

**Larissa Figueiredo dos Santos**

**Número esperado de dedos viscosos no  
deslocamento radial de fluidos confinados**

**Projeto de Graduação**

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Rafael Menezes de Oliveira

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2023

## Agradecimentos

A conclusão deste trabalho marca uma jornada significativa e repleta de aprendizados, e neste momento de agradecimentos, expresso minha profunda gratidão.

Primeiramente, agradeço a Deus, cuja graça e orientação foram fundamentais em cada passo desta jornada acadêmica. Sua luz iluminou meu caminho e proporcionou força nos momentos desafiadores.

À minha família, em especial aos meus pais e meu namorado Matheus, agradeço por seu amor incondicional e apoio constante. Sua presença e encorajamento foram pilares essenciais durante todo esse percurso.

Ao meu respeitável Professor Orientador Rafael, expresso minha sincera gratidão. Sua orientação perspicaz, paciência e dedicado acompanhamento foram cruciais para o desenvolvimento deste trabalho. Suas contribuições foram valiosas e enriqueceram significativamente meu aprendizado.

Não posso deixar de agradecer à Agência Nacional de Petróleo (ANP) pelo suporte concedido, possibilitando a realização deste estudo. Sua contribuição foi fundamental para a consecução dos objetivos propostos.

A todos que, de alguma forma, colaboraram para o êxito deste trabalho, meu muito obrigado. Este é um marco significativo, e cada um de vocês desempenhou um papel fundamental nessa conquista.

Que este trabalho possa contribuir de maneira positiva, e que os frutos colhidos sejam reflexo do esforço conjunto e do apoio recebido ao longo dessa jornada.

## **Resumo**

### **Número esperado de dedos viscosos no deslocamento radial de fluidos confinados**

O movimento de um fluido viscoso ao ser injetado em outro com menor viscosidade resulta na formação da instabilidade de Saffman-Taylor. Nesse fenômeno, o fluido injetado penetra no fluido circundante, formando dedos viscosos que comprometem a eficiência do deslocamento. Compreender e controlar esse mecanismo é crucial para progredir na recuperação avançada de petróleo. Para investigar o deslocamento radial de fluidos viscosos em um ambiente confinado, como uma célula de Hele-Shaw, realizamos uma análise de estabilidade linear e simulações não lineares baseadas em métodos de integrais de contorno. A análise linear prevê o modo de crescimento mais rápido, relacionado ao número esperado de dedos. Já o regime não linear desse deslocamento resulta em eventos de divisão de pontas, determinando, em última instância, o número de dedos. Dessa maneira, foram conduzidas simulações numéricas de alta resolução, variando os parâmetros adimensionais que controlam a dinâmica, como o contraste de viscosidade e a tensão superficial efetiva. Essas simulações examinaram os estágios não lineares em casos nos quais a análise linear antecipa a mesma evolução temporal para o modo de crescimento mais rápido. Os resultados das simulações não lineares diferem significativamente das expectativas lineares devido às diferentes escalas de tempo necessárias para cada caso. Além disso, os padrões interfaciais produzidos capturam detalhes morfológicos da estrutura das instabilidades viscosas.

## **Palavras-chave**

Simulações não-lineares; Dedos Viscosos; Célula Hele-Shaw.

## **Abstract**

### **Expected number of viscous fingers in radial displacement of confined fluids**

The movement of a viscous fluid when injected into another with lower viscosity results in the formation of the Saffman-Taylor instability. In this phenomenon, the injected fluid penetrates the surrounding fluid, forming viscous fingers that compromise displacement efficiency. Understanding and controlling this mechanism are crucial for enhanced oil recovery. To investigate the radial displacement of viscous fluids in a confined environment, such as a Hele-Shaw cell, we conducted a linear stability analysis and non-linear simulations based on contour integral method. The linear analysis predicts the mode of fastest growth, related to the expected number of fingers. On the other hand, the non-linear regime of this displacement results in tip-splitting events, ultimately determining the number of fingers. Thus, high-resolution numerical simulations were conducted, varying dimensionless parameters controlling the dynamics, the viscosity contrast and effective surface tension. These simulations examined non-linear stages in cases where the linear analysis predicts the same temporal evolution for the mode of fastest growth. Results of non-linear simulations differ significantly from linear expectations due to different time scales required for each case. Additionally, the interfacial patterns produced capture morphological details of the structure of viscous instabilities.

## **Keywords**

Noonlinear Simulation; Viscous Fingers; Hele-Shaw Cell.

## **Sumário**

1	Introdução	<b>7</b>
1.1	Motivação Industrial	7
1.2	Deslocamentos em Célula de Hele-Shaw	10
2	Metodologia	<b>15</b>
2.1	Análise da Estabilidade Linear	15
2.2	Simulações não-lineares	22
3	Resultados	<b>25</b>
4	Conclusão	<b>28</b>
	Referências Bibliográficas	<b>28</b>

## Lista de figuras

1.1	Indústria de Petróleo e Gás	7
1.2	Formação de instabilidades hidrodinâmicas	9
1.3	Formação de "viscous fingers" no contexto da Indústria do Petróleo e Gás	9
1.4	Experimento em Célula de Hele-Shaw	10
1.5	Deslocamento radial em um Célula de Hele-Shaw	11
1.6	Descrição esquemática de uma célula Hele-Shaw na qual um fluido menos viscoso é injetado a uma taxa $Q$ para deslocar um fluido mais viscoso.	12
2.1	Conforme apresentado por Miranda(MIRANDA; WIDOM, 1998), esta representa a evolução temporal da interface entre os fluidos, conforme prevista pela teoria linear, englobando os modos $2 \leq n \leq 20$ . As amplitudes iniciais de perturbação são definidas por $ \zeta_n(0)  = R_0/500$ , onde $R_0 = 0,05cm$ . Os parâmetros experimentais encontram-se descritos no texto, sendo que os instantes de tempo considerados são $t=10, 20$ e $30$ segundos.	21
3.1	(a) Variação inicial da taxa de crescimento em relação ao número de onda azimutal para diferentes valores do contraste de viscosidade, $A$ . Os valores da tensão superficial efetiva, $B$ , foram escolhidos de maneira a garantir que todas as curvas apresentem o mesmo evolução de $n_{max}$ , iniciando com $n_{max} = 10$ .(b) A análise linear prevê uma evolução temporal semelhante de $n_{max}$ para as combinações selecionadas de parâmetros.	25
3.2	Considerando os mesmos parâmetros da (3.1) , a imagem evidencia a sobreposição de morfologias de dedos não lineares obtidas por meio de simulações de integral de contorno em diferentes momentos temporais. (a) $A = 1$ , $B = 0,0033$ , $t = 0$ , $t = 1,5$ , $t = 60$ , $t = 80$ e $t = 100$ ; (b) $A = 0,75$ , $B = 0,0025$ , $t = 0$ , $t = 3$ , $t = 11$ , $t = 47$ , $t = 52$ e $t = 57$ ; (c) $A = 0,5$ , $B = 0,0017$ , $t = 0$ , $t = 10$ , $t = 70$ , $t = 220$ e $t = 230$ ; e (d) $A = 0,25$ , $B = 0,0008$ , $t = 0$ , $t = 10$ , $t = 100$ , $t = 200$ e $t = 300$ .	27

# 1

## Introdução

### 1.1

#### Motivação Industrial

Os recursos de petróleo e gás continuam a ser os principais contribuintes mundiais para o fornecimento de energia, mesmo com a recente geração de energia a partir de fontes renováveis. De forma que imagens como a figura (1.1) são comumente encontradas em regiões brasileiras. Dessa forma, à medida que a procura global de energia aumenta em justaposição com a diminuição dos recursos energéticos, a maximização da recuperação de petróleo de reservas torna-se crucial para satisfazer a crescente procura de energia (GBADAMOSI et al., 2019)(GORELL; HOMSY, 1983).

Os processos de recuperação de petróleo ocorrem principalmente em três etapas, a saber: estágio primário, secundário e terciário (EOR - Enhanced Oil Recovery). Após a aplicação de técnicas primárias e secundárias de recuperação de petróleo, estudos indicam que até 60% do óleo original in place (OOIP) pode permanecer após a recuperação secundária. Isto ocorre porque parte do fluido injetado pode se mover mais rapidamente através dos poros e fraturas do reservatório, deixando áreas do petróleo mais viscoso para trás (DAI; SHELLEY, 1993; SAYAVEDRA et al., 2013). Ao mesmo tempo, os métodos de Recuperação Avançada de Petróleo (EOR) estão se tornando cada vez mais econômicos, com 3% da atual produção mundial agora atribuível à EOR (SAYAVEDRA et al., 2013).



