

Thomaz Magalhães Hadba

Avaliação de modelos de volatilidade condicional no contexto de razão
ótima de hedge

PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
APRESENTADO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DA PUC-RIO, COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO

Orientadora: Frances Fischberg Blank

Departamento de Engenharia Industrial
Rio de Janeiro, 17 de novembro de 2023.

Agradecimentos

Optei por explorar um tema que me traria muito aprendizado e bagagem para minha carreira profissional. Cada passo foi marcado por uma busca incessante por conhecimento e superação de obstáculos. Ao longo de toda essa trajetória, contei com o apoio e contribuições fundamentais de diversas pessoas, e gostaríamos de expressar uma profunda gratidão.

Queria agradecer especialmente à minha orientadora Frances Blank por sua dedicada orientação, apoio incondicional e valiosas contribuições que foram essenciais para o desenvolvimento do trabalho. Sua motivação e experiência tornaram a execução desse trabalho bem menos árduo. Tenho certeza que sem sua orientação, este trabalho não teria sido possível.

Sumário

1. Introdução.....	5
2. Referencial Teórico.....	7
3. Metodologia.....	12
a. Análise de ajuste de modelos.....	12
b. Modelos de volatilidade condicional.....	14
c. Hedge.....	21
4. Resultados.....	24
a. Base de Dados.....	25
b. Modelo estático.....	26
c. Modelo condicional.....	27
d. Resultados do Hedge.....	38
5. Conclusão.....	41
6. Bibliografia.....	43

Lista de Figuras

Figura 1 - Retornos do S&P 500

Figura 2 - Retornos do VIX Index

Figura 3 - FAC do ARMA(3,2) aplicado nos retornos do S&P 500

Figura 4 - FAC do ARMA(1,1) aplicado nos retornos do VIX Index

Figura 5 - Coeficientes do ARMA(3,2) aplicado no S&P500

Figura 6 - FAC do ARMA(3,2) aplicado nos retornos do S&P 500

Figura 7 - Coeficientes do ARMA(1,1) aplicado no VIX Index

Figura 8 - FAC do ARMA(1,1) aplicado nos retornos do VIX Index

Figura 9 - FAC² do ARMA(3,2) aplicado nos retornos do S&P 500

Figura 10 - FAC² do ARMA(1,1) aplicado nos retornos do VIX Index

Figura 11 - Coeficientes GARCH(1,1) sob o S&P500

Figura 12 - Coeficientes GARCH(1,1) sob o VIX Index

Figura 13 - Parâmetros do BEKK Diagonal

Figura 14 - Retornos cumulativos das quatro carteiras

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Artigos sobre hedge dinâmico

Tabela 2 - Valores do AIC e BIC para o ARMA aplicado sobre os retornos do S&P 500

Tabela 3 - Métricas de performance das quatro carteiras in sample

Tabela 4 - Métricas de performance das quatro carteiras out of sample

1. Introdução

O conceito de diversificação de investimentos nasce a partir do trabalho de Markowitz (1952), origem da Teoria Moderna de Carteira. Trata-se de uma estratégia que envolve a alocação de recursos buscando reduzir o risco de perdas significativas ao distribuir o dinheiro em diferentes classes de ativos, como ações, títulos, imóveis, commodities e outros tipos de investimentos. Assim, se a performance de um investimento for ruim, outros podem se sair bem o suficiente para compensar as perdas, reduzindo o risco global da carteira. Neste sentido, a combinação de ativos que tenham uma baixa correlação entre si traz potencial redução de risco, conceituado pelo desvio-padrão, para um dado nível de retorno esperado.

A busca por alternativas de minimização de risco de exposição a variações adversas de mercado é uma constante na vida dos investidores. Nesse contexto, a estratégia de *hedge*, que pode ser traduzido de forma simples como “proteção”, também busca o gerenciamento do risco de uma determinada posição financeira. De acordo com Bueno (1999), o hedge envolve uma transação de determinado objeto, segundo um horizonte de tempo, com o objetivo de proteção contra variações indesejadas da riqueza do investidor. Neste sentido, a razão ótima de hedge (*hedge ratio*) é a relação entre o tamanho da posição assumida no derivativo escolhido e o tamanho da exposição. De forma eficiente, ela é determinada buscando minimizar a variação do valor da posição coberta e, portanto, obtida a partir de estimativas da volatilidade do ativo subjacente e do derivativo utilizado (Hull, 2021).

A estimativa da volatilidade desempenha um papel fundamental na modelagem financeira. Entre outras aplicações, a sua modelagem pode ser utilizada para calcular o valor em risco de uma posição financeira na gestão de risco, para determinar a alocação de ativos em carteiras sob abordagem de média-variância, ou mesmo propiciar o desenvolvimento de instrumentos financeiros, como o VIX, índice de volatilidade de mercado que começou a ser negociado na *Chicago Board of Option Exchange* (CBOE) em 2004 (Tsay, 2016).

Alguns modelos de precificação de ativos mais populares, como o Black-Scholes-Merton, por exemplo, partem do pressuposto de que a volatilidade do ativo subjacente é constante. No entanto, essa suposição está muito longe da realidade. A volatilidade de um ativo, assim como o seu preço, varia no tempo, mas ao contrário do preço do ativo, a volatilidade não é diretamente observável. Ela pode ser estimada a partir de modelos de volatilidade condicional, nascidos a

partir dos trabalhos de Engle (1982) e Bollerslev (1986), e outras variações, como modelos de volatilidade estocástica.

Ao longo dos últimos anos, diversos estudos analisaram o desempenho do hedge dinâmico baseado em diferentes combinações de ativos e derivativos e em diferentes formas de modelar a volatilidade ao longo do tempo (Bueno, 1999; Hilal et al. ,2011; Basher e Sadorsky, 2016; Kumar e Bose, 2019). Os estudos conseguiram mostrar a efetividade do hedge em relação a carteira de mercado não hedgeada. Certos modelos de estimação de volatilidade performaram melhor que outros dependendo da classe de ativo e do horizonte de tempo, mas, no geral, os modelos de volatilidade condicional performaram melhor que os modelos com volatilidade estática.

O objetivo principal deste estudo é avaliar a performance do hedge realizado a partir da composição de uma carteira teórica, investida no maior índice de ações americanas, o S&P 500, combinada com outro indicador inversamente correlacionado com o mercado, nesse caso o índice VIX. Como objetivo secundário do trabalho, é realizada a modelagem da volatilidade condicional dos ativos usando modelos univariados e bivariados para construção de uma estratégia de hedge dinâmica. Os dados utilizados são diários, entre o período de 30/09/2013 - a 28/09/2023. A performance da carteira é comparada com a performance do índice, e também iremos avaliar métricas como o Valor de Hedge Relativo (RVH)

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Após esta introdução, o capítulo 2 apresenta o referencial teórico com uma análise dos principais artigos pesquisados. O capítulo 3 apresenta a metodologia, com os modelos de volatilidade condicional e as informações sobre a construção do hedge. O capítulo 4 traz o estudo realizado e a análise dos dados. Finalmente, o capítulo 5 apresenta as principais conclusões.

Resumo

Este estudo visa explorar a eficácia de modelos de volatilidade condicional na estimativa de razões ótimas de hedge em um portfólio alocado no índice de ações das 500 maiores empresas do mercado americano (S&P500).

A metodologia empregada se baseia em modelos de volatilidade condicional, buscando identificar as razões ótimas de hedge que maximizam a eficiência do portfólio. Os resultados obtidos fornecem insights para investidores e gestores de portfólio, destacando a efetividade desses modelos na mitigação de riscos.

O estudo contém uma análise qualitativa fundamentada em dados históricos de um período abrangente de 10 anos para avaliar a performance dos modelos.

Palavras-chave: Hedge, Portfólio, Índice

Abstract

This study aims to explore the effectiveness of conditional volatility models in estimating optimal hedge ratios in a portfolio allocated to the index of the 500 largest companies in the American market (S&P500).

The methodology employed relies on conditional volatility models, seeking to identify optimal hedge ratios that maximize portfolio efficiency. The obtained results provide insights for investors and portfolio managers, highlighting the effectiveness of these models in risk mitigation.

The study includes a qualitative analysis grounded in historical data spanning a comprehensive 10-year period to assess the performance of the models.

Keywords: Hedge, Portfolio, Index

2. Referencial Teórico

Hedge, no contexto financeiro, refere-se a uma estratégia que visa proteger um investidor contra flutuações indesejadas nos preços de ativos financeiros. De acordo com Bueno (1999), o hedge envolve uma transação de determinado objeto, segundo um horizonte de tempo, com o objetivo de proteção contra variações indesejadas da riqueza do investidor.

O objetivo do hedge é minimizar ou eliminar o impacto dessas variações nos resultados financeiros. Existem diversas técnicas e instrumentos disponíveis para realizar operações de hedge, envolvendo o uso de derivativos como contratos futuros e opções, além da combinação de ativos que não são perfeitamente correlacionados, que é o caso desse estudo.

A razão de hedge, que representa a posição a ser montada em um ativo (que normalmente é um derivativo) para compensar possíveis perdas na posição original de outro ativo, é estimada com base em informação sobre as volatilidades de ambos os ativos e a correlação entre eles.

