

1

Introdução

É uma unanimidade entre os profissionais e pesquisadores em finanças e atuária o reconhecimento da importância central da noção de *risco*, tanto do ponto de vista teórico quanto aplicado. Entretanto (e paradoxalmente) não há um consenso entre os esses mesmos profissionais quanto ao significado preciso do “risco”.

De fato, trata-se de um conceito difícil de definir, provavelmente devido ao fato de ter acepções e usos diversos para diferentes profissionais envolvidos em situações distintas. É comum falar-se então de diferentes “fatores de risco”, muitas vezes interligados entre si de forma bastante complexa.

Freqüentemente o risco está associado à noção de *incerteza* (uma categoria psicológica), que por sua vez é traduzida pela idéia de *imprevisibilidade* de certos acontecimentos futuros. Assim, por exemplo, o *risco de default*, isto é, do não cumprimento de obrigações contratuais, decorreria de que na grande finança muitas transações se dão em longo prazo, gerando “incerteza” quanto ao que pode ocorrer nesse lapso temporal.¹

A imprevisibilidade de certos fenômenos ou processos pode ter várias origens, por exemplo:

- a) Ignorância/desconhecimento/conhecimento parcial dos mecanismos e leis que regem aqueles fenômenos/processos, o que pode ser em princípio corrigido; (um exemplo em física: conhecendo as leis da dinâmica e gravitação pode-se prever a ocorrência de eclipses).
- b) Pode ser o caso de se conhecer detalhadamente as leis e/ou mecanismos que regem um dado fenômeno/processo, mas ocorrer que os sistemas estudados tenham uma instabilidade intrínseca; por exemplo podem ser sensíveis a pequenas perturbações que causam efeitos grandes impedindo a previsibilidade a longo prazo. Este é o caso dos sistemas

¹A propósito, pode-se argumentar que os juros são uma forma de compensação financeira (e portanto uma medida indireta) desta incerteza.

dinâmicos “caóticos” (por exemplo: em meteorologia, turbulência em fluidos, etc.)

- c) Pode ser que se esteja lidando com sistemas estocásticos por natureza. Note que isto não quer dizer que o comportamento de tais sistemas é arbitrário, mas que são regidos pelas leis da Probabilidade. Assim, no lançamento de moeda (honesta) não podemos prever o resultado individual, porém existe uma previsibilidade global no sentido de que a frequência de caras em N lançamentos independentes tende a $1/2$ quando N cresce (uma instância da Lei dos Grandes Números).

Esta última situação (hipótese estocástica) é um pressuposto fundamental de diversos modelos matemáticos em finanças e atuária. Por exemplo, vários modelos para o mercado financeiro reduzem toda a complexidade da flutuação de preços de certos ativos à hipótese de que tais preços são processos estocásticos (com propriedades precisas, bem entendido). O caso clássico é o modelo de Black-Scholes-Merton. Em atuária, por sua vez, é comum supor que os sinistros ocorram ao acaso, de acordo com uma certa distribuição.

Seja qual for a origem e o tipo de risco, o seu *gerenciamento* (ou gestão) é a razão de ser do profissional de atuária, e é cada vez mais exigido também nas instituições financeiras. O objetivo fundamental é o de melhorar a qualidade das tomadas de decisão de negócios em todos os níveis da instituição, evitando perdas e aumentando, conseqüentemente, a eficiência. Isto é feito através do estudo das possíveis vulnerabilidades da instituição frente aos diversos tipos de riscos e dos impactos que possam vir a comprometer as suas receitas futuras. O que, por sua vez, pressupõe uma análise cuidadosa destes riscos a partir de fundamentos econômicos e/ou da modelagem matemática.

Uma decisão que surge a partir desta análise é, por exemplo, com respeito a quantidade de capital que a instituição deveria manter na forma de reservas a fim de ser capaz de absorver possíveis perdas devidas a mudanças adversas nos preços de mercado de ativos que compõe sua carteira: o chamado *risco de mercado*. Este é um tipo de decisão que é feita não apenas internamente mas também pelos organismos regulatórios, tais como governos e bancos centrais, ao exigirem margens de segurança nas operações de instituições privadas ².