Figura 1.1: Indústria de Petróleo e Gás

Sendo assim, a recuperação avançada de petróleo desempenha um papel

importante na maximização da produção de petróleo e na recuperação de reservatórios onde a produção primária não é mais eficaz. A escolha do método de recuperação avançada depende das características do reservatório e das condições locais.

Aqui estão alguns dos principais processos industriais e técnicas envolvidos na recuperação avançada de petróleo:

1. Injeção de Água (Waterflooding): Esse é um dos métodos mais comuns de recuperação avançada de petróleo. Água é injetada no reservatório para empurrar o petróleo para os poços produtores. Isso ajuda a manter a pressão do reservatório e a deslocar o petróleo residual.
2. Injeção de Gás: Dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), nitrogênio ( $\text{N}_2$ ) ou gás natural são injetados no reservatório para melhorar a recuperação. O  $\text{CO}_2$  é frequentemente usado porque pode dissolver no petróleo, aumentando sua mobilidade. Além disso, A captura e armazenamento de carbono (CCS), também conhecido como sequestro de  $\text{CO}_2$  em formações geológicas, é um dos métodos prospectivos para mitigar as emissões de  $\text{CO}_2$  na atmosfera (CHOWDHURY et al., 2022; CINAR; RIAZ; TCHELEPI, 2009).
3. Injeção de Polímeros: Polímeros são adicionados à água injetada para aumentar sua viscosidade e melhorar a varredura do reservatório. Isso ajuda a empurrar o petróleo residual em direção aos poços produtores.
4. Injeção de Surfactantes: Surfactantes são utilizados para reduzir a tensão interfacial entre a água e o petróleo, facilitando assim a sua recuperação.
5. Recuperação Térmica: A recuperação térmica envolve o aquecimento do reservatório para diminuir a viscosidade do petróleo, tornando-o mais fácil de ser produzido. Métodos como a injeção de vapor ou aquecimento por resistência são utilizados.
6. Recuperação por Solventes: Solventes como propano ou butano são injetados para dissolver o petróleo residual e facilitar sua recuperação.

No entanto, quando um fluido viscoso é injetado para deslocar um mais viscoso, sua interface se torna instável e dá origem ao crescimento de instabilidades hidrodinâmicas, como pode ser visualizado na figura 1.2. Essas instabilidades são conhecidas como instabilidades de Saffman-Taylor, e denominadas como viscous fingers (OLIVEIRA LARISSA F. SANTOS, 2022; SAFFMAN; TAYLOR, 1958; MCLEAN; SAFFMAN, 1981; BENSIMON et



al., 1986; HOMSY, 1987; MCCOULD; MAHER, 1995; MIRANDA; WIDOM, 1998; CASADEMUNT, 2004). Esse fenômeno ocorre devido às diferenças nas propriedades de viscosidade e tensão superficial dos fluidos envolvidos (VISHNUDAS; CHAUDHURI, 2017), resultando na formação de canais finos e alongados (os "dedos viscosos") que se deslocam mais rapidamente através do reservatório, enquanto o petróleo é empurrado, conforme pode ser ilustrado na figura 1.3.

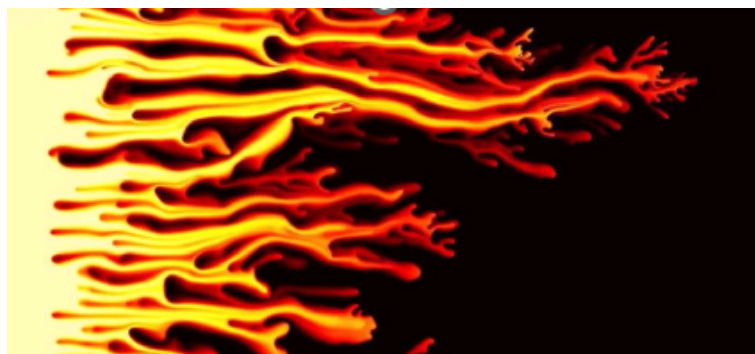


Figura 1.2: Formação de instabilidades hidrodinâmicas

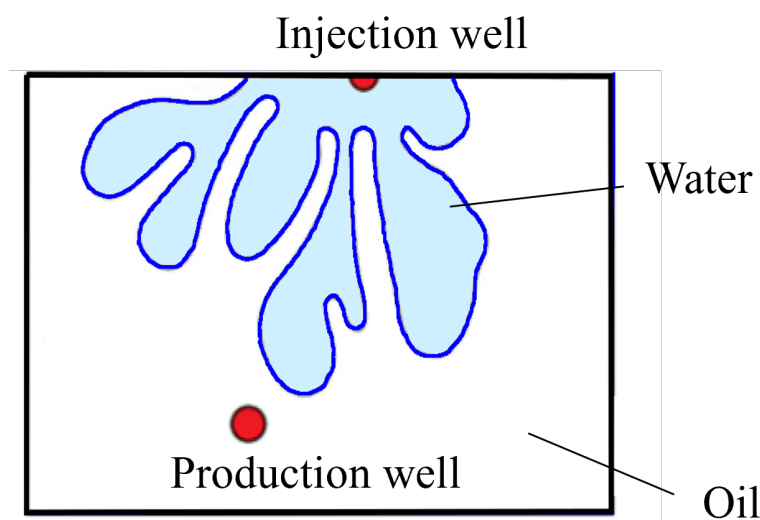


Figura 1.3: Formação de "viscous fingers" no contexto da Indústria do Petróleo e Gás

Dessa forma, é um desafio a ser enfrentado na recuperação avançada de petróleo, e a compreensão de como eles afetam o fluxo de fluidos no reservatório é fundamental para a implementação bem-sucedida de estratégias de recuperação avançada. Controlar e mitigar essas instabilidades de fluxo é crucial para alcançar uma recuperação eficiente de petróleo.

## 1.2

### Deslocamentos em Célula de Hele-Shaw

Este sistema dinâmico é frequentemente investigado no ambiente confinado entre as placas paralelas de uma célula de Hele-Shaw, uma configuração com ligações estreitas com fluxos de meios porosos, tal como mostrado na figura 1.4. e na figura 1.5; A analogia entre os sistemas ocorre porque o espaço confinado entre as placas também atende à lei de Darcy, que governa a dinâmica de fluidos em meios porosos. A vantagem desse experimento é que ele fornece uma visualização clara dos processos de deslocamento que não são facilmente observados em sistemas tridimensionais mais complexos. Este problema tradicional de Saffman-Taylor tem ricas investigações experimentais e teóricas para células Hele-Shaw de geometria de fluxo radial.

O desenvolvimento inicial da instabilidade da interface seguem as previsões da teoria da estabilidade linear. À medida que os modos instáveis de perturbação crescem, eles se tornam acoplados em um estágio de evolução fracamente não linear. Finalmente, o sistema evolui para um estágio tardio complicado, caracterizado pela formação de estruturas de "viscous fingers", nas quais os efeitos não lineares dominam.

