

1

Introdução

Nas últimas décadas houve uma crescente utilização de pacotes de otimização, baseados em técnicas de Pesquisa Operacional e Programação Matemática, para um controle efetivo da provisão de bens e serviços em sistemas de distribuição. O grande número de aplicações práticas mostra que o uso de procedimentos computacionais para o planejamento do processo de distribuição gera economias substanciais nos custos de transporte. É fácil ver que o impacto dessas economias no sistema econômico global é significativa, uma vez que o processo de transporte envolve todos os estágios de sistemas de produção e distribuição e representa uma parcela relevante do custo final dos produtos.

Esta dissertação tem interesse nos problemas que consistem na distribuição de produtos entre depósitos e clientes. Esses problemas geralmente são conhecidos como *Problemas de Roteamento de Veículos* (VRP, do inglês *Vehicle Routing Problems*). Os modelos e algoritmos propostos para a solução de problemas de roteamento de veículos podem ser usados não apenas na resolução de problemas de entrega ou coleta de produtos. Aplicações típicas incluem, por exemplo, limpeza urbana, roteamento de ônibus escolares, determinação de plano de viagens de vendedores.

A distribuição de produtos consiste em servir, num dado período de tempo, um conjunto de clientes com um conjunto de veículos, que estão localizados em um ou mais depósitos, são dirigidos por um conjunto de motoristas, e se movem utilizando uma rede rodoviária apropriada. Em particular, a solução do VRP consiste em determinar um conjunto de rotas, cada uma realizada por um único veículo que começa e termina em seu depósito, tal que todas as demandas dos clientes são satisfeitas, todas as restrições operacionais são respeitadas, e o custo global de transporte é minimizado. Na próxima seção, são descritas as principais características dos problemas de roteamento considerando seus principais componentes (rede

rodoviária, clientes, depósitos, veículos e motoristas), as diferentes restrições que podem ser impostas na construção de rotas e os possíveis objetivos a serem atingidos no processo de otimização.

1.1

Características dos Problemas de Roteamento

A rede rodoviária, usada para o transporte de produtos, é geralmente descrita por um grafo cujos arcos representam os trechos e os vértices correspondem aos cruzamentos da rede rodoviária e aos clientes e depósitos. Os arcos (e por consequência os grafos correspondentes) podem ser *direcionados* ou *não-direcionados*, dependendo se o trecho for de mão única ou mão dupla, respectivamente. Cada arco é associado a um custo, que geralmente é uma função da distância e do tempo de viagem, e que também pode ser dependente do tipo do veículo ou do período do dia em que o arco é atravessado.

Os clientes possuem uma série de características como:

- O vértice da rede rodoviária em que o cliente está localizado;
- Quantidade de produtos (demanda), possivelmente de tipos diferentes, que devem ser entregues ou coletados no cliente;
- Períodos do dia durante os quais o cliente pode ser atendido (por exemplo, por causa do horário de funcionamento do cliente);
- Tempo requerido para carregar ou descarregar os produtos no cliente, possivelmente dependentes do tipo de veículo;
- Subconjunto de veículos disponíveis que pode ser usado para atender cada cliente (por exemplo, por limitações de acesso).

Em alguns casos, não é possível satisfazer completamente a demanda de cada cliente. Nesses casos, as quantidades a serem entregues ou coletadas podem ser reduzidas, ou um subconjunto de clientes pode deixar de ser servido. Para lidar com essas situações, penalidades ou prioridades podem ser associadas aos clientes.

As rotas realizadas para servir os clientes começam e terminam em um ou mais depósitos, que estão localizados nos vértices do grafo que representa a rede rodoviária. Cada depósito possui um determinado número de veículos

(cada um com seu tipo) associado a ele, além de uma quantidade de produtos que ele pode armazenar.