²Um exemplo são os acordos de Basiléia de 1988, ver [16]

Além do problema da medição ³ (ou quantificação) dos diversos tipos de risco, outras funções do gestor envolvem a transferência ou intermediação de riscos bem como o monitoramento e manutenção dos limites de negócio baseado em sua análise, facilitando a avaliação do desempenho da empresa.

Está claro que a importância e responsabilidade do gestor de risco são enormes. Para dar um exemplo, em uma decisão de alocação de margens, uma quantidade muito pequena pode expor a firma a níveis de riscos excessivos enquanto que, por outro lado, se for muito grande aumentará os custos de financiamento, reduzindo a lucratividade e a competitividade.

Ademais, uma série de escândalos recentes tais como do banco Barings, da Metallgesellschaft, Procter and Gamble, Long Term Capital Management, etc, chamou a atenção do público e governos para a necessidade de uma gestão de risco responsável em um contexto de mercados financeiros globalizados, velozes, altamente complexos, interrelacionados e voláteis.([17]).

Concomitantemente, o nível de sofisticação com o qual a função de gerenciamento de risco é desempenhada avançou significativamente em anos recentes, o que explica a demanda por profissionais das áreas técnicas: estatísticos, engenheiros, matemáticos e até físicos. É importante observar, porém, que o gestor não deve apenas possuir uma boa formação de base técnica, mas deve ser capaz de analisar criticamente os limites, os pressupostos e a relevância dos modelos matemáticos que utiliza a fim de minimizar o chamado *risco de modelagem*: um tipo de risco operacional que decorre de erros e/ou inadequações do modelo.

Por exemplo, uma hipótese simplificadora comum em diversos modelos matemáticos em finanças é a de que os ativos financeiros da firma são negociados em mercados competitivos e líquidos. Ou seja, o *risco de liquidez* a possibilidade de não haver agentes dispostos a comprar ou vender determinado ativo ⁴ é desprezado. Geralmente a iliquidez se manifesta pela dificuldade de dar saída rápida às posições assumidas sem deprimir os preços de mercado existentes. Isso aumenta o requisito de tempo de tal operação, expõe a firma as flutuações de mercado neste interim, e se reflete em maiores custos transacionais, e.g., sob a forma de um “spread” (amplitude aumentada) de oferta/demanda. É de se esperar que no mundo real alguns ativos em alguns momentos não serão líquidos e o gestor deve se precaver para estas ocasiões. ⁵

³Para uma tentativa de axiomatização de risco, veja [7].

⁴E que pode ter várias origens tais como uma alta dos juros, desconfiança ou pessimismo do investidor, pânico, etc.

⁵Por outro lado, também deve ser levado em conta que modelos mais realistas tendem a ser mais complicados e mesmo matematicamente intratáveis.

A crescente atenção dada em finanças aos aspectos matemáticos nas últimas três décadas deve-se sem dúvida às mudanças radicais ocorridas no mercado neste período, particularmente o crescimento explosivo do mercado de futuros e derivativos. As alterações estruturais no cenário econômico mundial, a grande volatilidade de preços, as novas tecnologias, etc, trouxeram novas oportunidades e também novos riscos, que devem ser administrados. Ao mesmo tempo, a necessidade de lidar com instrumentos financeiros cada vez mais complexos fez aumentar a interação dos agentes do mercado com os circuitos acadêmicos.

A teoria de finanças, um ramo da economia, ganhou assim nova prioridade. Seu objetivo é o de auxiliar os investidores na busca de soluções para uma vasta gama de problemas relacionados ao investimento “racional” e a análise dos riscos inevitáveis envolvidos, dada a característica (suposta) aleatória do “meio ambiente econômico”. Além disso, como mencionamos acima, a matemática financeira moderna vem tendo papel importante (e controverso) no tocante aos aspectos regulatórios, aos novos instrumentos financeiros propostos, bem como aos mecanismos de cobertura (“hedging”) e seu impacto na economia como um todo.