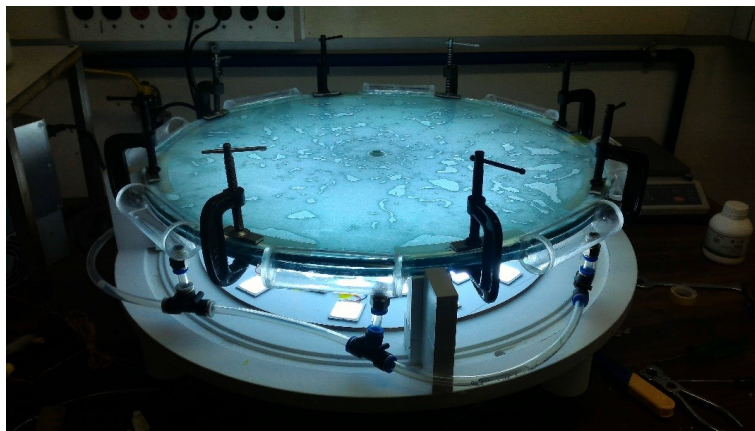


Figura 1.4: Experimento em Célula de Hele-Shaw

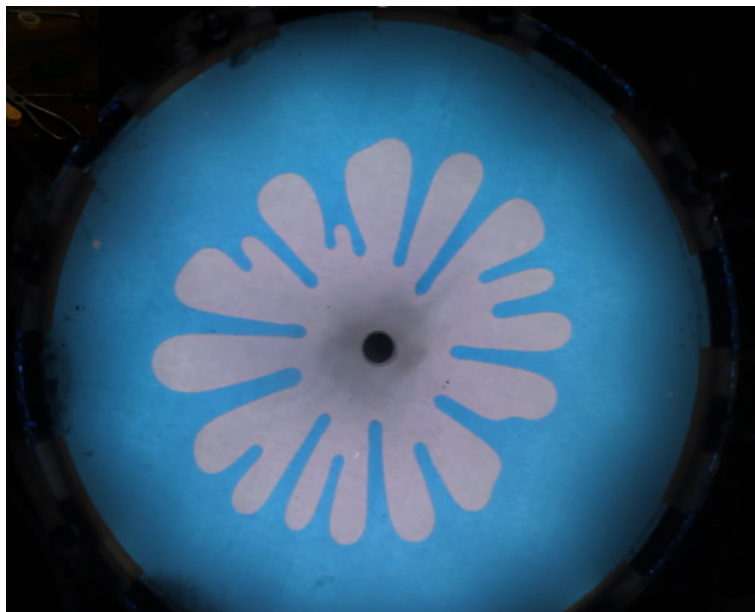


Figura 1.5: Deslocamento radial em um Célula de Hele-Shaw

Como pode ser visto nas figuras (1.4) e (1.5), esse experimento injeta o fluido menos viscoso no centro da célula, que foi previamente preenchido com o fluido mais viscoso. A injeção é geralmente realizada a uma taxa de fluxo constante. Inicialmente, a interface (bolha) é circular. À medida que a bolha se desenvolve, a interface ondula e os "dedos viscosos" crescem. À medida que o tamanho da bolha aumenta, os "dedos" se abrem criando um padrão semelhante a um leque. Em seguida, os dedos começam a se dividir na ponta. "Dedos" maiores protegem os menores e o padrão se desenvolve de forma assimétrica, causando competição entre "dedos viscosos" de diferentes comprimentos. Espalhamento, divisão de pontas e competição são três mecanismos básicos de crescimento do processo de "viscous fingers" (MIRANDA; WIDOM, 1998). Podendo ter aplicações em extensa pesquisa e ambientes industriais (RAUTARAY et al., 2003; CHEN; MALAMBRI; LEE, 2018; NITTMAN; DACCORD; STANLEY, 1985; PARK; HOMSY, 1984), principalmente em processos de recuperação de petróleo.

Consideramos uma Célula de Hele-Shaw consistindo de duas placas paralelas colocadas a uma distância típica de fração de milímetro, conforme esquematizado na figura (1.6). A lacuna  $b$  entre as placas é preenchida com um fluido com viscosidade  $\eta_1$  enquanto um fluido menos viscoso com  $\eta_2$  é injetado para conduzir o processo de deslocamento. Este sistema é caracterizado por dois fluidos newtonianos, imiscíveis e incompressíveis. Assume-se que  $b$  é menor do que qualquer outra escala de comprimento no problema e, portanto, o sistema é considerado efetivamente bidimensional. Dessa maneira, ao injetar o fluido 2 no fluido 1 com vazão constante  $Q$ , igual à área coberta por unidade

de tempo, existe entre os dois fluidos uma tensão superficial  $\sigma$ . De modo que a análise de estabilidade linear deste problema calculou a largura e a taxa de crescimento dos dedos viscosos, além do número esperado de ramificações. Isso só é possível, pois, a fenda entre placas é muito menor do que a largura delas, de maneira que pode-se assumir, então, que os fluidos newtonianos, incompressíveis e imiscíveis evoluem segundo a Lei de Darcy na célula Hele-Shaw. (HOMSY, 1987; MIRANDA; WIDOM, 1998; TRYGGVASON; AREF, 1983).

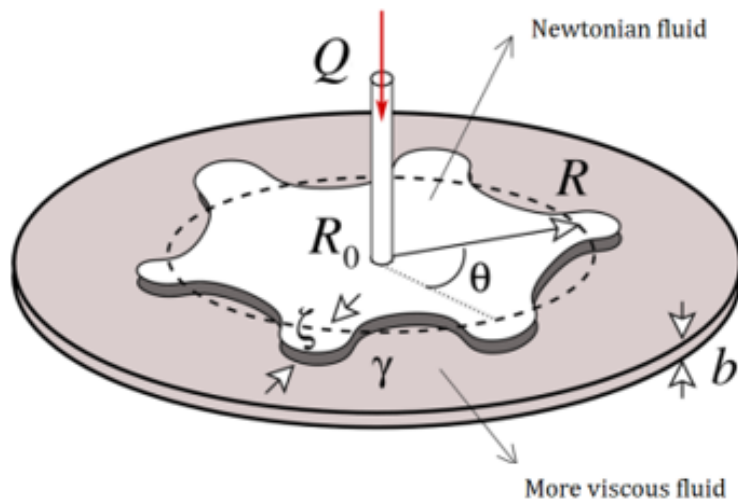


Figura 1.6: Descrição esquemática de uma célula Hele-Shaw na qual um fluido menos viscoso é injetado a uma taxa  $Q$  para deslocar um fluido mais viscoso.

A validade das equações está restrita a escoamentos bidimensionais, sendo crucial verificar a ausência de fluxo na terceira dimensão perpendicular ao plano observado. Modificações nas condições de contorno são necessárias para escoamentos tridimensionais, conforme observado por Park e Homsy (PARK; HOMSY, 1984), que destacaram a discrepância entre teoria e experimento para alguns regimes de parâmetros de controle, propondo modificações para corrigir tal discrepância.

A investigação abrangente da instabilidade em células Hele-Shaw engloba várias condições e cenários. Iniciando com o estudo de Saffman e Taylor (SAFFMAN; TAYLOR, 1958), no qual, em um contexto puramente viscoso, dois fluidos imiscíveis são conduzidos através da célula Hele-Shaw sob a influência de uma pressão externa. O experimento visa analisar a dinâmica da interface entre esses dois fluidos viscosos. Após isso, num artigo de reviso, Homsy (HOMSY, 1987) descreve o fenômeno em diferentes geometrias, incluindo retangulares, radiais e padrões de cinco pontas, analisando o escoamento bidimensional sob a condição de gravidade colinear com a direção do fluxo. Ele considerou forças

como gravidade, viscosidade e tensão superficial em fluidos imiscíveis, concluindo que o escoamento de dois fluidos imiscíveis nessa célula é governado pela relação entre forças viscosas e tensão superficial, viscosidades dos fluidos e pelo número de Darcy-Rayleigh modificado.

Além disso, estudos anteriores abordaram o caso não newtoniano, como o trabalho de McCloud et al. (MCCOUL; MAHER, 1995), que investigou padrões de "fingers" em um contexto de instabilidade de Saffman-Taylor. Nesse estudo, perturbações foram adicionadas a "dedos viscosos" inicialmente estáveis com o objetivo de compreender as mudanças nos padrões de fluxo resultantes. Esse enfoque resultou em uma variedade de padrões complexos de "dedos viscosos". Yamamoto et al. (YAMAMOTO et al., 2001) examinaram a instabilidade no deslocamento de fluidos viscoelásticos e glicerina por ar, observando diferenças notáveis na forma dos fingers, atribuídas ao "efeito de proteção" ('shielding') em características pseudoplásticas.

Lindner et al. (LINDNER; BONN; MEUNIER, 2000) exploraram a instabilidade de Saffman-Taylor em três fluidos complexos, cada um apresentando um mecanismo de seleção clássico alterado. Soluções poliméricas foram consideradas, com efeitos não newtonianos influenciando o experimento de maneira distinta, dependendo da natureza do polímero. Bonn et al. (BONN; MEUNIER, 1997) afirmaram que polímeros flexíveis tendem a alargar os fingers, enquanto polímeros rígidos os estreitam. Em um estudo específico, Linder et al. (LINDNER; BONN; MEUNIER, 2000) analisaram a instabilidade de Saffman-Taylor em uma célula Hele-Shaw usando soluções em diferentes concentrações, observando como a viscosidade pseudoplástica influencia a largura dos fingers em função da velocidade.