Por isso, é fundamental compreender os modelos de volatilidade usados na avaliação dos ativos financeiros e de carteiras. Apesar de não ser diretamente observável, a volatilidade apresenta características notadamente presentes em retornos de ativos. A existência de clusters, o desenvolvimento temporal de forma contínua e sua variação limitada em determinado intervalo pressupõem que séries de volatilidade podem ser tratadas como estacionárias (Tsay, 2016). Os modelos de volatilidade condicional, como o GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) e suas variantes, estimam a volatilidade com base em observações passadas de volatilidade de retornos de um ativo. Em contraste, os modelos de volatilidade incondicional assumem que a volatilidade é constante e não depende do tempo.

Em muitos modelos, é comum considerar a volatilidade como uma constante, calculada pela observação do desvio padrão de um ativo durante um certo período de tempo. A característica distintiva dos modelos GARCH é que eles reconhecem que a volatilidade dos retornos de um ativo varia no tempo. Durante alguns períodos, a volatilidade de um determinado ativo e sua covariância com outros ativos podem ser relativamente baixas, enquanto em outros períodos podem ser relativamente altas. Esse modelo acompanha as variações na volatilidade ao longo do tempo.

Inúmeros estudos sobre desempenho de hedge já foram realizados comparando a efetividade de modelos que consideram volatilidade condicional contra incondicional. Um levantamento feito por Kumar e Bose (2019) concluiu que um modelo GARCH multivariado dinâmico supera outros modelos estáticos e melhora a eficácia do hedge. Buyukkara et al (2022) concluem, a partir da análise de diversos estudos, que diferentes modelos GARCH que permitem o cálculo de volatilidades condicionais geralmente performam melhor do que os casos em que a volatilidade é tratada de forma constante estimada a partir de mínimos quadrados ordinários.

A razão de hedge desempenha um papel fundamental em estratégias de gerenciamento de risco, e a evolução da estimativa de volatilidade de incondicional para condicional trouxe melhorias significativas na precisão das previsões de volatilidade. Resultados de pesquisas mostram que estratégias de hedge com base em razões de hedge estimadas a partir de modelos de volatilidade condicional podem ser eficazes na redução de riscos em carteiras financeiras.

Existem vários estudos análogos que avaliam a efetividade de um hedge utilizando a modelagem condicional de volatilidade. Todos esses estudos abaixo fizeram o uso de backtest, ou seja, avaliação dos modelos propostos a partir de dados históricos.

A tabela 1 apresenta algumas informações sobre os principais estudos pesquisados ao longo deste trabalho, que também avaliam a performance de hedge baseado em estimativa de volatilidade a partir de modelos condicionais. Os artigos se diferenciam pelos ativos utilizados para construção da carteira (incluindo ativos e derivativos), bem como na técnica utilizada para descrever a evolução da volatilidade das séries de retornos e da covariância entre os ativos.

Autor	Ano	Ativo	Modelo	Resultado
Bueno	1999	Ibovespa, Dólar	GARCH	Técnica de Hedge com volatilidade condicional teve melhor performance em relação a estática
Hilal et al.	2011	S&P500, VIX Index	GARCH	Carteira conseguiu mitigar riscos de cauda
Basher e Sadorsky	2016	VIX Index, Ouro	GARCH	GARCH multivariado foi mais efetivo no hedge de uma carteira EM com o VIX e ouro
Lai	2019	S&P500, DAX30, KOSPI200 (futuro e à vista)	GARCH mutivariados	O autor analisa a efetividade de hedge usando diferentes modelos GARCH multivariados e identifica o melhor deles para os dados analisados
Buyukkara et al	2022	Futuros de Moeda Turca	OLS e GARCH	Ambos os modelos foram efetivos na redução da volatilidade da carteira sem comprometer os retornos
Ali et al.	2022	S&P500, FSTE, VIX Index, Oil	GARCH	Carteira teve uma performance de

				hedge melhor utilizando o VIX
--	--	--	--	-------------------------------

Bueno (1999) comparou inúmeros tipos de modelos GARCH utilizando o Ibovespa e contratos de dólar como hedge. Foi observado que os modelos mais sofisticados de GARCH (como os multivariados) de fato diminuiram mais a exposição a risco em relação aos univariados. O autor também destacou a dificuldade operacional de utilizar os modelos multivariados. Considerando o uso de derivativos na construção do hedge, porém no caso de índices à vista e futuro de índice das bolsas americana, alemã e coreana.

Hilal et al. (2011) fizeram um estudo para avaliar a mitigação de efeitos de cauda ao hedgear uma carteira alocada no S&P500 e fazendo hedge com o VIX. Dois modelos GARCH foram comparados com a carteira não hedgeada, e ambos tiveram uma melhor performance que o portfólio não hedgeado.

Basher e Sadorsky (2016) fizeram um estudo comparando a efetividade de modelos de correlação constante e dinâmica e modelos de GARCH multivariado na determinação do hedge de uma carteira de mercados emergentes com petróleo, VIX e ouro. Eles concluíram que a razão de hedge varia significativamente com o decorrer do tempo, e que, embora todos os modelos tenham conseguido ser efetivos, alguns modelos foram melhores que outros para certos ativos.

Lai (2019) avalia a efetividade do hedge comparando diferentes modelos GARCH multivariados, dentre eles o BEKK (Babba-Engle-Kraft-Kroner), DCC (Dynamic Conditional Correlation) e o GARCH ortogonal generalizado.

Buyukkara et al. (2022) compararam a efetividade de inúmeros ativos como petróleo, ouro e futuros de moeda como hedge de uma carteira de mercado. O estudo constata que a efetividade de hedge varia de acordo com o tempo. Por exemplo, o ouro durante a pandemia foi pouco efetivo como um hedge para a carteira de mercado. O concluiu que o modelo GARCH conseguiu gerar um hedge efetivo.

Ali et al. (2022) utilizaram uma amostra de dados dos índices de mercado dos países G12 de 1994 até 2021, e utilizaram modelos GARCH multivariados para comparar a performance do hedge feito com vários instrumentos (VIX, benchmark de títulos locais, petróleo, entre outros) a fim de determinar o de melhor resultado. Concluíram que, dentre os ativos utilizados para hedge, o VIX teve o melhor desempenho.

Neste contexto, este trabalho apresenta a investigação da eficácia de estratégias de hedge com base em razões de hedge estimadas a partir de modelos de volatilidade condicional univariados e bivariados para uma carteira alocada em S&P500 e índice VIX para um período mais recente.. O problema principal a ser abordado é a gestão de riscos em carteiras de investimentos em um ambiente financeiro volátil, considerando os dados mais recentes possíveis, já após a pandemia do Coronavírus.

O VIX é um índice criado pela Chicago Board Options Exchange (CBOE) projetado para medir a volatilidade implícita no mercado de opções de ações do S&P 500. A volatilidade implícita é uma medida das expectativas dos investidores em relação à volatilidade futura do mercado.

Os movimentos do VIX são amplamente conhecidos por terem uma correlação negativa com os retornos dos índices de ações (Hilal, 2011). De acordo com Sloyer (2008), uma queda abrupta no S&P500 está frequentemente associada a um aumento acentuado no VIX. Por isso, o VIX oferece capacidades aprimoradas para diversificação de risco e proteção contra riscos de queda.

3. Metodologia

3.1 Análise de ajuste de modelos

A FAC é usada para investigar a dependência temporal ou a estrutura de correlação interna dentro de uma série de dados ao longo do tempo. Ela é definida como a covariância entre a série e suas versões passadas. A FAC observada em um lag “k” é dada por

$$FAC(k) = \frac{Cov(R_t, R_{t-k})}{Var(R_t)} \quad (1)$$

Ou seja, a FAC em um lag "k" indica o grau de correlação entre a série temporal no tempo "t" e no tempo “t- k” unidades atrás. Obtém-se, assim, um gráfico com quantos *lags* queremos observar. Nesse estudo, analisamos FACs com 20 *lags*. A ideia seria buscar valores baixos para todos os *lags* para garantir a independência dos valores e ter uma modelagem melhor.

Além da FAC, avalia-se os modelos de acordo com os critérios de AIC e BIC.

O Akaike Information Criterion (AIC) é uma abordagem para a avaliação do ajuste do modelo estatístico à realidade dos dados. Ele busca encontrar um equilíbrio entre a capacidade do modelo de descrever os dados (ajuste) e sua simplicidade (complexidade). Isso é importante porque modelos excessivamente complexos podem se ajustar perfeitamente aos dados de treinamento, mas podem não generalizar bem para novos dados. Esse fenômeno é chamado de *overfitting*.

$$AIC = -2\ln(L) + 2p \quad (2)$$

onde p = número de parâmetros do modelo e L uma função que se relaciona com quão bem o nosso modelo se ajusta aos dados observados; é uma função que descreve a probabilidade de observar os dados que temos, assumindo que um determinado modelo estatístico seja verdadeiro.

Além do AIC, utiliza-se também o BIC para avaliar a performance do modelo. São critérios parecidos, mas o BIC penaliza menos pela quantidade de fatores e introduz uma penalidade para o tamanho da amostra:

$$BIC = -2\log(L) + p \log(n) \quad (3)$$

onde n = número de dados na amostra.

3.1.1 Definição de parâmetros dos modelos

Os parâmetros ideais dos modelos serão determinados por meio da análise da Função de Autocorrelação com 20 lags. Além disso, serão calculados os critérios de Informação de Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC) para nove cenários possíveis de modelos ARMA(p,q) e GARCH(p,q), com p e q variando de 1 a 3.

3.2. Modelos de volatilidade condicional

Neste trabalho, são utilizados log-retornos diários, calculados da seguinte forma.

