



Rodrigo Samico Balter

**Aplicação de Técnica de Síntese de Lentes
Circularmente Simétricas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Jose Ricardo Bergmann
Coorientador: Prof. Guilherme Simon da Rosa

Rio de Janeiro
Junho de 2023



Rodrigo Samico Balter

Aplicação de Técnica de Síntese de Lentes Circularmente Simétricas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Jose Ricardo Bergmann

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Guilherme Simon da Rosa

Coorientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

Prof. Rafael Abrantes Penchel

Universidade Estadual Paulista – Unesp

Prof. Maiquel dos Santos Canabarro

Universidade Federal de Pelotas – UFPelotas

Rio de Janeiro, 02 de Junho de 2023

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Rodrigo Samico Balter

Graduou-se em Engenharia de Telecomunicações pelo CEFET/RJ. Atualmente é aluno de mestrado na área de Eletromagnetismo Aplicado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Samico Balter, Rodrigo

Aplicação de Técnica de Síntese de Lentes Circularmente Simétricas / Rodrigo Samico Balter; orientador: Jose Ricardo Bergmann; coorientador: Guilherme Simon da Rosa. – 2023.

72 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2023.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. Engenharia de Telecomunicações – Teses. 3. Lente Dielétrica. 4. Síntese Óptica. 5. Método de Análise. 6. Ótica Física. 7. Ótica Geométrica. I. Bergmann, Jose Ricardo. II. Simon da Rosa, Guilherme. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD: 621.3

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à minha família por todo o suporte. Sem o apoio incondicional dos meus pais, Regina e Gilson, e da minha irmã, Aline, nada disso seria possível. E claro, ao meu querido afilhado Arthur, que nos traz tanta alegria.

Agradeço em especial ao meu orientador, prof. José Ricardo Bergmann, por ter acreditado em mim e me incentivado durante todo o tempo. O desenvolvimento deste trabalho foi possível graças aos seus ensinamentos e também à sua serenidade e experiência que me serviram de apoio psicológico para seguir em frente.

Ao meu coorientador, prof. Guilherme Simon da Rosa, por todas as sugestões e seus ensinamentos. Sua energia ao lecionar me faz lembrar os motivos que me trouxeram aqui.

Ao CNPq e a PUC pelo apoio financeiro oferecido para realização deste trabalho.

À Letícia, pelas horas dedicadas ao meu lado, por todo o carinho e paciência.

Ao meu grande amigo Max, as horas de almoço foram essenciais para a minha formação.

A todos aqueles, que direta ou indiretamente, contribuíram para o meu crescimento profissional.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Samico Balter, Rodrigo; Bergmann, Jose Ricardo; Simon da Rosa, Guilherme. **Aplicação de Técnica de Síntese de Lentes Circularmente Simétricas**. Rio de Janeiro, 2023. 72p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem como objetivo aplicar uma técnica de síntese ótica de lentes dielétricas circularmente simétricas, que são iluminadas por uma fonte pontual com diagrama circularmente simétrico. A interface da lente (interface do dielétrico-ar) será modelada utilizando as aproximações da Ótica Geométrica e da Física Ótica. Da Ótica Geométrica, o controle da densidade de potência em campo distante é obtido pela aplicação de conservação de energia no interior dos tubos de raios que emergem do centro de fase da fonte e a determinação da direção dos raios que emergem da superfície do dielétrico é obtida através da aplicação da Lei de Snell para os raios incidentes na interface. Da Física Ótica, é possível obter as correntes elétrica e magnética na superfície externa da lente para determinar o campo radiado na integração dessas correntes pela superfície a partir da suposição de que as dimensões da lente e da curvatura da interface sejam muito maiores que um comprimento de onda no espaço livre. Devido a simetria circular, simplificações na formulação e nos esquemas numéricos para a solução serão apresentadas, resultando em técnica de projeto mais eficientes. A descrição da superfície da interface da lente é obtida através de técnica numérica.

Palavras-chave

Lente Dielétrica; Síntese Ótica; Método de Análise; Ótica Física; Ótica Geométrica.

Abstract

Samico Balter, Rodrigo; Bergmann, Jose Ricardo (Advisor); Simon da Rosa, Guilherme (Co-Advisor). **Application of a Technique for the Synthesis of Circularly Symmetric Lenses**. Rio de Janeiro, 2023. 72p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work aims to apply a technique of optical synthesis of symmetrically circular dielectric lenses, which are illuminated by a point source with a symmetrically circular diagram. The lens interface (dielectric-air interface) will be modeled using the approximations of Geometric Optics and Physical Optics. From Geometric Optics, control of the power density in the far field is obtained by applying energy conservation inside the ray tubes that emerge from the phase center of the source and the determination of the direction of the rays emerging from the dielectric surface is obtained through the application of Snell's law for the incident rays at the interface. From Physical Optics, it is possible to obtain the electric and magnetic currents on the external surface of the lens to determine the radiated field in the integration of these currents along the surface assuming that the lens dimensions and interface curvature are much larger than a wavelength in free space. Due to circular symmetry, simplifications in formulation and numerical schemes for the solution will be presented, resulting in a more efficient design technique. The description of the lens interface surface is obtained through numerical technique.

Keywords

Dielectric Lens; Optical Synthesis; Analysis Method; Physical Optics; Geometric Optics.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 11 |
| 2 | Descrição da formulação da síntese | 14 |
| 2.1 | Síntese de lente | 14 |
| 2.2 | Lei de Snell para refração | 14 |
| 2.3 | Lentes circularmente simétricas | 18 |
| 2.4 | Conservação da Energia | 20 |
| 2.5 | Solução numérica para o mapeamento | 21 |
| 2.6 | Determinação da superfície | 22 |
| 3 | Análise via Ótica Física | 25 |
| 3.1 | Análise Campos Radiados | 25 |
| 3.2 | Coefficientes de Transmissão | 27 |
| 3.3 | Campos na Interface Externa da lente | 29 |
| 3.4 | Polarização dos campos elétrico e magnético | 29 |
| 3.4.1 | Campos Radiados pela Lente em Campo Distante | 30 |
| 3.5 | Integração das Correntes Equivalentes | 32 |
| 3.5.1 | Base Retangular | 32 |
| 3.5.2 | Correntes Equivalentes sobre a Interface na Base Retangular | 33 |
| 3.5.2.1 | Corrente Equivalente Elétrica | 33 |
| 3.5.2.2 | Corrente Equivalente Magnética | 35 |
| 3.5.3 | Separação de Variáveis | 36 |
| 3.5.4 | Análise nos eixos X,Y e Z | 37 |
| 3.5.5 | Simplificação das integrais | 38 |
| 3.5.5.1 | Simplificação da integração para o eixo X | 38 |
| 3.5.5.2 | Simplificação da integração para o eixo Y | 39 |
| 3.5.5.3 | Simplificação da integração para o eixo Z | 40 |
| 4 | Simulação da lente circularmente simétrica | 43 |
| 4.1 | Caso 1 - Cobertura uniforme | 43 |
| 4.2 | Caso 2: Cobertura Gaussiana | 49 |
| 4.3 | Caso 3: Iluminação uniforme sobre solo | 53 |
| 5 | Conclusão e trabalhos futuros | 58 |
| A | Projeções Estereográficas | 60 |
| A.1 | Representação das direções no espaço | 60 |
| A.2 | Notação complexa | 61 |
| A.3 | Vetor Unitário | 62 |
| A.4 | Derivadas de Funções Reais de Variáveis Complexas | 62 |
| A.5 | Propriedades dos vetores \vec{p} e \vec{p}_η | 63 |
| B | Integrais em ϕ_i | 64 |
| B.1 | Integração de $g_0(\theta)$ | 64 |
| B.2 | Integração de $g_1(\theta)\cos(\phi_i)$ | 65 |

| | | |
|-----|---|-----------|
| B.3 | Integração de $g_2(\theta)\cos^2(\phi_i)$ | 66 |
| B.4 | Integração de $q_1(\theta)\sin(\phi_i)$ | 67 |
| B.5 | Integração em $q_2\cos(\phi_i)\sen(\phi_i)$ | 68 |
| | Referências bibliográficas | 70 |

Lista de figuras

| | | |
|-------------|--|----|
| Figura 1.1 | Lente Circulamente simétrica, adaptado de [9] | 12 |
| Figura 2.1 | Geometria do problema de síntese da lente, adaptado de [9] | 15 |
| Figura 2.2 | Geometria da Simetria Circular, adaptado de [16] | 18 |
| Figura 2.3 | Formulação da Lente | 20 |
| Figura 3.1 | Direções incidentes e transmitidas | 26 |
| Figura 3.2 | Polarizações (a) polarização paralela ou vertical, (b) polarização perpendicular ou horizontal, adaptado de [15] | 28 |
| Figura 4.1 | Diagrama do Alimentador, $M=2.91$ | 45 |
| Figura 4.2 | Lente de espessura 6λ | 45 |
| Figura 4.3 | Raios incidentes/refratados espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=0$ | 46 |
| Figura 4.4 | Diagrama de radiação espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=0$ | 46 |
| Figura 4.5 | Lente de espessura 25λ | 47 |
| Figura 4.6 | Raios incidentes/refratados espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=0$ | 48 |
| Figura 4.7 | Diagrama de radiação espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=0$ | 48 |
| Figura 4.8 | Lente de espessura 6λ | 50 |
| Figura 4.9 | Raios incidentes/refratados espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=12$ | 50 |
| Figura 4.10 | Diagrama de radiação espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=12$ | 51 |
| Figura 4.11 | Lente de espessura 25λ | 52 |
| Figura 4.12 | Raios incidentes/refratados espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=12$ | 52 |
| Figura 4.13 | Diagrama de radiação espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=12$ | 53 |
| Figura 4.14 | Lente de espessura 6λ | 54 |
| Figura 4.15 | Raios incidentes/refratados espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=-2$ | 55 |
| Figura 4.16 | Diagrama de radiação espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=-2$ | 55 |
| Figura 4.17 | Lente de espessura 25λ | 56 |
| Figura 4.18 | Raios incidentes/refratados espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=-2$ | 56 |
| Figura 4.19 | Diagrama de radiação espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=-2$ | 57 |
| Figura A.1 | Projeções Estereográficas [20] | 60 |

Lista de tabelas

| | | |
|------------|---|----|
| Tabela 4.1 | Parâmetros do alimentador e de campo distante para o Caso 1 | 44 |
| Tabela 4.2 | Parâmetros do alimentador e de campo distante para o Caso 2 | 49 |
| Tabela 4.3 | Parâmetros do alimentador e de campo distante para o Caso 3 | 54 |

1

Introdução

Lentes são dispositivos óticos amplamente utilizados nas aplicações em antenas de micro-ondas. Diversas características foram estudadas durante o desenvolvimento inicial de antenas de micro-ondas com bastante influência pelo extenso trabalho existente de ótica. Subseqüentemente, os estudos diminuíram um pouco à medida que as antenas de lente foram ultrapassadas por refletores para antenas de alta eficiência e grande abertura. No entanto, o interesse foi renovado à medida que a pesquisa se expandiu no uso de bandas de frequência de ondas milimétricas e de ondas submilimétricas onde as lentes têm dimensões reduzidas. [1–6]

Podem ser projetadas e moldadas para modificar ou melhorar algumas características de radiação, sendo usadas principalmente para direcionar a energia incidente de forma a evitar que se espalhe em direções indesejadas. Por exemplo, a eficiência de abertura de um alimentador pode ser melhorada corrigindo o erro de fase de abertura. Alternativamente, é possível usar uma lente para controlar a amplitude do feixe de saída ou para melhorar a desempenho de polarização cruzada.[7]

Há também aplicações em que são utilizados refletores parabólicos, especialmente em frequências mais altas. Nas frequências mais baixas, suas dimensões e o peso tornam-se excessivamente grandes inviabilizando a utilização de lentes. Elas podem ser classificadas de acordo com o material de que são construídas, ou de acordo com sua forma geométrica. Em resumo, uma antena ideal é aquela que irradia a potência entregue a ela pelo transmissor em uma direção ou direções desejadas. Na prática, porém, desempenhos ideais não podem ser alcançados, mas podem ser aproximados.[8]

Além disso, existe a possibilidade da fabricação de baixo custo de lentes sofisticadas, feitas com tolerâncias muito boas, utilizando materiais dielétricos comerciais que apresentam perdas de dissipação desprezíveis. Entretanto o seu desempenho pode ser limitado pelas reflexões internas, especialmente quando o índice de refração do material é grande, ou pelas dimensões da lente pois a efetividade de seu desempenho e as técnicas de síntese são válidas para lentes maiores do que vários comprimentos de onda. [7]

As principais vantagens das lentes são a possibilidade de obter dimensio-

nar a largura de feixe, alto ganho, lóbulos laterais baixos e baixa temperatura de ruído. Suas estruturas podem ser mais compactas e pesar menos que as cornetas e as antenas refletoras parabólicas. A modelagem do feixe pode ser alcançada controlando a distribuição de fase através da abertura da lente de modo preciso e menos dispendioso do que seria o caso de um refletor. Desta forma, a lente dielétrica pode ser mais econômica para produções de pequena a média escala do que outros tipos de antenas. [7]

O presente trabalho tem como objetivo apresentar técnicas de síntese e análise de lentes dielétricas circularmente simétricas que são iluminadas por uma fonte pontual na abertura do alimentador com diagrama circularmente simétrico, conforme figura 1.1.

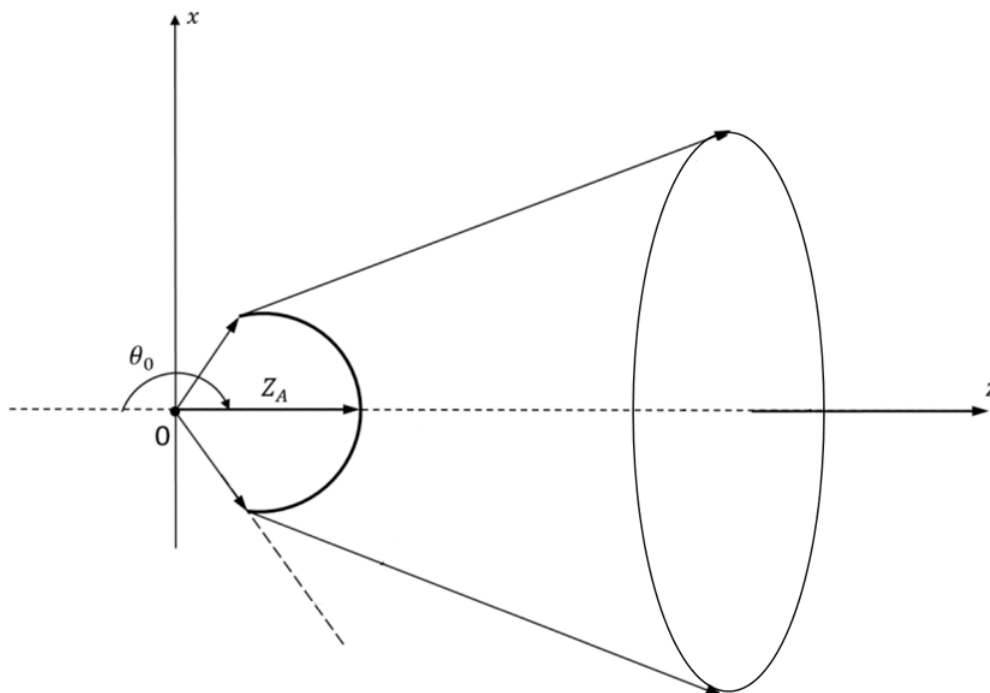


Figura 1.1: Lente Circularmente simétrica, adaptado de [9]

Dessa forma, a interface da lente (interface do dielétrico-ar) será modelada através de técnicas de síntese para avaliar o desempenho da lente. Diversas técnicas de síntese têm sido utilizadas para o modelamento de lentes, através de métodos analíticos [2] ou numéricos que por sua vez têm base nos princípios da Ótica Geométrica ou, alternativamente, com base nas aproximações da Ótica Física (PO) associadas a métodos de otimização [10], [11], [12], [13].

Neste trabalho, será considerada a síntese da lente circularmente simétrica que será realizada através de sua modelagem utilizando os princípios da

Ótica Geométrica para controlar a largura de feixe e o diagrama de radiação transmitido pela lente.

Esta técnica envolve duas principais leis: a lei da conservação da energia e a lei de refração de Snell. O controle da densidade de potência em campo distante é obtido pela aplicação de conservação de energia no interior dos tubos de raios que emergem do centro de fase da fonte e da aplicação da Lei de Snell para os raios incidentes na interface para determinar a direção dos raios que emergem da superfície do dielétrico.

No entanto, a Ótica Geométrica não considera os efeitos difrativos na lente e portanto não permite determinar os lóbulos laterais do diagrama de radiação. Uma das soluções para estimar o comportamento dos campos radiados nesta região é através das aproximações da Ótica Física. Pela qual, a partir da suposição de que as dimensões da lente e da curvatura da interface sejam muito maiores que um comprimento de onda no espaço livre, é possível obter as correntes elétrica e magnética equivalentes na superfície externa da lente e determinar o campo radiado na integração dessas correntes sobre a superfície. E, desta forma, será possível utilizar um método baseado na combinação da Ótica Geométrica e da Ótica Física para obter melhores resultados, estimando assim o comportamento dos campos radiados pela lente.

2

Descrição da formulação da síntese

2.1

Síntese de lente

As lentes são capazes de alterar a trajetória do fluxo de energia das ondas eletromagnéticas incidentes na interface entre dois meios através do efeito de refração e, conseqüentemente, o seu diagrama de radiação. Para lentes com dimensões muito maiores que um comprimento de onda, pode-se aproximar o comportamento do fluxo eletromagnético através dos princípios da Ótica Geométrica. Neste capítulo, serão apresentados os princípios da Ótica Geométrica que serão utilizados para modelar uma lente dielétrica: Lei de Snell e o princípio da conservação de energia.

2.2

Lei de Snell para refração

Para descrever a trajetória dos raios, será utilizada a notação apresentada por Westcott et al. [14], que emprega coordenadas complexas para representar as direções no espaço. Detalhes sobre a notação podem ser encontrados no Apêndice A.