O transporte de produtos é realizado utilizando uma frota de veículos cuja composição e tamanho pode ser fixa ou definida em função dos requisitos dos clientes. Características típicas dos veículos são:

- Depósito a que o veículo pertence, e a possibilidade de terminar a rota em um depósito diferente desse;
- Capacidade do veículo, expressa pela quantidade máxima de peso ou volume e os tipos de produtos que o veículo pode transportar;
- Possível divisão do veículo em compartimentos, cada um caracterizado pela sua capacidade e quantidade de produtos que podem ser carregados;
- Dispositivos disponíveis para as operações de carregamento e descarga;
- Subconjunto de arcos do grafo que podem ser atravessados pelo veículo;
- Custos associados a utilização do veículo (por unidade de distância, de tempo, etc).

Os motoristas que dirigem os veículos devem seguir uma série de normas e regulamentações (por exemplo, período de trabalho, número de intervalos durante o serviço). Essas restrições impostas ao trabalho dos motoristas são consideradas, geralmente, de maneira conjunta com as restrições dos veículos.

As rotas devem satisfazer restrições operacionais que dependem da natureza dos produtos transportados, do nível de qualidade de serviço, e das características dos clientes e dos veículos. Algumas restrições operacionais típicas são: em uma rota a carga associada a um veículo não pode exceder a capacidade do mesmo; os clientes servidos em uma rota podem requerer ou entrega ou coleta de produtos ou, em alguns casos, ambos; os clientes só podem ser servidos em determinados períodos (janelas de tempos). Restrições de precedência podem ser impostas para a ordem em que os clientes devem ser visitados em uma rota. Um tipo de restrição de precedência requer que um determinado cliente seja servido na mesma rota que serve um dado subconjunto de clientes, e esse cliente deve ser visitado antes (ou depois) dos clientes que pertencem ao subconjunto. Outro tipo de restrição

de precedência impõe que, se clientes de diferentes tipos são servidos em uma mesma rota, a ordem em que os clientes são visitados é fixa.

Diversos objetivos podem ser considerados para problemas de roteamento de veículos. Objetivos típicos são:

- Minimização do custo global de transporte, dependendo da distância global percorrida (ou do tempo global gasto) e dos custos fixos associados ao uso dos veículos (e dos correspondentes motoristas);
- Minimização do número de veículos (ou motoristas) requeridos para servir todos os clientes;
- Balanceamento de rotas considerando tempo de viagem e carga dos veículos;
- Minimização das penalidades associadas ao atendimento parcial de clientes;
- Qualquer combinação ponderada dos objetivos citados acima.

Mais de 40 anos se passaram desde que Dantzig e Ramser[25] introduziram o VRP. Em seu artigo, os autores descreveram uma aplicação real (consistindo da entrega de gasolina a postos de gasolina) e propuseram a primeira formulação por programação matemática e uma solução algorítmica para o problema. Alguns anos depois, Clarke e Wright[23] propuseram uma efetiva heurística gulosa que melhorou a abordagem de Dantzig-Ramser. Seguindo esses dois artigos seminais, muitos modelos e algoritmos exatos e heurísticos foram propostos para tentar encontrar soluções ótimas e aproximadas para os diversos tipos de VRP existentes.

1.2

O Problema de Roteamento de Veículos com Capacidades

Essa dissertação se concentra na versão básica do VRP, o Problema de Roteamento de Veículos com Capacidades (*CVRP*, do inglês *Capacitated Vehicle Routing Problem*). No CVRP, todos os clientes são do mesmo tipo e as demandas são determinísticas, conhecidas a priori e indivisíveis. Os veículos são idênticos e localizados em um único depósito, e apenas restrições de capacidade para os veículos são impostas. O objetivo é minimizar o custo total para servir todos os clientes.

O CVRP pode ser descrito como o seguinte problema em grafos. A notação apresentada aqui será utilizada ao longo de toda a dissertação. Seja $G = (V, E)$ um grafo completo não-direcionado, onde $V = 0, \dots, n$ é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. Os vértices $i = 1, \dots, n$ correspondem aos clientes, enquanto o vértice 0 corresponde ao depósito. O conjunto de clientes pode ser representado por V_+ ou por $V \setminus \{0\}$.