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (4)$$

onde P_t é o preço do ativo de interesse (S&P500 ou índice VIX). Os modelos de interesse pressupõem a modelagem da média e da variância condicional de R_t respectivamente dados como (Tsay 2016):

$$\mu_t = E[R_t | F_{t-1}] \quad (5)$$

$$\sigma_t^2 = \text{Var}[R_t | F_{t-1}] = E[(R_t - \mu_t)^2 | F_{t-1}] \quad (6)$$

onde F_{t-1} denota o conjunto de informação disponível em $t - 1$, tipicamente representado por uma função linear de retornos passados.

A média da série de retornos pode ser modelada como um modelo ARMA, amplamente utilizado para análise e previsão de séries temporais. Ele combina dois componentes principais: a parte autoregressiva (AR) e a parte de média móvel (MA). O ARMA consegue capturar bem a sazonalidade e tendências em séries temporais.

A parte auto-regressiva de um modelo ARMA representa a dependência da série temporal em relação a seus próprios valores passados. A parte de média móvel considera uma média ponderada dos erros passados, representando a influência dos erros de previsão passados sobre o valor atual da série, de modo que o modelo ARMA(p,q) combinando os dois componentes pode ser escrito como

$$R_t = \sum_{j=1}^p \phi_j R_{t-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (7)$$

onde ε_t é o resíduo, uma vez ajustado o modelo ARMA adequado. Para tanto, deve-se analisar as funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) para a ordem adequada do modelo, bem como medidas de ajuste do modelo, sendo as mais conhecidas o AIC e o BIC mencionados na seção anterior.

Após aplicar o modelo ARMA às séries, podemos fazer a avaliação da heteroscedicidade a partir do gráfico dos resíduos e dos resíduos ao quadrado, na busca também de efeito ARCH, o que caracteriza uma volatilidade condicional no tempo. Os gráficos de resíduos são uma parte fundamental da análise da série temporal, pois ajudam a validar a adequação do modelo escolhido. Pode-se realizar o teste LM Arch nos resíduos para comprovar a ausência ou existência de efeitos ARCH, que caracterizariam, neste caso, a necessidade da modelagem da evolução temporal da volatilidade.

A definição da evolução da volatilidade condicional se baseia, portanto, na volatilidade do erro ε_t , de modo que

$$\sigma_t^2 = \text{Var}[\varepsilon_t | F_{t-1}] = \text{Var}[R_t | F_{t-1}] \quad (8)$$

3.2.1. Modelos de volatilidade condicional univariados

De acordo com Bueno (1999), o aumento crescente da importância do risco e da incerteza na teoria econômica moderna implicaram o desenvolvimento de novas técnicas econômicas de séries temporais que permitem a modelagem temporal de variâncias e covariâncias. O uso dos modelos de heterocedasticidade condicional auto-regressiva permitem modelar processos nos quais a variância da série não é constante ao longo do tempo e pode ser tratada de forma condicional a informações passadas.

Engle (1982) propôs o primeiro modelo de variância condicional, o modelo ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). O modelo ARCH assume que os resíduos de um modelo ARMA seguem uma estrutura de heterocedasticidade condicional. A volatilidade condicional é modelada como uma função auto-regressiva dos erros do período anterior, sendo expressa da seguinte maneira:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (9)$$

onde σ_t^2 é a variância condicional no tempo e a_0 é um termo constante.

O modelo ARCH não consegue capturar efetivamente a persistência de choques na volatilidade. Os fenômenos do mundo real parecem ter períodos voláteis seguidos por períodos de pouca volatilidade (Tsay, 2016). O modelo GARCH estende o modelo ARCH incorporando termos de média móvel (MA) na modelagem da volatilidade condicional, sendo o GARCH(1,1) um dos mais amplamente utilizados.

Bollerslev (1986) introduziu o modelo de heterocedasticidade condicional auto-regressiva generalizada, conhecido como GARCH. Nesse modelo, a variância condicional é definida da seguinte maneira:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (10)$$

3.2.2. Modelos Multivariados

De forma mais realista, as aplicações em finanças são multivariadas, ou seja, envolvem mais de um ativo em uma carteira. Ao levantar dados destes ativos, é necessário trabalhar com a matriz de variância-covariância entre eles. A extensão da abordagem de modelos multivariados para modelos de heterocedasticidade condicional abre um novo problema, especialmente pela dificuldade de estimação por conta do número de parâmetros necessários (Guidolin e Pedio, 2018). Tsay (2016) e outros autores também usados como referência nesse trabalho (Irem et al., 2012; Guidolin e Pedia, 2018) apresentam algumas generalizações propostas na literatura para estes modelos.

3.2.2.1. Modelo Vech

O modelo GARCH univariado pode ser generalizado de forma direta pelo modelo Vech de Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988). Cada variância e covariância condicional é escrita como função de variâncias e covariâncias condicionais defasadas, bem como dos erros quadrados defasados e produtos cruzados dos erros passados. Para o caso do modelo Vech geral N -dimensional do GARCH (p,q)

$$vech(\Sigma_t) = c + \sum_{j=1}^q A_j vech(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-j}') + \sum_{j=1}^p B_j vech(\Sigma_{t-j})$$

onde $vech(\)$ é o operador que empilha as colunas da parte triangular inferior da sua matriz quadrada, Σ_t é a matriz de variância-covariância relacionando os N ativos, ε_{t-j} é o vetor de resíduos da série com defasagem j , c é um vetor $N(N+1)/2 \times 1$, e A_j e B_j São matrizes de parâmetros nas dimensões adequadas.

Para o caso de dois ativos, o operador pode ser escrito como

$$vech(\Sigma_t) = vech\left(\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{12,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix}$$

O modelo, apesar de flexível, traz algumas desvantagens por conta da necessidade de restrições a serem impostas de modo que a matriz de variância covariância Σ_t seja positiva definida, além do número de parâmetros que precisa ser estimado.

Para dois ativos, o modelo VEC-GARCH (1,1) pode ser escrito como

$$vech(\Sigma_t) = c + A vech(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}') + B vech(\Sigma_{t-1})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{12,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}$$

Mesmo para um modelo simples, o número de parâmetros é grande. Uma simplificação é o chamado modelo VEC Diagonal, em que as matrizes A e B são tidas como diagonais. Nesse caso, a variância condicional de cada série dependerá apenas do quadrado do erro do seu retorno

passado e da variância passada. A relação entre as duas séries se dá através da equação da covariância. Para dois ativos, o modelo pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 \\ \sigma_{12,t} \\ \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix}$$

de modo que as equações de variância e da covariância são

$$\begin{aligned} \sigma_{1,t}^2 &= c_{11} + a_{11} \varepsilon_{1,t-1}^2 + b_{11} \sigma_{1,t-1}^2 \\ \sigma_{12,t} &= c_{12} + a_{22} \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} + b_{22} \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{2,t}^2 &= c_{22} + a_{33} \varepsilon_{2,t-1}^2 + b_{33} \sigma_{2,t-1}^2 \end{aligned}$$

Apesar de menos parâmetros, o modelo VEC Diagonal ainda não garante uma matriz de variância- covariância positiva definida (Baur, 2006)

3.2.2.2. Modelo BEKK

Devido às limitações do VEC-GARCH e restrições que devem ser imputadas aos parâmetros para garantir a sua validade, um modelo multivariado que pode ser visto como uma extensão e que se mostrou de mais fácil utilização foi o BEKK-GARCH de Babba, Engle, Kraft e Kroner (1990). Ele também permite explicitar as covariâncias condicionais entre os ativos, reduz o número de parâmetros a serem estimados e aborda uma das dificuldades do modelo VEC, garantindo que a matriz de covariâncias é sempre positiva definida. Na sua forma geral, ele é escrito como

$$\Sigma_t = CC' + \sum_{j=1}^q A_j \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-j}' A_j' + \sum_{j=1}^p B_j \Sigma_{t-j} B_j'$$

onde A_j , B_j e C são matrizes $N \times N$ e C é uma matriz triangular. Para dois ativos, o modelo BEKK-GARCH (1,1) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Sigma_t &= CC' + A \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A' + B \Sigma_{t-1} B' \\ \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} & \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 & \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} & \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Novamente, uma simplificação é o chamado modelo BEKK Diagonal (Engel e Kroner, 1995), em que as matrizes A e B são tidas como diagonais. Nesse caso, a variância condicional de cada série também dependerá do quadrado do erro do seu retorno passado e da variância

passada, mas, nesse caso, as expressões para as variâncias e a covariância condicionais compartilham alguns parâmetros em comum. Para dois ativos, o modelo pode ser escrito como (Erten et al., 2012):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{21,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{1,t-1}^2 & \sigma_{12,t-1} \\ \sigma_{21,t-1} & \sigma_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{1,t}^2 = c_{11}^2 + a_{11}^2 \varepsilon_{1,t-1}^2 + b_{11}^2 \sigma_{1,t-1}^2$$

$$\sigma_{12,t} = c_{11} c_{21} + a_{11} a_{22} \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{1,t-2} + b_{11} b_{22} \sigma_{12,t-1}$$

$$\sigma_{2,t}^2 = c_{21}^2 + c_{22}^2 + a_{22}^2 \varepsilon_{2,t-1}^2 + b_{22}^2 \sigma_{2,t-1}^2$$

Para modelar as variâncias e a covariância condicionais neste trabalho, é utilizado o modelo BEKK Diagonal.