Na medida que o papel do risco em finanças cresce, é natural que se procure contato e se procure aprender as lições daquela disciplina que por natureza lida com o tema de forma mais ampla, isto é, a atuária.([11]) Ela tem como foco os tópicos relacionados ao seguro contra riscos bem como as diversas técnicas desenvolvidas no corpo de conhecimentos conhecido como *matemática atuarial*.(ver [4])

Um *actuarius* era, na Roma antiga, a pessoa que fazia registros no senado ou um oficial do exército que contabilizava e supervisionava suprimentos militares. Na sua versão em inglês, o significado da palavra *actuary* sofreu várias mudanças ao longo do tempo. Inicialmente, era uma pessoa que fazia registro, depois um secretário ou um conselheiro numa companhia de revenda conjunta ou mesmo junto a governos. No devido tempo, com o desenvolvimento do mercado de seguros e das instituições financeiras, o atuário tornou-se aquele profissional que lida com cálculos matemáticos relacionados à expectativa de vida (daí sua estreita ligação com a estatística), que são fundamentais para o apreamento de contratos de seguro de vida, anuidades, aposentadoria, e também de contratos do ramo não-vida.

Na acepção moderna, um atuário é um profissional especializado na matemática dos seguros. Ele é as vezes chamado de “matemático social”, por ter um papel-chave no desenvolvimento de estratégias não somente das

companhias de seguros, mas também de outros tipos de pensões e fundos. Os atuários do governo estão encarregados de vários assuntos de seguridade do estado, pensões, e outros esquemas de previdência social, de grande impacto na sociedade.

Assim como em finanças, a matemática atuarial vem se tornando bastante sofisticada em resposta às tremendas complexidades das sociedades e economias modernas, às grandes alterações demográficas, a interdependência financeira e ao impacto de catástrofes naturais ou não. Seu arsenal teórico e técnico inclui estatística e séries temporais, sistemas dinâmicos não-lineares, informática e, naturalmente, a teoria da probabilidade e processos estocásticos.

É curioso observar que os dois exemplos clássicos de processos estocásticos surgiram de duas aplicações pioneiras (e quase simultâneas) em finanças e em atuária, datando do início do século XX (e portanto bem antes da axiomatização da teoria da probabilidade por Kolmogorov em 1933). A primeira, na França (1900), com o trabalho de Bachelier no uso do movimento Browniano (i.e., o processo de Wiener) para descrever o movimento dos preços das ações da bolsa de Paris. A segunda, na Escandinávia (1903), com trabalho de Lundberg (posteriormente desenvolvido por Cramér) utilizando o processo de Poisson no problema da ruína.(ver [14])

Apesar de terem seguido caminhos bastante separados, vemos que desde de o início a teoria da probabilidade é um tópico unificador comum a finanças e atuária e recentemente tem havido uma crescente interação entre as duas disciplinas (ver [1]), numa tentativa de compreender melhor os pontos de convergência (bem como as diferenças) nos conceitos e técnicas das duas áreas.

Um exemplo, de que trata o presente trabalho, é o uso de métodos da teoria dos martingais. Consistindo em uma parte bastante abstrata e vasta da teoria dos processos estocásticos, a *teoria de martingais* (desenvolvida nos anos 50 do século passado por Doob e outros) encontrou aplicações surpreendentes e férteis em finanças em meados dos anos 1980, particularmente com respeito ao problema do apreamento de contratos de opção e outros derivativos (cujo mercado então emergia com toda força). Isto é exemplificado no já mencionado modelo clássico de Black-Scholes-Merton (premiado com um Nobel de economia em 1997), e que revisamos brevemente no apêndice.

O objetivo desta tese é procurar entender um exemplo específico da abordagem da teoria de martingais em atuária: a demonstração do teorema clássico de Cramér-Lundberg para estimar a probabilidade de ruína de uma seguradora, uma das pedras de toque da matemática atuarial. Tal

probabilidade não deixa de ser outra medida de risco, neste caso, o de insolvência de uma seguradora.

No capítulo 2 revisamos as noções básicas sobre martingais que necessitaremos, sendo o resultado principal o teorema da parada de Doob. No capítulo 3 descrevemos o modelo clássico de Cramér-Lundberg e usamos os métodos de martingais para demonstração do teorema homônimo.