A Figura 2.1 ilustra um raio emanado por uma fonte pontual em cuja localização está na origem do sistema de coordenadas, tem a direção dada pela coordenada complexa η e é refratado em uma interface dielétrica no ponto R na direção de propagação de coordenada complexa ζ . [15] [14] [16]

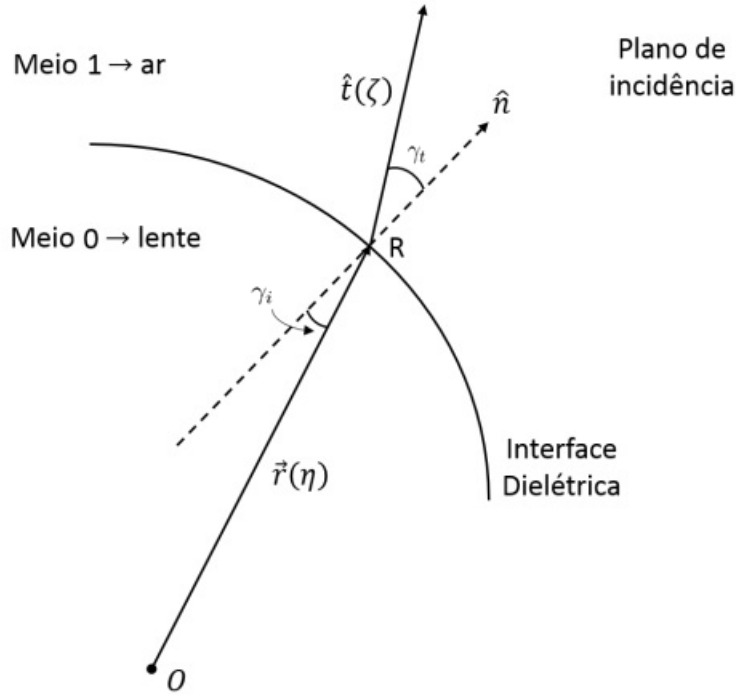


Figura 2.1: Geometria do problema de síntese da lente, adaptado de [9]

Os vetores unitários $\hat{r}(\eta)$ e $\hat{t}(\zeta)$ coincidem com a direção dos raios incidentes e refratados, respectivamente. \hat{n} é um vetor unitário normal à superfície da lente, γ_t o ângulo entre a direção do raio refratado e direção da normal (\hat{n}), γ_i o ângulo entre a direção do raio incidente e direção da normal (\hat{n}). Os meios dielétricos são lineares, isotrópicos e homogêneos com seus índices de refração dado pelos valores reais n_0 (meio 0) e $n_1 = 1$ (meio 1), a Lei de Snell impõe a seguinte relação para as direções dos raios incidente e refletido [17]:

$$\frac{\text{sen}(\gamma_t)}{\text{sen}(\gamma_i)} = n_0. \quad (2-1)$$

Como \hat{n} , \hat{t} e \hat{r} são coplanares, é possível determinar através de seus produtos vetoriais um vetor unitário \hat{q} que é ortogonal ao plano que contém estes três vetores (\hat{n} , \hat{t} , \hat{r})

$$\hat{n} \times \hat{t} = \text{sen}(\gamma_t)\hat{q}, \quad (2-2)$$

$$\hat{n} \times \hat{r} = \text{sen}(\gamma_i)\hat{q}. \quad (2-3)$$

Realizando as devidas substituições nas expressões acima, temos:

$$\hat{n} \times \hat{t} - n_0(\hat{n} \times \hat{r}) = \hat{n} \times [\hat{t} - n_0\hat{r}] = \vec{0}. \quad (2-4)$$

Colocando em evidência o vetor \hat{n} , é possível notar que o vetor $[\hat{t} - n_0\hat{r}]$ é paralelo ao vetor normal à interface dielétrica

$$[\hat{t} - n_0\hat{r}] // \hat{n}. \quad (2-5)$$

Sendo $r(\eta)$ função escalar que representa a distância do ponto R à origem O e $\hat{r}(\eta)$ o vetor unitário na direção do raio incidente, a interface da lente pode descrita pelo seguinte vetor:

$$\vec{r}(\eta) = r(\eta)\hat{r}(\eta). \quad (2-6)$$

Do segmento \overline{OR} representado por $\vec{r}(\eta)$, pode-se verificar que a derivada de r em relação a η ($\vec{r}_\eta = [d\vec{r}(\eta)/d\eta]$) é um vetor tangencial à superfície e descrito por [14]

$$\vec{r}_\eta = \frac{d\vec{r}(\eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} [r(\eta)\hat{r}(\eta)] = \frac{dr(\eta)}{d\eta}\hat{r}(\eta) + r(\eta)\hat{r}_\eta(\eta). \quad (2-7)$$

Sendo ($r_\eta = [dr(\eta)/d\eta]$) e simplificando a expressão, temos:

$$\vec{r}_\eta = r_\eta\hat{r} + r\hat{r}_\eta. \quad (2-8)$$

Como \vec{r}_η é tangente a superfície e o vetor $[\hat{t} - n_0\hat{r}]$ é um vetor normal a superfície, o produto escalar resulta na seguinte relação:

$$[\hat{t} - n_0\hat{r}] \cdot \vec{r}_\eta = [\hat{t} - n_0\hat{r}] \cdot [r_\eta\hat{r} + r\hat{r}_\eta] = 0. \quad (2-9)$$

Esta expressão pode ser reescrita como:

$$[\hat{t} - n_0\hat{r}] \cdot [r_\eta\hat{r} + r\hat{r}_\eta] = r_\eta(\hat{t} \cdot \hat{r}) + r(\hat{t} \cdot \hat{r}_\eta) - n_0r_\eta(\hat{r} \cdot \hat{r}) - n_0r(\hat{r} \cdot \hat{r}_\eta) = 0. \quad (2-10)$$

Como \hat{r} e \hat{r}_η são ortogonais, seu produto escalar é zero

$$r_\eta(\hat{t} \cdot \hat{r}) + r(\hat{t} \cdot \hat{r}_\eta) - n_0r_\eta = 0, \quad (2-11)$$

resultando em

$$r_\eta [(\hat{t} \cdot \hat{r}) - n_0] + r(\hat{t} \cdot \hat{r}_\eta) = 0. \quad (2-12)$$

Isto permite obter a seguinte expressão para r_η

$$r_\eta = \frac{-r(\hat{t} \cdot \hat{r}_\eta)}{(\hat{t} \cdot \hat{r}) - n_0}, \quad (2-13)$$

que, reajustando

$$\frac{r_\eta}{r} = \frac{-(\hat{t} \cdot \hat{r}_\eta)}{(\hat{t} \cdot \hat{r}) - n_0} = -\frac{\Delta_\eta}{\Delta}, \quad (2-14)$$

onde Δ e Δ_η são descritos por

$$\Delta = (\hat{t} \cdot \hat{r}) - n_0, \quad (2-15)$$

$$\Delta_\eta = (\hat{t} \cdot \hat{r}_\eta). \quad (2-16)$$

Seja uma função real $L(\eta)$ definida para a superfície dielétrica $r(\eta)$

$$L(\eta) = \ln \left[\frac{r}{1 + |\eta|^2} \right], \quad (2-17)$$

a partir das relações

$$\frac{d}{d\eta} \ln(f) = \frac{f_\eta}{f}, \quad (2-18)$$

$$\frac{d}{d\eta} |\eta|^2 = \frac{d}{d\eta} (\eta \bar{\eta}) = \bar{\eta}, \quad (2-19)$$

é possível obter a derivada de $L(\eta)$ em relação à coordenada complexa η

$$L_\eta = \frac{d}{d\eta} \ln \left[\frac{r}{1 + |\eta|^2} \right] = \left[\frac{1 + |\eta|^2}{r} \right] \left[\frac{r_\eta}{1 + |\eta|^2} - \frac{r \bar{\eta}}{(1 + |\eta|^2)^2} \right], \quad (2-20)$$

que pode ser reorganizada como

$$L_\eta = \left[\frac{r_\eta}{r} - \frac{\bar{\eta}}{(1 + |\eta|^2)} \right]. \quad (2-21)$$

Substituindo os respectivos valores atribuídos às funções Δ e Δ_η

$$L_\eta = - \left[\frac{\Delta_\eta}{\Delta} + \frac{\bar{\eta}}{(1 + |\eta|^2)} \right], \quad (2-22)$$

que pode ser reexpresso por [14]

$$L_\eta = - \left[\frac{2(\bar{\zeta} - \bar{\eta}) + \eta(1 - n_0)(1 + |\eta|^2)}{2|\zeta - \eta|^2 + (n_0 + 1)(1 + |\zeta|^2)(1 + |\eta|^2)} \right]. \quad (2-23)$$

Esta expressão representa a lei de Snell para a refração em coordenadas complexas, relacionando a direção dos raios incidentes e transmitidos através das derivadas parciais da superfície $L(\eta)$ desde que $L_{\eta\bar{\eta}}$ seja uma função real que garanta integrabilidade. Existindo assim uma função real que satisfaz o mapeamento especificado [14].

2.3

Lentes circularmente simétricas

A Figura 2.2, ilustra uma interface circularmente simétrica, em qualquer direção no espaço pode ser descrita por duas variáveis (θ, ϕ) ou associada ao ponto R sobre a esfera de raio unitário com centro sobre a origem.

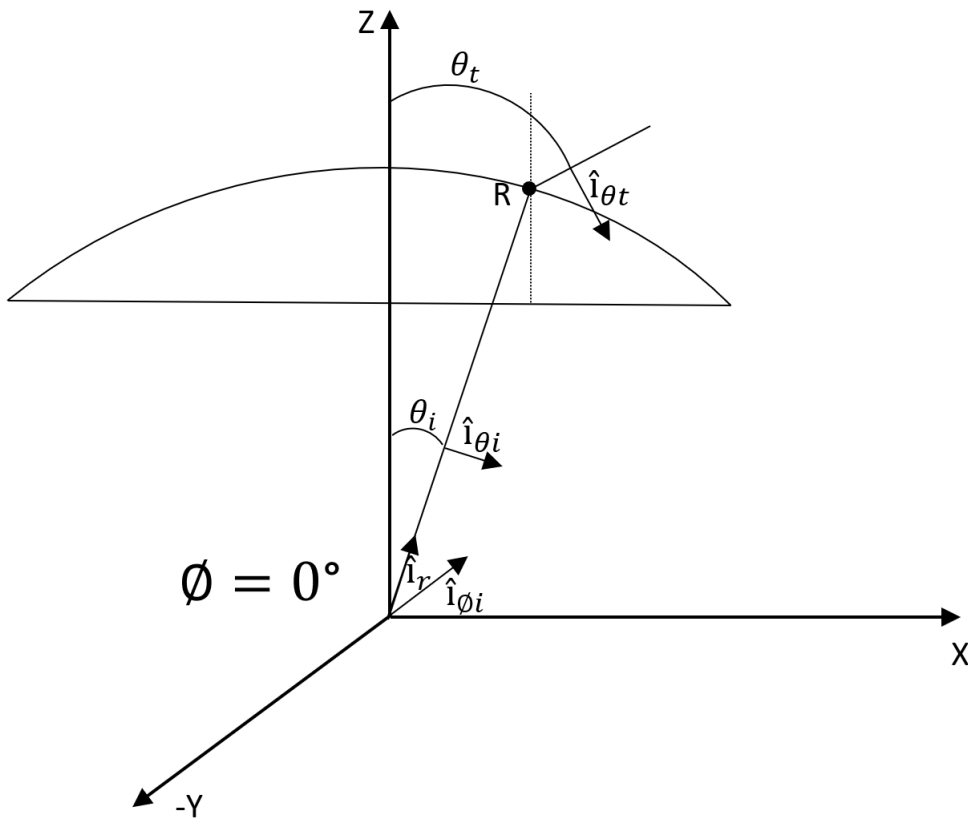


Figura 2.2: Geometria da Simetria Circular, adaptado de [16]

Para o caso de uma lente circularmente simétrica, pode-se simplificar a análise e considerar os raios contidos no plano $\phi = 0$. Nesse sentido, a função

real $L(\eta)$, que descreve a interface no plano $\phi=0^\circ$, depende exclusivamente de θ , pois o mapeamento ocorre em um único plano.

Utilizando as expressões de u , v e η das projeções estereográficas apresentadas no apêndice A.1, em $\phi=0^\circ$, temos [14][18] [19] [20]

$$u = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\phi) = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2-24)$$

$$v = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\phi) = 0, \quad (2-25)$$

$$\eta = u = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2-26)$$

Reescrevendo \vec{p} em coordenadas estereográficas, temos

$$\vec{p} = \frac{2u}{1+u^2} \hat{i}_x + \frac{1-u^2}{1+u^2} \hat{i}_z, \quad (2-27)$$

$$\vec{p} = \sin(\theta) \hat{i}_x + \cos(\theta) \hat{i}_z, \quad (2-28)$$

e

$$\vec{p}_\eta = \frac{1}{2} \left[\frac{d\vec{p}}{d\vec{u}} \right], \quad (2-29)$$

assim

$$\vec{p}_\eta = \frac{1-u^2}{(1+|u|^2)^2} \hat{i}_x - \frac{i(1-u^2)}{(1+|u|^2)^2} \hat{i}_y + \frac{2u}{(1+|u|^2)^2} \hat{i}_z. \quad (2-30)$$

Reorganizando, é possível notar as relações de ortogonalidade

$$\vec{p}_\eta = \frac{1-u^2}{(1+|u|^2)^2} \hat{i}_x + \frac{2u}{(1+|u|^2)^2} \hat{i}_z - \frac{i(1-u^2)}{(1+|u|^2)^2} \hat{i}_y. \quad (2-31)$$

Como η depende unicamente de θ , é possível encontrar L_θ derivando em relação a u

$$\frac{d\theta}{du} = 2 \frac{d(\cot^{-1}(u))}{du} = \frac{-2}{1+u^2}. \quad (2-32)$$

Será utilizada na derivada da definição de variáveis complexas de L em relação a u [14][18]

$$L_\eta = \frac{1}{2} \frac{dL}{du} = \frac{1}{2} \frac{dL}{d\theta} \frac{d\theta}{du} = \frac{1}{2} L_\theta \frac{d\theta}{du}, \quad (2-33)$$

substituindo e reorganizando os termos, L_θ pode ser expresso por

$$L_\theta = 2L_\eta \left[\frac{d\theta}{du} \right]^{-1} = -L_\eta(1 + u^2) = -L_\eta \left[1 + \cot^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] = -L_\eta \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^{-2}. \quad (2-34)$$

2.4

Conservação da Energia

Conhecida a relação da direção do raio incidente e transmitido através da interface da lente das expressões anteriores, é possível estabelecer a relação entre densidade de potência incidente e transmitida através do princípio de conservação de energia. [17]

Pela superfície da lente $L(\eta)$, a expressão 2-23 permite determinar a direção do raio transmitido para uma determinada direção do raio incidente. Alternativamente, se as direções dos raios incidente e transmitido forem conhecidas, a interface pode ser determinada através da solução da equação diferencial.

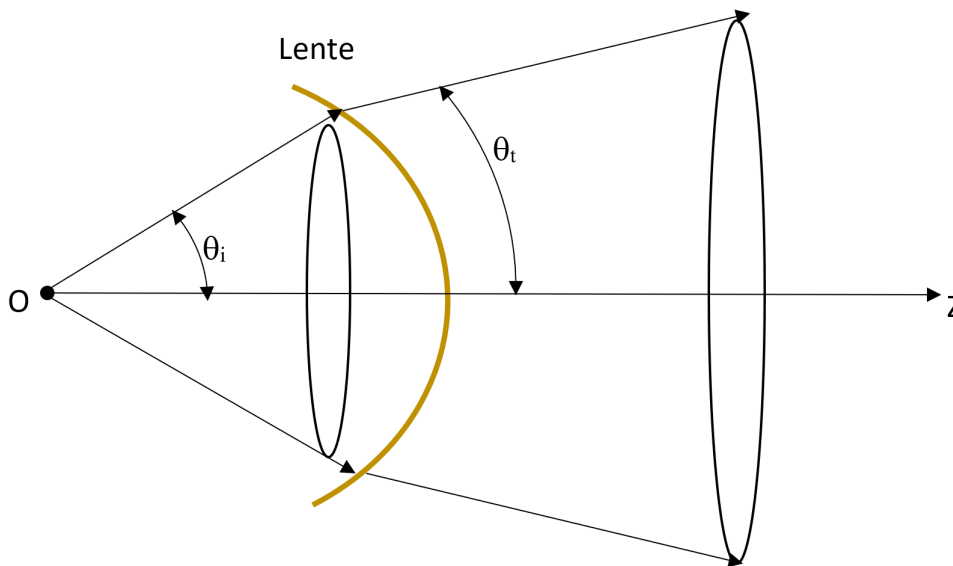


Figura 2.3: Formulação da Lente

Para determinar a relação entre a direção dos raios incidente e transmitido, pode-se utilizar o princípio da conservação de energia no interior de um tubo de raios. Para o caso de uma lente circularmente simétrica iluminada por uma fonte pontual situada no ponto O e com diagrama circularmente simétrico, o cone de raios definido pelo semi-ângulo θ_i formará um cone de raios de semi-ângulo θ_t fora do dielétrico.

Como os raios definem a direção do fluxo de energia, estes dois cones formam um tubo de raios e confinam a energia no seu interior pois não existe raios cruzando estas superfícies.

Desconsiderando a energia refletida na interface e supondo que os diagramas de radiação da fonte pontual e da lente sejam caracterizados pelas densidades de potência por ângulo sólido $I(\theta_i)$ e $G(\theta_t)$, respectivamente, pode-se expressar a conservação de energia no interior do tubo através da seguinte expressão [21]:

$$\int_0^{\theta_i} \int_0^{2\pi} I(\theta_i) \sin(\theta_i) d\phi d\theta_i = \int_0^{\theta_t} \int_0^{2\pi} G(\theta_t) \sin(\theta_t) d\phi d\theta_t \quad (2-35)$$

Devido à simetria circular da configuração e das funções $I(\theta_i)$ e $G(\theta_t)$, as integrais em ϕ podem ser analiticamente resolvidas, transformando a igualdade acima em:

$$\int_0^{\theta_i} I(\theta_i) \sin(\theta_i) d\theta_i = \int_0^{\theta_t} G(\theta_t) \sin(\theta_t) d\theta_t \quad (2-36)$$

Como as funções $I(\theta_i)$ e $G(\theta_t)$ são conhecidas, a incógnita da equação acima é o limite da integral de $G(\theta_t)$. Assim, a solução da equação acima permite determinar o mapeamento $\theta_t(\theta_i)$.

2.5

Solução numérica para o mapeamento

A solução do problema de síntese pode ser avaliada numericamente através de aproximações. Para tal, θ_i é definido e a integral é conhecida, enquanto θ_t necessita ser determinado para satisfazer a igualdade da expressão 2-36.

O domínio de 0 a θ_{i_n} é dividido em N segmentos $\Delta\theta_i$, onde $\theta_{i_n} = n\Delta\theta_i$. Para uma relação $\theta_{t_{n-1}}(\theta_{i_{n-1}})$ conhecida, será a seguinte igualdade

$$\int_0^{\theta_{i_{n-1}}} I(\theta_i) \sin(\theta_i) d\theta_i \approx \sum_{m=1}^{n-1} I(\theta_{i_m}) \sin(\theta_{i_m}) \Delta\theta_i \approx \int_0^{\theta_{t_{n-1}}} G(\theta_t) \sin(\theta_t) d\theta_t, \quad (2-37)$$

que pode ser utilizada para aproximar o mapeamento $\theta_{t_n}(\theta_{i_n})$

$$\int_0^{\theta_{i_n}} I(\theta_i) \sin(\theta_i) d\theta_i = \sum_{m=1}^n I(\theta_{i_m}) \sin(\theta_{i_m}) \Delta\theta_i \approx \int_0^{\theta_{t_n}} G(\theta_t) \sin(\theta_t) d\theta_t. \quad (2-38)$$

Sendo os segmentos de θ_t descritos por

$$\Delta\theta_t \approx [\theta_{t_n} - \theta_{t_{n-1}}], \quad (2-39)$$

logo

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n I(\theta_{i_n}) \text{sen}(\theta_{i_n}) \Delta\theta_i &\approx \int_0^{\theta_{t_n}} G(\theta_t) \text{sen}(\theta_t) d\theta_t \approx \\ &\int_0^{\theta_{t_{n-1}}} G(\theta_t) \text{sen}(\theta_t) d\theta_t + G(\theta_{t_{n-1}}) \text{sen}(\theta_{t_{n-1}}) \Delta\theta_t. \end{aligned} \quad (2-40)$$

Reorganizando os termos de forma a isolar $\Delta\theta_t$

$$\begin{aligned} \Delta\theta_t = \theta_{t_n} - \theta_{t_{n-1}} &= \\ &= \left[\sum_{m=1}^n I(\theta_{i_n}) \text{sen}(\theta_{i_n}) \Delta\theta_i - \int_0^{\theta_{t_{n-1}}} G(\theta_t) \text{sen}(\theta_t) d\theta_t \right] \frac{1}{G(\theta_{t_{n-1}}) \text{sen}(\theta_{t_{n-1}})}, \end{aligned} \quad (2-41)$$

em função de θ_{t_n}

$$\theta_{t_n} = \theta_{t_{n-1}} + \left[\sum_{m=1}^n I(\theta_n) \text{sen}(\theta_n) \Delta\theta - \int_0^{\theta_{t_{n-1}}} G(\theta_t) \text{sen}(\theta_t) d\theta_t \right] \frac{1}{G(\theta_{t_{n-1}}) \text{sen}(\theta_{t_{n-1}})}. \quad (2-42)$$

É possível portanto determinar uma sequência iterativa para encontrar a solução do problema, conforme a expressão abaixo. São utilizadas i tentativas de forma a minimizar o resíduo da diferença e, quanto menor esse valor, mais próximo ao resultado exato a solução estará.

$$\theta_{t_n}^{(i+1)} = \theta_{t_n}^{(i)} + \left[\sum_{m=1}^n I(\theta_n) \text{sen}(\theta_n) \Delta\theta - \int_0^{\theta_{t_n}^{(i)}} G(\theta_t) \text{sen}(\theta_t) d\theta_t \right] \frac{1}{G(\theta_{t_n}^{(i)}) \text{sen}(\theta_{t_n}^{(i)})}. \quad (2-43)$$

2.6

Determinação da superfície

Conhecido o mapeamento $(\theta_{i_n}, \theta_{t_n})$, pode utilizar a expressão 2-23 para determinar a derivada L_η da função L no ponto θ_i . A partir da derivada em conjunto de pontos pode-se realizar a integração numérica e determinar o valor da função $L(\theta)$ em um conjunto de pontos θ_{t_n} . A integral que representará o

mapeamento será descrita por

$$L(\theta_N) = L_0 + \int_{\theta_0}^{\theta_N} L_\theta d\theta = L_0 + \Delta L. \quad (2-44)$$

Sendo o valor inicial

$$L_0 = L(\theta_0 = 0), \quad (2-45)$$

a integral está associada a uma família de curvas que produzem o mesmo mapeamento $\theta_{t_n}(\theta_{i_n})$, mas possuem espessuras distintas. Ou seja, é possível representar lentes de diferentes espessuras a partir do valor inicial.

