⁸ Murto (2002) chama isso de “gap equilibrium”. No caso de alta volatilidade, devido à iteração estratégica, cada firma tem pelo menos duas regiões de variáveis de estado onde o exercício da opção é ótimo independentemente da outra firma. No caso da *tese*, isso significaria que existe uma região entre essas regiões de exercício, onde o jogador mais forte pode exercer a opção se o preço *cair*. Logo, existem “regiões intermediárias de espera” como as indicadas no item 2.4.2 no contexto tradicional. Ver também a discussão de *estratégias de gatilho*, item 4.2.1.2.

primeiro instante em que a OR exploratória *com a revelação de informação*, torna-se madura para o imediato exercício. Esse tempo (t_F) pode ocorrer imediatamente depois de t_L , em caso de revelação positiva, ou, para o caso de revelação negativa, em um dos dois cenários: (a) no primeiro instante que P alcança o valor revisado de $P^{**}_i(t)$; ou (b) nunca, se o preço do óleo não alcançar esse valor no intervalo $(t_{Lj}, T]$. Em termos mais formais, o único ENPS é o par de estratégias (t_{Fi}, t_{Lj}) .

É esse ENPS estável no sentido de ser ESS (estratégia evolucionária estável, ver item 4.1.5.3)? De acordo com um teorema de Selten, um ESS num jogo assimétrico tem de ser um EN *estrito*. Mas como apontado por Kim (1993), a conjectura de Maynard Smith (1974) de que esse equilíbrio em estratégias puras pode ser ESS em jogos *assimétricos*, pode ser estabelecido mesmo não obedecendo ao teorema de Selten se o conceito de ESS for substituído pelo conceito de *ESS-limite*, o qual considera a possibilidade de “tremulação” (“trembles”), i. é, pequenos erros nas escolhas das estratégias pelos jogadores.

Entretanto, para o caso de jogo *simétrico* no qual existem dois ENPS em estratégias puras, (t_{Fi}, t_{Lj}) e (t_{Li}, t_{Fj}) , o único candidato a ser ESS é o equilíbrio em *estratégias mistas*, que é uma randomização sobre essas duas estratégias puras, contrastando com o caso do jogo assimétrico em que a estratégia pura é a candidata a ser ESS. Esse é um resultado clássico de Maynard Smith.

Estratégias mistas nesse jogo de momento ótimo são funções distribuições de probabilidades acumuladas G_i em $t \geq 0$, i.é, $G_i(t)$ é a probabilidade que o jogador i exerceu sua opção em ou antes de t . No artigo sobre guerra de atrito em tempo contínuo, Hendricks & Weiss & Wilson (1988) analisaram os equilíbrios em estratégias mistas, mostrando que a função distribuição acumulada $G(t)$ tem *pontos de massa concentradas* em equilíbrio somente ou no início ou no final do jogo (equilíbrios *degenerados* em estratégias mistas). Para o caso dos equilíbrios *não-degenerados* em estratégias mistas, eles acharam que, sob certas condições, existe um contínuo de equilíbrios não-degenerados com probabilidade positiva de parada para ambos os jogadores no intervalo $(0, t^*)$, i.é, a função $G(t)$ é estritamente crescente nesse intervalo, depois do qual ambos os jogadores esperam até a expiração do jogo (T) quando a função $G(t)$ pode dar um salto devido a possibilidade de ponto de massa em T . Entretanto, o mesmo artigo aponta que para jogos de maturidades *finitas* (mencionando o caso específico de

exploração de petróleo como exemplo), não existe equilíbrio não-degenerado devido à descontinuidade dos valores entre F e L na expiração do jogo.