3.3. Hedge

Os modelos de volatilidade podem ser ajustados *in-sample* (para uma parte da série), de modo que uma outra parte, chamada de *out-of-sample*, pode ser utilizada para aplicação e análise do hedge dinâmico.

3.3.1 Taxa de Hedge

A razão ótima de hedge é uma medida que quantifica a proporção ideal de ativos de hedge necessários para proteger uma carteira de investimentos contra o risco. De modo geral, ela é dada pela razão da covariância entre o ativo de hedge e a carteira, e a variância desse ativo, sendo definida como proposta em Myers e Thompson (1989):

$$h = \frac{Cov(R_m, R_h)}{Var(R_h)} \quad (25)$$

onde R_m e R_h representam os retornos do ativo fonte e do ativo para hedge, respectivamente.

No caso em que se considera a modelagem da covariância e da variância de forma condicional, pode-se escrever a taxa de hedge como

$$h_t = \frac{Cov_{t|t-1}(R_p, R_h)}{Var_{t|t-1}(R_h)} \quad (26)$$

O retorno da carteira construída com base no hedge pode ser descrito da seguinte forma

$$R_p = (1 - h) R_m + h R_h \quad (27)$$

Neste trabalho, a taxa de hedge varia a cada dia, dado que a variância e a covariância (dependendo do modelo) variam todo dia. A fim de praticidade, a carteira é rebalanceada a cada sete dias para simular um cenário mais prático em termos de custo e de tempo.

3.3.2 Avaliação do Hedge

Para avaliar a performance do hedge, pode-se utilizar a métrica de Relative Value Hedge (RVH), como em Bueno (1999).

O RVH é calculado como a razão entre o desvio padrão da diferença entre o retorno da carteira e o retorno do hedge e o desvio padrão do retorno da carteira. Trata-se de verificar qual a redução de risco obtida em relação a um índice meta.

$$RVH = 1 - \frac{\sigma_h^2}{\sigma_p^2} \quad (28)$$

Além de verificar a eficácia do hedge dinâmico através do RVH, neste trabalho é apresentada também a comparação da performance do hedge contra o índice S&P500 e também contra um modelo com a razão de hedge estática durante o período todo.

Também será avaliada a performance do hedge calculando o índice Sharpe das carteiras. O índice Sharpe informa o retorno de uma carteira ajustada pelo risco, sendo calculado pela razão da diferença entre o retorno da carteira e a taxa livre de risco e o desvio padrão da carteira.

$$S = \frac{(R_p - R_f)}{\sigma_p} \quad (29)$$

4. Resultados

Neste capítulo, são apresentados os resultados do estudo. São comparadas 4 carteiras diferentes.

A primeira carteira representa apenas o índice do S&P500. A segunda carteira está alocada no índice de mercado, e estaticamente hedgeada comprando o índice VIX, mas sem a preocupação de tratamento da volatilidade dos ativos de forma condicional.. A terceira carteira baseia-se no hedge com o VIX de maneira condicional, pois a volatilidade de cada índice foi modelada condicionalmente em relação ao tempo. A última carteira foi semelhante à terceira, mas além da volatilidade condicional, a covariância das séries também foi modelada de forma condicional. Todas as 3 carteiras modeladas apresentam retornos diferentes porque as taxas diárias de hedge são diferentes.

Cada modelo foi construído e avaliado em relação ao desempenho da carteira e à capacidade de gerenciar o risco. Os resultados obtidos em cada modelo são discutidos no trabalho, e uma análise aprofundada das implicações desses resultados é apresentada.

Um ponto importante foi a definição da taxa livre de risco utilizada. Como a base consiste de dados de 2013 a 2023, foi considerado o rendimento da Treasury de 10 anos dos Estados Unidos como referência. Durante o período analisado o retorno do título foi de 2,22% a.a, sendo esta a taxa utilizada para as análises realizadas.

4.1 Base de Dados

Os dados utilizados neste trabalho foram obtidos do Yahoo Finance. A Figura 1 apresenta os retornos e preços diários do S&P 500 no período 30/09/2013 a 28/09/2023 e a Figura 2 apresenta as mesmas informações para o VIX

Figura 1 - Retornos do S&P 500

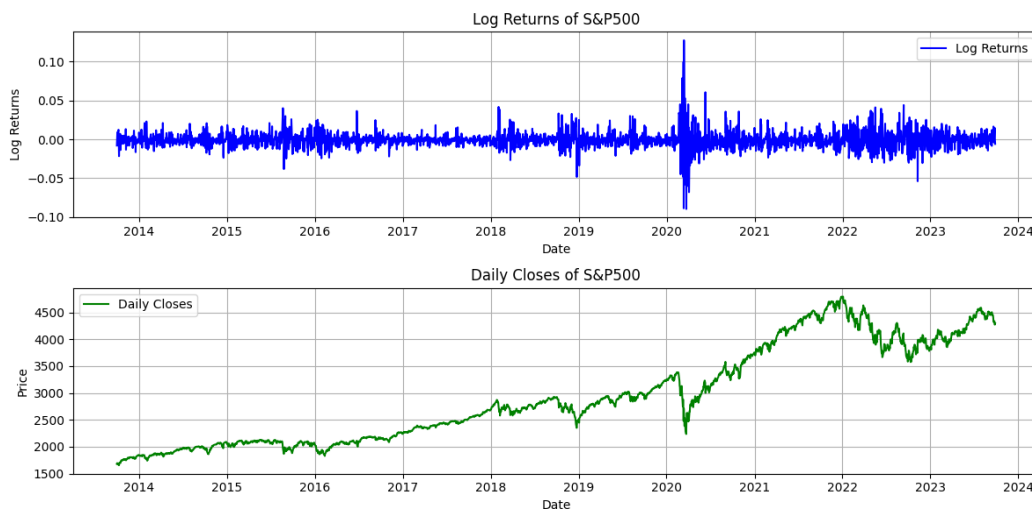
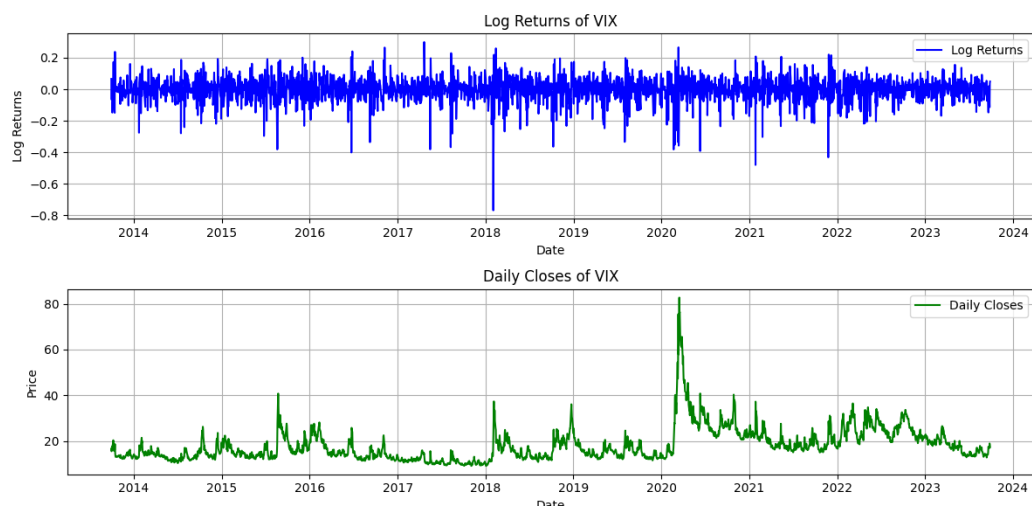


Figura 2 - Retornos do VIX Index



Conseguimos identificar, por meio das figuras, notáveis clusters de volatilidade caracterizados por períodos de intensa oscilação nos retornos do S&P 500. Esses clusters são visualmente destacados no final de 2015, no início e no final de 2018, e de maneira mais acentuada durante a precificação da pandemia em março de 2020.

É essencial compreender que esses clusters de volatilidade representam momentos críticos nos nossos modelos, pois demonstram a importância de considerar a modelagem da volatilidade condicionalmente. A capacidade de adaptar os modelos de volatilidade para capturar as variações dinâmicas nas condições de mercado se mostra especialmente valiosa durante esses períodos.

Para ajuste dos modelos, o período *in-sample* utilizado compreendeu o período de 30/09/2013 a 31/12/2022. O período de 01/01/2023 a 28/09/2023 foi utilizado para a análise *out-of-sample*, de avaliação de performance do hedge.

Para desenvolvimento da aplicação deste trabalho, foi utilizado o Python como linguagem de programação das informações acerca dos modelos univariados e do hedge e o Eviews para modelagem bivariada.

A primeira carteira considera apenas o ativo S&P500 sem a incorporação de qualquer estratégia de hedge. O principal objetivo dela era estabelecer uma linha de base para avaliar a eficácia dos modelos subsequentes. O S&P500 apresentou um retorno médio de 11,14% a.a durante o período de estudo, com uma volatilidade anualizada de aproximadamente 17,8% e índice Sharpe de 0,51.

4.2 Descrição do modelo estático

O modelo com taxa de hedge fixa considera volatilidade constante para ambos os ativos e covariância também estática entre eles observando o período inteiro.

A volatilidade anual estimada dos retornos do S&P500 foi de 17,8% e do VIX foi de 21,6%, a correlação entre eles foi de -0,73.