A integral pode ser representada através do somatório de pontos

$$L(\theta_N) = L_0 + \int_0^{\theta_N} L_\theta d\theta \approx L_0 + \sum_{n=0}^N L_\theta(\theta_n) \Delta\theta, \quad (2-46)$$

substituindo L_θ da expressão 2-34

$$L(\theta_N) \approx L_0 + \sum_{n=0}^N L_\eta(\theta_n) \left[\frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\theta_n}{2}\right)} \right]^2 \Delta\theta. \quad (2-47)$$

E, para determinação da superfície, será utilizado $r(\theta_N)$ que representa a distância do foco ao ponto em que o raio incide que pode ser obtido pelas expressões 2-17 e 2-26

$$r(\theta_N) = e^{L(\theta_N)} \left[1 + \left| \cot\left(\frac{\theta_N}{2}\right) \right|^2 \right], \quad (2-48)$$

substituindo pela expressão 2-44

$$r(\theta_N) = e^{L_0 + \Delta L} \left[1 + \left| \cot\left(\frac{\theta_N}{2}\right) \right|^2 \right], \quad (2-49)$$

reorganizando os termos [16]

$$r(\theta_N) = e^{L_0} \left\{ e^{\Delta L} \left[1 + \left| \cot\left(\frac{\theta_N}{2}\right) \right|^2 \right] \right\}, \quad (2-50)$$

em que L_0 representa a espessura da lente.

Como os raios incidentes e refratados são conhecidos pela conservação de energia, η_n , ζ_n e L_η também são, logo o resultado da expressão pode ser obtido

e, dessa forma, a interface da lente pode ser descrita por um conjunto discreto de pontos.

Nesse contexto, a precisão da curva dependerá da precisão do mapeamento $\theta_t(\theta_i)$, obtido a partir da conservação de energia, do número de pontos utilizados para descrever a curva da interface e da curvatura da lente. Lentes mais curvas tem segunda derivada maior, o que aumenta o erro na determinação da integral. Para manter a precisão será necessário aumentar o número de pontos utilizados para descrever a lente.

3

Análise via Ótica Física

Neste capítulo, será apresentada uma técnica de análise para a lente dielétrica baseada nas aproximações da Ótica Física (PO). Em princípio, para realizar as aproximações da Ótica Física, será necessário considerar que localmente os campos na interface (superfície) da lente se comportam como os campos de uma onda plana incidindo sobre uma interface plana infinita. Para isto, supõe-se que as dimensões do raio de curvatura da lente sejam maiores que 5λ e que a curvatura da frente de onda seja maior que 5λ , ou seja muito maiores que um comprimento de onda no espaço livre.

A partir destes campos aproximados de uma onda plana incidindo sobre uma interface dielétrica plana e infinita, se obtêm as correntes elétrica (\hat{i}_J) e magnética (\hat{i}_M) equivalentes sob a superfície.

Assim, pela integração destas correntes elétrica e magnética equivalentes sobre a interface da lente, é possível obter os campos radiados pela lente.

3.1

Análise Campos Radiados

Para a análise a ser desenvolvida nesta etapa do trabalho será considerado que a fonte está iluminando a lente em campo distante por ondas esféricas com centro de fase na origem. Em termos de coordenadas esféricas, o campo elétrico radiado pela fonte no lado interno da interface da lente pode ser descrito através do seguinte modelo: [15]

$$\vec{E}_F(\vec{r}') = E(\theta_i) \left[\frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] \hat{i}_F(\theta_i, \phi_i). \quad (3-1)$$

A fonte tem um diagrama circularmente simétrico onde $E(\theta_i)$ está associado à amplitude do campo radiado, k é a constante de onda no meio dielétrico, r' representa a distância do ponto de observação à origem, o vetor $\hat{i}_F(\theta_i, \phi_i)$ representa a polarização da fonte e θ_i e ϕ_i representam os ângulos formados na direção da onda incidente conforme figura abaixo.

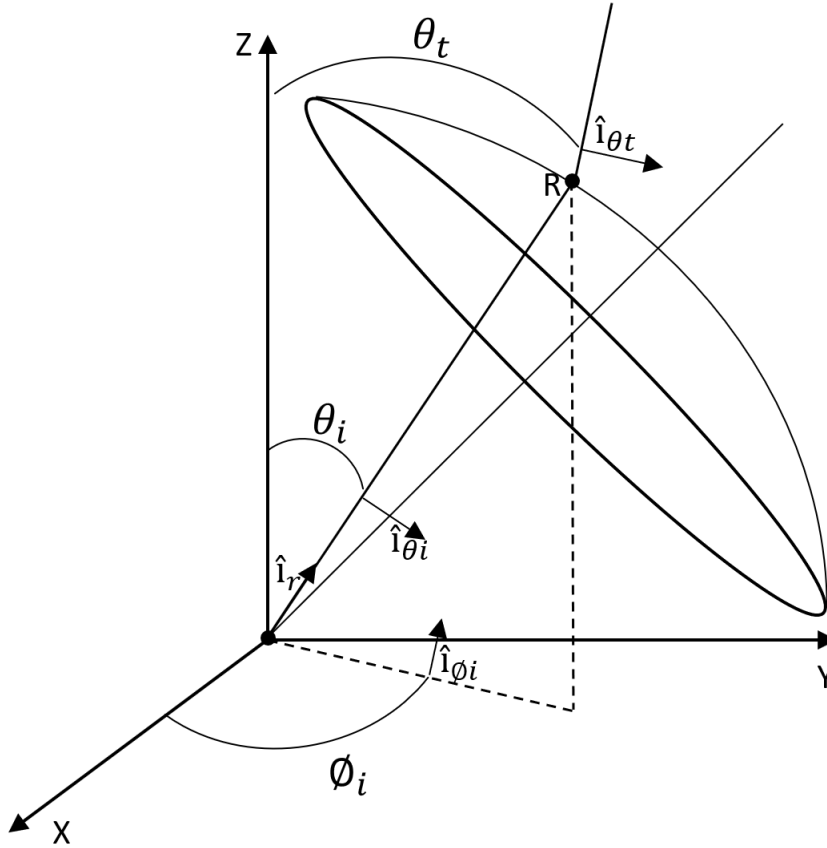


Figura 3.1: Direções incidentes e transmitidas

Como o modelo de fonte radia uma onda esférica TEM com centro de fase na origem e vetor de Poynting radial, o campo magnético pode ser descrito por:

$$\vec{H}_F(\vec{r}') = H(\theta_i) \left[\frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] \hat{i}_{HF}(\theta_i, \phi_i), \quad (3-2)$$

sendo η_L a impedância intrínseca no meio, $H(\theta_i)$ pode ser descrito por

$$H(\theta_i) = \frac{E(\theta_i)}{\eta_L}. \quad (3-3)$$

Tendo em vista que $\hat{i}_{r'}$ é o vetor unitário na direção radial, o vetor polarização do campo magnético $\hat{i}_{HF}(\theta_i, \phi_i)$ será

$$\hat{i}_{HF}(\theta_i, \phi_i) = \hat{i}_{r'} \times \hat{i}_F(\theta_i, \phi_i). \quad (3-4)$$

Será suposto que os campos da fonte não admitem polarização cruzada (irradia

onda linearmente polarizada) segundo a terceira definição de Ludwig: [22] [18]

$$\hat{i}_F = \cos(\phi_i)\hat{i}_{\theta_i} - \sin(\phi_i)\hat{i}_{\phi_i}, \quad (3-5)$$

$$\hat{i}_{HF} = \hat{i}_{r'} \times \hat{i}_F = \sin(\phi_i)\hat{i}_{\theta_i} + \cos(\phi_i)\hat{i}_{\phi_i}, \quad (3-6)$$

onde \hat{i}_{θ_i} e \hat{i}_{ϕ_i} são vetores unitários nas direções θ_i e ϕ_i , respectivamente.

Realizando as devidas modificações nas expressões (3-1) e (3-2), é possível reescrever os campos na interface interna da lente:

$$\vec{E}_F(\vec{r}') = E(\theta_i) \left[\frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] [\cos(\phi_i)\hat{i}_{\theta_i} - \sin(\phi_i)\hat{i}_{\phi_i}], \quad (3-7)$$

$$\vec{H}_F(\vec{r}') = \frac{E(\theta_i)}{\eta_L} \left[\frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] [\sin(\phi_i)\hat{i}_{\theta_i} + \cos(\phi_i)\hat{i}_{\phi_i}]. \quad (3-8)$$

3.2

Coefficientes de Transmissão

Tendo em vista que a lente e os campos radiados pela fonte apresentam simetria circular, as direções das ondas incidente, transmitida e refletida, e a normal ao plano são coplanares. Dessa forma, para examinar a onda que incide na interface do dielétrico, é conveniente decompor o campo elétrico da fonte (\vec{E}_F) em duas componentes, uma perpendicular e uma paralela ao plano de incidência. O campo total refletido e transmitido será a soma vetorial dessas duas polarizações.

Se o campo magnético da fonte é ortogonal ao plano de incidência (H_{\parallel}^F), o campo elétrico é paralelo ao plano de incidência (E_{\parallel}^F) e, portanto, a polarização da onda é chamada de polarização paralela ou polarização vertical. Veja a Figura 3.2(a).

Quando o campo elétrico é ortogonal ao plano (E_{\perp}^F), ele é perpendicular ao plano de incidência e, portanto, a polarização é chamada de polarização perpendicular ou polarização horizontal, Figura 3.2(b).

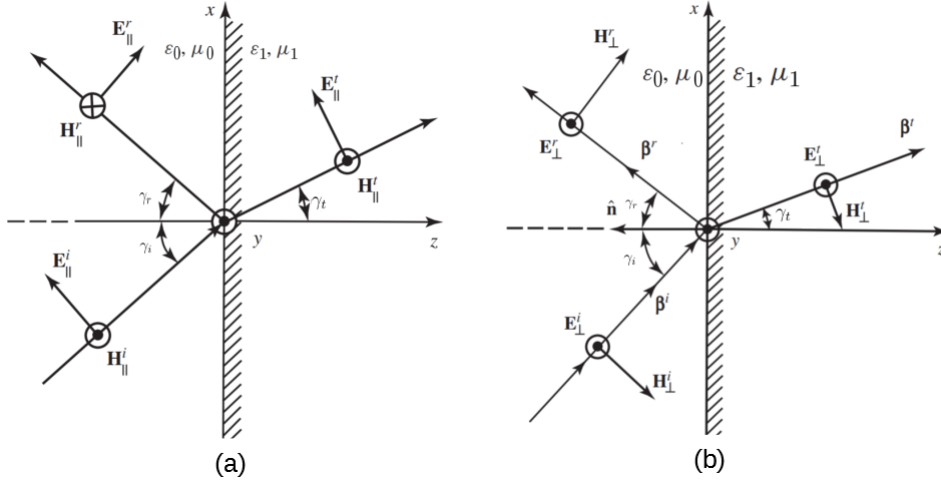


Figura 3.2: Polarizações (a) polarização paralela ou vertical, (b) polarização perpendicular ou horizontal, adaptado de [15]

A relação entre as direções das ondas incidente e transmitida pode ser obtida a partir da imposição da continuidade dos campos sobre a interface plana e é expressada por:

$$n_0 \text{sen}(\gamma_i) = n_1 \text{sen}(\gamma_t), \quad (3-9)$$

onde n_0 é o índice de refração do meio 0 e n_1 é o índice de refração do meio 1, γ_i o ângulo da onda incidente em relação ao vetor normal \hat{n} e o ângulo da γ_t onda transmitida em relação à normal. O ângulo γ_r que a onda refletida faz com a normal é idêntico ao ângulo γ_i da onda incidente. O que permite estabelecer a relação (Lei de Snell) das direções dos raios incidente e transmitido.

Pela continuidade dos campos tangenciais sobre a interface, é possível estabelecer uma relação entre a amplitude das componentes do campo elétrico da onda plana incidente com as componentes do campo elétrico da onda transmitida através dos coeficientes de transmissão T_{\perp} e T_{\parallel} . Estes coeficientes são descritos por [15]

$$T_{\perp}(\theta) = \frac{E_{A\phi}}{E_{F\phi}} = \frac{2\eta_0 \cos(\gamma_i)}{\eta_0 \cos(\gamma_i) + \eta_L \cos(\gamma_t)}, \quad (3-10)$$

$$T_{\parallel}(\theta) = \frac{E_{A\theta}}{E_{F\theta}} = \frac{2\eta_0 \cos(\gamma_i)}{\eta_L \cos(\gamma_i) + \eta_0 \cos(\gamma_t)}. \quad (3-11)$$

3.3

Campos na Interface Externa da lente

Conhecidos os coeficiente de transmissão para as duas polarizações, equações (3-10) e (3-11), é possível encontrar os campos na interface externa da lente:

$$\vec{E}_A(\vec{r}') = E(\theta_i) \left[\frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] [T_{\parallel}(\theta_i) \cos(\phi_i) \hat{i}_{\theta_i} - T_{\perp}(\theta_i) \sin(\phi_i) \hat{i}_{\phi_i}]. \quad (3-12)$$

Para fins de simplificação, será introduzido o vetor associado a polarização da onda transmitida:

$$\vec{e}_A(\theta_i, \phi_i) = [T_{\parallel}(\theta_i) \cos(\phi_i) \hat{i}_{\theta_i} - T_{\perp}(\theta_i) \sin(\phi_i) \hat{i}_{\phi_i}]. \quad (3-13)$$

Consequentemente, o campo magnético será

$$\vec{H}_A(\vec{r}') = \frac{E(\theta_i)}{\eta_0} \left[\frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] [\hat{i}_{\theta_t} \times \vec{e}_A], \quad (3-14)$$

onde \hat{i}_{θ_t} é o vetor unitário na direção da onda transmitida. Também será introduzido o seguinte termo para simplificar a notação:

$$\vec{h}_A(\theta_i, \phi_i) = \hat{i}_{\theta_t} \times \vec{e}_A(\theta_i, \phi_i) = [T_{\parallel}(\theta_i) \cos(\phi_i) \hat{i}_{\theta_t} \times \hat{i}_{\theta_i} - T_{\perp}(\theta_i) \sin(\phi_i) \hat{i}_{\theta_t} \times \hat{i}_{\phi_i}]. \quad (3-15)$$

Dessa forma:

$$\vec{E}_A(\vec{r}') = E(\theta_i) \left[\frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] [\vec{e}_A(\theta_i, \phi_i)], \quad (3-16)$$

$$\vec{H}_A(\vec{r}') = \frac{E(\theta_i)}{\eta_0} \left[\frac{e^{-ikr'}}{r'} \right] [\vec{h}_A(\theta_i, \phi_i)]. \quad (3-17)$$

3.4

Polarização dos campos elétrico e magnético

Em termos de uma base de vetores associados ao sistema de coordenadas retangulares, os vetores unitários \hat{i}_{θ_i} e \hat{i}_{ϕ_i} são descritos por

$$\hat{i}_{\theta_i} = \cos(\theta_i) \cos(\phi_i) \hat{i}_x + \cos(\theta_i) \sin(\phi_i) \hat{i}_y - \sin(\theta_i) \hat{i}_z, \quad (3-18)$$

$$\hat{i}_{\phi_i} = -\sin(\phi_i) \hat{i}_x + \cos(\phi_i) \hat{i}_y. \quad (3-19)$$

Enquanto o vetor unitário na direção da onda transmitida \hat{i}_{θ_t} por

$$\hat{i}_{\theta_t} = \text{sen}(\theta_t) \cos(\phi_i) \hat{i}_x + \text{sen}(\theta_t) \text{sen}(\phi_i) \hat{i}_y + \cos(\theta_t) \hat{i}_z, \quad (3-20)$$

e \hat{i}_α será o vetor polarização do campo elétrico ortogonal a \hat{i}_{θ_t} e \hat{i}_ϕ

$$\hat{i}_\alpha = \cos(\theta_t) \cos(\phi_i) \hat{i}_x + \cos(\theta_t) \text{sen}(\phi_i) \hat{i}_y - \text{sen}(\theta_t) \hat{i}_z. \quad (3-21)$$

Com isso, é fácil verificar as relações de $(\hat{i}_{\theta_t} \times \hat{i}_{\theta_i})$ e $(\hat{i}_{\theta_t} \times \hat{i}_{\phi_i})$

$$\hat{i}_{\theta_t} \times \hat{i}_{\theta_i} = \begin{bmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \text{sen}(\theta_t) \cos(\phi_i) & \text{sen}(\theta_t) \text{sen}(\phi_i) & \cos(\theta_t) \\ \cos(\theta_i) \cos(\phi_i) & -\cos(\theta_i) \text{sen}(\phi_i) & -\text{sen}(\theta_i) \end{bmatrix}, \quad (3-22)$$

$$\begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\theta_t) \text{sen}(\phi_i) - \cos(\theta_t) \cos(\theta_i) \text{sen}(\phi_i) \\ \cos(\theta_i) \cos(\theta_t) \cos(\phi_i) + \text{sen}(\theta_t) \text{sen}(\theta_i) \cos(\phi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_i - \theta_t) \text{sen}(\phi_i) \\ \cos(\theta_i - \theta_t) \cos(\phi_i) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix} = \cos(\theta_i - \theta_t) \hat{i}_{\phi_i}, \quad (3-23)$$

$$\hat{i}_{\theta_t} \times \hat{i}_{\phi_i} = \begin{bmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \text{sen}(\theta_t) \cos(\phi_i) & \text{sen}(\theta_t) \text{sen}(\phi_i) & \cos(\theta_t) \\ -\text{sen}(\phi_i) & \cos(\phi_i) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_t) \cos(\phi_i) \\ -\cos(\theta_t) \text{sen}(\phi_i) \\ \text{sen}(\theta_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \\ \hat{i}_z \end{bmatrix} = -\hat{i}_{\theta_t}. \quad (3-24)$$

Substituindo os produtos vetoriais na expressão 3-15

$$\vec{h}_A(\theta_i, \phi_i) = \hat{i}_{\theta_t} \times \vec{e}_A(\theta_i, \phi_i) = [T_{\parallel}(\theta_i) \cos(\phi_i) \hat{i}_\phi \cos(\theta_i - \theta_t) + T_{\perp}(\theta_i) \text{sen}(\phi_i) \hat{i}_{\theta_t}]. \quad (3-25)$$

3.4.1

Campos Radiados pela Lente em Campo Distante

O vetor campo elétrico radiado pela lente iluminada por uma fonte pontual com diagrama circularmente simétrico em região de campo distante

pode ser descrito por [3]

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = -\frac{i}{2\lambda} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \right] \hat{i}_r \times \int_A [(\hat{n}_A \times \vec{E}_A) - \eta_0 \hat{i}_r \times (\hat{n}_A \times \vec{H}_A)] e^{ik\hat{i}_r \cdot \vec{r}'} dS, \quad (3-26)$$

onde E_A e H_A são os já conhecidos campos sobre a superfície externa da lente e \hat{n}_A é o vetor unitário normal a interface da lente.

Como a superfície da lente é circularmente simétrica, o vetor normal pode ser expresso por:

$$\hat{n}_A = [n_\rho(\theta_i)(\cos(\phi_i)\hat{i}_x + \sin(\phi_i)\hat{i}_y) + n_z(\theta_i)\hat{i}_z]. \quad (3-27)$$

onde n_ρ e n_z são as componentes do vetor normal na direção ρ e z . dS é o elemento de área sobre a interface

$$dS = \left[\frac{r'^2 \sin(\theta_i)}{\hat{i}_{r'} \cdot \hat{n}_A} \right] d\theta_i d\phi_i. \quad (3-28)$$

\hat{i}_r é o vetor unitário na direção de radiação

$$\hat{i}_r = \sin(\theta_r) \cos(\phi_r)\hat{i}_x + \sin(\theta_r)\sin(\phi_r)\hat{i}_y + \cos(\theta_r)\hat{i}_z, \quad (3-29)$$

e a diferença de fase entre os elementos de corrente

$$\vec{r}' = r'(\theta_i)[\sin(\theta_r) \cos(\phi_r)\hat{i}_x + \sin(\theta_r)\sin(\phi_r)\hat{i}_y + \cos(\theta_r)\hat{i}_z]. \quad (3-30)$$

Como imposto na síntese, os campos da fonte se caracterizam por onda TEM que se propaga radialmente com simetria circular, conseqüentemente $E(\theta_i)$ e $H(\theta_i)$ dependem unicamente de θ_i e serão encontrados através do seu diagrama de radiação.