É oportuno rever a discussão das possíveis condições terminais desse jogo, apontadas no item 4.1.2.3 (especialmente as eqs. 253 e 254). A condição da eq. (253), $F(T) \geq L(T)$ é similar a Hendricks & Weiss & Wilson (1988)³⁶⁹ que colocaram $F(T) > L(T)$ para o caso de jogo finito, em vez de $F(T) = \max\{L(T), 0\}$. Entretanto, em ambos os casos pode haver uma diferença de valores na expiração, $F(T) > L(T)$, que é o caso mais comum da condição da eq. (253). Como foi visto no item 4.1.2.3, essa condição tem a vantagem de fazer a função $F(t)$ ser contínua na expiração (como em Hendricks & Weiss & Wilson, 1988, premissa A1). A condição da eq. (253) também pode ser vista como uma condição em que existe uma última data em que o seguidor pode se aproveitar da revelação de informação e assim facilita o trabalho de provar o ENPS por retro-indução.

Assim, a literatura toda leva a concluir que não existiriam equilíbrios não-degenerados, i. é, não existiriam equilíbrios em estratégias mistas com jogos assimétricos e, especialmente, para jogos finitos como é o presente caso. Assim, o equilíbrio com o jogador “mais forte” como seguidor, é o único ENPS nesses casos. Mas é interessante discutir melhor a questão de estratégias mistas em jogos de OR. Equilíbrios não-degenerados podem ocorrer no contexto de jogos de OR se for considerada a questão de múltiplos gatilhos P_S para cada firma, como em (2002). Essa análise pode ser muito complexa e, como visto antes, aqui estão sendo consideradas apenas as *estratégias de gatilho*, como em outros artigos de jogos de OR em guerra de atrito (ex.: Lambrecht, 2001). Também é de interesse discutir o caso de *informação incompleta* e da existência de *equilíbrios Bayesianos perfeitos* (EBP)³⁷⁰. Mas por questão de espaço e prioridade, será discutido uma alternativa de equilíbrio que pode ser muito mais interessante, por ser Pareto-dominante de todos os equilíbrios. Nominalmente, a alternativa de “trocar o jogo”, com os jogadores abandonando a guerra de atrito em favor de um

³⁶⁹ No caso deles, as funções L e F são contínuas em T por conveniência, pois lá o único resultado em T é a parada simultânea com valor S (nota 5). Eles assumem que haverá a parada até a expiração, i. é, $G(T) = 1$ (nota 7). No caso da tese, pode não haver exercício em todo o período.

³⁷⁰ Na literatura tradicional de guerra de atrito, Ponsati (1995) provou a existência de um *único* EBP no caso de dois jogadores com informação incompleta nos dois lados e jogo finito (como aqui). Esse equilíbrio é similar ao de estratégias mistas indicado antes: uma função $G(t)$ com ponto de massa na expiração e nenhum exercício de opção em algum intervalo precedente $[t^*, T)$. Como mencionado antes, é muito comum que os equilíbrios mistos e Bayesianos coincidam.

jogo de barganha através de um contrato “ganha-ganha” de parceria. Esse é o objeto da próxima seção, que mostrará que sob certas condições, esse contrato pode ser melhor mesmo quando comparado com a estratégia “free-rider” do seguidor (o maior valor da guerra de atrito). Isso ocorre graças à revelação de informação *adicional* de informação *privada* permitida pela parceria, o que aumenta o prêmio do jogo. O problema do jogo não-cooperativo é que ele é ineficiente no sentido que ganhos mútuos são deixados inexplorados. Antes porém, será discutida uma das premissas do jogo exploratório.

Nesse exemplo foi assumido que a perfuração do poço pioneiro é instantânea³⁷¹. Se for considerado o efeito do tempo de revelação t_R de forma mais detalhada, o valor do *seguidor será penalizado* quando comparado com $t_R = 0$. Simulações iniciais mostram que os principais efeitos quando se considera $t_R > 0$ são: (a) valor do jogador informado (seguidor) é menor; (b) o gatilho para o exercício ótimo da opção é menor, pois o gatilho nesse caso é o ponto em que os valores do líder e seguidor são iguais; e (c) existe um preço do petróleo P' no qual, para $P \geq P'$, o único equilíbrio perfeito de Markov (EPM) é o exercício simultâneo da opção³⁷².

5.4.