Considerando o deslocamento entre fluidos newtonianos, a maioria das simulações numéricas não lineares analisaram a situação em que o contraste de viscosidade entre os fluidos é alto. Isto reproduz condições experimentais nas quais o ar é injetado para deslocar um fluido viscoso. Sob essas condições, os padrões de "viscous fingers" resultantes desenvolvem longas ramificações com sucessivos eventos de divisão de pontas ('tip splitting') (HOU; LOWENGRUB; SHELLEY, 2001; MORROW; MORONEY; MCCUE, 2019). Em contraste, a investigação experimental de Bischofberger (BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015) considera diferentes pares de fluidos que se combinam para produzir uma ampla gama de contrastes de viscosidade. Para valores semelhantes do comprimento de onda mais instável,  $\lambda_c$ , que é uma medida da largura do dedo, eles analisam como diferentes contrastes de viscosidade afetam a formação de padrões. Esta grandeza também pode ser calculada empregando a análise da estabilidade linear através de métodos perturbativos

para descrever o início do "viscous fingers".

A análise de estabilidade linear deste problema calcula a largura e a taxa de crescimento dos dedos viscosos, além do número esperado de ramificações. No entanto, é interessante entender a validade das previsões lineares em estágios mais avançados da dinâmica. Isso por ser feito comparando esses resultados com análises fracamente não linear que prevê tendências morfológicas iniciais, como eventos de divisão de pontas; e simulações não lineares (TRYGGVASON; AREF, 1983; DAI; SHELLEY, 1993; MEIBURG; HOMSY, 1988; HOU; LOWENGRUB; SHELLEY, 1994; HOU; LOWENGRUB; SHELLEY, 2001; FAST; SHELLEY, 2006; MORROW; MORONEY; MCCUE, 2019) e experimentos (PATERSON, 1985; CHEN, 1987; CHEN, 1989; BURNS; ADVANI, 1996; MARTYUSHEV et al., 2009; BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015; BUNTON et al., 2016; OLIVEIRA; MIRANDA, 2020) que fornecem informações detalhadas sobre o formato dos dedos viscosos.

## 2

## Metodologia

### 2.1

#### Análise da Estabilidade Linear

A estabilidade linear de uma interface circular que envolve uma célula de Hele-Shaw com geometria radial tem sido examinada por diversos pesquisadores, incluindo Bataille (BATAILLE, 1968a; MIRANDA; WIDOM, 1998), Wilson (WILSON, 1975; MIRANDA; WIDOM, 1998) e, posteriormente, por Paterson (PATERSON, 1985; MIRANDA; WIDOM, 1998). Trabalhos experimentais e teóricos mais recentes têm abordado o estágio linear do fluxo radial em células de Hele-Shaw em várias situações. Por exemplo, Sader et al (SADER; CHAN; HUGHES, 1994; CHEN, 1987) realizaram uma análise de estabilidade linear para o caso em que um fluido não newtoniano é deslocado; Carrillo et al (CARRILLO et al., 1996; MIRANDA; WIDOM, 1998) investigaram o fluxo radial em uma célula de Hele-Shaw em rotação; enquanto Cardoso e Woods (CARDOSO; WOODS, 1995; MIRANDA; WIDOM, 1998) exploraram a análise de estabilidade linear de um anel de fluido intercalado entre dois outros fluidos de viscosidades diferentes. Devido à complexidade da evolução, mesmo na fase de análise linear, esta pesquisa revisita alguns dos resultados da teoria linear com o propósito de comparação com a análise não linear.

Consideraremos dois fluidos imiscíveis, incompressíveis e viscosos. Esses fluidos estão confinados em uma célula de Hele-Shaw, onde fluem em um espaço estreito, de acordo com a figura 1.6 e seus parâmetros evidenciados. Assim, quando o fluido 2 é injetado no fluido 1 com uma taxa de fluxo constante  $Q$ , que equivale à área coberta por unidade de tempo, uma tensão superficial  $\sigma$  existe entre os dois fluidos.

Durante o escoamento, pode-se ser empregado a teoria da perturbação na análise de estabilidade linear do problema. Considera-se distúrbios harmônicos de aproximadamente interface circular entre os fluidos. Assim, o raio perturbado cresce de acordo com essa teoria da perturbação linear tendo como interface uma forma perturbada descrita como  $\mathcal{R} = R + \zeta(\theta, t)$ , onde  $\theta$  é o ângulo azimutal, e  $R = R(t)$  denota o raio não perturbado dependente do tempo, e  $\zeta(\theta, t)$  é o comprimento do "dedo viscoso".

$$R(t) = \sqrt{R_0^2 + \frac{Qt}{\pi}}. \quad (2-1)$$

Onde,  $R_0$  é o raio não perturbado em  $t = 0$ . O modelo analítico que buscamos prevê é a evolução da perturbação da interface, ou seja, a amplitude de perturbação  $\zeta_n$ . Vale ressaltar que equação (2-1) só é válida para  $\zeta_n \ll R$ .

A interface, sendo uma repetição regular, pode ser expressa em termos de modos de Fourier. Isso ocorre porque a série de Fourier possibilita a representação da forma de uma função periódica em termos de senos e cossenos. Sendo assim,  $\zeta_n$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\zeta_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \zeta(\theta, t) \exp(-in\theta) d\theta \quad (2-2)$$

Dessa maneira, a perturbação líquida pode ser reapresentada por:

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \zeta_n \exp(-in\theta) \quad (2-3)$$

onde  $n$  representa o número discreto de ondas azimutais, que podem assumir os valores:  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Uma vez que nosso objetivo é obter uma equação linearizada que descreva a evolução da interface  $\mathcal{R}$ , permitindo a determinação da posição de cada ponto dessa interface ao longo do tempo, é fundamental aplicar uma equação de movimento, que neste caso, a equação hidrodinâmica relevante é a Lei de Darcy. Ao aplicar a Lei de Darcy aos fluidos internos e externos, obtemos:

$$v_i = -\frac{b^2}{12\eta_i} - \nabla p_i \quad (2-4)$$

onde  $v_i$  é a velocidade de cada fluido e  $p_i$  é a pressão, onde a diferença de pressão entre os dois fluidos em relação as coordenadas espaciais é dada pelo gradiente de pressão. Assim, aproveitando as condições de fluxo irrotacional e incompressível, definimos o potencial de velocidade  $\phi_i$  em cada um dos fluidos, onde  $v_i = -\nabla\phi_i$ . O potencial de velocidade satisfaz a equação de Laplace  $\nabla^2\phi_i = 0$ . Combinando o potencial de velocidade com a equação (2-4), escrevemos a equação de movimento:

$$A \left( \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) + \left( \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2} \right) = \frac{b^2(p_2 - p_1)}{12(\eta_1 + \eta_2)} \quad (2-5)$$

onde o contraste de viscosidade pode ser dado por,

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (2-6)$$

Na interface, a diferença de pressão dos fluidos é dada por:

$$p_2 - p_1 = \sigma\kappa \quad (2-7)$$

onde,  $\sigma$  é tensão superficial e  $\kappa$  é a curvatura.



Assim, é relevante ressaltar que nosso foco é expressar a equação de movimento (2-5) em termos das amplitudes de perturbação. Para atingir esse objetivo, empregamos a condição de contorno de Young-Laplace no lado direito da equação, estabelecendo uma relação entre a diferença de pressão e a curvatura, conforme a equação (2-7) a qual, por sua vez, é dependente de zeta. Ao aplicar a transformada de Fourier, esse termo é representado em função de  $\zeta_n$ . De maneira análoga, a solução da equação de Laplace, aliada à condição de contorno cinemática e à transformada de Fourier, expressa os termos do lado esquerdo em termos de  $\zeta_n$  e suas derivadas.