Dessa forma, através das expressões 3-16 e 3-17, é possível reescrever o vetor campo radiado

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = -\frac{i}{2\lambda} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \right] \hat{i}_r \times \int_A [E(\theta_i)[(\hat{n}_A \times \vec{e}_A) - \hat{i}_r \times (\hat{n}_A \times \vec{h}_A)]] e^{ik\hat{i}_r \cdot \vec{r}'} dS. \quad (3-31)$$

Para simplificação das contas, será introduzida a seguinte expressão

$$\Psi = \hat{i}_r \cdot \vec{r}'. \quad (3-32)$$

Realizando o produto escalar das conhecidas expressões 3-29 e 3-30 e aplicando

identidades trigonométricas é possível obter

$$\Psi = r'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta_r)[\cos(\phi_r - \phi_i)] + r' \cos(\theta_i) \cos(\theta_r), \quad (3-33)$$

de forma que a expressão 3-31 possa ser reescrita por

$$\vec{E}_S(\vec{r}') = -\frac{i}{2\lambda} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \right] \hat{i}_r \times \int_A [(E(\theta_i)[\hat{n}_A \times \vec{e}_A] - \hat{i}_r \times (\hat{n}_A \times \vec{h}_A))] e^{ik\Psi} dS. \quad (3-34)$$

A determinação dos campos radiados pela lente depende de uma integral de superfície para cada ponto de observação (θ, ϕ) em campo distante, quando r tende para infinito.

Supõe-se que os pontos sobre a interface da lente serão descritos pelas coordenadas (θ_i, ϕ_i) , a lente será circularmente simétrica e será descrita por uma geratriz $r'(\theta_i)$ e será possível separar a dependência em (θ_i, ϕ_i) tendo em vista que os campos da fonte são linearmente polarizados.

3.5

Integração das Correntes Equivalentes

3.5.1

Base Retangular

Para realizar a integração vetorial, a base de referência deve ser fixa e requer que os vetores sejam expressos na base retangular.

Sabendo que a polarização do campo elétrico em coordenadas retangulares pode ser expressa da seguinte maneira

$$\vec{e}_A = [e_x \hat{i}_x + e_y \hat{i}_y + e_z \hat{i}_z], \quad (3-35)$$

como \hat{i}_θ e \hat{i}_ϕ são conhecidos conforme as expressões 3-18 e 3-19, eles podem ser substituídos na expressão 3-13 para encontrar a polarização do campo elétrico em coordenadas retangulares

$$\vec{e}_A = T_{\parallel}(\theta_i)[\cos(\phi_i)[\cos(\theta_i) \cos(\phi_i) \hat{i}_x + \cos(\theta_i) \text{sen}(\phi_i) \hat{i}_y - \text{sen}(\theta_i) \hat{i}_z] - T_{\perp} \text{sen}(\phi_i)[- \text{sen}(\phi_i) \hat{i}_x + \cos(\phi_i) \hat{i}_y]. \quad (3-36)$$

Reescrevendo no formato matricial

$$\vec{e}_A = \begin{bmatrix} \hat{i}_x [T_{\parallel}(\theta_i) \cos(\theta_i) \cos^2(\phi_i) + T_{\perp} \text{sen}^2(\phi_i)] \\ + \hat{i}_y [T_{\parallel} \cos(\theta_i) - T_{\perp}] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) \\ + \hat{i}_z T_{\parallel} \cos(\phi_i) \text{sen}(\theta_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \hat{i}_x \\ e_y \hat{i}_y \\ e_z \hat{i}_z \end{bmatrix}. \quad (3-37)$$

A polarização do campo magnético também pode ser expressa em coordenadas retangulares

$$\vec{h}_A = [h_x \hat{i}_x + h_y \hat{i}_y + h_z \hat{i}_z], \quad (3-38)$$

realizando a mesma substituição de \hat{i}_{θ_i} e \hat{i}_{ϕ_i} na expressão 3-25 para encontrar a polarização do campo magnético no formato sugerido

$$\vec{h}_A = [T_{\perp} \text{sen}(\phi_i) [\cos(\theta_t) \cos(\phi_i) \hat{i}_x + \cos(\theta_t) \text{sen}(\phi_i) \hat{i}_y - \text{sen}(\theta_t) \hat{i}_z] + T_{\parallel} \cos(\theta_i - \theta_t) \cos(\phi_i) [-\text{sen}(\phi_i) \hat{i}_x + \cos(\phi_i) \hat{i}_y]]. \quad (3-39)$$

Reescrevendo no formato matricial

$$\vec{h}_A = \begin{bmatrix} \hat{i}_x [T_{\perp} \cos(\theta_t) - T_{\parallel} \cos(\theta_i - \theta_t)] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) \\ + \hat{i}_y [T_{\perp} \cos(\theta_t) \text{sen}^2(\phi_i) + T_{\parallel} \cos(\theta_i - \theta_t) \cos^2(\phi_i)] \\ - \hat{i}_z T_{\perp} \text{sen}(\phi_i) \text{sen}(\theta_t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x \hat{i}_x \\ h_y \hat{i}_y \\ h_z \hat{i}_z \end{bmatrix}. \quad (3-40)$$

3.5.2

Correntes Equivalentes sobre a Interface na Base Retangular

3.5.2.1

Corrente Equivalente Elétrica

Considerando o princípio de equivalência, podemos calcular as correntes elétrica e magnética equivalentes na superfície externa da lente. A corrente equivalente elétrica é dada por

$$\vec{i}_J = \hat{n}_A \times \vec{h}_A = [n_x \hat{i}_x + n_y \hat{i}_y + n_z \hat{i}_z] \times [h_x \hat{i}_x + h_y \hat{i}_y + h_z \hat{i}_z] = [n_y h_z - n_z h_y] \hat{i}_x + [n_z h_x - n_x h_z] \hat{i}_y + [n_x h_y - n_y h_x] \hat{i}_z. \quad (3-41)$$

Sendo a corrente elétrica em coordenadas retangulares igual a

$$\vec{i}_J = j_x \hat{i}_x + j_y \hat{i}_y + j_z \hat{i}_z, \quad (3-42)$$

conhecidos \hat{n}_A e \vec{h}_A das respectivas expressões 3-27 e 3-40, através das devidas substituições, reordenamento dos termos e traçando os vetores individual-

mente, para j_x :

$$j_x = [n_y h_z - n_z h_y] = [-n_\rho T_\perp \text{sen}(\theta_t) \text{sen}^2(\phi_i) - n_z [T_\perp \cos(\theta_t) \text{sen}^2(\phi_i) + T_\parallel \cos(\theta_i - \theta_t) \text{cos}^2(\phi_i)]], \quad (3-43)$$

reorganizando j_x

$$j_x = -T_\perp [n_\rho \text{sen}(\theta_t) - n_z \cos(\theta_t)] \text{sen}^2(\phi_i) - T_\parallel [n_z \cos(\theta_i - \theta_t)] \text{cos}^2(\phi_i).$$

Para j_y :

$$j_y = [n_z h_x - n_x h_z] = [n_z [T_\perp \cos(\theta_t) - T_\parallel \cos(\theta_i - \theta_t)] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) + n_\rho T_\perp \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) \text{sen}(\theta_t)], \quad (3-44)$$

reorganizando j_y

$$j_y = [T_\perp (n_z \cos(\theta_t) + n_\rho \text{sen}(\theta_t)) - n_z T_\parallel \cos(\theta_i - \theta_t)] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i).$$

Para j_z :

$$j_z = [n_x h_y - n_y h_x] = n_\rho ([T_\perp \cos(\theta_t) \text{sen}^2(\phi_i) + T_\parallel \cos(\theta_i - \theta_t) \text{cos}^2(\phi_i)] \cos(\phi_i) - [T_\perp \cos(\theta_t) - T_\parallel \cos(\theta_i - \theta_t)] \text{sen}^2(\phi_i) \cos(\phi_i)), \quad (3-45)$$

reorganizando j_z

$$j_z = [n_x h_y - n_y h_x] = n_\rho ([T_\perp \cos(\theta_t) \text{sen}^2(\phi_i) + T_\parallel \cos(\theta_i - \theta_t) \text{cos}^2(\phi_i)] - [T_\perp \cos(\theta_t) - T_\parallel \cos(\theta_i - \theta_t)] \text{sen}^2(\phi_i)) \cos(\phi_i), \quad (3-46)$$

logo,

$$j_z = [n_x h_y - n_y h_x] = n_\rho T_\parallel \cos(\theta_i - \theta_t) \cos(\phi_i). \quad (3-47)$$

3.5.2.2

Corrente Equivalente Magnética

Também pelo princípio da equivalência, a corrente magnética é dada por

$$\hat{i}_M = \hat{n}_A \times \vec{e}_A = [\hat{i}_x n_x + \hat{i}_y n_y + n_z \hat{i}_z] \times [\hat{i}_x e_x + \hat{i}_y e_y + e_z \hat{i}_z] = \hat{i}_x [n_y e_z - n_z e_y] + \hat{i}_y [n_z e_x - n_x e_z] + \hat{i}_z [n_x e_y - n_y e_x]. \quad (3-48)$$

Decompondo a corrente magnética em coordenadas retangulares

$$\vec{i}_M = m_x \hat{i}_x + m_y \hat{i}_y + m_z \hat{i}_z, \quad (3-49)$$

conhecidos \hat{n}_A e \vec{e}_A das respectivas expressões 3-27 e 3-37, através das devidas substituições, reordenamento dos termos e traçando os vetores individualmente, para m_x :

$$m_x = -[n_y e_z - n_z e_y], \quad (3-50)$$

substituindo

$$m_x = -[n_\rho T_{\parallel} \text{sen}(\theta_i) - n_z [T_{\parallel} \cos(\theta_i) - T_{\perp}]] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i). \quad (3-51)$$

Para m_y :

$$m_y = -[n_z e_x - n_x e_z], \quad (3-52)$$

substituindo

$$m_y = -[n_z T_{\parallel} [\cos(\theta_i) \cos^2(\phi_i) + 1] + n_\rho T_{\perp} \cos^2(\phi_i) \text{sen}(\theta_i)]. \quad (3-53)$$

Para m_z :

$$m_z = -[n_x e_y - n_y e_x], \quad (3-54)$$

substituindo

$$m_z = -n_\rho (e_y \cos(\phi_i) + e_x \text{sen}(\phi_i)), \quad (3-55)$$

reordenando m_z

$$\begin{aligned} m_z &= -n_\rho \left(\left[T_{\parallel} \cos(\theta_i) - T_{\perp} \right] \sin(\phi_i) \cos(\phi_i) \right) \cos(\phi_i) \\ &\quad - \left[\left[T_{\parallel}(\theta_i) \cos(\theta_i) \cos^2(\phi_i) + T_{\perp} \sin^2(\phi_i) \right] \right] \sin(\phi_i) = \\ n_\rho &\left(\left[T_{\perp} \sin(\phi_i) \cos(\phi_i) \right] \cos(\phi_i) + \left[T_{\perp} \sin^2(\phi_i) \right] \sin(\phi_i) \right). \end{aligned} \quad (3-56)$$

Logo,

$$m_z = n_\rho [T_{\perp} \sin(\phi_i)]. \quad (3-57)$$

3.5.3

Separação de Variáveis

Para simplificar a integração, os termos em ϕ_i serão isolados e a integral em ϕ_i será resolvida analiticamente, necessitando apenas de integração em θ_i . Isto reduz consideravelmente o tempo do cálculo computacional necessário para determinar os campos radiados pela lente, mas requer um trabalho de reformular as expressões para o campo.

Das expressões de correntes elétricas, serão introduzidos os seguintes termos

$$A_0 = -T_{\perp} [n_\rho \sin(\theta_t) - n_z \cos(\theta_t)], \quad (3-58)$$

$$A_1 = T_{\perp} [n_\rho \sin(\theta_t) - n_z \cos(\theta_t)] - T_{\parallel} [n_z \cos(\theta_i - \theta_t)], \quad (3-59)$$

$$A_2 = [n_z [T_{\perp} \cos(\theta_t) - T_{\parallel} \cos(\theta_i - \theta_t)], \quad (3-60)$$

$$A_3 = [n_x h_y - n_y h_x] = n_\rho T_{\parallel} \cos(\theta_i - \theta_t). \quad (3-61)$$

Das expressões de correntes magnéticas, serão introduzidos os seguintes termos

$$B_0 = -n_z T_{\parallel}, \quad (3-62)$$

$$B_1 = - \left[n_\rho T_{\parallel} \sin(\theta_i) - n_z \left[T_{\parallel} \cos(\theta_i) - T_{\perp} \right] \right], \quad (3-63)$$

$$B_2 = - \left[n_z T_{\parallel} [\cos(\theta_i) + 1] + n_\rho T_{\perp} \sin(\theta_i) \right], \quad (3-64)$$

$$B_3 = n_\rho T_{\perp}. \quad (3-65)$$

Assim será possível reescrever as correntes de forma que

$$j_x = A_0 + A_1 \cos^2(\phi_i), \quad (3-66)$$

$$j_y = A_2 \sin(\phi_i) \cos(\phi_i), \quad (3-67)$$

$$j_z = A_3 \cos(\phi_i), \quad (3-68)$$

$$m_x = B_1 \sin(\phi_i) \cos(\phi_i), \quad (3-69)$$

$$m_y = B_0 + B_2 \cos^2(\phi_i), \quad (3-70)$$

$$m_z = B_3 \sin(\phi_i). \quad (3-71)$$

3.5.4

Análise nos eixos X, Y e Z

Definidas as correntes na superfície externa da lente em 3-41 e 3-48, a expressão 3-34 do campo radiado pela lente pode ser reexpressa por

$$\vec{E}_S(\vec{r}) = -\frac{i}{2\lambda} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \right] \hat{i}_r \times \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J] e^{ik\Psi} dS. \quad (3-72)$$

Avaliando os termos individualmente,

$$\hat{i}_r \times \vec{i}_J = [\sin(\theta_r) \cos(\phi_r) \hat{i}_x + \sin(\theta_r) \sin(\phi_r) \hat{i}_y + \cos(\theta_r) \hat{i}_z] \times [j_x \hat{i}_x + j_y \hat{i}_y + j_z \hat{i}_z], \quad (3-73)$$

realizando produto vetorial

$$\begin{aligned} \hat{i}_r \times \vec{i}_J = & [\sin(\theta_r) \sin(\phi_r) j_z - \cos(\theta_r) j_y] \hat{i}_x + [\cos(\theta_r) j_x - \cos(\theta_r) \cos(\phi_r) j_z] \hat{i}_y + \\ & \sin(\theta_r) [\sin(\phi_r) j_x - \cos(\phi_r) j_y] \hat{i}_z, \end{aligned} \quad (3-74)$$

abrindo a expressão em termos de x, y e z e substituindo os valores de \vec{i}_J

$$\begin{aligned} [\hat{i}_r \times \vec{i}_J]_x = & [\sin(\theta_r) \sin(\phi_r) j_z - \cos(\theta_r) j_y]_x = \\ & = \sin(\theta_r) \sin(\phi_r) A_3 \cos(\phi_i) - \sin(\phi_i) \cos(\phi_i) A_2 \cos(\theta_r), \end{aligned} \quad (3-75)$$

$$\begin{aligned} [\hat{i}_r \times \vec{i}_J]_y = & [\cos(\theta_r) j_x - \sin(\theta_r) \cos(\phi_r) j_z]_y = \\ & \cos(\theta_r) [A_0 + A_1 \cos^2(\phi_i)] - \sin(\theta_r) \cos(\theta_r) A_3 \cos(\phi_r), \end{aligned} \quad (3-76)$$

$$\begin{aligned} [\hat{i}_r \times \vec{i}_J]_z = & [\cos(\phi_r) j_y - \sin(\phi_r) j_x]_z = \\ & \cos(\phi_r) A_2 \sin(\phi_i) \cos(\phi_i) - \sin(\phi_r) \cos(\theta_r) [A_0 + A_1 \cos^2(\phi_i)]. \end{aligned} \quad (3-77)$$

Substituindo os valores de \vec{i}_M

$$\begin{aligned} & [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_x = \\ & = B_1 \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) - \text{sen}(\theta_r) \text{sen}(\phi_r) A_3 \cos(\phi_i) - \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) A_2 \cos(\theta_r), \end{aligned} \quad (3-78)$$

$$\begin{aligned} & [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_y = \\ & = B_0 + B_2 \cos^2(\phi_i) - \cos(\theta_r) [A_0 + A_1 \cos^2(\phi_i)] - \text{sen}(\theta_r) \cos(\theta_r) A_3 \cos(\phi_r), \end{aligned} \quad (3-79)$$

$$\begin{aligned} & [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_z = \\ & = B_3 \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_r) A_2 \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) - \text{sen}(\phi_r) \cos(\theta_r) [A_0 + A_1 \cos^2(\phi_i)]. \end{aligned} \quad (3-80)$$

Reorganizando

$$\begin{aligned} & [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_x = \\ & = -[\text{sen}(\theta_r) \text{sen}(\phi_r) A_3] \cos(\phi_i) + [B_1 + A_2 \cos(\theta_r)] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i), \end{aligned} \quad (3-81)$$

$$\begin{aligned} & [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_y = \\ & = [B_0 - A_0 \cos(\theta_r)] + [B_2 - A_1 \cos(\theta_r)] \cos^2(\phi_i) + [\text{sen}(\theta_r) \cos(\phi_r)] A_3 \cos(\phi_i), \end{aligned} \quad (3-82)$$

$$\begin{aligned} & [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_z = \\ & = B_3 \text{sen}(\phi_i) + \text{sen}(\phi_r) [\cos(\theta_r) A_0] - [\cos(\phi_r) A_2] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) + [A_1 \text{sen}(\phi_r) \cos(\theta_r)] \cos^2(\phi_i). \end{aligned} \quad (3-83)$$

3.5.5

Simplificação das integrais

3.5.5.1

Simplificação da integração para o eixo X

Pela integral da expressão 3-72

$$\int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_x e^{ik\Psi} dS = \quad (3-84)$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{-[\text{sen}(\theta_r) \text{sen}(\phi_r) A_3] \cos(\phi_i) + [B_1 + A_2 \cos(\theta_r)] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i)\} e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi_i, \quad (3-85)$$

reorganizando

$$\begin{aligned} \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_x e^{ik\Psi} dS = \\ - \int_0^\pi [\text{sen}(\theta_r) \text{sen}(\phi_r) A_3] \left[\int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i \right] d\theta_i + \\ \int_0^\pi [B_1 + A_2 \cos(\theta_r)] \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i \right] d\theta_i e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi_i. \end{aligned} \quad (3-86)$$

Sendo

$$f_1(\theta_r) = \left[\int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i \right], \quad (3-87)$$

$$f_3(\theta_r) = \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i \right], \quad (3-88)$$

para a componente X:

$$\begin{aligned} \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_x e^{ik\Psi} dS = \\ - [\text{sen}(\theta_r) \text{sen}(\phi_r)] \int_0^\pi F(\theta_i) A_3 f_1(\theta_i) d(\theta_i) + \int_0^\pi [B_1 + A_2 \cos(\theta_r)] F(\theta_i) f_3(\theta_i) d\theta_i. \end{aligned} \quad (3-89)$$

3.5.5.2

Simplificação da integração para o eixo Y

Pela integral da expressão 3-72

$$\begin{aligned} \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_y e^{ik\Psi} dS = \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left\{ [B_0 - A_0 \cos(\theta_r)] + [B_2 - A_1 \cos(\theta_r)] \cos^2(\phi_i) + [\text{sen}(\theta_r) \cos(\phi_r)] A_3 \cos(\phi_i) \right\} e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi_i, \end{aligned} \quad (3-90)$$

reorganizando

$$\begin{aligned} \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_y e^{ik\Psi} dS = \\ \left[\int_0^\pi [B_0 - A_0 \cos(\theta_r)] \left[\int_0^{2\pi} e^{ik\Psi} d\phi_i \right] d\theta_i \right] + \left[\int_0^\pi [B_2 - A_1 \cos(\theta_r)] \left[\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i \right] d(\theta_i) \right] + \\ [\text{sen}(\theta_r) \cos(\phi_r)] \left[\int_0^\pi [A_3] \left[\int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i \right] d(\theta_i) \right]. \end{aligned} \quad (3-91)$$