O segundo modelo gerou um retorno médio de 11,0% a.a durante o período de estudo, com uma volatilidade anualizada de aproximadamente 12,7% e índice Sharpe de 0,70.

4.3 Descrição dos modelos condicionais

De acordo com o descrito na seção 3.1, inicialmente, é necessário ajustar o modelo ARMA para a evolução da média dos retornos de cada uma das séries. As Figuras 3 e 4 apresentam a FAC dos retornos do S&P500 e do VIX, respectivamente, de modo que são observados valores significativos (pintados em laranja) para alguns dos lags nos dois casos. Importante notar que o lag(0) sempre terá uma autocorrelação de 100% por estar comparando um dado com ele mesmo

Figura 3 - FAC do S&P 500

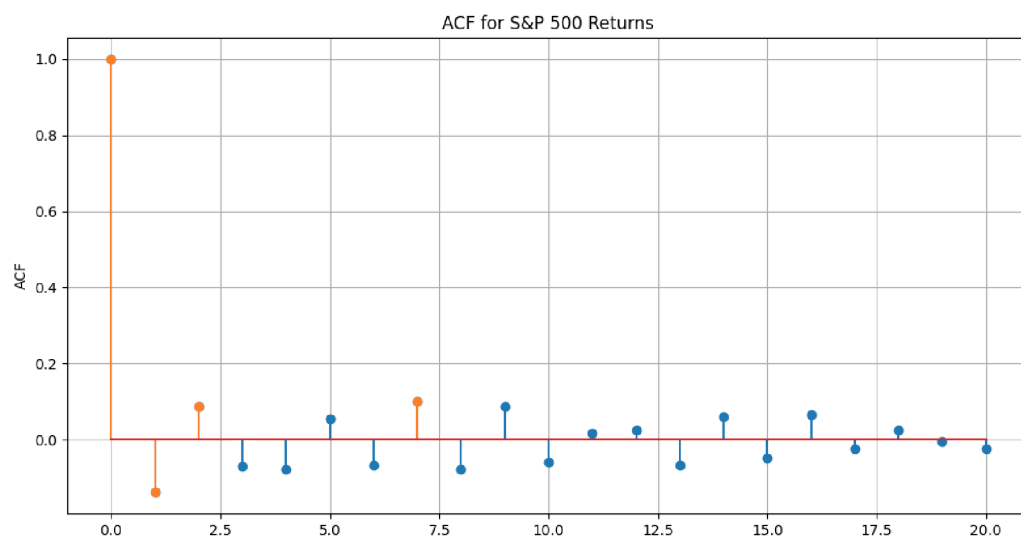
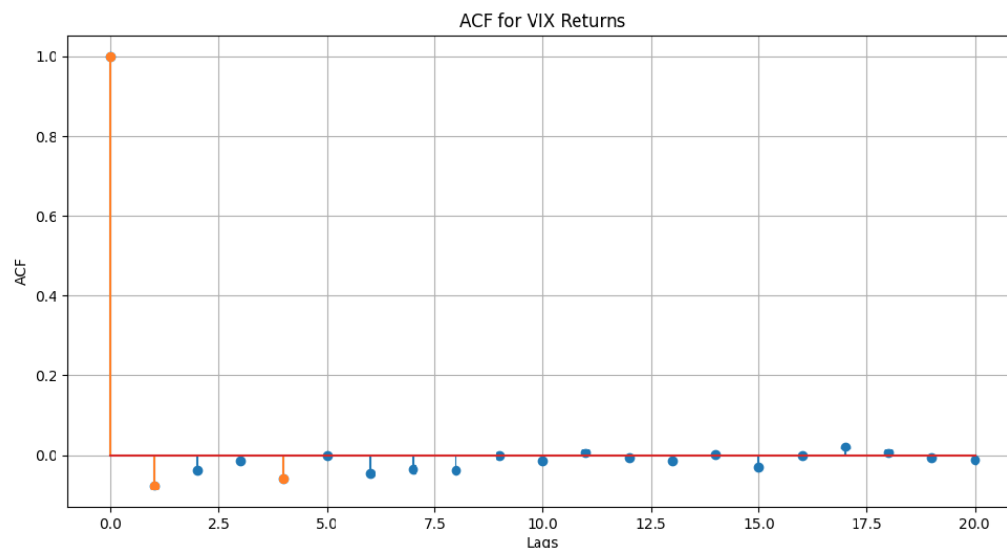


Figura 4 - FAC do Vix Index



Na avaliação dos valores de AIC e BIC para todos os modelos, avaliamos diferentes valores de “p” e “q” entre 1 e 3, nos dando um total de 9 combinações.

A Tabela 2 apresenta os valores dos critérios para a série de retornos do S&P500.

Tabela 2 - Valores do AIC e BIC para o ARMA aplicado sobre os retornos do S&P 500

ARMA(p,q)	S&P 500	
	AIC	BIC
(1,1)	-15513.74	-15490.42
(1,2)	-15514.54	-15485.39
(1,3)	-15517.71	-15482.73
(2,1)	-15517.14	-15487.99
(2,2)	-15513.11	-15478.11
(2,3)	-15514.35	-15473.54
(3,1)	-15515.19	-15480.2
(3,2)	-15561.68	-15520.85
(3,3)	-15512.93	-15465.71

Observa-se o melhor ajuste dado pelo modelo ARMA(3,2), tanto analisando em relação à FAC quanto em relação aos menores valores de AIC e BIC. A Figura 5 apresenta os parâmetros estimados para o modelo.

Figura 5 - Coeficientes do ARMA(3,2) aplicado no S&P500

SARIMAX Results						
=====						
Dep. Variable:	Log_Return	No. Observations:	2516			
Model:	ARIMA(3, 0, 2)	Log Likelihood	7787.834			
Date:	Mon, 13 Nov 2023	AIC	-15561.669			
Time:	11:37:55	BIC	-15520.856			
Sample:	0	HQIC	-15546.857			
	- 2516					
Covariance Type:	opg					
=====						
	coef	std err	z	P> z	[0.025	0.975]

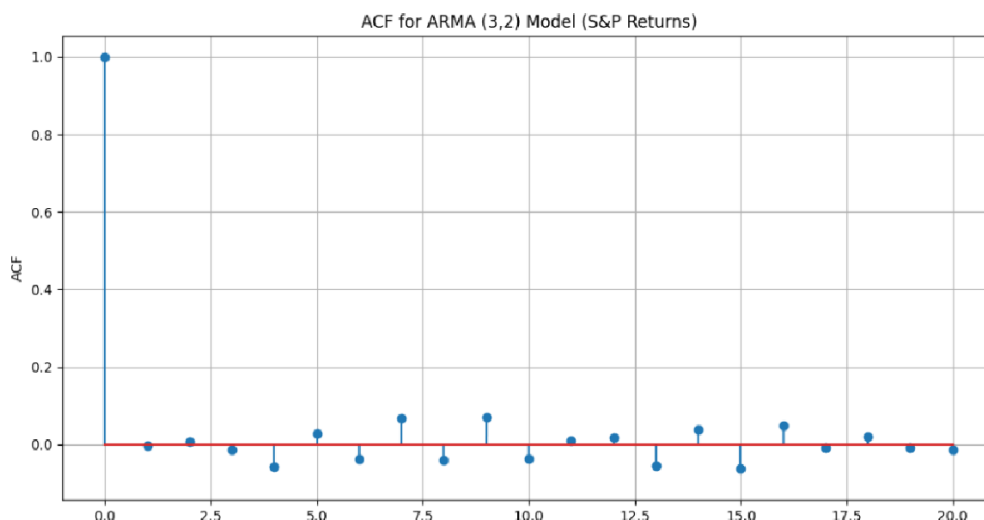
const	-0.0004	0.000	-1.722	0.085	-0.001	5.33e-05
ar.L1	-0.7434	0.096	-7.720	0.000	-0.932	-0.555
ar.L2	0.2319	0.105	2.212	0.027	0.026	0.437
ar.L3	0.1469	0.017	8.711	0.000	0.114	0.180
ma.L1	0.6268	0.100	6.289	0.000	0.431	0.822
ma.L2	-0.2653	0.097	-2.725	0.006	-0.456	-0.075
sigma2	0.0001	1.61e-06	74.325	0.000	0.000	0.000
=====						
Ljung-Box (L1) (Q):	0.27	Jarque-Bera (JB):	14123.99			
Prob(Q):	0.60	Prob(JB):	0.00			
Heteroskedasticity (H):	0.53	Skew:	0.68			
Prob(H) (two-sided):	0.00	Kurtosis:	14.53			
=====						

A equação referente ao ARMA(3,2) para o S&P500 pode ser escrita da seguinte forma

$$R_{m,t} = -0,0004 - 0,74R_{m,t-1} + 0,23R_{m,t-2} + 0,14R_{m,t-3} + 0,62\varepsilon_{m,t-1} - 0,26\varepsilon_{m,t-2} + \varepsilon_{m,t}$$

A Figura 6 apresenta a FAC dos resíduos do S&P500 após ajuste do modelo. Importante notar que no lag=0, a FAC terá valor de 100% por sempre comparar um dado com ele mesmo.

Figura 6 - FAC do ARMA(3,2) aplicado nos retornos do S&P 500



Para os retornos do VIX, foi realizada análise da mesma forma e o modelo ARMA(1,1) teve o melhor ajuste. A Figura 7 apresenta os parâmetros estimados para o modelo.