Um custo não-negativo c_{ij} é associado à aresta $(i, j) \in E$ e representa o gasto de viajar do vértice i para o vértice j (alternativamente, pode-se representar o custo por c_e quando representamos uma aresta por $e \in E$). O uso de loops, (i, i) , não é permitido e isso é imposto fazendo $c_{ii} = +\infty$ para todo $i \in V$. Existe uma variante do CVRP em que o grafo G é direcionado, que é chamado CVRP assimétrico (*ACVRP*, do inglês *Assymmetric Capacitated Vehicle Routing Problem*). Porém aqui o interesse é na versão não-direcionada descrita anteriormente.

O grafo G considerado no CVRP é assumido ser completo (caso não seja, pode ser tornado completo adicionando-se arestas de custo infinito). Dado um conjunto $S \subseteq V$, $\delta(S)$ denota o conjunto de arestas $e \in E$ que possuem exatamente um extremo dentro do conjunto S . Já $E(S)$ denota o conjunto de arestas $e \in E$ que possuem ambos extremos em S .

Cada cliente $i (i = 1, \dots, n)$ é associado a uma demanda não-negativa d_i , a ser entregue, e o depósito possui uma demanda fictícia $d_0 = 0$. Dado um conjunto $S \subseteq V$, $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$ denota a demanda total do conjunto.

Um conjunto de K veículos idênticos, cada um com capacidade C , está disponível no depósito. Para que o problema seja viável, assume-se que $d_i \leq C$ para cada $i = 1, \dots, n$. Cada veículo pode participar de no máximo uma rota, e é assumido que K não é menor que K_{min} , onde K_{min} é o número mínimo de veículos necessários para servir todos os clientes. O valor de K_{min} pode ser determinado resolvendo um problema de empacotamento em bins (*BPP*, do inglês *bin Packing Problem*) associado ao CVRP, que consiste em determinar o número mínimo de *bins*, cada um com capacidade C , necessário para carregar todos os n itens (clientes), cada um com peso d_i , $i = 1, \dots, n$. Apesar do BPP ser NP-difícil, instâncias com centenas de itens podem ser resolvidas à otimalidade de forma efetiva[55].

Dado um conjunto $S \subseteq V \setminus \{0\}$, denota-se por $r(S)$ o número mínimo de veículos necessários para servir todos os clientes em S , ou seja, a solução ótima do BPP associado ao conjunto de itens S . Note que $r(V \setminus \{0\}) = K_{min}$.

O CVRP consiste em encontrar uma coleção de exatamente K rotas (cada uma correspondendo a uma rota de um veículo) com custo mínimo, definido pela soma dos custos de cada aresta pertencente às rotas, e tais que

- cada rota começa e termina no depósito;
- cada vértice de cliente é visitado por exatamente uma rota;
- a soma das demandas dos vértices visitados em uma rota não excede a capacidade C do veículo.

Existem algumas variações para o CVRP na literatura. Um caso, por exemplo, é quando o número de veículos K disponíveis é maior que K_{min} , sendo possível deixar que alguns veículos não sejam usados. Pode-se adicionar à função objetivo a minimização do número de veículos a serem usados (rotas). Aqui o interesse é na variante do CVRP em que o número de veículos disponíveis é igual ao número de rotas que devem ser determinadas e é informado a priori.

O CVRP é uma generalização do Problema do Caixeiro Viajante (*TSP*, do inglês *Traveling Salesman Problem*), que consiste em determinar um circuito de custo mínimo visitando todos os vértices de G (circuito Hamiltoniano). O TSP é equivalente ao CVRP com $K = 1$ e $C \geq d(V)$. O TSP é um problema NP-difícil e, portanto, o CVRP também é. O CVRP foi proposto por Dantzig e Ramsey em 1959 [25].