Mudando o Jogo de Opção: De Guerra de Atrito para Barganha

Nesse item será discutida a possibilidade de trocar o jogo não-cooperativo de guerra de atrito para o *jogo de barganha*³⁷³. Aqui se segue o conselho dado por Brandenburger & Nalebuff (1996), que apontam que nos jogos de negócios os maiores lucros são provenientes de mudar o próprio jogo, caso se esteja jogando o *jogo errado*. Em suas palavras “*changing the game is the essence of business strategy*”. No caso do jogo de exploração de petróleo, isso pode ocorrer se for aumentado o conjunto de ações permitindo a opção de parceria. Pode uma

³⁷¹ Com a premissa de perfuração instantânea, dentre outras coisas, se evita as complicações *durante* o exercício da opção, i é, durante esse tempo de perfuração o preço P pode cair abaixo do gatilho de desenvolvimento e se poderia esperar depois dessa perfuração, mesmo se tiver sucesso.

³⁷² Para $t_R = 0$, se o exercício simultâneo for ótimo, o valor do seguidor é igual ao valor de exercício simultâneo e existem três EPM: exercício simultâneo; firma i como líder e firma j como seguidora; e firma j como líder e firma i como seguidora. Mas pode-se colocar t_R arbitrariamente pequeno ($\epsilon > 0$), para descartar os outros equilíbrios e reforçar a condição $F_i(T) = \text{Max}\{L_i(T), 0\}$.

³⁷³ Esse tópico é baseado em Dias & Teixeira (2004).

parceria (contrato) entre as firmas ser equilíbrio? Quais são as condições? Como selecionar um de múltiplos equilíbrios cooperativos?

Essas questões começaram a serem discutidas no cap. 2, com o exemplo simples da Figura 3, em que as opções em dois prospectos correlacionados estavam expirando, ambos com VMEs negativos (sem considerar a revelação de informação). Lá se indicou que, se cada um dos prospectos pertencessem a duas firmas diferentes, a estratégia não-cooperativa seria não exercer a opção e devolver os prospectos ao governo. Com a cooperação (parceria), apareceria um valor positivo (“surplus”) devido ao efeito da revelação de informação, que poderia ser dividido entre os parceiros. Ou seja, o jogo guerra de atrito não permitiria maximizar o valor da firma, como no jogo de barganha. Serão aqui usados alguns conceitos, notações e equações do item 4.1.3, especialmente a solução de Nash para jogos cooperativos de barganha.

A novidade desse item com o conceito de “trocar o jogo” é que o *ponto de desacordo* (“disagreement point”, d) vem do jogo de OR não-cooperativo visto no item anterior³⁷⁴, i.é, o jogo guerra de atrito serve como dado de entrada no jogo cooperativo de barganha. Aqui se segue Binmore & Rubinstein & Wolinsky (1986) em que a solução de Nash para barganha é um ENPS do jogo análogo de *barganha não-cooperativa* (ofertas alternadas de Rubinstein, ver item 4.1.3), sob a premissa de que uma pequena probabilidade de desistência da negociação (“breakdown”) convergindo para zero e com a escolha adequada o ponto de desacordo d . Como discutido no cap. 4, a guerra de atrito não é uma *opção externa* à mesa de barganha. Ela provê um indesejável (Pareto-inferior) resultado no evento de um jogo de desacordo³⁷⁵. Sob a premissa de que apenas ENPS são ameaças críveis no jogo da discórdia que se seguiria ao jogo da barganha no caso de desistência de negociação, o critério de perfeição requer que o ponto de desacordo seja equilíbrio perfeito na guerra de atrito. Essa combinação de guerra

³⁷⁴ A seqüência do jogo pode ser como segue. Primeiro, as firmas estão jogando um jogo não-cooperativo (guerra de atrito) quando uma ou ambas as firmas identificam um ganho Pareto-superior com o jogo de barganha. As firmas trocam de jogo começando o jogo de barganha. Com alguma (muito alta) probabilidade p , eles concordam numa regra de divisão para a união de ativos U e com probabilidade $(1 - p)$ eles discordam. No último caso, a única alternativa crível é jogar um jogo não-cooperativo, que aqui é o jogo guerra de atrito.