Com esse propósito, primeiramente vamos expressar a curvatura em termos de  $\zeta_n$ . Nesse contexto, é importante destacar que a curvatura na direção perpendicular permanece aproximadamente constante, pois o gradiente é quase nulo. Portanto, seu efeito pode ser desconsiderado no problema em questão. No entanto, devido à geometria radial do sistema, a expressão para a curvatura no plano é complexa e é dada por:

$$\kappa = \frac{(r^2 + 2r'^2 - rr')(\frac{1}{r^3})}{(1 + \frac{r'^2}{r^2})^{\frac{3}{2}}} \quad (2-8)$$

onde  $r$  denota a coordenada radial. Assim, reescrevemos a curvatura no plano:

$$\kappa = \left( \frac{(R + \zeta)^2 + 2\zeta'^2 - (R + \zeta)\zeta''}{(R + \zeta)^3} - \frac{3\zeta'^2}{2(R + \zeta)^5} + \dots \right) \quad (2-9)$$

Pela expansão binomial de Taylor, a equação da curvatura para tempos curtos

pode ser aproximada para:

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}(\zeta + \zeta'') \quad (2-10)$$

Ao aplicarmos a Transformada de Fourier, podemos expressar o  $\kappa$  em termos de  $\zeta_n$ , conforme a equação abaixo:

$$\tilde{\kappa} = -(\zeta_n - n^2\zeta_n) \quad (2-11)$$

Portanto, a equação (2-5) pode ser reescrita para a seguinte forma:

$$A\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) + \left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) = \alpha\kappa \quad (2-12)$$

onde,

$$\alpha = \frac{b^2\sigma}{12(\eta_1 + \eta_2)} \quad (2-13)$$

Diante disso, a fim de expressar a equação do movimento em termos

da perturbação, é essencial representar  $\phi_1$  e  $\phi_2$  em função de  $\zeta$  também; Isso é realizado ao aplicar a condição de contorno cinemática, que estipula a continuidade da componente normal da velocidade ao atravessar a interface;

Uma vez que tenhamos formulado a equação do movimento da interface em relação à perturbação,  $\zeta$ , podemos, então, empregar a transformada de Fourier para obter a equação que governa a evolução das amplitudes da perturbação,  $\zeta_n$ . Após a resolução desta equação resultante, seremos capazes a descrever a evolução linear da interface perturbada.

Nesse sentido, vamos estabelecer expansões de Fourier para os potenciais de velocidade  $\phi_i$  que surge da equação de Laplace conforme as (2-14), (2-15), (2-16). Nas regiões afastadas da interface, o campo de velocidade deve convergir para o escoamento estacionário não perturbado, que possui uma interface circular de raio  $R$ . Portanto, para valores de  $r$  muito pequenos ( $r \rightarrow 0$ ) e muito grandes ( $r \rightarrow \infty$ ), os potenciais de velocidade  $\phi_i$  se aproximam de  $\phi^0$  são os potenciais de velocidade associados ao fluxo radial.

$$\phi^0 = \frac{-Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{R}\right) + C_1 \quad (2-14)$$

Os potenciais gerais de velocidade que obedecem a esses requisitos são:

$$\phi_1 = \frac{-Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{R}\right) + \sum_{n \neq 0} \phi_{1n}(t) \left(\frac{r}{R}\right)^{\exp(in\theta)} \quad (2-15)$$

e,

$$\phi_2 = \frac{-Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{R}\right) + \sum_{n \neq 0} \phi_{2n}(t) \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(in\theta) \quad (2-16)$$

A fim de determinar as relações complementares que expressam os potenciais de velocidade em função das amplitudes de perturbação, tomamos em consideração a condição de contorno cinemática. Quando expressa em coordenadas polares ( $r, \theta$ ), a condição de contorno cinemática assume a forma a seguir:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \quad (2-17)$$

Expandindo cada componente da condição de contorno cinemática para a primeira ordem e utilizando a Transformada de Fourier, podemos expressar  $\phi_1$  e  $\phi_2$  em relação a  $\zeta_n$ , como pode ser visto nas equações abaixo:

$$\phi_1(t) \propto \phi_{1n} = \frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n + \frac{Q}{2\pi R |n|} \zeta_n \quad (2-18)$$

e,

$$\phi_2(t) \propto \phi_{2n} = -\frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n - \frac{Q}{2\pi R |n|} \zeta_n \quad (2-19)$$

Podemos utilizar as relações (2-18) e (2-19) para substituir os potenciais de velocidade, e a equação (2-11) para substituir o valor de  $\kappa$  na lei de Darcy (2-12) com a perturbação  $\zeta$  e sua derivada temporal  $\dot{\zeta}$ . Ao reter apenas termos lineares na amplitude de perturbação, obtemos a equação diferencial para as amplitudes de perturbação  $\zeta_n$ , para  $n \neq 0$ .

$$\frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n = \frac{Q}{2\pi R} \left( A - \frac{1}{|n|} \right) \zeta_n - \frac{b^2 \sigma}{12(\eta_1 + \eta_2) R^2} (n^2 - 1) \zeta_n \quad (2-20)$$

Diante dessa situação, é possível definir:

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n, t) \zeta_n \quad (2-21)$$

onde,

$$\lambda(n, t) = \frac{Q(t)}{2\pi R} (A|n| - 1) - \frac{\alpha}{R^3} |n|(n^2 - 1) \quad (2-22)$$

Assim, ao considerar  $Q$  como uma constante, torna-se viável adimensionalizar a equação (2-22) da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{1}{R^2} (A|n| - 1) - \frac{b^2 \sigma 2\pi}{12(\eta_1 + \eta_2) Q R_0} \frac{1}{R^3} |n|(n^2 - 1) \quad (2-23)$$

Após linearizar as equações de evolução, as amplitudes de perturbação crescem de acordo a (2-21), onde a taxa de crescimento,  $\lambda$ , é dada por:

$$\lambda(n, t) = \frac{1}{R^2} (A|n| - 1) - B \frac{1}{R^3} |n|(n^2 - 1) \quad (2-24)$$

onde,

$$B = \frac{b^2 \sigma 2\pi}{12(\eta_1 + \eta_2) Q R_0} \quad (2-25)$$

Dessa maneira, é possível observar que as equações acima foram adimensionalizadas ao adotar o raio inicial  $R_0$  como o comprimento característico e  $\frac{Q}{2\pi R_0}$  como a velocidade característica. Em termos de variáveis adimensionais, a dinâmica depende de dois parâmetros adimensionais. Esses parâmetros constituem dois grupos adimensionais: o contraste de viscosidade  $A$ , que está relacionado à viscosidade dos dois fluidos, conforme demonstrado na equação (2-6); e a tensão superficial efetiva  $B$ , que relaciona os efeitos da tensão superficial e da taxa de injeção do fluido menos viscoso, como evidenciado na equação (2-25).

Assim, a utilização da equação (2-24) permite identificar o modo de crescimento mais rápido, associado ao número inteiro mais próximo do máximo de  $\lambda(n, t)$ . Esse máximo é atingido quando  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ :

$$n_{\max} = \sqrt{\frac{1}{3}(1 + R\frac{A}{B})} \quad (2-26)$$

Para realizar uma análise mais minuciosa da solução linear e compreender os efeitos gerais das propriedades mencionadas anteriormente, é viável gerar gráficos que representem a evolução temporal da interface, conforme demonstrado por Miranda (MIRANDA; WIDOM, 1998). Utilizando os parâmetros experimentais do clássico experimento de Paterson (PATERSON, 1985), observou-se um rápido desenvolvimento de dedos quando ar com  $\eta_1 \approx 0$  foi injetado a uma taxa significativa de  $Q = 9.3 \text{ cm}^2/\text{s}$  em glicerina com  $\eta_2 \approx 5.21 \text{ g}/(\text{cm s})$  em uma célula Hele-Shaw com fluxo radial de fonte. A espessura da célula foi  $b = 0.15 \text{ cm}$ , e a tensão superficial foi  $\sigma = 63 \text{ dyne/cm}$ . Os modos  $n$  considerados variaram de  $n = 2$  a  $n = 20$ , iniciando com um raio inicial  $R_0 = 0.05 \text{ cm}$ . A amplitude da perturbação inicial foi selecionada como  $|\zeta_n(0)| = R_0/500$ . A Figura 2 ilustra a evolução da interface até  $t = 30 \text{ s}$ , empregando uma escolha aleatória de fases. A evolução linear se desenrola através de uma crescente participação de modos mais altos  $n$  à medida que o tempo avança. O número de dedos geralmente é determinado pelo modo  $n$  que atinge a maior amplitude. A variabilidade nos comprimentos dos dedos depende principalmente dos modos de  $n$  menores. Modos de  $n$  mais altos podem ocasionar a divisão das pontas dos dedos. Esse efeito pode ser capturado acrescentando os termos de segunda ordem na perturbação. Para a fase inicial da evolução da interface, os padrões, como pode ser visto na Figura (2.1), assemelham-se aos padrões experimentais encontrados na literatura (PATERSON, 1985; CHEN, 1987; CHEN, 1989; THOME et al., 1989; BATAILLE, 1968b).