A figura 1.1 mostra a solução ótima para uma instância do CVRP. A instância representada possui $C = 10$ e $K = 3$. O vértice 0 representa o depósito e os demais representam os clientes. Os clientes são numerados de 1 a 12 e possuem demandas de, respectivamente, 4, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 1. O custo das arestas é representado pela distância Euclidiana entre os vértices e o grafo é completo. A solução é composta de 3 rotas: (0,1,2,4,3,0), (0,5,8,7,6,0) e (0,9,10,11,12,0).

1.3

Algoritmos exatos para o CVRP

Diversas heurísticas e algoritmos exatos já foram propostos para o CVRP. Nesse trabalho, tem-se interesse em algoritmos exatos.

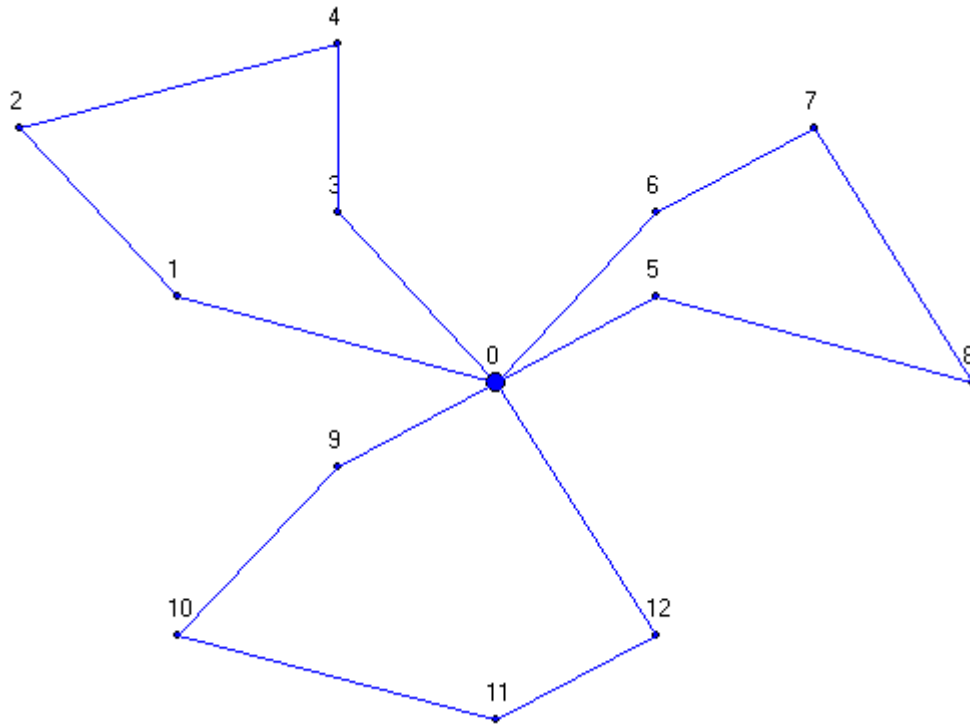


Figura 1.1: Solução para uma instância do CVRP.

Em 1981, Christofides, Mingozzi e Toth [21] propuseram um algoritmo que usava um limite lagrangeano, obtido através da solução do problema das q -rotas mínimas. Uma q -rota começa no depósito, passa por uma seqüência de clientes limitando a demanda acumulada a no máximo C e retorna ao depósito. Não é necessariamente um caminho simples, já que os clientes podem ser visitados mais de uma vez e a cada vez sua demanda é contabilizada. No entanto, o conjunto das rotas válidas para o CVRP está, claramente, contido no conjunto das q -rotas. O capítulo 3 apresenta uma definição mais detalhada do conceito de q -rota. O algoritmo de *branch-and-bound* resultante foi capaz de resolver instâncias de até 25 vértices, um tamanho respeitável para a época.