³⁷⁵ Desistência da negociação é um evento aleatório com pequena probabilidade (dado que o jogo já foi trocado para a barganha). Isso pode ocorrer, por ex., devido a uma troca de gerente, ou simplesmente com a passagem do tempo devido a possível mudança do estado (P, t) de uma maneira que o jogo de barganha se torna menos atrativo.

de atrito e solução de Nash para a barganha, em geral não é o *jogo da ameaça* de Nash³⁷⁶. Aqui se considera que não é possível se comprometer com *ameaças críveis* outras que os ENPS do jogo da discórdia³⁷⁷. Logo, a solução aqui proposta do jogo de barganha é a solução de Nash com o (mais refinado) ENPS do jogo de guerra de atrito.

Se esse jogo tem um único equilíbrio assimétrico, como indicado no último item, (t_{Fi}, t_{Lj}) , então o ponto de desacordo será $(d_i = F_i, d_j = L_j)$. Naturalmente, se poderia usar um ponto de desacordo do equilíbrio paradoxal (t_{Li}, t_{Fj}) ou mesmo um equilíbrio Bayesiano ou em estratégias mistas, se eles existissem. Assim, esse é um rico e flexível caminho a ser analisado em futuro trabalho.

A alternativa de jogo de barganha tem uma importante vantagem sobre a guerra de atrito *no jogo de exploração de petróleo*, devido à possibilidade de explorar todo o potencial de revelação de informação. Ou seja, se pode obter resultados Pareto-ótimo apenas com a alternativa de jogo de barganha. Isso porque a informação *pública* do resultado de uma perfuração exploratória é apenas um subconjunto da informação acessível aos jogadores num contrato de parceria. Em comparação com a informação pública revelada, a informação adicional (*privada*) obtida com a cooperação pode aumentar o efeito de revelação de informação sobre o fator de chance³⁷⁸ e prover alguma informação útil adicional sobre a qualidade q (não só se o óleo é leve ou não, mas propriedades das rochas, etc.) e até sobre o volume B (detalhes do contato óleo-água, já comentado antes) dessa possível reserva. Por simplicidade, considere apenas o efeito na variável fator de chance. Para distinguir os dois casos de revelação de informação (público e privado), denote $\eta^2(FC_i | FC_j)^*$ o caso com informação privada (cooperativa), que é maior que o caso com informação pública, i . é:

$$\eta^2(FC_i | FC_j)^* > \eta^2(FC_i | FC_j)$$

³⁷⁶ Ver a diferença em Binmore (1992, p.261-265 and ex.7.9.5d, p.331). Ver item 4.1.3.

³⁷⁷ Mas no caso de múltiplos EN no jogo da discórdia, o jogo da ameaça de Nash poderia fazer sentido pois as estratégias de ameaças são equilíbrios e, assim, ameaças realmente críveis. Bolt & Houba (1998) apresentaram um modelo onde todas as ameaças são EN no jogo da discórdia e cada ameaça (crível) é um ponto de desacordo no jogo da ameaça de Nash.

³⁷⁸ Detalhada informação privada pode confirmar o *sincronismo* geológico com a primeira perfuração, aumentando o FC no prospecto vizinho, mesmo com uma revelação *pública* negativa sobre o resultado do poço (ex.: *traços* de óleo numa zona de interesse do outro prospecto).

Como a medida $\eta^2(\text{FC}_i | \text{FC}_j)$ é simétrica (por serem v.a. de Bernoulli, o jogo pode ser assimétrico) e por ser melhor trabalhar aqui com a sua raiz positiva, fica bem mais simples escrever essa inequação como:

$$\eta^* > \eta \quad (364)$$

Considere o mesmo exemplo do item anterior (5.3), mas agora com a revelação de informação privada η^* sendo dado por $\eta^2(\text{FC}_i | \text{FC}_j, \text{inf. privada}) = 30\%$ e, portanto, a raiz positiva $\eta^* = 0,5477$.