Figura 7 - Coeficientes do ARMA(1,1) aplicado no VIX Index

SARIMAX Results						
=====						
Dep. Variable:	Log_Return	No. Observations:	2516			
Model:	ARIMA(1, 0, 1)	Log Likelihood	2827.098			
Date:	Mon, 13 Nov 2023	AIC	-5646.195			
Time:	11:37:20	BIC	-5622.874			
Sample:	0	HQIC	-5637.731			
	- 2516					
Covariance Type:	opg					
=====						
	coef	std err	z	P> z	[0.025	0.975]

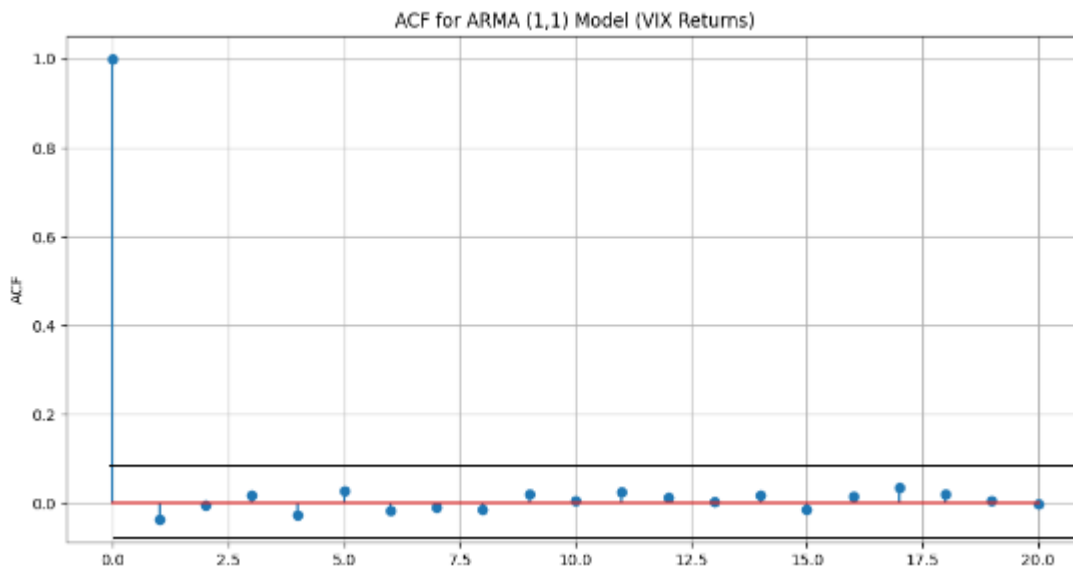
const	-3.536e-05	0.000	-0.071	0.943	-0.001	0.001
ar.L1	0.9302	0.010	90.873	0.000	0.910	0.950
ma.L1	-0.9805	0.006	-159.012	0.000	-0.993	-0.968
sigma2	0.0062	0.000	60.659	0.000	0.006	0.006
=====						
Ljung-Box (L1) (Q):		3.36	Jarque-Bera (JB):	4072.08		
Prob(Q):		0.07	Prob(JB):	0.00		
Heteroskedasticity (H):		1.15	Skew:	-0.99		
Prob(H) (two-sided):		0.04	Kurtosis:	8.91		
=====						

A equação referente ao ARMA(1,1) para o VIX pode ser escrita da seguinte forma

$$R_{h,t} = - 3,54 * 10^{-5} + 0,93R_{h,t-1} - 0,99\varepsilon_{h,t-1} + \varepsilon_{m,t}$$

A Figura 8 apresenta a FAC dos resíduos do VIX após ajuste do modelo, evidenciando que as autocorrelações foram tratadas de forma satisfatória.

Figura 8 - FAC do ARMA(1,1) aplicado nos retornos do VIX Index



Ao analisar a Função de Autocorrelação dos resíduos ao quadrado, conforme Figuras 9 e 10 para o S&P500 e o VIX, nota-se que ainda existe presença de autocorrelação na volatilidade em ambas as séries. Esta é a indicação de presença de heterocedasticidade nas séries, que precisa ser tratada a partir do ajuste de modelos de volatilidade condicional.

Figura 9 - FAC^2 do ARMA(3,2) aplicado nos retornos do S&P 500

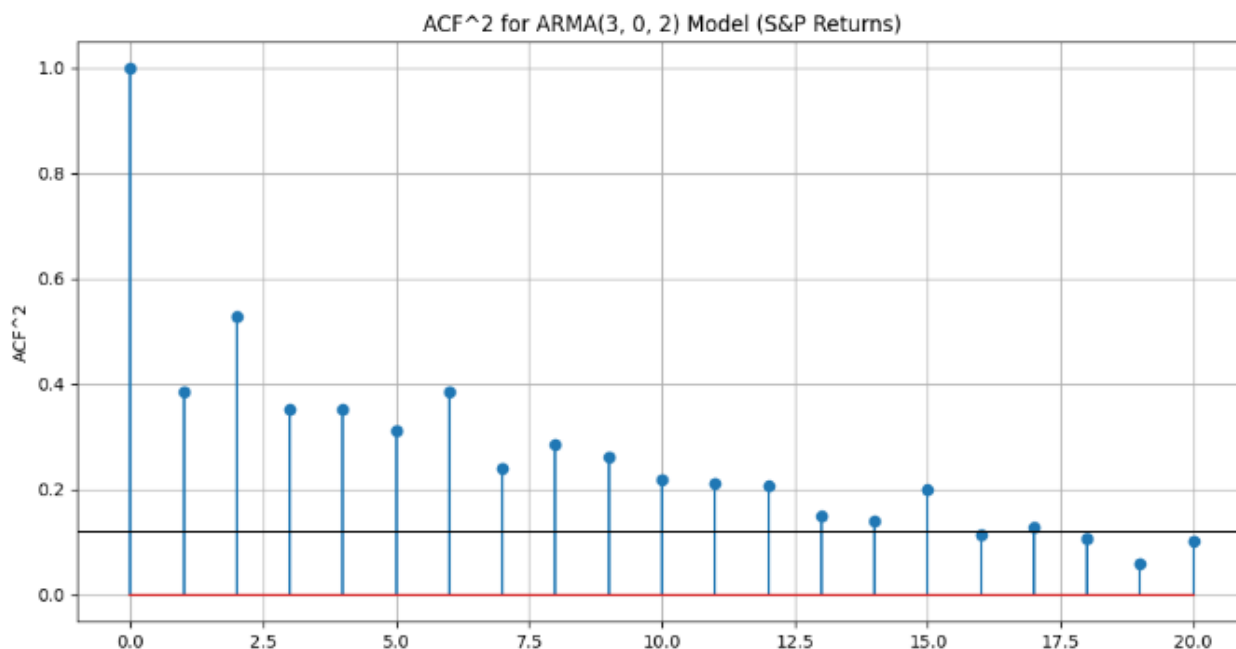
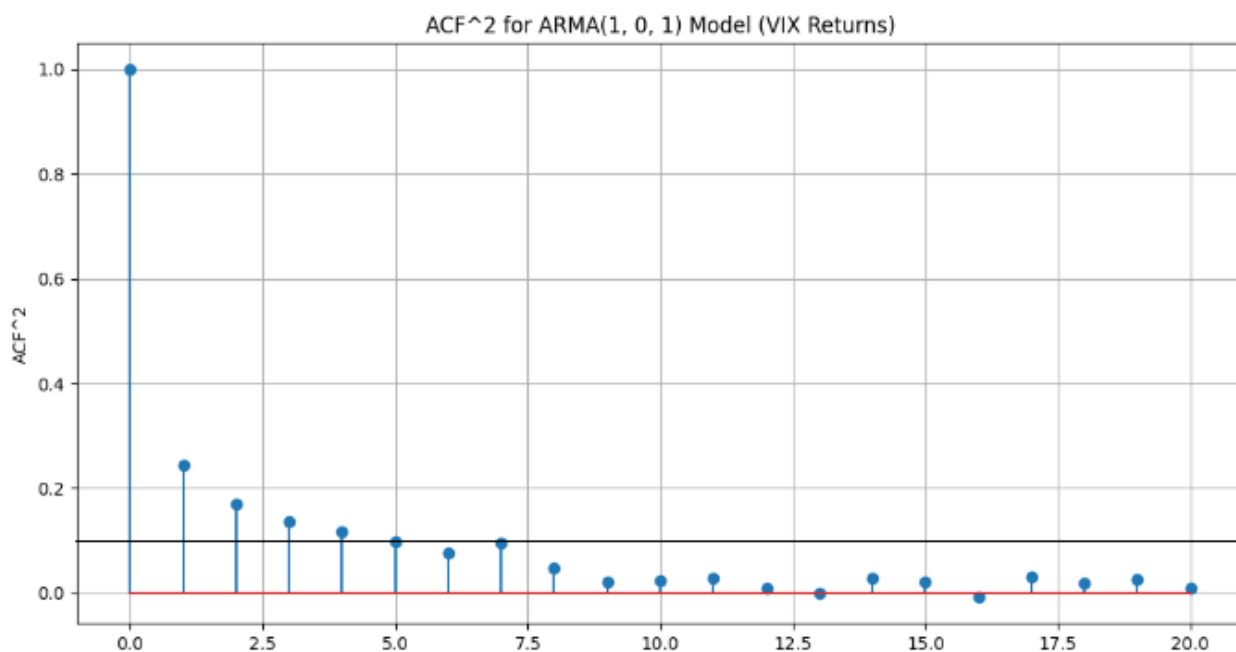


Figura 10 - FAC^2 do ARMA(1,1) aplicado nos retornos do VIX Index



A aplicação do teste LM ARCH nos resíduos de ambas as séries evidencia a presença de heteroscedicidade. Para ambas as séries a hipótese nula de ausência de efeito ARCH foi rejeitada para validar o efeito ARCH.