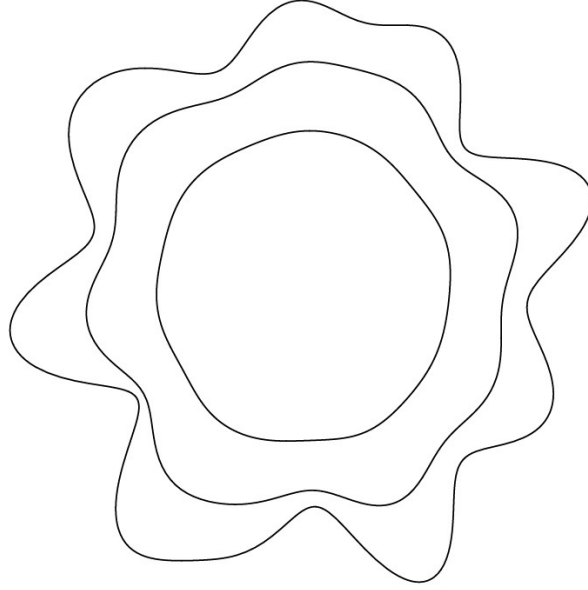


Figura 2.1: Conforme apresentado por Miranda(MIRANDA; WIDOM, 1998), esta representa a evolução temporal da interface entre os fluidos, conforme prevista pela teoria linear, englobando os modos  $2 \leq n \leq 20$ . As amplitudes iniciais de perturbação são definidas por  $|\zeta_n(0)| = R_0/500$ , onde  $R_0 = 0,05cm$ . Os parâmetros experimentais encontram-se descritos no texto, sendo que os instantes de tempo considerados são  $t=10, 20$  e  $30$  segundos.

Ao contrário dos experimentos, algumas características importantes não estão representadas na Figura (2.1), evidenciando a limitação da abordagem puramente linear. A expansão dos dedos, observada nos experimentos, não é nitidamente apresentada na Figura (2.1). Experimentalmente, as pontas dos dedos tendem a se dividir. Pela teoria linear, não é possível capturar essa bifurcação dos dedos. Assim como, a competição entre dedos também não é tão evidente na teoria linear quanto nos experimentos. Essas observações finais indicam que, apesar de ser uma aproximação adequada para os estágios iniciais, uma teoria puramente linear não abrange todos os mecanismos físicos fundamentais (expansão, divisão e competição) envolvidos na formação do padrão. O regime linear é válido apenas por um período inicial limitado, após o qual os efeitos não lineares assumem o controle.(MIRANDA; WIDOM, 1998)

Portanto, dado que  $n_{\max}$  está relacionado ao número previsto de dedos no regime linear, investigaremos as previsões não lineares resultantes de várias combinações de parâmetros que compartilham o mesmo valor de  $n_{\max}$ , conforme será detalhada na seção seguinte.

## 2.2

### Simulações não-lineares

Diante disso, o interesse dessa seção reside na investigação das previsões não lineares associadas a diversas combinações de parâmetros que compartilham o mesmo valor de  $n_{\max}$ . Para isso, empregamos uma abordagem numérica altamente precisa utilizada para simular deformações completamente não lineares na interface em problemas onde a tensão superficial desempenha um papel dominante pois exerce uma forte influência na formação de padrões, tendo um efeito estabilizador em perturbações na interface. Ela surge na modelagem aplicando a condição de contorno de Young-Laplace na interface entre os fluidos, dada pela equação (2-7). Com isso, a metodologia empregada é o método integral de fronteira, baseado no formalismo da linha de vórtice ('vortex-sheet'), conforme proposto por (HOU; LOWENGRUB; SHELLEY, 1994; CENICEROS; HOU; SI, 1999; HOU; LOWENGRUB; SHELLEY, 2001; OLIVEIRA; MIRANDA, 2020; OLIVEIRA et al., 2021).

Como discutido na seção anterior, a configuração geométrica confinada da célula Hele-Shaw possibilita a dedução da lei de Darcy, conforme demonstrado em (2-4), que governam a evolução de cada fluido. A equação simplificada de momento postula que a velocidade é proporcional ao gradiente de uma pressão, resultando em uma velocidade irrotacional para cada fluido. Contudo, é crucial especificar condições de contorno móveis na interface nítida que separa as fases. Geralmente, essas condições são definidas por uma condição de salto de pressão e pela condição cinemática, garantindo a continuidade da componente normal das velocidades dos fluidos ao atravessar a interface. No entanto, a velocidade tangencial é descontínua na interface, resultando na concentração de vorticidade nesse local. Além disso, dado que a interface é descrita por uma curva fina, a linha de vórtice ('vortex-sheet') emerge como uma medida mais apropriada para acessar os locais onde a vorticidade está concentrada e a posição exata da interface. Esta abordagem explora as discrepâncias nas componentes de velocidade tangencial dos fluidos.

A curvatura introduz termos com um grande número de derivadas espaciais, o que impõe restrições na integração temporal. Isso pode levar a uma rigidez numérica e motiva a aplicação da identidade Frenet-Serret:

$$\kappa = \frac{\theta_\alpha}{s_\alpha}, \quad (2-27)$$

onde  $\theta$  é o ângulo tangente,  $s$  é o comprimento de arco e  $\alpha$  é um parâmetro que parametriza a curva planar que descreve a interface. As equações de evolução para determinar a forma da interface podem ser escritas em termos do ângulo tangente  $\theta$  e das derivadas locais do comprimento de arco  $s_\alpha$ . Essas

quantidades podem ser obtidas a partir de:

$$X_t = U\hat{\mathbf{n}} + T\hat{\mathbf{s}}, \quad (2-28)$$

onde

$$X(\alpha, t) = (x(\alpha, t), y(\alpha, t)) = r(\alpha, t)(\cos \phi(\alpha, t), \sin \phi(\alpha, t)), \quad (2-29)$$

descreve a posição da interface parametrizada por  $\alpha$  que evolui no tempo  $t$ . A componente normal da velocidade da interface é dada por  $U$  e a tangencial por  $T$ . Essas quantidades são obtidas considerando a lei de Darcy, juntamente com condições de contorno na interface. Além disso, para obter equações de evolução em termos de  $\theta_\alpha$  e  $s_\alpha$ , é necessário o ângulo tangente unitário, que é escrito como:

$$\hat{s} = \frac{1}{s_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha) = (\cos \theta, \sin \theta). \quad (2-30)$$

Ao derivar parcialmente em  $\alpha$  da (2-28) e igualar com a (2-30) após diferenciar em relação ao tempo, obtemos:

$$s_{\alpha,t} = T_\alpha - U\theta_\alpha, \quad (2-31)$$

$$\theta_t = \frac{1}{s_\alpha}(U_\alpha + T\theta_\alpha) \quad (2-32)$$

Para tornar esse conjunto de equações (2-31), (2-32) completo na descrição da evolução da interface, precisamos acoplar a velocidade normal da interface,  $U$ , e a velocidade tangencial da interface,  $T$ , com as equações governantes e condições de contorno.

O algoritmo armazena a coordenada complexa  $z$  da curva planar que descreve a interface em um determinado instante. Utiliza-se, assim, o  $R_0$ , como comprimento característico e  $\frac{Q}{(2\pi R_0)}$  como velocidade característica. Os dois parâmetros adimensionais  $A$  e  $B$ , conforme mostrado nas (2-6) e (2-25) governam a dinâmica, representando o contraste de viscosidade e a tensão superficial efetiva, respectivamente.