Com notação similar ao item 4.1.3, U é definido como a união dos ativos das duas firmas i e j . As participações das firmas i e j nesse ativo U são denotados respectivamente por $U_i = w_i \cdot U$, $U_j = w_j \cdot U$, com $w_j = 1 - w_i$ e esses pesos (“working interest”) sendo calculados pela regra axiomática de Nash. De forma similar à eq. (257), mas agora no contexto de opções, o valor do ativo (portfólio) U é dado pelo VME de um prospecto (que pode ser negativo, rever o exemplo simples do cap. 2) mais o valor esperado das opções do outro prospecto atualizado com a revelação de informação (agora dada por η^*) proveniente da primeira perfuração (o segundo termo é então sempre não-negativo). Uma condição necessária para haver um acordo entre as firmas é $U \geq 0$ (parceria é uma opção, não é obrigação). Logo, no contexto de opções, o valor U da união de ativos é:

$$U = \max\{0, \text{VME}_j + [\text{FC}_j \cdot E_i(\mathbf{P}, t; \text{FC}_i^+)] + [(1 - \text{FC}_j) \cdot E_i(\mathbf{P}, t; \text{FC}_i^-)]\} \quad (365)$$

Na equação acima se assume que o prospecto j será perfurado primeiro para revelar informação para o prospecto i . Lembrar que no caso *assimétrico* o prospecto j é o mais “fraco” e deve ser perfurado primeiro. Note que “fraco” em guerra de atrito significa ser o mais impaciente. Logo, em geral, os prospectos “fracos” no jogo guerra de atrito são os mais atrativos, pois o custo de postergar (lutar) é maior.

No contrato de barganha, a divisão de U seguirá a solução de Nash, com as participações w_i e w_j sendo dadas, respectivamente, pelas eqs. (258) e (259).

Nesse exemplo, em vez de escolher os valores de equilíbrio para o ponto de desacordo, que seria ($d_i = F_i$, $d_j = L_j$), pode ser mais interessante trabalhar com um caso fictício e mais extremo para esse ponto de desacordo, i. é, ($d_i = F_i$, $d_j = F_j$). Imagine que cada um dos jogadores se considera o jogador mais forte na guerra de atrito. Se mesmo nesse caso a alternativa de barganha for mais valiosa, então a

opção de barganha dominará qualquer possível equilíbrio que possa ser obtida com o jogo da discórdia (guerra de atrito). Isso pode ser importante na prática, pois se evita a análise de irrelevantes alternativas de equilíbrio, se for mostrado que a alternativa de barganha domina os mais favoráveis resultados que poderiam ser obtidos com o jogo não-cooperativo de guerra de atrito. Somente em caso de não-dominância desse jogo fictício, é que será necessário estudar em detalhes os equilíbrios do jogo não-cooperativo. Entretanto, isso apenas garante que, num certo intervalo de preços do petróleo, o jogo de barganha tem supremacia sobre o jogo de guerra de atrito. Esse jogo fictício não dá a melhor solução de barganha. Ou seja, a solução de barganha de Nash usando $(d_i = F_i, d_j = F_j)$ não é a mais adequada *solução de barganha* para as firmas que concordam na existência de assimetria dos prospectos³⁷⁹. Mas essa solução fictícia permanece pertencendo ao conjunto factível Pareto-eficiente no jogo assimétrico mesmo se for reduzido d_i e/ou d_j usando qualquer outro equilíbrio no ponto de desacordo³⁸⁰. Em adição, a solução de barganha com $(d_i = F_i, d_j = F_j)$ permanece estritamente maior que o melhor resultado da guerra de atrito (F) para cada jogador.