Sendo

$$f_0(\theta_r) = \left[\int_0^{2\pi} e^{ik\Psi} d\phi_i \right] \quad (3-92)$$

$$f_4(\theta_r) = \left[\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i \right], \quad (3-93)$$

para a componente Y

$$\begin{aligned} \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_y e^{ik\Psi} dS = \\ \left[\int_0^\pi [B_0 - A_0 \cos(\theta_r)] [f_0(\theta_r)] d\theta_i \right] + \left[\int_0^\pi [B_2 - A_1 \cos(\theta_r)] [f_4(\theta_r)] \right] + \\ [\text{sen}(\theta_r) \cos(\phi_r)] \left[\int_0^\pi [A_3] \left[\int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i \right] d(\theta_i) \right]. \end{aligned} \quad (3-94)$$

3.5.5.3

Simplificação da integração para o eixo Z

Pela integral expressão 3-72, substituindo os valores

$$\begin{aligned} \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_z e^{ik\Psi} dS = \\ + \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [B_3 \text{sen}(\phi_i) + \text{sen}(\phi_r) [\cos(\theta_r) A_0] - [\cos(\phi_r) A_2] \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) + \\ + [A_1 \text{sen}(\phi_r) \cos(\theta_r)] \cos^2(\phi_i)] e^{ik\Psi} dS, \end{aligned} \quad (3-95)$$

reescrevendo

$$\begin{aligned} \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_z e^{ik\Psi} dS = \\ \left[\cos(\theta_r) \text{sen}(\phi_r) \int_0^\pi [A_0] \left[\int_0^{2\pi} e^{ik\Psi} d(\phi_i) \right] d(\theta_i) \right] + \\ + \text{sen}(\phi_r) \cos(\theta_r) \left[\int_0^\pi [A_1] \left[\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d(\phi_i) \right] d(\theta_i) \right] + \\ - \cos(\phi_r) \left[\int_0^\pi [A_2] \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d(\phi_i) \right] d(\theta_i) \right] + \\ \left[\int_0^\pi B_3 \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d(\phi_i) \right] d(\theta_i) \right]. \end{aligned} \quad (3-96)$$

Sendo

$$f_2(\theta_r) = \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d(\phi_i) \right], \quad (3-97)$$

para a componente Z

$$\begin{aligned}
 \int_A [\vec{i}_M - \hat{i}_r \times \vec{i}_J]_z e^{ik\Psi} dS = & \\
 \left[\cos(\theta_r) \text{sen}(\phi_r) \int_0^\pi [A_0 f_0(\theta_i)] d(\theta_i) \right] + & \\
 + \text{sen}(\phi_r) \cos(\theta_r) \left[\int_0^\pi A_1 f_4(\theta_i) d(\theta_i) \right] + & \\
 - \cos(\phi_r) \left[\int_0^\pi A_2 f_3(\theta_i) d(\theta_i) \right] + & \\
 + \int_0^\pi [B_3 f_2(\theta_i)] d(\theta_i). & \quad (3-98)
 \end{aligned}$$

Utilizando as expressões para as correntes superficiais sobre a interface, a integral pode ser reorganizada como:

$$\begin{aligned}
 \int_A [(\hat{n}_A \times \vec{E}_A) - \eta_0 \hat{i}_r \times (\hat{n}_A \times \vec{H}_A)] e^{ik\hat{i}_r \cdot \vec{r}'} dS = & \\
 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [g_0(\theta) + g_1(\theta) \cos(\phi_i) + g_2(\theta) \cos^2(\phi_i) + q_1(\theta) \text{sen}(\phi_i) + q_2(\theta) \cos(\phi_i) \text{sen}(\phi_i)] e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi_i, & \quad (3-99)
 \end{aligned}$$

tendo em vista a função de Bessel,

$$J_n(x) = \frac{j^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jx \cos(\phi)} e^{jn\phi} d\phi, \quad (3-100)$$

$$J_n(x) = \frac{j^{-n}}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi) e^{jx \cos(\phi)} d\phi, \quad (3-101)$$

$$J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\phi) e^{ix \cos(\phi)}} d\phi. \quad (3-102)$$

é possível tomar as integrais de ϕ individualmente, conforme o apêndice A, a fim de obter os seguintes resultados: Para g_0 ,

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\Psi} d\phi = e^{i\mu} [2\pi J_0(v)]. \quad (3-103)$$

Para g_1 ,

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi = e^{i\mu} \cos(\phi) [2\pi i J_1(v)]. \quad (3-104)$$

Para g_2 ,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i = e^{i\mu} [[\pi J_0(v)] + \cos(2\phi_i) [\pi i J_2(v)]] . \quad (3-105)$$

Para q_1 ,

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i = e^{iu} \text{sen}(\phi) 2\pi i J_1(v). \quad (3-106)$$

Para q_2 ,

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) \text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi = e^{i\mu} 2\pi \text{sen}(\phi) J_2(v). \quad (3-107)$$

De forma que

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} g_0(\theta) e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi = 2\pi \int_0^\pi e^{i\mu} g_0(\theta_i) [J_0(v)] d\theta_i, \quad (3-108)$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} g_1(\theta) \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi = 2\pi i \cos(\phi) \int_0^\pi e^{i\mu} g_1(\theta_i) [J_1(v)] d\theta_i, \quad (3-109)$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} g_2(\theta_i) \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi = \pi \int_0^\pi e^{i\mu} g_2(\theta_i) [J_0(v)] d\theta_i - \pi \cos(2\phi) \int_0^\pi e^{i\mu} g_2(\theta_i) [J_2(v)] d\theta_i, \quad (3-110)$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} q_1(\theta) \text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi = i 2\pi \text{sen}(\phi) \int_0^\pi e^{i\mu} q_1(\theta_i) J_1(v) d\theta_i, \quad (3-111)$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} q_2(\theta) \text{sen}(\phi_i) \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi = \pi \text{sen}(2\phi) \int_0^\pi e^{i\mu} q_2(\theta_i) J_2(v) d\theta_i. \quad (3-112)$$

4

Simulação da lente circularmente simétrica

Nos Capítulos 2 e 3 foram apresentadas as técnicas de síntese e de análise de lentes dielétricas, utilizando as aproximações da Ótica Geométrica e da Ótica Física, respectivamente. Neste capítulo vamos explorar estas técnicas para mostrar exemplos de lentes dielétricas sintetizadas para atender diferentes especificações. Os exemplos de projeto supõem uma fonte pontual sobre a origem e com um diagrama do tipo cosseno elevado a $M=2.91$, onde M foi escolhido para produzir uma atenuação de -8 dB em 60° graus, conforme mostrado na Figura 4.1. Na análise eletromagnética da lente, supõe-se que o alimentador seja linearmente polarizado segundo a terceira definição de Ludwig [22]. Este modelo de iluminação circularmente simétrico e linearmente polarizado aproxima o diagrama de uma corneta corrugada de 90° graus. O dielétrico escolhido tem índice de refração $n = 1.6$, que corresponde ao Poliestireno que possui constante de permissividade relativa $\epsilon_r = 2.56$ e de permeabilidade relativa $\mu_r = 1$.

4.1

Caso 1 - Cobertura uniforme

Este primeiro caso apresenta a síntese de uma cobertura uniforme em uma região cônica com 70° de largura de feixe ($0^\circ < \theta_t < 35^\circ$), utilizando a fonte pontual para iluminar a interface da lente. Para a aplicação das técnicas de síntese e análise, a lente terá uma espessura $Z_A = 6\lambda$ para assegurar que as dimensões sejam maiores que 5λ . Este dimensionamento é feito através da escolha da constante L_0 na expressão 2-45.

Para assegurar a estabilidade da síntese, somente será considerada a região de incidência definida pelo cone de alimentação com semiângulo $\theta_i < 80^\circ$. Os raios incidentes na interface nos ângulos $\theta_i > 80^\circ$ transportam pouca energia e pouco contribuem para a formação do diagrama em campo distante. Para a cobertura proposta em campo distante, os raios incidentes para $\theta_i > 80^\circ$ ao atravessarem a interface são tangentes à superfície da lente e são suscetíveis aos erros numéricos. A Tabela 4.1 sumariza os parâmetros utilizados na síntese. Para larguras de feixe menores que 35° , a síntese apresenta problemas, pois os raios ao atravessarem a superfície permanecem dentro do dielétrico devido à

curvatura da interface.

A lente foi sintetizada utilizando 90 raios igualmente espaçados em θ_i entre $0 < \theta_i < 80^\circ$, que permite descrever a superfície da lente através de 90 pontos, como mostrado na Figura 4.2. A Figura 4.3 ilustra o traçado dos raios sobre a interface o que permite visualizar o fluxo de energia através da lente e do ar. Como pode ser observado na Figura 4.3, os raios incidentes são igualmente espaçados em θ_i e, para obter a cobertura uniforme, os raios transmitidos que se situam na borda da região de cobertura se aproximam a fim aumentar a densidade de potência no tubo de raios.

A Figura 4.4 ilustra o diagrama de radiação da lente em três planos ϕ . Estes diagramas foram obtidos a partir da aplicação das aproximações da Ótica Física, como descrito no Capítulo 3. Para comparação com estes diagramas, a figura apresenta o diagrama utilizado como especificação para a síntese. Observa-se que na região entre $0 < \theta_t < 45^\circ$ os diagramas nos três planos coincidem e oscilam entorno do objetivo com diferenças mais acentuadas no centro e nas bordas da região de cobertura. Estas oscilações no diagrama são devidas aos efeitos difrativos impostos pelas dimensões da lente.

| Espessura = 6λ | | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------|---------------------------|
| Posição | Modelo | Expoente | Mapeamento |
| Alimentador | $G(\theta_i) = G_0 \cos^M \theta_i$ | $M = 2.91$ | $0 < \theta_i < 80^\circ$ |
| Campo Distante | $G(\theta_t) = G_0 \cos^N \theta_t$ | $N = 0$ | $0 < \theta_t < 35^\circ$ |

Tabela 4.1: Parâmetros do alimentador e de campo distante para o Caso 1

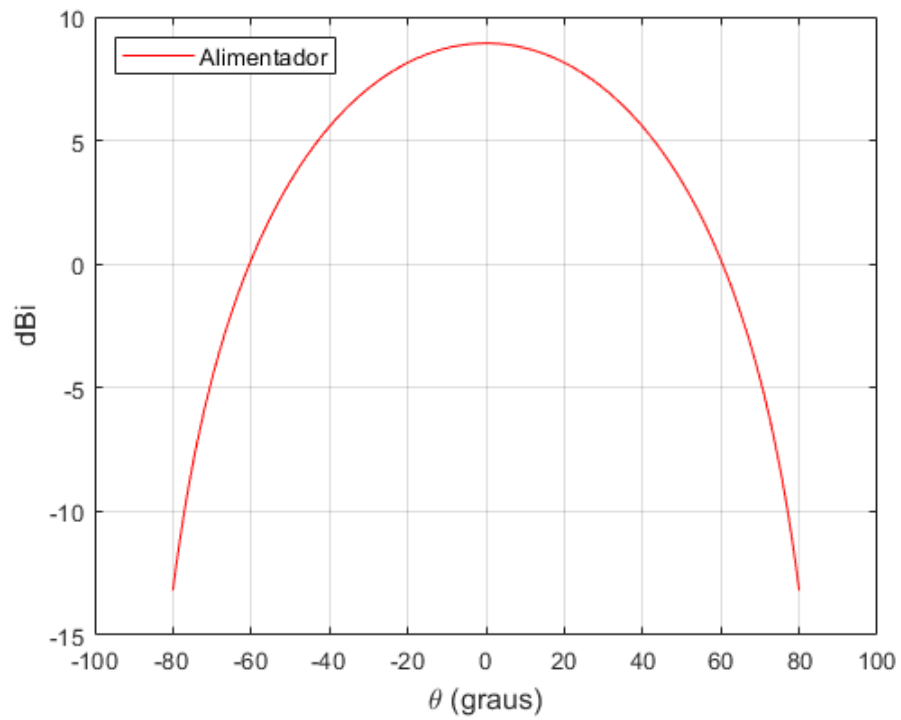


Figura 4.1: Diagrama do Alimentador, $M=2.91$

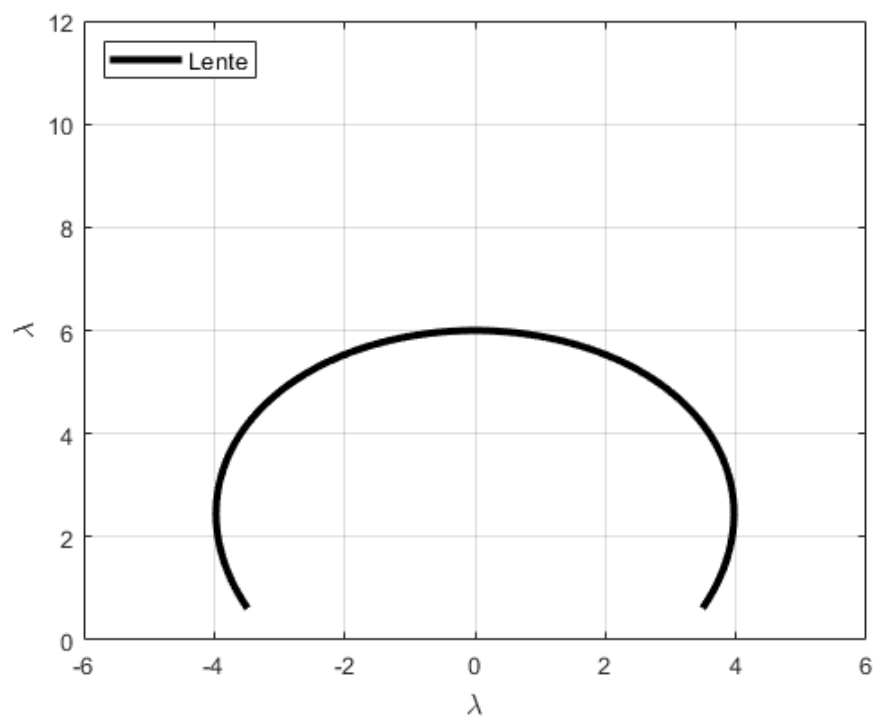


Figura 4.2: Lente de espessura 6λ

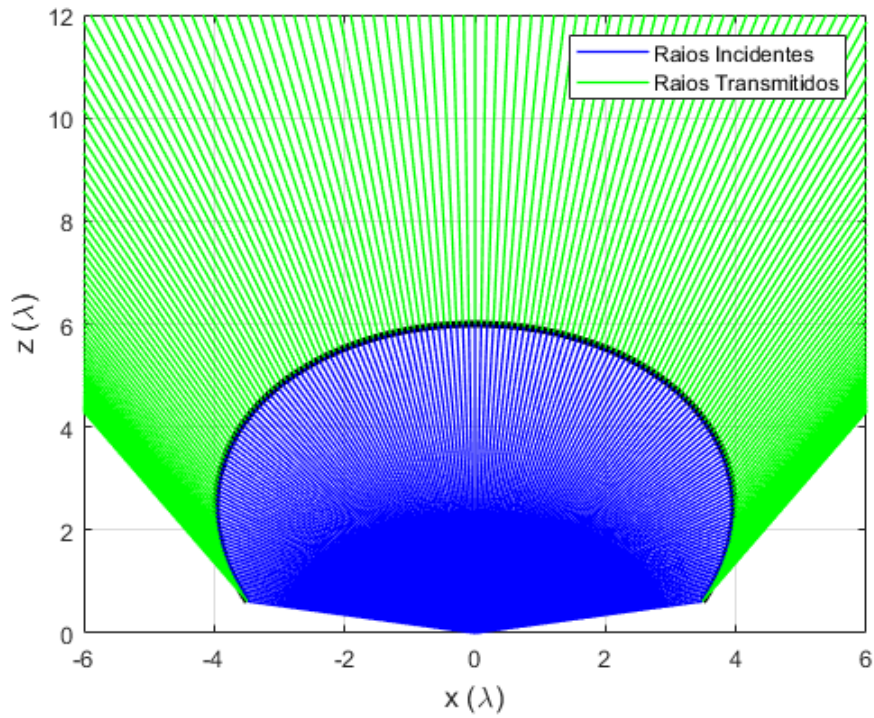


Figura 4.3: Raios incidentes/refratados espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=0$

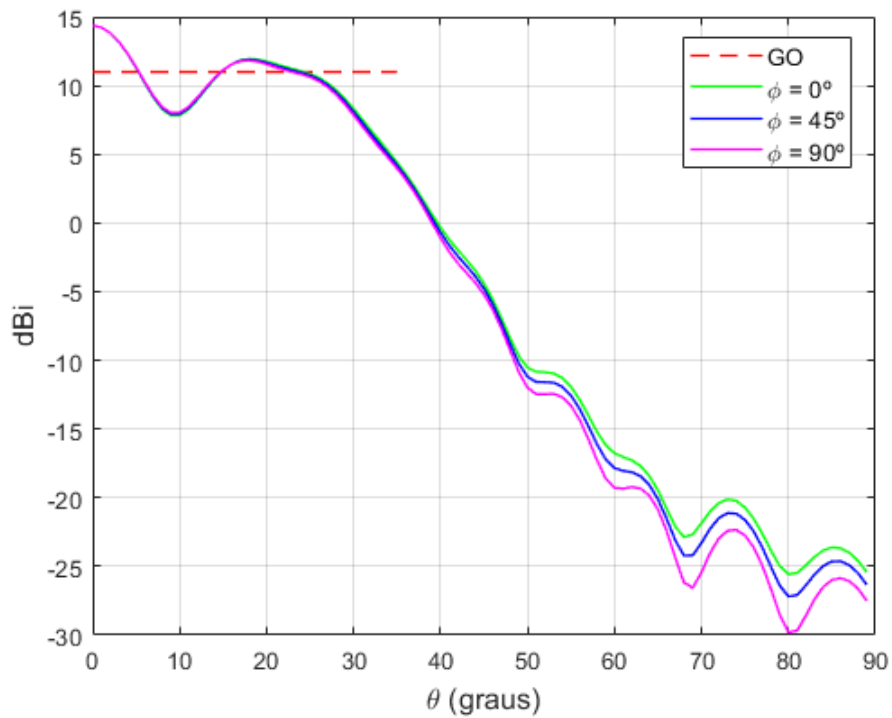


Figura 4.4: Diagrama de radiação espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=0$

Para avaliar as limitações impostas pelos efeitos difrativos, a lente será sintetizada com os mesmos parâmetros da Tabela 4.1 mas com espessura $Z_A=$

25λ resultando em um dispositivo com dimensões muito maiores que 5λ e reduzindo os efeitos difrativos sobre o desempenho do dispositivo. A Figura 4.5 ilustra forma da lente que corresponde à lente com $Z_A=5\lambda$ multiplicada por um fator. A Figura 4.6 ilustra o traçado de raios que apresenta características semelhantes à síntese anterior. A Figura 4.7 apresenta os diagramas dos três planos juntos com o objetivo. Como pode ser observado na figura, as oscilações diminuiram de amplitude e aumentaram a frequência proporcionalmente ao aumento das dimensões do dispositivo. Estes resultados mostram que o comportamento da lente converge para os resultados especificados à medida que as dimensões aumentam devido à redução dos efeitos difrativos.