Constata-se, assim, a necessidade de utilizar o modelo GARCH.

4.2.1 Ajuste dos modelos GARCH Univariados

Para ajuste dos modelos GARCH de cada série, foram realizadas análises similares às realizadas para o ajuste dos modelos ARMA., Definimos os valores de “p” e “q” usando as mesmas métricas de avaliação e, para ambas as séries, optou-se pelo GARCH (1,1).

Neste caso, o teste LM ARCH aplicado após a modelagem com o GARCH teve resultados satisfatórios, com a não rejeição da hipótese nula. Assim, não foi possível provar a existência de efeitos ARCH após a modelagem.

As Figura 11 e 12 apresentam os parâmetros estimados para os modelos GARCH(1,1) para a série do S&P500 e do VIX, respectivamente.

Figura 11 - Coeficientes GARCH(1,1) sob o S&P500

Constant Mean - GARCH Model Results					
=====					
Dep. Variable:	None	R-squared:	0.000		
Mean Model:	Constant Mean	Adj. R-squared:	0.000		
Vol Model:	GARCH	Log-Likelihood:	8378.00		
Distribution:	Normal	AIC:	-16748.0		
Method:	Maximum Likelihood	BIC:	-16724.7		
		No. Observations:	2516		
Date:	Mon, Nov 13 2023	Df Residuals:	2515		
Time:	11:25:58	Df Model:	1		
Mean Model					
=====					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.

mu	-4.3045e-04	1.478e-04	-2.913	3.584e-03	[-7.201e-04, -1.408e-04]
Volatility Model					
=====					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.

omega	2.3987e-06	2.021e-13	1.187e+07	0.000	[2.399e-06, 2.399e-06]
alpha[1]	0.2000	7.850e-04	254.775	0.000	[0.198, 0.202]
beta[1]	0.7800	7.599e-03	102.647	0.000	[0.765, 0.795]
=====					
Covariance estimator: robust					

Figura 12 - Coeficientes GARCH(1,1) sob o VIX Index

Constant Mean - GARCH Model Results					
=====					
Dep. Variable:	None	R-squared:	0.000		
Mean Model:	Constant Mean	Adj. R-squared:	0.000		
Vol Model:	GARCH	Log-Likelihood:	3047.86		
Distribution:	Normal	AIC:	-6087.71		
Method:	Maximum Likelihood	BIC:	-6064.39		
		No. Observations:	2516		
Date:	Mon, Nov 13 2023	Df Residuals:	2515		
Time:	11:28:39	Df Model:	1		
Mean Model					
=====					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.

mu	-6.3691e-04	1.324e-03	-0.481	0.630	[-3.231e-03,1.958e-03]
Volatility Model					
=====					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.

omega	1.0055e-03	1.855e-04	5.420	5.947e-08	[6.419e-04,1.369e-03]
alpha[1]	0.2794	4.306e-02	6.488	8.676e-11	[0.195, 0.364]
beta[1]	0.5730	5.120e-02	11.192	4.461e-29	[0.473, 0.673]
=====					
Covariance estimator: robust					

Os modelos GARCH(1,1) estimados para o S&P500 e para o VIX podem, portanto, serem escritos da seguinte forma:

S&P 500:

$$\sigma_{m,t}^2 = 2,398 * 10^{-6} + 0,20\varepsilon_{m,t-1}^2 + 0,78\sigma_{h,t-1}^2$$

VIX Index:

$$\sigma_{h,t}^2 = 9,82 * 10^{-4} + 0,28\varepsilon_{m,t-1}^2 + 0,57\sigma_{h,t-1}^2$$

No modelo com GARCH univariado, a razão de hedge varia diariamente por causa da volatilidade modelada através do GARCH(1,1) aplicado em cada uma das séries.

Para aplicação do modelo, a correlação foi considerada estática, de modo que foi utilizado o mesmo valor da carteira de hedge estático, ou seja, uma correlação de -0.729. A covariância entre os ativos varia por conta da variação da volatilidade individual de cada um deles.

4.2.2 Ajuste do modelo GARCH Bivariado

Para estimativa do modelo GARCH bivariado, foi considerada a especificação do BEKK diagonal, como apresentado na seção 3.1.2. Os modelos para a volatilidade e a covariância dos ativos foram estimados a partir do software Eviews. Nesse caso, a covariância também é tratada de forma condicional, evoluindo ao longo do tempo.

A Figura 13 apresenta os parâmetros estimados para o modelo bivariado.

Figura 13 - Parâmetros do BEKK Diagonal

Estimation Method: ARCH Maximum Likelihood (BFGS / Marquardt steps)
 Covariance specification: Diagonal BEKK
 Date: 10/24/23 Time: 16:13
 Sample: 1 2330
 Included observations: 2330
 Total system (balanced) observations 4660
 Presample covariance: backcast (parameter =0.7)
 Convergence achieved after 26 iterations
 Coefficient covariance computed using outer product of gradients

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
Variance Equation Coefficients				
C(1)	3.08E-06	2.65E-07	11.64505	0.0000
C(2)	-3.41E-05	2.91E-06	-11.69447	0.0000
C(3)	0.000522	5.26E-05	9.925316	0.0000
C(4)	0.386609	0.011363	34.02200	0.0000
C(5)	0.292225	0.008695	33.60681	0.0000
C(6)	0.904037	0.005343	169.2059	0.0000
C(7)	0.910323	0.007077	128.6360	0.0000
Log likelihood	11710.96	Schwarz criterion	-10.02903	
Avg. log likelihood	2.513082	Hannan-Quinn criter.	-10.04002	
Akaike info criterion	-10.04632			
Transformed Variance Coefficients				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	3.08E-06	2.65E-07	11.64505	0.0000
M(1,2)	-3.41E-05	2.91E-06	-11.69447	0.0000
M(2,2)	0.000522	5.26E-05	9.925316	0.0000
A1(1,1)	0.386609	0.011363	34.02200	0.0000
A1(2,2)	0.292225	0.008695	33.60681	0.0000
B1(1,1)	0.904037	0.005343	169.2059	0.0000
B1(2,2)	0.910323	0.007077	128.6360	0.0000

As equações para as variâncias e covariância podem ser escritas da seguinte forma:

S&P 500:

$$\sigma_{m,t}^2 = 3,08 * 10^{-6} + 0,15\varepsilon_{m,t-1}^2 + 0,81\sigma_{m,t-1}^2$$

VIX Index:

$$\sigma_{h,t}^2 = 5,21 * 10^{-4} + 0,85\varepsilon_{h,t-1}^2 + 0,82\sigma_{h,t-1}^2$$

Covariância:

$$\sigma_{mh,t} = -3,41 * 10^{-5} + 0,11\varepsilon_{m(t-1)}\varepsilon_{h(t-1)} + 0,82\sigma_{mh,t-1}$$

No modelo com BEKK, sendo um GARCH bivariado, a razão de hedge varia diariamente tanto por causa da volatilidade modelada para cada ativo, como por causa da evolução dinâmica da covariância entre eles.

A Carteira gerou um retorno médio de 12,03% a.a durante o período de estudo, com uma volatilidade anualizada de aproximadamente 12.59% e índice Sharpe de 0.796.