Em suma, esta descrição está focada nas instabilidades de "viscous fingering" que crescem pela injeção radial de um fluido menos viscoso para deslocar um fluido mais viscoso em uma célula Hele-Shaw. Diante disso, pode-se concluir que, este método monitora a evolução da "vortex-sheet", representada por  $\gamma = s\alpha(v_1 - v_2) \cdot \hat{s}$ , onde  $\hat{s}$  é a direção tangente. Como a vorticidade se concentra na interface entre os fluidos, a posição de cada ponto da interface é obtida através da distribuição do "vortex-sheet".

Neste contexto, a implementação atual foi desenvolvida com base em estudos prévios (OLIVEIRA; MIRANDA, 2020; OLIVEIRA et al., 2021) en-

volvendo fluidos magnéticos, e informações adicionais podem ser encontradas nas Referências (CENICEROS; HOU; SI, 1999; HOU; LOWENGRUB; SHELLEY, 1994).



### 3

## Resultados

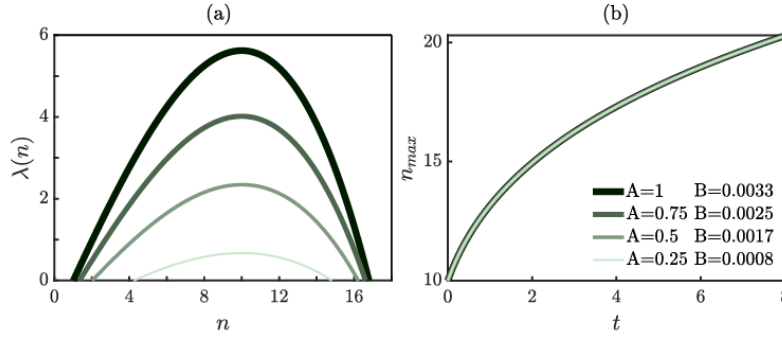


Figura 3.1: (a) Variação inicial da taxa de crescimento em relação ao número de onda azimutal para diferentes valores do contraste de viscosidade,  $A$ . Os valores da tensão superficial efetiva,  $B$ , foram escolhidos de maneira a garantir que todas as curvas apresentem o mesmo evolução de  $n_{max}$ , iniciando com  $n_{max} = 10$ . (b) A análise linear prevê uma evolução temporal semelhante de  $n_{max}$  para as combinações selecionadas de parâmetros.

Os resultados desta seção foram derivados das investigações lineares e não lineares conduzidas neste estudo, baseadas nos valores paramétricos obtidos pela aplicação da equação (2-26). Esta equação determina a evolução de  $n_{max}$  para determinadas valores de  $A$  e  $B$ . No entanto, como queremos analisar diferentes cenários que tem a mesma evolução temporal de  $n_{max}$ , usamos essa equação para selecionar os valores apropriados de  $B$  para alguns valores de  $A$  previamente escolhidos. Com o intuito de abranger uma ampla variedade de cenários paramétricos, foram explorados valores de  $A$  variando de 1 a 0,25. Observamos que, devido à instabilidade impulsionada por diferenças na viscosidade dos fluidos, a configuração com  $A = 1$  representa a condição mais instável. Por outro lado, redução do contraste de viscosidade resulta em instabilidades com crescimento mais lento. A Figura (3.1)(a) ilustra a taxa de crescimento inicial para esses quatro casos, evidenciando que o ponto de máximo ocorre em  $n_{max} = 10$ . Esta análise paramétrica abrangente oferece uma visão detalhada das características de instabilidade e evolução morfológica do sistema, ressaltando a influência crucial do contraste de viscosidade nas previsões, tanto lineares quanto não lineares.

A Figura (3.1)(b) representa a progressão temporal de  $n_{max}$ . Ao manter constante a relação  $A/B$  ao escolher os parâmetros, a (2-26) antecipa

a convergência das quatro curvas, que aumentam de forma monótona com o tempo. Esse fenômeno é particularmente intrigante, pois as curvas exibem taxas de crescimento distintas, indicando que cenários com crescimento mais rápido podem ser prontamente influenciados por não linearidades em estágios mais iniciais. Consequentemente, um aumento no número de dedos não deve seguir a mesma trajetória prevista pela análise linear. Assim, a sobreposição das quatro curvas na Figura (3.1)(b) constitui um cenário propício para explorar a influência de efeitos não lineares tanto na contagem de dedos quanto na escala temporal de seu desenvolvimento.

Figura (3.2), a interface interna quase circular marca a mesma condição inicial usada nas simulações. As curvas pintadas em vermelho apresentam interfaces com formas e comprimentos de dedos semelhantes. Perceba que essa etapa marca uma transição do crescimento linear, no qual os efeitos não lineares ainda são fracos, para uma fase em que alguns dedos se alargam para iniciar processos de divisão de ponta (MIRANDA; WIDOM, 1998). Note também que os tempos necessários para atingir esse estado aumentam dramaticamente à medida que o contraste de viscosidade diminui, passando de  $t = 1.5$  para  $A = 1$ , para  $t = 3$  para  $A = 0.75$ , para  $t = 10$  para  $A = 0.5$ , e finalmente para  $t = 300$  para  $A = 0.25$ .

É também digno de nota que simulações numéricas anteriores deste problema se concentraram no cenário mais instável com o valor de contraste de viscosidade alto  $A = 1$  (TRYGGVASON; AREF, 1983; HOU; LOWENGRUB; SHELLEY, 1994; FAST; SHELLEY, 2006; MORROW; MORONEY; MCCUE, 2019). Agora, ao instigar diferentes valores de  $A$ , outras observações relacionadas à estrutura morfológica podem ser evidenciadas, e os resultados não lineares atuais são adequados para comparação com, por exemplo, os resultados experimentais de Bischofberger et al. (BISCHOFBERGER; RAMACHANDRAN; NAGEL, 2015). Ao considerar diferentes pares de fluidos, eles descobrem que, para razões de viscosidade crescentes,  $\eta_2/\eta_1$ , o comprimento dos dedos tende a diminuir quando comparam experimentos que têm o mesmo número de onda mais instável. Por um lado, isso é esperado, já que a instabilidade viscosa cresce sempre que o fluido invasor é menos viscoso, e ao aumentar a razão de viscosidade,  $\eta_2/\eta_1$ , o contraste de viscosidade diminui, enfraquecendo o condutor da instabilidade. Por outro lado, esses experimentos destacam a presença de uma região interna estável onde o fluido externo é completamente deslocado. Os resultados atuais capturam esse comportamento e o comprimento dos dedos é claramente reduzido à medida que os valores de  $A$  diminuem.