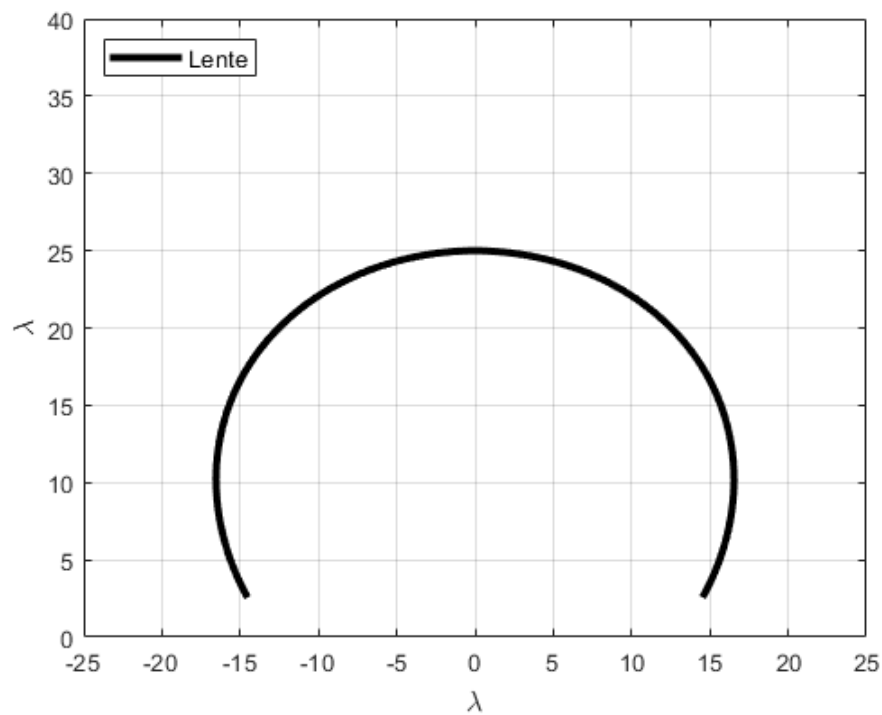


Figura 4.5: Lente de espessura 25λ

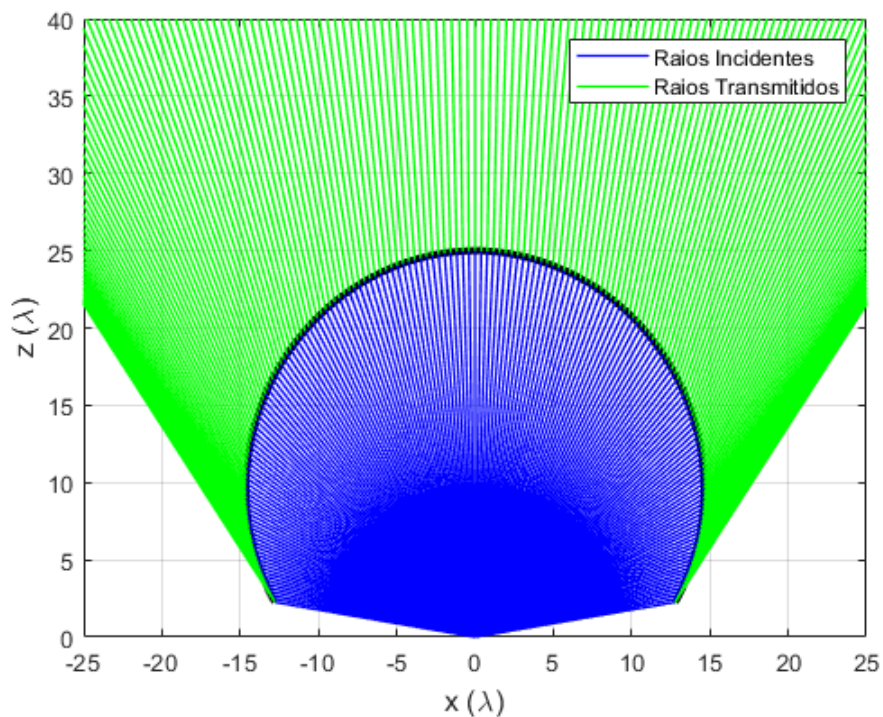


Figura 4.6: Raios incidentes/refratados espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=0$

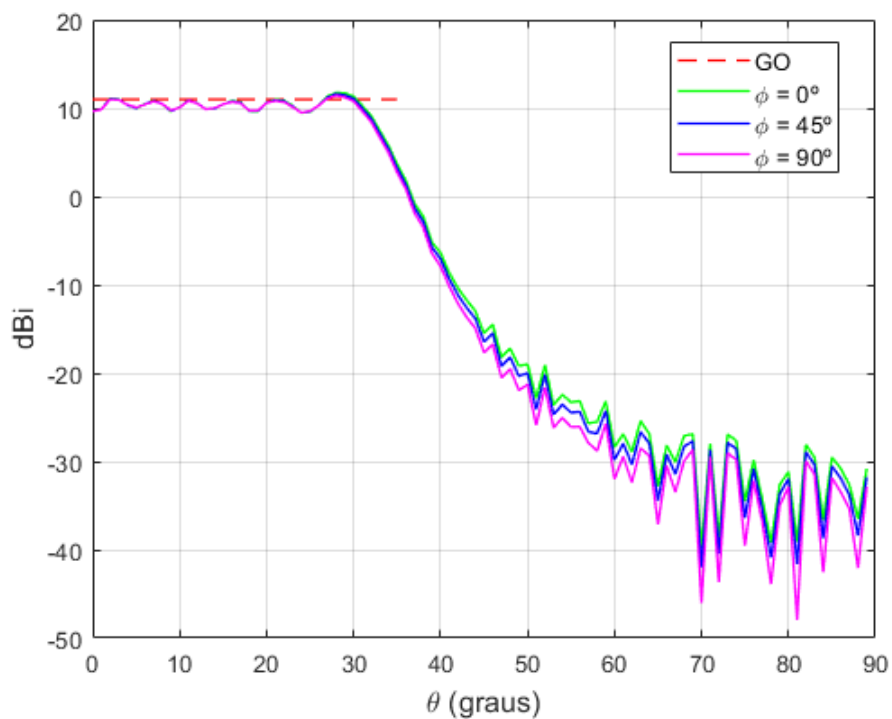


Figura 4.7: Diagrama de radiação espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=0$

4.2

Caso 2: Cobertura Gaussiana

Nos casos anteriores, as lentes foram sintetizadas para uma distribuição uniforme de potência em campo distante em uma região cônica, sendo nula fora desta região. Esta transição abrupta entre estas duas regiões excita componentes de alta frequência espacial. Do ponto de vista difrativo, a lente e sua dimensão finita definem um filtro passa-baixa que resulta nas oscilações na região de cobertura pela supressão das componentes de alta frequência, que seriam necessárias para reproduzir a transição abrupta. Além destas oscilações, a falta destas componentes de alta frequência do espectro espacial faz com que a transição seja mais lenta. Esta limitação espectral faz com que aumentem as diferenças entre o diagrama proposto na síntese baseada na Óptica Geométrica e o diagrama fornecido pela Óptica Física.

A fim de reduzir estas diferenças, será utilizado como objetivo da síntese um diagrama do tipo $\cos^N(\theta)$ que é de fácil manuseio analítico e assemelha o comportamento de uma função Gaussiana que apresenta um espectro de alta frequência com menor densidade de energia. O valor de $N=12$ foi escolhido para que o diagrama tenha -10.3 dB de atenuação na borda da cobertura ($\theta_t=35^\circ$).

A Tabela 4.2 apresenta os parâmetros utilizados na síntese. A Figura 4.8 mostra a forma da geratriz da interface da lente sintetizada com 90 pontos igualmente espaçados em (θ_i) e utilizando a região da fonte pontual entre $0^\circ < \theta_i < 80^\circ$. O traçado de raios da fonte pontual até a região de campo distante é mostrada na Figura 4.9, onde se observa que, quando comparados aos casos anteriores, os raios estão menos concentrados na borda devido ao decaimento da cobertura e mais concentrados no centro onde o ganho é mais alto. Esta menor concentração de raios na borda permite que sejam sintetizados feixes com largura menor que 35° sem a ocorrência de casos críticos. A Figura 4.10 mostra os três cortes no diagrama de radiação obtidos a partir das aproximações da Óptica Física junto com o diagrama da síntese, onde se observa oscilações menores.

| Espessura = 6λ | | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------|---------------------------|
| Posição | Modelo | Expoente | Mapeamento |
| Alimentador | $G(\theta_i) = G_0 \cos^M \theta_i$ | $M = 2.91$ | $0 < \theta_i < 80^\circ$ |
| Campo Distante | $G(\theta_t) = G_0 \cos^N \theta_t$ | $N = 12$ | $0 < \theta_t < 35^\circ$ |

Tabela 4.2: Parâmetros do alimentador e de campo distante para o Caso 2

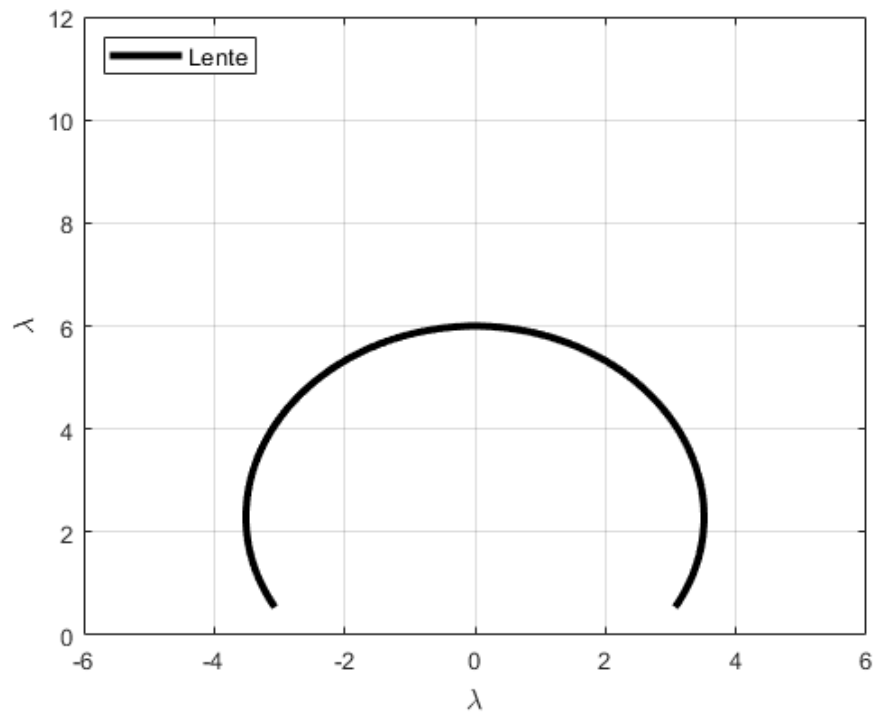


Figura 4.8: Lente de espessura 6λ

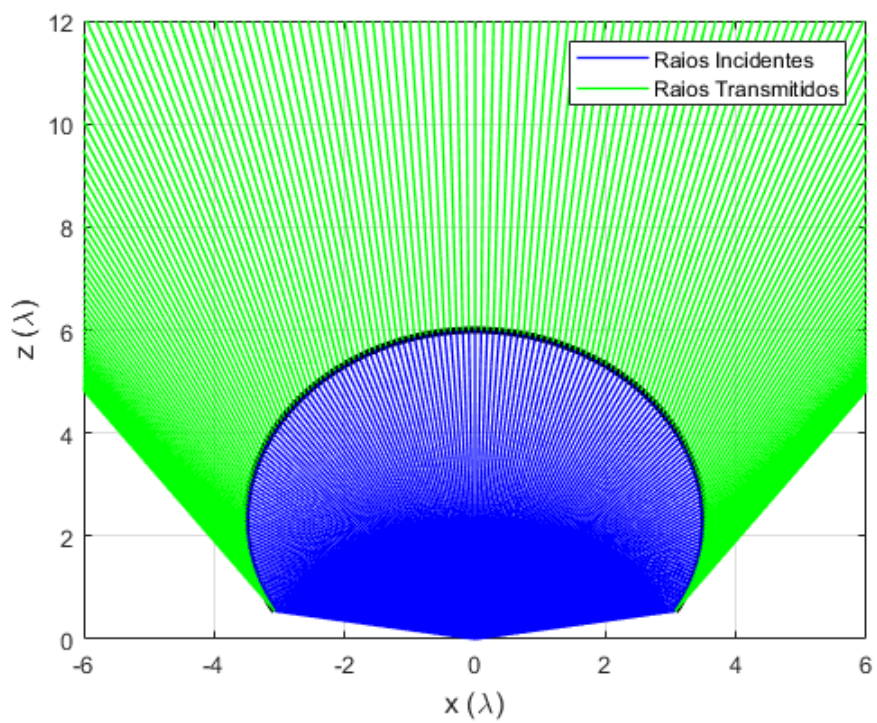


Figura 4.9: Raios incidentes/refratados espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=12$

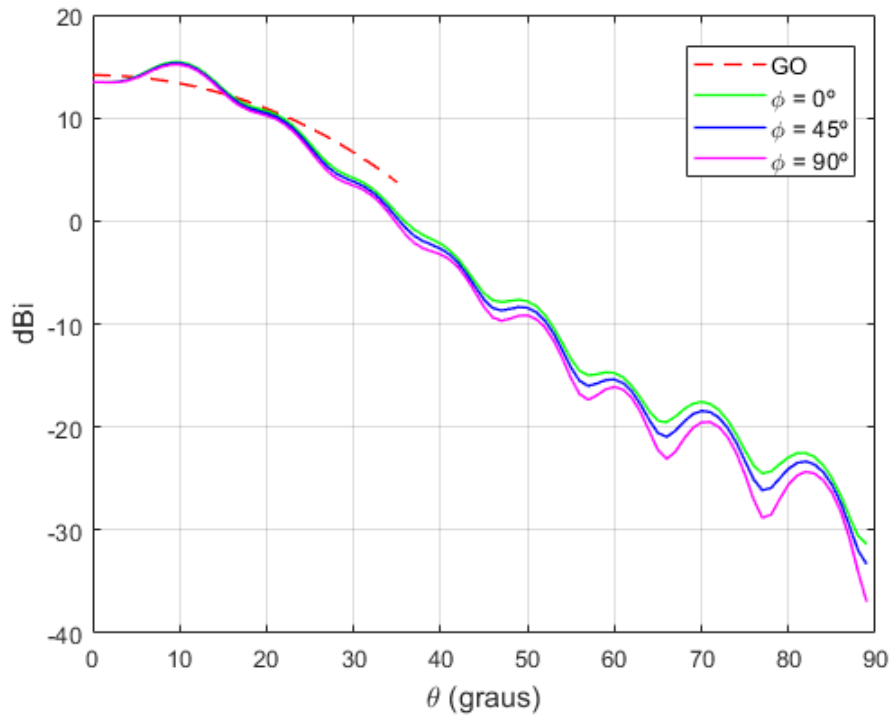


Figura 4.10: Diagrama de radiação espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=12$

Para avaliar a convergência dos resultados para lentes com espessura maior, as Figuras 4.11 e 4.12 mostram a forma da lente e o traçado de raios para uma lente espessura $Z_A = 25\lambda$ que, como esperado, corresponde as Figuras 4.8 e 4.9 multiplicadas por um fator. A Figura 4.13 mostra os três cortes no diagrama de radiação obtido das aproximações da Óptica Física junto com as especificações da síntese. Como é observado, as oscilações no entorno do objetivo foram reduzidas e os resultados convergem para o diagrama especificado na síntese.

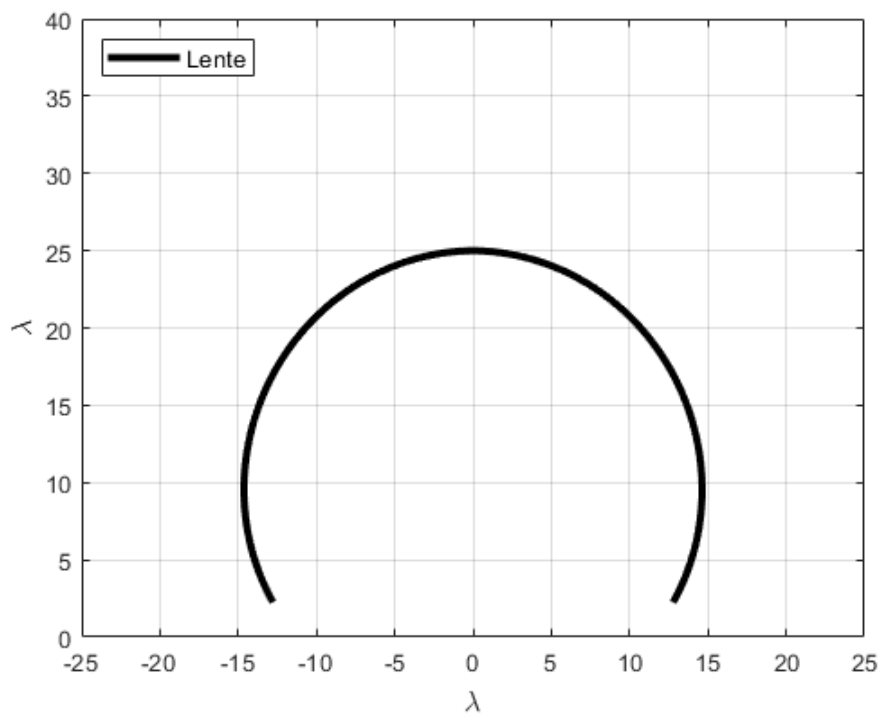


Figura 4.11: Lente de espessura 25λ

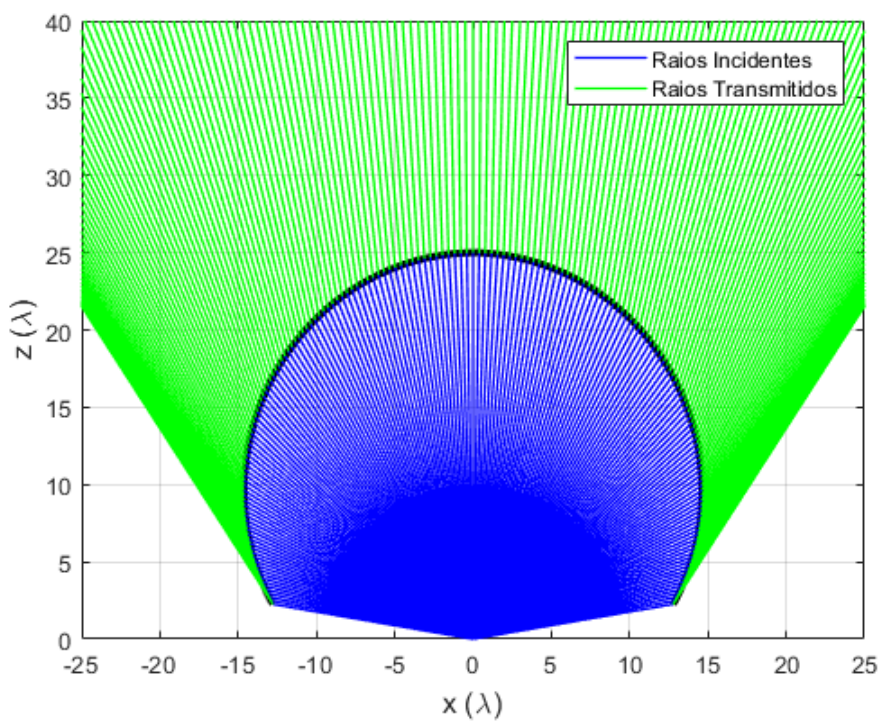


Figura 4.12: Raios incidentes/refratados espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=12$

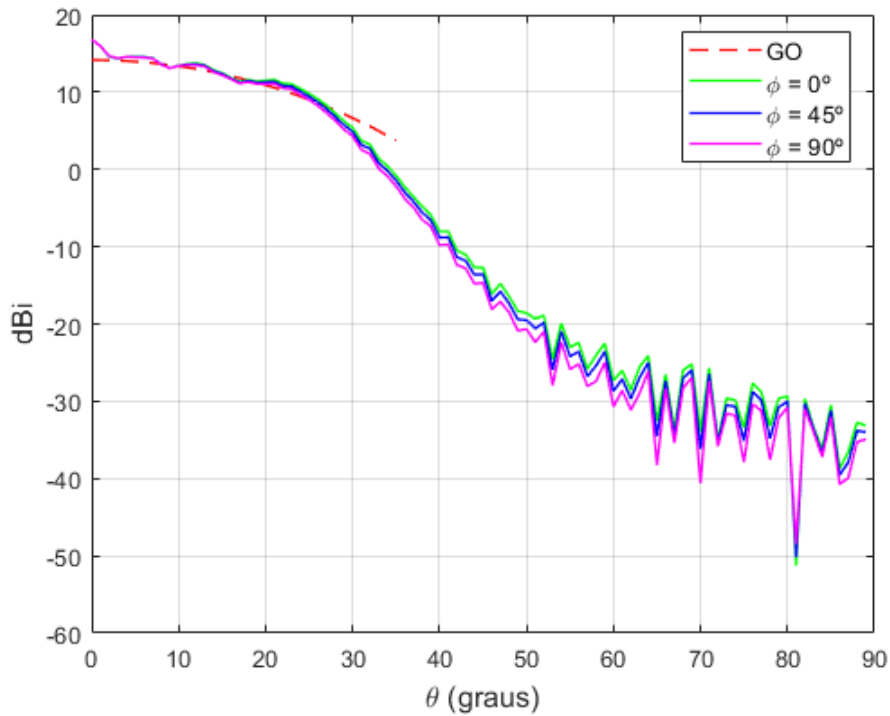


Figura 4.13: Diagrama de radiação espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=12$

4.3

Caso 3: Iluminação uniforme sobre solo

Para cobertura “indoor” de sistemas operando em ondas milimétricas, [13] apresenta projeto de lentes que produz uma cobertura uniforme sobre o solo, quando colocadas no teto do ambiente. Estas lente é iluminada por um guia circular radiando o modo TE₁₁ circularmente polarizado que está imerso na região do dielétrico. Sobre a superfície da lente, a iluminação produzida por este guia se comporta como uma fonte pontual radiando uma onda esférica. A geratriz da lente foi obtida através de técnicas de síntese baseada nas aproximações da ótica geométrica e foram projetadas para produzir um diagrama $\sec^2(\theta)$ entre $0^\circ < \theta_i < \theta_{Max}$. Para ângulos maiores que θ_{Max} o diagrama cai abruptamente.