Diversos algoritmos de *branch-and-bound* utilizando limites inferiores Lagrangeanos ou outros limites diversos foram propostos ao longo dos anos 80 e continuam a ser propostos até os dias atuais. Para maiores informações sobre esses algoritmos e alguns resultados comparativos, é recomendada a leitura de [66].

Desde o início dos anos 90, o maior esforço de pesquisa no CVRP está concentrado na descrição poliedral do envoltório convexo dos vetores de incidência das arestas correspondentes a K rotas viáveis e no desenvolvi-

mento de algoritmos de separação efetivos para as famílias de desigualdades válidas identificadas (por exemplo, [5, 18, 20, 8, 1, 3, 59, 45]). Em particular, Araque et al. [6], Augerat et al. [1], Blasum e Hochstattler [9], Ralphs et al. [63], Achutan, Caccetta e Hill [4] e Lysgaard, Letchford e Eglese [46] descrevem algoritmos completos de *branch-and-cut*, alguns incluindo desigualdades sofisticadas como *framed capacity*, *strengthened combs*, *multi-stars*, etc. (A nomenclatura das desigualdades válidas para o CVRP não é uniforme na literatura. Segue-se [46] aqui.).

Apesar desses terem sido os melhores algoritmos exatos para o CVRP durante muito tempo, os limites inferiores obtidos no nó raiz, mesmo depois de adicionar todos esses cortes, não são muito bons para a maioria das instâncias (mesmo para instâncias pequenas). A qualidade desses limites inferiores é especialmente problemática para valores maiores de K (número de veículos), como $K \geq 7$. Muitos nós na árvore de *branch-and-cut* têm que ser explorados para fechar os *gaps* duais resultantes. Mesmo utilizando de grande poder computacional (cerca de 80 processadores em paralelo em um trabalho recente de Ralphs [63, 65]), muitas instâncias com menos de 80 vértices não puderam ser resolvidas à otimalidade, incluindo algumas propostas há mais de 30 anos por Christofides e Eilon [19].

Nesse trabalho, apresenta-se um novo algoritmo exato para o CVRP. A idéia principal é combinar a abordagem utilizando *branch-and-cut* com a antiga abordagem que utiliza as q -rotas (que são interpretadas como uma geração de colunas e não como uma relaxação Lagrangeana) para obter limites inferiores melhores. Com isso tem-se uma formulação para o CVRP que possui um número exponencial de colunas e linhas. Isso leva a um algoritmo de geração de cortes e colunas, usualmente referido em inglês como *branch-and-cut-and-price* (BCP). Experimentos computacionais com as principais instâncias da literatura mostram que esse algoritmo pôde resolver todas as instâncias da literatura com até 135 vértices. Isso dobra o tamanho das instâncias que podem ser resolvidas de maneira consistente. Dezoito instâncias em aberto foram resolvidas pela primeira vez.

1.4

Estrutura da dissertação

Essa dissertação apresenta-se estruturada da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta algumas formulações para o CVRP, utilizando pro-

gramação linear inteira, importantes no estudo do problema e no contexto desse trabalho. O capítulo 3 mostra alguns algoritmos já desenvolvidos para o CVRP e que foram importantes de forma direta ou indireta no desenvolvimento do algoritmo de BCP. O capítulo 4 define o que são algoritmos de *branch-and-cut-and-price robustos*, apresenta a técnica que permite obter formulações que se utilizam dessa técnica, e apresenta a formulação para o CVRP que permite a construção de um algoritmo de *branch-and-cut-and-price* robusto para o CVRP. O capítulo 5 fala sobre o algoritmo de *branch-and-cut-and-price* implementado, apresentando em detalhes cada uma das partes do mesmo. O capítulo 6 apresenta os resultados obtidos pelo algoritmo implementado, comparando-os aos obtidos por outros algoritmos exatos. Finalmente, o capítulo 7 apresenta uma conclusão e fala sobre possíveis trabalhos futuros.