Denote \underline{P}_U como o menor preço do petróleo no qual a alternativa de barganha *não* é inferior a *qualquer* resultado do jogo guerra de atrito. De forma similar, denote \bar{P}_U como o mais alto preço do petróleo no qual a alternativa de barganha é estritamente melhor do que o melhor resultado da guerra de atrito para ambos os jogadores. Formalmente, para o jogador i (para o jogador j é similar), esses gatilhos de “troca de jogo” são definidos por:

$$\underline{P}_U(t) = \inf\{P(t) \mid U_i(P, t) > 0, U_i(P, t) \geq F_i(P, t)\} \quad (366)$$

$$\bar{P}_U(t) = \sup\{P(t) \mid U_i(P, t) > 0, U_i(P, t) > F_i(P, t)\} \quad (367)$$

Esses dois gatilhos de “troca de jogo” formam a janela de gatilhos do jogo de barganha $[\underline{P}_U, \bar{P}_U]$ na qual o jogo de barganha domina qualquer alternativa do jogo guerra de atrito, fazendo que essa não seja uma opção racional³⁸¹. Lembrar

³⁷⁹ Os jogadores podem discordar dos valores de uma análise econômica dos prospectos, mas os registros sísmicos darão aos jogadores a indicação relativa de qual o maior prospecto.

³⁸⁰ O inverso é que não é verdadeiro, i.é, se aumentar os valores do ponto d , um conjunto de soluções do conjunto factível desaparecem (ver Figura 57).

³⁸¹ Está se assumindo que esse intervalo é único, o que deve ser verdade para a grande maioria dos casos práticos (ou seja, continua sendo considerada só a estratégia de gatilho).

que a guerra de atrito tem uma janela de relevância dada por $[P^{**}, P_S)$. Assim, se diz que o jogo de OR de *barganha domina* o jogo de OR de guerra de atrito, se $[P^{**}, P_S) \subset [\underline{P}_U, \bar{P}_U]$.

A Figura 78 apresenta a análise integrada dos dois jogos. Ela mostra o valor da firma com a alternativa de barganha simétrica ($U_i = U_j$), a curva do valor do seguidor e a curva do valor do líder versus o preço do petróleo, para o subjogo em $t = 0$ (faltando dois anos para a expiração T). Apesar de que existe um intervalo de preços em que o valor do seguidor é maior que o valor desse jogador em barganha, note que o valor da barganha é sempre maior que o valor do líder (a exceção será para preços do petróleo muito altos em que esses valores serão iguais) e igual ou maior que o valor do seguidor na janela do jogo $\underline{P}_U = 29,6$ \$/bbl e $\bar{P}_U = 36,7$ \$/bbl. Logo, na região de interesse, a janela do jogo de barganha contém a janela do jogo guerra de atrito desse exemplo, $[P^{**}, P_S) = [30.89, 33.12)$, ver item 5.3, e assim a barganha domina o jogo guerra de atrito.

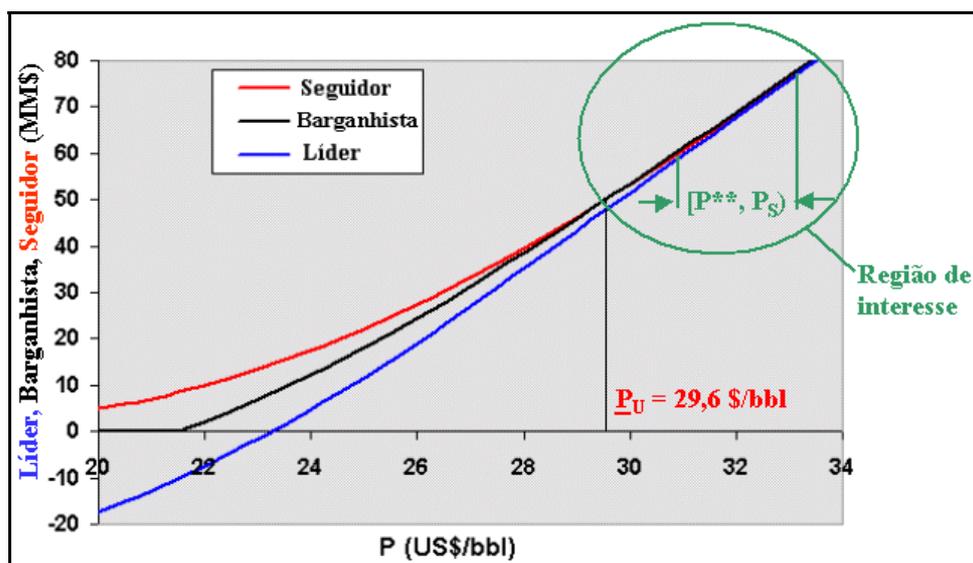


Figura 78 – Análise Conjunta Guerra de Atrito e Barganha

A Figura 79 mostra uma ampliação da região de interesse da Figura 78, para destacar o intervalo no qual a guerra de atrito tem relevância $[30.89, 33.12)$.