Utilizando como fonte pontual o modelo descrito no início deste capítulo, o Caso 3 mostra os resultados obtidos pela utilização das técnicas de síntese e análise de lentes mostradas nos capítulos anteriores e utilizadas para projetar uma lente com diagrama $\sec^2(\theta)$ entre $0^\circ < \theta_i < \theta_{Max}$.

A Tabela 4.3 apresenta os parâmetros utilizados na síntese. A Figura 4.14 mostra a forma da geratriz da lente com espessura $Z_A = 6\lambda$ e obtida a partir de 90 raios igualmente espaçados em θ_i . Diferentemente da forma das lentes nos casos anteriores, a dimensão máxima da lente não ocorre ao longo

do eixo z , mas próximo ao plano xy . Para o exemplo mostrado o diâmetro máximo é aproximadamente de 23.7λ . A Figura 4.15 mostra o traçado de raios resultante, onde pode-se observar que o ângulo do raio transmitido em relação a normal aumenta gradativamente a medida que o ângulo de incidência aumenta, aumentando acentuadamente as perdas nesta região. Por outro lado, como o ângulo de incidência θ_{iMAX} e o ângulo da borda da cobertura θ_{tMAX} são próximos, a diferença entre a direção do raio incidente e o transmitido diminui. Comportamento semelhante se observa no centro da lente. Figura 4.16 mostra o diagrama de radiação obtido pelas aproximações da Ótica Física.

| Espessura = 6λ | | | |
|------------------------|-------------------------------------|------------|---------------------------|
| Posição | Modelo | Expoente | Mapeamento |
| Alimentador | $G(\theta_i) = G_0 \cos^M \theta_i$ | $M = 2.91$ | $0 < \theta_i < 80^\circ$ |
| Campo Distante | $G(\theta_t) = G_0 \cos^N \theta_t$ | $N = -2$ | $0 < \theta_t < 76^\circ$ |

Tabela 4.3: Parâmetros do alimentador e de campo distante para o Caso 3

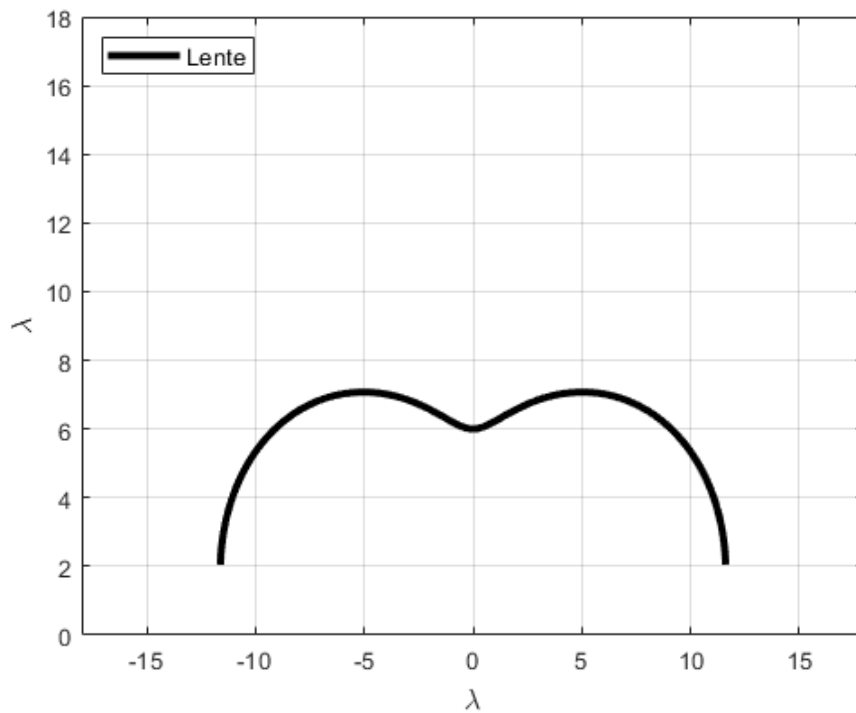


Figura 4.14: Lente de espessura 6λ

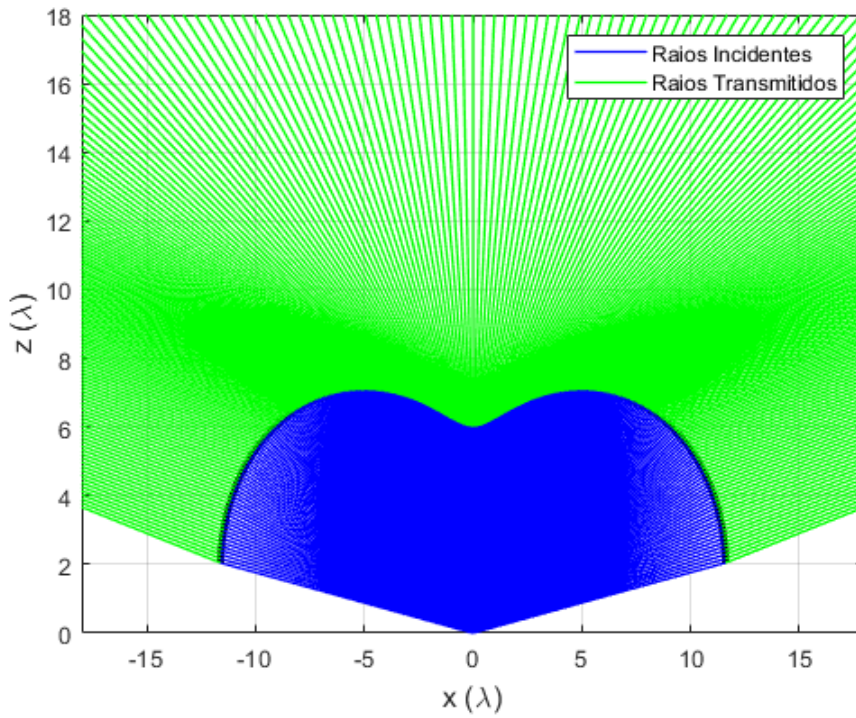


Figura 4.15: Raios incidentes/refratados espessura= 6λ , $M=2.91$ e $N=-2$

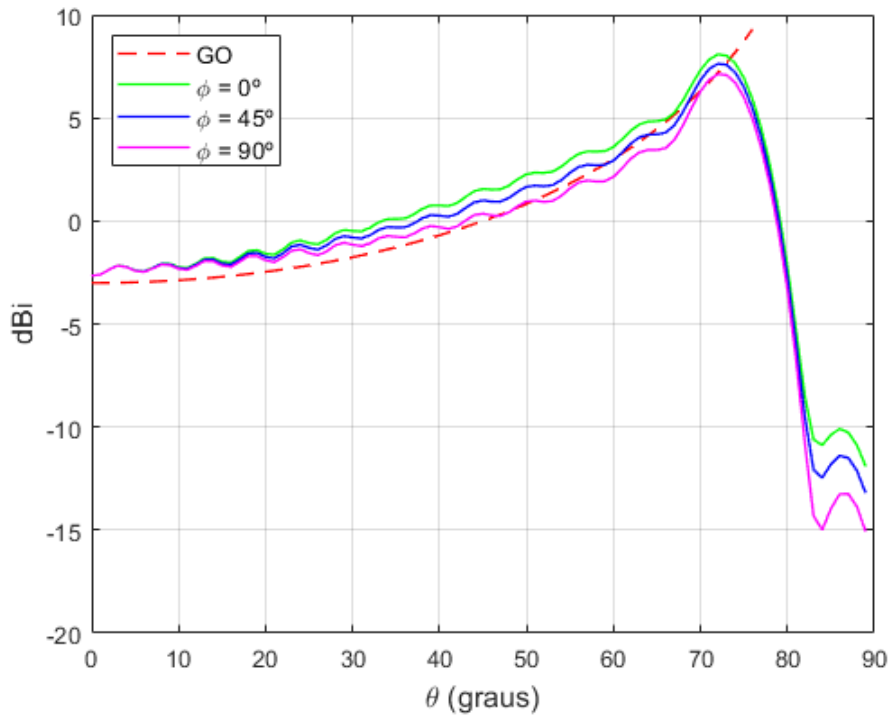


Figura 4.16: Diagrama de radiação espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=-2$

Para observar a convergência da solução, a Figura 4.17 mostra a lente sintetizada para uma espessura $Z_A = 25\lambda$ e a Figura 4.18 mostra o diagrama

de radiação.

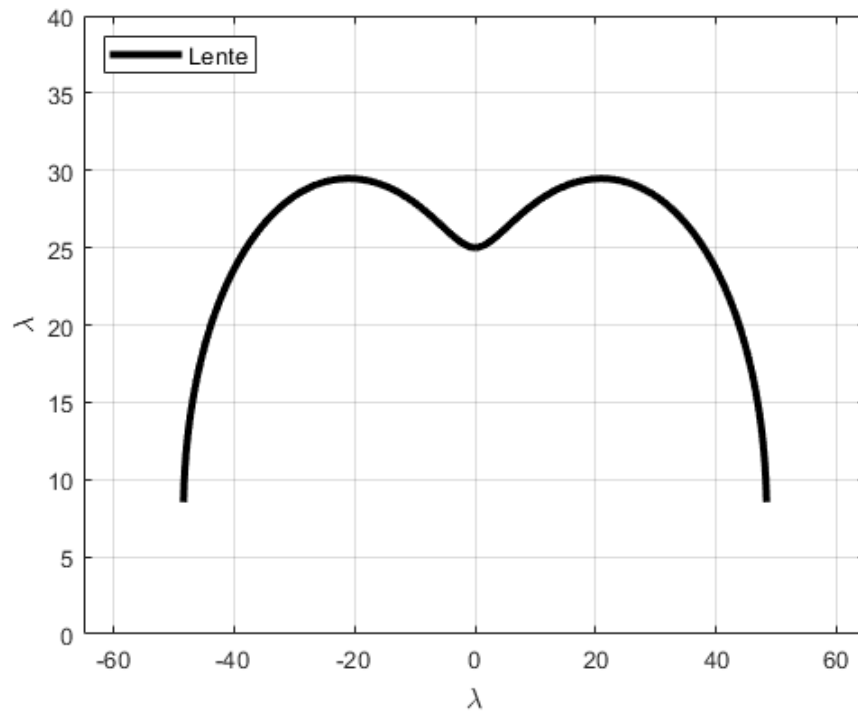


Figura 4.17: Lente de espessura 25λ

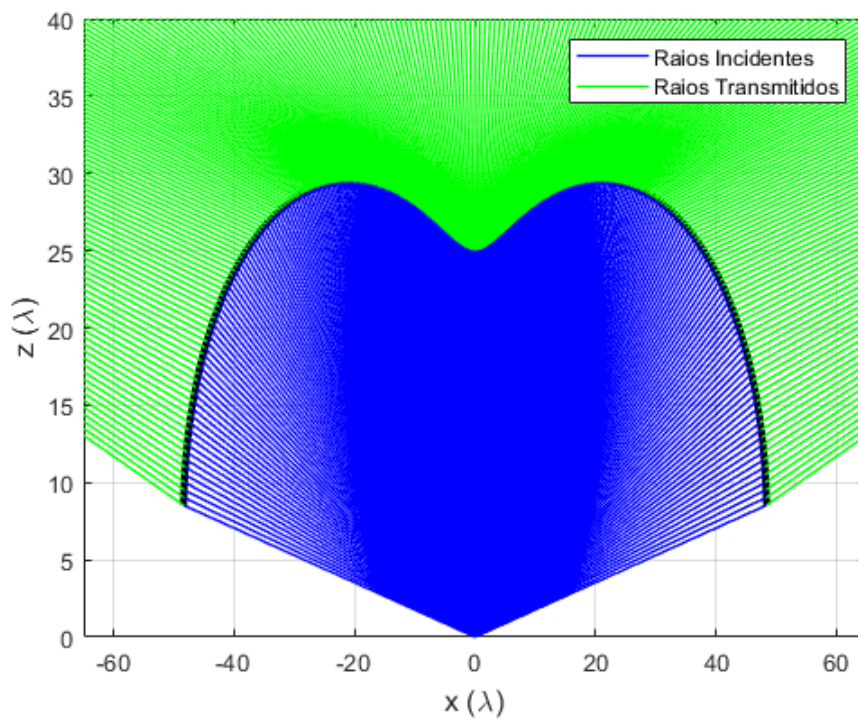
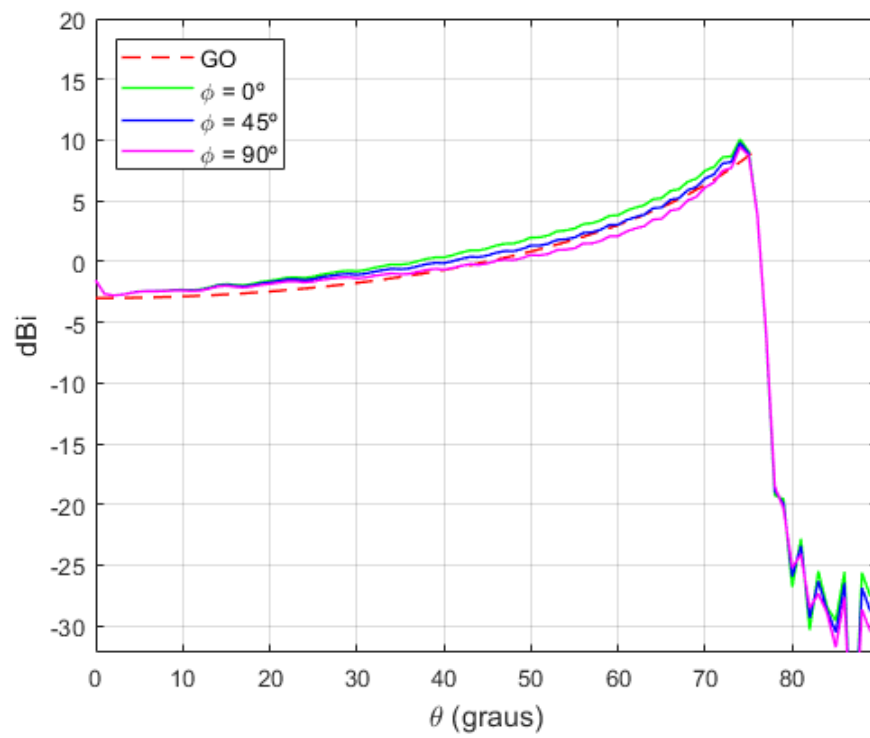


Figura 4.18: Raios incidentes/refratados espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=-2$

Figura 4.19: Diagrama de radiação espessura= 25λ , $M=2.91$ e $N=-2$

5

Conclusão e trabalhos futuros

Neste trabalho foi desenvolvida a técnica de síntese ótica de lentes dielétricas circularmente simétricas iluminadas por fonte pontual com diagrama simétrico. A interface foi modelada com suas características de radiação descritas pelas aproximações da GO e da PO.

Pela GO, o controle da densidade de potência em campo distante foi obtido pela aplicação da conservação de energia no interior dos tubos de raios que emergem do centro de fase, enquanto a direção dos raios que emergem a superfície do dielétrico foi obtida através da aplicação da Lei de Snell.

Pela PO, foi possível obter as correntes elétrica e magnética equivalentes na superfície externa da lente e determinar o campo radiado na integração dessas correntes sobre a superfície para então estimar o comportamento dos campos radiados pela lente.

Diversas simplificações foram realizadas devido a simetria circular, apresentadas nos esquemas numéricos, resultando em soluções mais eficientes utilizadas para descrever a superfície da lente.

As aproximações foram avaliadas através da projeção do alimentador corugado com características de simetria adequadas que se mostraram eficientes para a representação da fonte pontual suposta no processo da síntese.

Ao modelar as lentes circularmente simétricas, foi observado que as aproximações utilizadas convergem e não é necessário utilizar muitos pontos para descrever a geratriz uma vez que os resultados são bem próximos do esperado.

Sobre os diagramas de radiação, foi observado que as oscilações são mais acentuadas no centro e nas bordas da região de cobertura e que essas oscilações são ocasionadas devido aos efeitos difrativos impostos pelas dimensões da lente.

Também foi possível identificar que com o aumento da espessura os efeitos difrativos sobre o desempenho do dispositivo são reduzidos, de forma que há diminuição da amplitude das oscilações e aumento de sua frequência em razão ao aumento da espessura.

Pode-se destacar também que a distribuição uniforme de potência na região cônica de campo distante e nula fora desta região excita componentes de alta frequência espacial devido a transição abrupta, mas a lente e sua

dimensão finita define um filtro passa-baixa que suprime as componentes de alta frequência, limitação que aumenta as diferenças do diagrama. No entanto, foi validada a possibilidade de redução destes efeitos, através de ajustes no diagrama para reduzir a concentração de raios nas bordas, o que trouxe resultados mais eficientes.

Além disso, foi possível realizar a análise para o caso de coberturas indoor. A projeção do diagrama foi modificada para atender o caso, o que resultou numa lente de dimensões maiores próximas ao plano xy , diferente dos outros casos em que as dimensões máximas estavam ao longo do eixo Z . Desta análise, foi verificado o comportamento esperado em que as perdas diminuem à medida que a diferença entre os ângulos θ_{iMAX} e θ_{tMAX} se aproximam, próximo a borda.

Dentre os trabalhos futuros, seria interessante realizar experimentos com diferentes diagramas de radiação e avaliar seus respectivos comportamentos em campo distante. Também seria interessante avaliar as aproximações utilizadas através de um alimentador corrugado de 90° com as características de simetria adequadas para representar a fonte pontual suposta no processo de síntese deste trabalho. Este alimentador poderia ser utilizado para iluminar a lente e sintetizar o diagrama de radiação utilizando softwares matemáticos.

A

Projeções Estereográficas

A.1

Representação das direções no espaço

Projeções estereográficas podem ser utilizadas como um método para representar, no plano, elementos planares e lineares situados no espaço, com preservação dos ângulos e das suas relações angulares.

Conforme ilustrado na Figura A.1, seja P_S um ponto sobre uma esfera de raio unitário definido em coordenadas esféricas pelas variáveis θ e ϕ em relação à origem O do sistema de coordenadas, P_S projeta $P(u, v)$ no plano $z = 0$ a partir da projeção estereográfica de $P_O(0, 0, 1)$.

Qualquer direção no espaço pode ser descrita por duas variáveis (θ, ϕ) ou associada com o ponto P_S sobre a esfera de raio unitário com centro sobre a origem. Alternativamente, os pontos desta esfera unitária podem ser associados aos pontos do plano $z=0$ através da sua projeção estereográfica.

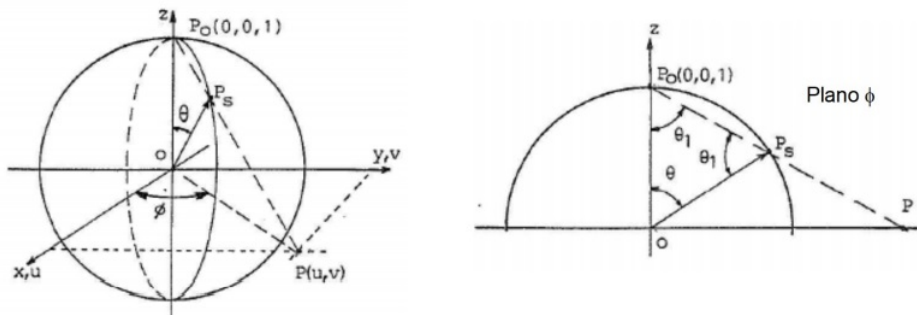


Figura A.1: Projeções Estereográficas [20]

Sendo

$$u = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(\phi) \quad (\text{A-1})$$

$$v = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\sen(\phi) \quad (\text{A-2})$$

$$OP = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{A-3})$$

As direções ao longo do plano $\theta = 90^\circ$ ($z=0$), são mapeadas no círculo de raio unitário $P(\cos(\phi), \sin(\phi))$ que coincidem com os pontos $P_S(\cos(\phi), \sin(\phi))$.

