4
Conclusão

Vimos uma aplição da Teoria de Martingais para a demonstração do teorema clássico de Cramér Lundberg, o qual estima a probabilidade de ruína de uma seguradora. Tal probabidade pode ser vista como uma media de risco (risco de insolvência de uma seguradora).

É importante observar a condição de Lundberg, para que esta seja satisfeita para um $R > 0$, temos de ter:

$$\infty > \int_0^{\infty} e^{rx}\overline{F}(x)dx = \frac{1}{R}\int_0^{\infty}(e^{Ry}-1)dF(y) = \frac{1}{R}\{E[e^{R\xi_1}-1]\} = \frac{1}{R}\{E[e^{R\xi_1}]-1\}.$$

Então segue, pela desigualdade de Markov que $\forall x > 0$:

$$\overline{F}(x) = \mathbb{P}(\xi_1 > x) \leq e^{-Rx}E[e^{-R\xi_1}],$$

e vemos que a cauda da distribuição do valor dos sinistros deve ser *exponencialmente limitada*. Em outras palavras, o teorema de Cramér-Lundberg não se aplica para "pagamentos grandes" do sinistro. Por essa razão a condição de Crámer-Lundberg chama-se também "condição de pequenos valores do sinistro".

Assim, não se aplica, por exemplo para distribuições $F = F(x)$ com "caudas pesadas", como por exemplo a distribuição de Weibull:

$$1 - F(x) = e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^p},\ x > \mu,\ p \in (0,1).$$

Por outro lado, pode-se demonstrar (ver [12]) que sob a hipótese $\rho = \dfrac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$,

$$1 - \mathbb{P}(\text{Ruína}) = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}(F_I^n)^*(u), \quad (*)$$

onde $F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy,\ x \geq 0$, que é a base para a estimativa da ruína para grandes valores do sinistro ($(F_I^n)^*$ é o produto de convolução de F_I, n

vezes).

Um exemplo raro em que o cálculo exato da probabilidade de ruína é obtido, é o da distribuição exponencial $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$ que dá:

$$\mathbb{P}(\text{Ruína}) = \frac{1}{1+\rho} \exp\{-\frac{\rho}{\mu(1+\rho)}u\}, \; u \geq 0.$$

Para cálculos de probabilidades de ruínas para grandes valores do sinistro veja [12].