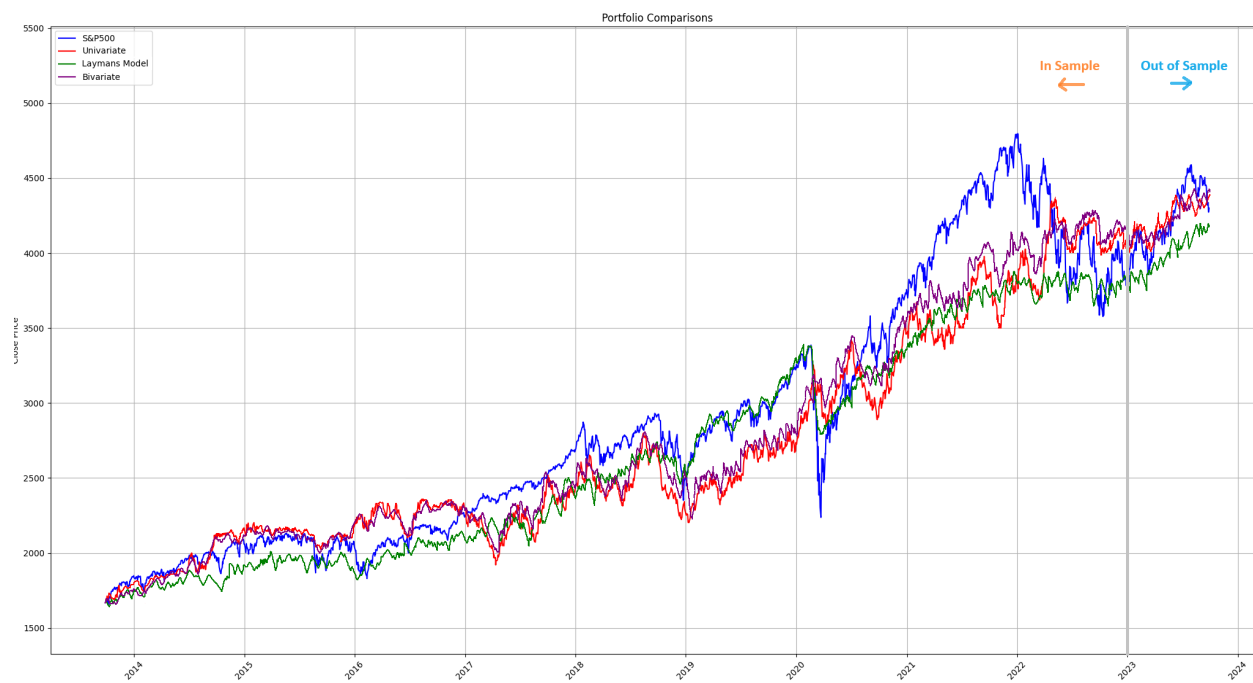
4.4 Resultados do hedge

A partir da modelagem da volatilidade e covariância dos retornos dos ativos no período in-sample, a performance do hedge da carteira foi analisada no período in-sample (01/01/2013 a 31/12/2022) e out-of-sample (01/01/2023 a 29/08/2023). Foram construídas carteiras com base nas razões de hedge apresentadas nas seções anteriores, considerando o modelo estático (em que as volatilidades são constantes, bem como a covariância), o modelo univariado (em que as volatilidades evoluem no tempo, mas a correlação é considerada constante) e o modelo bivariado (em que as volatilidades e a covariância entre os ativos são tratadas de forma condicional).

A performance dos três modelos é comparada com a evolução do S&P500, no caso em que nenhum hedge é realizado. A Figura 7 apresenta a evolução do retorno das carteiras para os quatro casos.

A linha vertical cinza nesta figura representa o corte entre os períodos in-sample e out-of-sample.

Figura 14 - Retornos cumulativos das quatro carteiras



Para as quatro séries, podem ser calculados os indicadores de performance do hedge apresentados na seção 3.2.2.. A Tabela 3 apresenta o retorno anual, o RVH e o índice Sharpe.

Tabela 3 - Métricas de performance das quatro carteiras in sample

Carteira	Retorno (a.a)	RVH	Sharpe
S&P500	11,14%	N/A	0,51
Estática	11,00%	0,705	0,70
Condicional Univariado	11,93%	0,735	0,75
Condicional Bivariado	12,03%	0,710	0,79

Tabela 4 - Métricas de performance das quatro carteiras out of sample

Carteira	Retorno (a.a)	RVH	Sharpe
S&P500	12.07%	N/A	0,73
Estática	11.03%	0,635	0,79
Condicional Univariado	8.93%	0,601	0,70
Condicional Bivariado	8.97%	0,638	0,69

Ao considerar o período inteiro, observa-se que todas as estratégias de hedge são efetivas na redução do risco da carteira de mercado. As três carteiras construídas a partir do uso de hedge tiveram retornos consideravelmente melhores para a mesma unidade de risco, conforme ilustrado pelo aumento do Índice Sharpe em relação ao S&P500 no período. Não houve um aumento tão significativo do retorno anualizado em relação à carteira de mercado.

Dentre as três carteiras que fizeram uso de hedge com o VIX, a modelagem condicional da volatilidade, embora não tenha reduzido o risco da carteira significativamente, teve uma performance de destaque em relação à carteira que considerou a volatilidade estática.

Outro ponto interessante que pode ser observado no gráfico foi quão mais robustas são as carteiras hedgeadas em relação a eventos de cauda. Graficamente, pode-se observar a performance das três carteiras contra o mercado durante a precificação da pandemia em Março de 2020. A maior perda diária do mercado da nossa base de dados foi de -8,5% no dia 23/03/2020. Em comparação, a carteira hedgeada que pior performou nesse dia foi a do modelo estático com um retorno de -4%.

No período out-of-sample, que abrangeu o ano corrente, destacam-se características específicas do mercado que influenciaram o desempenho das estratégias de hedge. Durante este período, observou-se um notável em alta, chamado bull market, no S&P500. Este cenário foi marcado por uma ausência de grandes correções, refletindo em uma baixa volatilidade no mercado.

Nesse contexto de bull market e baixa volatilidade, as estratégias de hedge não se mostraram tão efetivas em termos de retorno. O aumento consistente do S&P500 contribuiu para um ambiente em que as posições de hedge podem não ter sido tão vantajosas quanto em períodos mais voláteis.

Entretanto, vale ressaltar que, mesmo em um cenário de baixa volatilidade e em um mercado predominantemente otimista, os resultados de RVH mantiveram-se sólidos para as 3 carteiras.

O Índice Sharpe, por sua vez, pode não ter experimentado um aumento tão significativo em relação ao S&P500. Isso não foi devido a má performance das 3 carteiras, mas sim, por outro lado, pela ótima performance em termo de risco x retorno do índice no período out of sample, que ocorreu devido à dinâmica particular do mercado durante esse período.

5 Conclusão

Este estudo propôs a análise do uso de modelos de volatilidade condicional para construção de hedge dinâmico. A literatura indica melhores resultados a partir deste tratamento, de modo que para o presente trabalho foram levantados dados recentes do S&P500 e do VIX, instrumentos utilizados para a construção da carteira hedgeada.

É possível inferir que houve eficácia do hedge na redução da volatilidade da carteira de mercado. Os resultados indicam não apenas uma efetividade na mitigação do risco, mas também apontam para a superioridade da modelagem condicional da volatilidade em relação à abordagem estática.

Observou-se, ao longo deste estudo, que a implementação de estratégias de hedge se mostrou efetiva na redução da volatilidade da carteira de mercado. Embora tenhamos olhado para o período in sample, os benefícios dessas estratégias foram especialmente notáveis durante períodos de maior turbulência nos mercados, como no final de 2015, início e final de 2018, e durante a precificação da pandemia em março de 2020. Nessas fases, os modelos de hedge conseguiram proporcionar uma proteção significativa à carteira, evidenciando sua utilidade em momentos de alta volatilidade dos retornos diários do S&P 500.

Constata-se que a modelagem condicional, ao levar em consideração a variação dinâmica da volatilidade, apresentou uma performance superior em relação à volatilidade estática, embora não tenha tido uma melhoria relevante entre o modelo univariado (com a correlação estática) e o bivariado. Esse resultado destaca a importância de incorporar informações temporais na modelagem da volatilidade, permitindo uma adaptação mais precisa às condições do mercado.

É essencial ponderar as limitações do presente estudo. Custos de transação, embora cruciais na implementação prática de estratégias de hedge, não foram considerados neste trabalho. Além disso, em um cenário prático, acessar os índices via ETF também teriam custos de administração que embora sejam pequenos poderiam ser considerados. Recomenda-se que pesquisas futuras incorporem esses custos para uma avaliação mais realista da eficácia das estratégias propostas.

Um ponto relevante para aprimoramento seria a consideração do pagamento de dividendos. O impacto do ex-date de dividendos nas estratégias de hedge, especialmente nos modelos condicionais, poderia ser explorado para uma análise mais abrangente. A aplicação desses dividendos na taxa livre de risco com certeza seria um ponto relevante, ainda mais pelo fato de que os 3 modelos terão posições diferentes no S&P 500 em todos os ex dates dos dividendos.

Por fim, a utilização de uma base de dados out of sample mais extensa permitiria uma avaliação mais robusta do desempenho das estratégias em diferentes cenários de mercado, fornecendo insights valiosos para aplicações futuras.

6. Bibliografia

Ali, S., Raza, N., Vo, X. V., & Le, V. (2022). Modelling the joint dynamics of financial assets using MGARCH family models: Insights into hedging and diversification strategies. *Resources Policy*, 78, 102861.

Basher, S. A., & Sadorsky, P. (2016). Hedging emerging market stock prices with oil, gold, VIX, and bonds: A comparison between DCC, ADCC and GO-GARCH. *Energy Economics*, 54, 235-247.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.

Bollerslev, T., Engle, R. F., & Wooldridge, J. M. (1988). A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of political Economy*, 96(1), 116-131

Bueno, R. D. L. S. (1999). GARCH multivariado e taxa ótima de "Hedge" (Doctoral dissertation, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo).

Buyukkara, G., Kucukozmen, C. C., & Uysal, E. T. (2022). Optimal hedge ratios and hedging effectiveness: An analysis of the Turkish futures market. *Borsa Istanbul Review*, 22(1), 92-102.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 987-1007.

Engle, R. F., & Kroner, K. F. (1995). Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric theory*, 11(1), 122-150

Erten, I., Tuncel, M. B., & Okay, N. (2012). Volatility spillovers in emerging markets during the global financial crisis: diagonal BEKK approach

Guidolin, M., & Pedio, M. (2018). Essentials of time series for financial applications. Academic Press

Hilal, S., Poon, S. H., & Tawn, J. (2011). Hedging the black swan: Conditional heteroskedasticity and tail dependence in S&P500 and VIX. *Journal of Banking & Finance*, 35(9), 2374-2387.

Hull, J. (2021). Options, futures, and other derivative securities (12a edição). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Tsay, R. S. (2005). Analysis of financial time series. John wiley & sons.

Sloyer, M (2008). The VIX as a Fix: Equity Volatility as a Lifelong Investment Enhancer. Duke University

Sloyer, M., & Tolkin, R. (2008). The VIX as a fix: Equity volatility as a lifelong investment enhancer. Unpublished Manuscript, Duke University.