Dessa forma, não é difícil notar que a direção ao longo do eixo z positivo ponto $P_0(0,0,1)$ é mapeada em círculo de raio infinito, as direções $\theta > 90^\circ$ são mapeadas no interior do círculo de raio unitário e as direções $\theta < 90^\circ$ são mapeadas fora do círculo de raio unitário.

A.2

Notação complexa

O plano de projeção xy será descrito como um plano de coordenadas complexas, isso permite que uma única variável complexa η represente um ponto (u,v) no espaço.

$$\eta = u + iv, \quad (\text{A-4})$$

sendo

$$i = \sqrt{-1}. \quad (\text{A-5})$$

Conhecidos θ e ϕ , pode-se determinar η e o seu conjugado

$$\eta = u + iv = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(\phi) + i\sin(\phi)] = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}, \quad (\text{A-6})$$

$$\bar{\eta} = u - iv = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) [\cos(\phi) - i\sin(\phi)] = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}. \quad (\text{A-7})$$

Assim como determinar u e v

$$u = \frac{1}{2}(\eta + \bar{\eta}), \quad (\text{A-8})$$

$$v = \frac{i}{2}(\bar{\eta} - \eta). \quad (\text{A-9})$$

E as relações para θ e ϕ

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad (\text{A-10})$$

$$\tan(\phi) = \frac{v}{u} = \frac{i(\bar{\eta} - \eta)}{(\eta + \bar{\eta})}. \quad (\text{A-11})$$

A.3 Vetor Unitário

Das expressões anteriores, não é difícil obter os cossenos diretores de \vec{p} em termos de η e do conjugado de η

$$\text{sen}(\theta)\cos(\phi) = \frac{(\eta + \bar{\eta})}{(1 + |\eta|^2)}, \quad (\text{A-12})$$

$$\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi) = \frac{i(\eta - \bar{\eta})}{(1 + |\eta|^2)}, \quad (\text{A-13})$$

$$\cos(\theta) = \frac{(1 - |\eta|^2)}{(1 + |\eta|^2)}. \quad (\text{A-14})$$

Tendo em vista que o vetor unitário $p(\theta, \phi)$ na direção do ponto OS sobre a esfera de raio unitário é expresso por

$$\vec{p} = \text{sen}(\theta)\cos(\phi)\hat{i}_x + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\hat{i}_y + \cos(\theta)\hat{i}_z. \quad (\text{A-15})$$

através das substituições:

$$\vec{p} = \frac{(\eta + \bar{\eta})}{(1 + |\eta|^2)}\hat{i}_x + \frac{i(\eta - \bar{\eta})}{(1 + |\eta|^2)}\hat{i}_y + \frac{(1 - |\eta|^2)}{(1 + |\eta|^2)}\hat{i}_z. \quad (\text{A-16})$$

Assim, cada uma das coordenadas é uma função real de variável complexa e o vetor unitário \vec{p} que define um ponto sobre a superfície da esfera é radial e normal superfície de raio unitário. E, portanto, através das coordenadas do plano é possível definir esse vetor.

A.4 Derivadas de Funções Reais de Variáveis Complexas

Para uma função real f de uma variável complexa η a derivada de f em relação a η é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f(\eta(u, v)) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right], \quad (\text{A-17})$$

as derivadas do vetor unitário \vec{p} em relação a variável complexa η e $\bar{\eta}$ representam dois vetores tangentes a esfera de raio unitário, sendo cada uma das derivadas é uma função vetorial real

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \vec{p} = \vec{p}_\eta = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} - i \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right], \quad (\text{A-18})$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \vec{p} = \vec{p}_{\bar{\eta}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} + i \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right]. \quad (\text{A-19})$$

Realizando as operações

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \eta} = \vec{p}_\eta = \frac{(1 - \bar{\eta}^2)}{(1 + |\eta|^2)^2} \hat{i}_x - \frac{i(1 + \eta^2)}{(1 + |\eta|^2)^2} \hat{i}_y + \frac{2\bar{\eta}}{(1 + |\eta|^2)^2} \hat{i}_z, \quad (\text{A-20})$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \bar{\eta}} = \vec{p}_{\bar{\eta}} = \frac{(1 - \eta^2)}{(1 + |\eta|^2)^2} \hat{i}_x - \frac{i(1 + \bar{\eta}^2)}{(1 + |\eta|^2)^2} \hat{i}_y + \frac{2\eta}{(1 + |\eta|^2)^2} \hat{i}_z. \quad (\text{A-21})$$

A.5

Propriedades dos vetores \vec{p} e \vec{p}_η

Como os vetores derivadas p_u e p_v são ortogonais a \vec{p} , as partes reais e imaginárias dos vetores derivadas são ortogonais a \vec{p} , logo algumas propriedades dos vetores \vec{p} e \vec{p}_η podem ser denotadas

$$\vec{p} \cdot \vec{p}_\eta = 0, \quad (\text{A-22})$$

$$\vec{p} \cdot \vec{p}_{\bar{\eta}} = 0, \quad (\text{A-23})$$

$$\vec{p}_\eta \cdot \vec{p}_\eta = \vec{p}_{\bar{\eta}} \cdot \vec{p}_{\bar{\eta}} = 0, \quad (\text{A-24})$$

$$\vec{p}_{\bar{\eta}} \cdot \vec{p}_\eta = \vec{p}_\eta \cdot \vec{p}_{\bar{\eta}} = \frac{2}{[1 + |\eta|^2]^2}, \quad (\text{A-25})$$

$$\vec{p}_{\bar{\eta}} = \overline{\vec{p}_\eta}. \quad (\text{A-26})$$

B

Integrais em ϕ_i

$$\int_A [(\hat{n}_A \times \vec{E}_A) - \eta_0 \hat{i}_r \times (\hat{n}_A \times \vec{H}_A)] e^{ik\hat{i}_r \cdot \vec{r}'} dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [g_0(\theta) + g_1(\theta)\cos(\phi_i) + g_2(\theta)\cos^2(\phi_i) + q_1(\theta)\text{sen}(\phi_i) + q_2(\theta)\cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i)] e^{ik\Psi} d\theta_i d\phi_i, \quad (\text{B-1})$$

notando que

$$\Psi = i(v[\cos(\phi - \phi_i)] + \mu), \quad (\text{B-2})$$

$$v(\theta, \theta_i) = kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta), \quad (\text{B-3})$$

$$\mu(\theta, \theta_i) = kr'\cos(\theta_i)\cos(\theta). \quad (\text{B-4})$$

B.1

Integração de $g_0(\theta)$

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\Psi} d\phi = \int_0^{2\pi} e^{ik\Psi} d\phi_i = \int_0^{2\pi} e^{ik[r'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)[\cos(\phi - \phi_i)] + r'\cos(\theta_i)\cos(\theta)]} d\phi_i = e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} e^{i[kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)]\cos(\phi - \phi_i)} d\phi_i, \quad (\text{B-5})$$

simplificando a expressão

$$e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} e^{i[kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)]\cos(\phi - \phi_i)} d\phi_i = e^{i\mu} \int_0^{2\pi} e^{i\nu\cos(\phi - \phi_i)} d\phi_i, \quad (\text{B-6})$$

atribuindo as variáveis

$$\phi_i = (\phi - \phi_i), \quad (\text{B-7})$$

$$d\phi_i = -d\phi_i, \quad (\text{B-8})$$

$$\cos(\phi_i) = \cos(\phi - \phi_i) = \cos(-\phi_i), \quad (\text{B-9})$$

atribuindo a função de Bessel de ordem zero

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos(\phi)} d\phi, \quad (\text{B-10})$$

realizando as respectivas substituições

$$e^{i\mu} \int_0^{2\pi} e^{iv \cos(\phi - \phi_i)} d\phi_i = e^{i\mu} \int_0^{2\pi} e^{iv \cos(\phi_i)} d\phi_i = e^{i\mu} [2\pi J_0(v)], \quad (\text{B-11})$$

logo

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\Psi} d\phi = e^{ikr' \cos(\theta_i) \cos(\theta)} [2\pi J_0(kr'(\theta_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\theta))]. \quad (\text{B-12})$$

B.2

Integração de $g_1(\theta) \cos(\phi_i)$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi &= \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik[r'(\theta_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\theta) \cos(\phi - \phi_i) + r' \cos(\theta_i) \cos(\theta)]} d\phi_i = \\ &e^{ikr' \cos(\theta_i) \cos(\theta)} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{i[kr'(\theta_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\theta)] \cos(\phi - \phi_i)} d\phi_i, \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

simplificando a expressão

$$e^{ikr' \cos(\theta_i) \cos(\theta)} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{i[kr'(\theta_i) \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\theta)] \cos(\phi - \phi_i)} d\phi = e^{i\mu} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{iv \cos(\phi - \phi_i)} d\phi_i, \quad (\text{B-14})$$

atribuindo as variáveis

$$\phi_i = (\phi - \phi_i) \quad (\text{B-15})$$

$$d\phi_i = -d\phi_i \quad (\text{B-16})$$

$$\cos(\phi_i) = \cos(\phi - \phi_i) = \cos(\phi) \cos(\phi_i) + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\phi_i), \quad (\text{B-17})$$

atribuindo a função de Bessel de ordem um

$$J_1(x) = \frac{1}{i2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\phi) e^{ix \cos(\phi)} d\phi, \quad (\text{B-18})$$

realizando as respectivas substituições

$$\begin{aligned}
 e^{i\mu} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i &= \\
 &= e^{i\mu} [\cos(\phi) \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i - \text{sen}(\phi) \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i] = \\
 &= e^{i\mu} [2\pi i J_1(v) \cos(\phi)], \tag{B-19}
 \end{aligned}$$

logo

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi = e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \cos(\phi) [2\pi i J_1(kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta))]. \tag{B-20}$$

B.3

Integração de $g_2(\theta)\cos^2(\phi_i)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi &= \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i = \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik[r'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)\cos(\phi-\phi_i)+r'\cos(\theta_i)\cos(\theta)]} d\phi_i = \\
 &e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{i[kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)]\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i, \tag{B-21}
 \end{aligned}$$

simplificando a expressão

$$\begin{aligned}
 e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{i[kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)]\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i &= \\
 e^{iu} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i,
 \end{aligned}$$

tendo em vista que

$$\cos^2(\phi_i) = \frac{(1 + \cos(2\phi_i))}{2}, \tag{B-22}$$

substituindo a relação trigonométrica

$$\begin{aligned}
 e^u \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos(2\phi_i))}{2} e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i &= \\
 &= \frac{e^{iu}}{2} \int_0^{2\pi} e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i + \frac{e^{iu}}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\phi_i) e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i,
 \end{aligned}$$

atribuindo as variáveis

$$\phi_i = (\phi - \phi_i), \quad (\text{B-23})$$

$$d\phi_i = -d\phi, \quad (\text{B-24})$$

$$\cos(2\phi_i) = \cos[2(\phi - \phi_i)] = \cos(2\phi)\cos(2\phi_i) + \text{sen}(2\phi)\text{sen}(2\phi_i), \quad (\text{B-25})$$

realizando as respectivas substituições

$$\begin{aligned} & \frac{e^{iu}}{2} \int_0^{2\pi} e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i + \frac{e^{iu}}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\phi_i) e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i = \\ & \frac{e^{iu}}{2} \int_0^{2\pi} e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i + \frac{e^{iu}}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i = \\ & \frac{e^{iu}}{2} \int_0^{2\pi} e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i + \frac{e^{iu}}{2} [\cos(2\phi) \int_0^{2\pi} \cos(2\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i + \text{sen}(2\phi) \int_0^{2\pi} \text{sen}(2\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i], \end{aligned}$$

atribuindo a função de Bessel de ordem dois

$$J_2(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\phi) e^{ix\cos(\phi)} d\phi, \quad (\text{B-26})$$

substituindo

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i = e^{iu\pi} [J_0(v) - \cos(2\phi) J_2(v)], \quad (\text{B-27})$$

logo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i &= e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} [[\pi J_0(kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta))]] + \\ &+ \cos(2\phi_i) [\pi i J_2(kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta))]. \end{aligned}$$

B.4

Integração de $q_1(\theta)\sin(\phi_i)$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi &= \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i = \\ &= \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{ik[r'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)\cos(\phi-\phi_i)+r'\cos(\theta_i)\cos(\theta)]} d\phi_i = \\ &e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{i[kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)]\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i, \end{aligned}$$

simplificando a expressão

$$\begin{aligned} e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{i[kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)]\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i = \\ e^{iu} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i, \end{aligned}$$

atribuindo as variáveis

$$\begin{aligned} \phi_i &= (\phi - \phi_i), \\ d\phi_i &= -d\phi_i, \\ \text{sen}(\phi_i) &= \text{sen}(\phi - \phi_i) = \text{sen}(\phi)\cos(\phi_i) - \cos(\phi)\text{sen}(\phi_i), \end{aligned}$$

realizando as respectivas substituições

$$\begin{aligned} e^{iu} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i = \\ e^{iu}\text{sen}(\phi) \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i - e^{iu}\cos(\phi) \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i, \end{aligned}$$

como

$$e^{iu}\cos(\phi) \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i = 0,$$

substituindo o primeiro termo na solução de Bessel de ordem um

$$e^{iu}\text{sen}(\phi) \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i = e^{iu}\text{sen}(\phi) 2\pi i J_1(v),$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i &= e^{iu}\text{sen}(\phi) 2\pi i J_1(v) = \\ &= e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \text{sen}(\phi) 2\pi i J_1(kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)). \end{aligned}$$

B.5

Integração em $q_2\cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i)$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i &= \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i) e^{ik\Psi} d\phi_i = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i) e^{ik[r'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)\cos(\phi-\phi_i)+r'\cos(\theta_i)\cos(\theta)]} d\phi_i = \\ &= e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i) e^{i[kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)]\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i, \end{aligned}$$

simplificando a expressão

$$e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i)e^{i[kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)]\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i = e^{iu} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i)e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i,$$

da relação trigonométrica

$$\cos(x)\text{sen}(x) = \frac{\text{sen}(2x)}{2},$$

atribuindo as variáveis

$$\phi_i = (\phi - \phi_i),$$

$$d\phi_i = -d\phi_i,$$

$$\text{sen}(2\phi_i) = \text{sen}[2(\phi - \phi_i)] = \text{sen}(2\phi)\cos(2\phi_i) + \text{sen}(2\phi_i)\cos(2\phi),$$

realizando as respectivas substituições

$$e^{i\mu} \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i)e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i = e^{iu} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}(2\phi_i)}{2} e^{iv\cos(\phi-\phi_i)} d\phi_i = \frac{e^{iu}}{2} \text{sen}(2\phi) \int_0^{2\pi} \cos(2\phi_i)e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i + \frac{e^{iu}}{2} \cos(2\phi) \int_0^{2\pi} \text{sen}(2\phi_i)e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i,$$

como

$$e^{iu} \cos(2\phi) \int_0^{2\pi} \text{sen}(2\phi_i)e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i = 0,$$

substituindo o primeiro termo na solução de Bessel de ordem 2

$$\frac{e^{i\mu}}{2} \text{sen}(2\phi) \int_0^{2\pi} \cos(2\phi_i)e^{iv\cos(\phi_i)} d\phi_i = \frac{e^{i\mu}}{2} 2\pi \text{sen}(2\phi) J_2(v),$$

logo,

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi_i)\text{sen}(\phi_i)e^{ik\Psi} d\phi = e^{i\mu} 2\pi \text{sen}(\phi) J_2(v) = e^{ikr'\cos(\theta_i)\cos(\theta)} 2\pi \text{sen}(\phi) J_2(kr'(\theta_i)\text{sen}(\theta_i)\text{sen}(\theta)).$$

Referências bibliográficas

- [1] FILIPOVIC, D. F.; GEARHART, S. S. ; REBEIZ, G. M.. **Double-slot antennas on extended hemispherical and elliptical silicon dielectric lenses.** IEEE Transactions on microwave theory and techniques, 41(10):1738–1749, 1993.
- [2] WU, X.; ELEFThERIADES, G. V. ; VAN DEVENTER-PERKINS, T. E.. **Design and characterization of single-and multiple-beam mm-wave circularly polarized substrate lens antennas for wireless communications.** IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 49(3):431–441, 2001.
- [3] GODI, G.; SAULEAU, R. ; THOUROUDE, D.. **Performance of reduced size substrate lens antennas for millimeter-wave communications.** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 53(4):1278–1286, 2005.
- [4] COSTA, J. R.; FERNANDES, C. A.; GODI, G.; SAULEAU, R.; LE COQ, L. ; LEGAY, H.. **Compact ka-band lens antennas for leo satellites.** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 56(5):1251–1258, 2008.
- [5] FERNANDES, C. A.. **Shaped dielectric lenses for wireless millimeter-wave communications.** IEEE Antennas and Propagation Magazine, 41(5):141–150, 1999.
- [6] ROLLAND, A.; ETTORRE, M.; BORISKIN, A. V.; LE COQ, L. ; SAULEAU, R.. **Axisymmetric resonant lens antenna with improved directivity in ka-band.** IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 10:37–40, 2011.
- [7] THORNTON, J.; HUANG, K.-C.. **Modern lens antennas for communications engineering**, volumen 39. John Wiley & Sons, 2013.
- [8] BALANIS, C. A.. **Antenna theory: analysis and design.** John wiley & sons, 2015.
- [9] DE ASSIS, A. R.; OTHERS. **Aplicação de óptica geométrica na síntese de antenas duplo-refletoras offset e de lentes dielétricas sem simetria circular.** 2020.

- [10] CHANTRAINE-BARES, B.; SAULEAU, R.; LE COQ, L. ; MAHDJOUBI, K.. **A new accurate design method for millimeter-wave homogeneous dielectric substrate lens antennas of arbitrary shape.** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 53(3):1069–1082, 2005.
- [11] FERNANDES, C. A.; FERNANDES, J. G.. **Performance of lens antennas in wireless indoor millimeter-wave applications.** IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques, 47(6):732–737, 1999.
- [12] LEE, J.. **Dielectric lens shaping and coma-correction zoning, part i: Analysis.** IEEE transactions on antennas and propagation, 31(1):211–216, 1983.
- [13] FERNANDES, C. A.; ANUNCIADA, L. M.. **Constant flux illumination of square cells for millimeter-wave wireless communications.** IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 49(11):2137–2141, 2001.
- [14] WESTCOTT, B. S.; BRICKELL, F.. **General dielectric-lens shaping using complex co-ordinates.** IEE Proceedings H: Microwaves Antennas and Propagation, 133(2):122–126, Apr. 1986.
- [15] BALANIS, C. A.. **Advanced engineering electromagnetics.** John Wiley & Sons, 2012.
- [16] PENCHEL, R. A.; BERGMANN, J. R. ; MOREIRA, F. J.. **Shaping single offset reflector antennas using local axis-displaced confocal quadrics.** International Journal of Antennas and Propagation, 2016, 2016.
- [17] SILVER, S.. **Microwave antenna theory and design.** Número 19. let, 1984.
- [18] WESTCOTT, B.. **On the synthesis of a single offset reflector with dielectric cone feed.** Journal of Modern Optics, 40(6):1161–1173, 1993.
- [19] ASSIS, A. R.; MOREIRA, F. J. ; BERGMANN, J. R.. **Go synthesis of offset dual reflector antennas using local axis-displaced confocal quadrics.** Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications, 19:177–190, 2020.
- [20] BRICKELL, F.; MARDER, L. ; WESTCOTT, B.. **The geometrical optics design of reflectors using complex coordinates.** Journal of Physics A: Mathematical and General, 10(2):245, 1977.

- [21] GALINDO, V.. **Design of dual-reflector antennas with arbitrary phase and amplitude distributions.** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 12(4):403–408, 1964.
- [22] LUDWIG, A.. **The definition of cross polarization.** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 21(1):116–119, 1973.