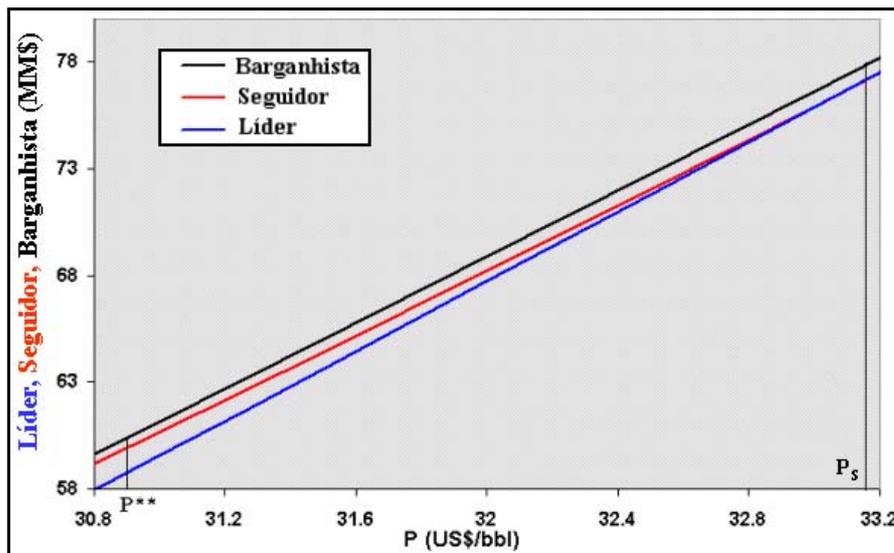


Figura 79 – Barganha versus Guerra de Atrito: Região de Interesse

Note na Figura 79 que o valor do barganhista é sempre maior que o melhor resultado da guerra de atrito (valor do seguidor), graças à revelação de informação adicional obtida com o contrato privado. Note também que a diferença entre os valores do barganhista e do líder é estritamente decrescente com o preço do petróleo, de forma que é intuitivo que eles irão se encontrar para um preço maior do petróleo (realmente essa curva se encontram em $\bar{P}_U = 36,7$ \$/bbl).

Seja t_U o primeiro instante que os preços do petróleo alcançam o gatilho \bar{P}_U . Esse instante t_U não é o primeiro instante em que é ótimo trocar de jogo (da guerra de atrito para a barganha). Essa troca de jogo pode ser ótima antes de t_U , se no ponto de desacordo for considerado valores menores do equilíbrio da guerra de atrito (ex., estratégias mistas no jogo simétrico com $[F + L]/2$ para cada jogador) em vez do caso extremo considerado (F para cada jogador). Entretanto, para P no intervalo $(\underline{P}_U, \bar{P}_U)$ é garantido que o jogo de barganha domina estritamente o jogo de guerra de atrito para qualquer resultado de equilíbrio não-cooperativo.

Qual o valor do prêmio do jogo de OR comparado ao prêmio tradicional nesse caso? Em ambos os jogos, guerra de atrito e barganha, esse prêmio é maior que o prêmio não estratégico de OR. No primeiro caso porque existe um incentivo adicional para a espera devido ao maior valor obtido pelo seguidor com a revelação de informação pública. Já no jogo de barganha, esse prêmio é maior por causa do contrato de barganha que permite explorar a revelação de informação privada, a qual em geral é maior do que a informação pública disputada pelos jogadores na guerra de atrito.