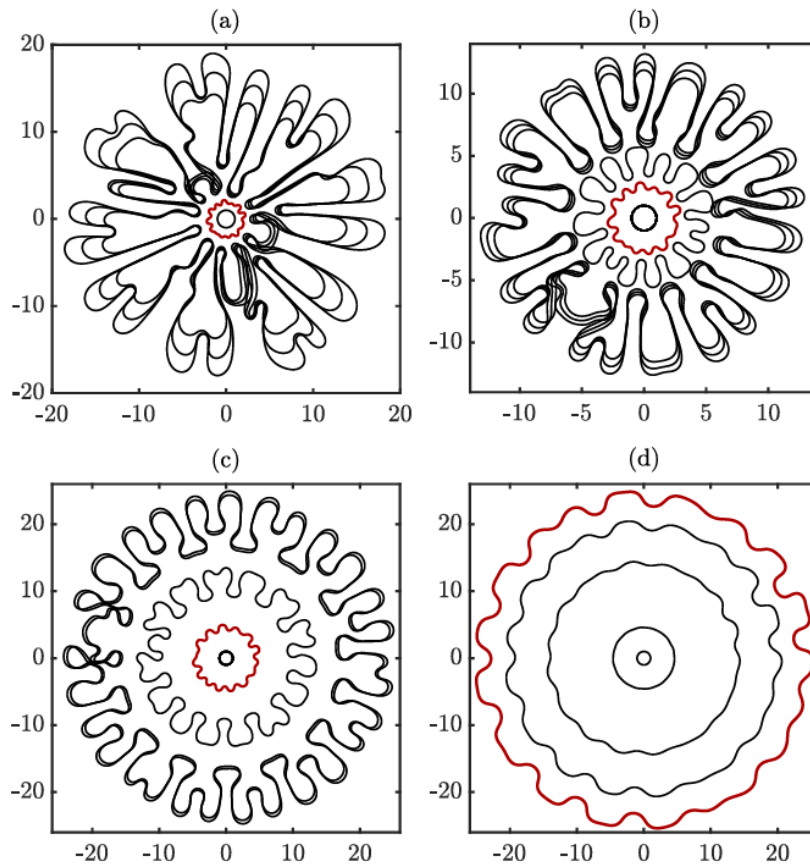


Figura 3.2: Considerando os mesmos parâmetros da (3.1) , a imagem evidencia a sobreposição de morfologias de dedos não lineares obtidas por meio de simulações de integral de contorno em diferentes momentos temporais. (a)  $A = 1$ ,  $B = 0,0033$ ,  $t = 0$ ,  $t = 1,5$ ,  $t = 60$ ,  $t = 80$  e  $t = 100$ ; (b)  $A = 0,75$ ,  $B = 0,0025$ ,  $t = 0$ ,  $t = 3$ ,  $t = 11$ ,  $t = 47$ ,  $t = 52$  e  $t = 57$ ; (c)  $A = 0,5$ ,  $B = 0,0017$ ,  $t = 0$ ,  $t = 10$ ,  $t = 70$ ,  $t = 220$  e  $t = 230$ ; e (d)  $A = 0,25$ ,  $B = 0,0008$ ,  $t = 0$ ,  $t = 10$ ,  $t = 100$ ,  $t = 200$  e  $t = 300$ .

## 4

### Conclusão

O fluxo de deslocamento radial confinado em uma célula de Hele-Shaw, foi revisitado resultando no desenvolvimento de instabilidades viscosas ("viscous fingering instabilities"). Realizamos tanto análises de estabilidade linear quanto simulações não lineares, utilizando um método integrais de contorno. Este método, baseado no formalismo da linha de vórtice ("vortex-sheet"), rastreia deformações entre fluidos de diferentes viscosidades, cuja interface é governada pela tensão superficial. Trata-se de uma técnica numérica robusta, com precisão espectral, que simplifica o fluxo bidimensional instável de deslocamento para um problema efetivamente unidimensional, descrevendo as deformações da interface como uma curva planar fechada.

Além disso, o sistema é controlado por dois parâmetros adimensionais: o contraste de viscosidade e a tensão superficial efetiva. Exploramos o comportamento não linear de casos previstos pela análise linear para apresentar o mesmo número de ramificações. As simulações numéricas evidenciam discrepâncias na escala de tempo necessária para o crescimento das ramificações dos "dedos viscosos" quando diferentes contrastes de viscosidade são considerados.

Adicionalmente, antecipam a existência de uma região interna estável que desloca completamente o fluido mais viscoso. Consistente com observações experimentais anteriores, isso está relacionado ao comprimento dos dedos, os quais têm uma tendência a diminuir à medida que o contraste de viscosidade é reduzido.

## Referências Bibliográficas

BATAILLE, J. *Revue inst. petrole.* v. 23, p. 1349, 1968.

BATAILLE, J. Stability of a radial immiscible drive. *Revue Inst, Petrole*, v. 23, p. 1349, 1968.

BENSIMON, D. et al. Viscous flows in two dimensions. *Rev. Mod. Phys.*, v. 58, p. 977–999, 1986.

BISCHOFBERGER, I.; RAMACHANDRAN, R.; NAGEL, S. R. An island of stability in a sea of fingers: emergent global features of the viscous-flow instability. *Soft Matter*, v. 11, p. 7428–7432, 2015.

BONN, D.; MEUNIER, J. Viscoelastic free-boundary problems non-newtonian viscosity vs normal stress effects. *Physical Review Letters*, v. 79, n. 14, p. 2662–2665, October 1997.

BUNTON, P. et al. Schlieren imaging of viscous fingering in a horizontal hele-shaw cell. *Exp. Fluids*, v. 57, 2016.

BURNS, S. B. K.; ADVANI, S. G. An experimental investigation of initial oscillations in a radial hele-shaw cell. *Exp. Fluids*, v. 21, p. 187–200, 1996.

CARDOSO, S.; WOODS, A. J. *fluid mech.* v. 289, p. 351, 1995.

CARRILLO, L. et al. *Phys. rev. e.* v. 54, p. 6260, 1996.

CASADEMUNT, J. Viscous fingering as a paradigm of interfacial pattern formation: Recent results and new challenges. *Chaos*, v. 14, p. 809–824, 2004.

CENICEROS, H. D.; HOU, T. Y.; SI, H. Numerical study of hele-shaw flow with suction. *Phys. Fluids*, v. 11, 1999.

CHEN, J.-D. Radial viscous fingering patterns in hele-shaw cells. *Exp. Fluids*, v. 5, p. 363–371, 1987.

CHEN, J.-D. Growth of radial viscous fingers in a hele-shaw cell. *J. Fluid Mech.*, v. 201, p. 223–242, 1989.

CHEN, Y.; MALAMBRI, F.; LEE, S. Viscous fingering of a draining suspension. *Phys. Rev. Fluids*, v. 3, 2018.

CHOWDHURY, S. et al. Pore-scale flow simulation of supercritical CO<sub>2</sub> and oil flow for simultaneous CO<sub>2</sub> geo-sequestration and enhanced oil recovery. *Journal Name*, 2022.

CINAR, Y.; RIAZ, A.; TCHELEPI, H. Experimental study of CO<sub>2</sub> injection into saline formations. *SPE Journal*, 2009.

- DAI, W.-S.; SHELLEY, M. J. A numerical study of the effect of surface tension and noise on an expanding hele-shaw bubble. *Phys. Fluids A*, v. 5, p. 2131–2146, 1993.
- FAST, P.; SHELLEY, M. Moore's law and the saffman-taylor instability. *J. Comput. Phys.*, v. 212, p. 1, 2006.
- GBADAMOSI, A. O. et al. An overview of chemical enhanced oil recovery. recent advances and prospects. *Int Nano Lett*, 2019.
- GORELL, P. T.; HOMSY, G. M. A theory of the optimal policy of oil recovery by secondary displacement processes. *SIAM J Appl Math*, 1983.
- HOMSY, G. M. Viscous fingering in porous media. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, v. 19, p. 271–311, 1987.
- HOU, T. Y.; LOWENGRUB, J. S.; SHELLEY, M. Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension. *J. Comput. Phys.*, v. 114, p. 312–338, 1994.
- HOU, T. Y.; LOWENGRUB, J. S.; SHELLEY, M. Boundary integral methods for multicomponent fluids and multiphase materials. *J. Comput. Phys.*, v. 169, p. 302–362, 2001.
- LINDNER, A.; BONN, D.; MEUNIER, J. Viscous fingering in complex fluids. *J. of Physics-Condensed Matter*, v. 12, n. 8A, p. A477–A482, 2000.
- MARTYUSHEV, L. M. et al. Experimental investigation of the onset of instability in a radial hele-shaw cell. *Phy. Rev. E*, v. 80, p. 066306, 2009.
- MCCOULD, K. V.; MAHER, J. V. Experimental perturbations to saffman-taylor flow. *Phys. Rep.*, v. 260, p. 139–185, 1995.
- MCLEAN, J. W.; SAFFMAN, P. G. The effect of surface tension on the shape of fingers in a hele-shaw cell. *J. Fluid Mech.*, v. 102, 1981.
- MEIBURG, E.; HOMSY, G. M. Nonlinear unstable viscous fingers in hele-shaw flows: Ii. numerical simulation. *Phys. Fluids*, v. 31, p. 429–439, 1988.
- MIRANDA, J. A.; WIDOM, M. Radial fingering in a hele-shaw cell: A weakly nonlinear analysis. *Physica D*, v. 120, 1998.
- MORROW, L. C.; MORONEY, T. J.; MCCUE, S. W. Numerical investigation of controlling interfacial instabilities in non-standard hele-shaw configurations. *J. Fluid Mech.*, v. 877, p. 1063–1097, 2019.
- NITTMAN, J.; DACCORD, G.; STANLEY, H. E. Fractal growth of viscous fingers: quantitative characterization of a fluid phenomenon. *Nature*, v. 314, 1985.
- OLIVEIRA LARISSA F. SANTOS, P. S. d. C. R. M. Expected number of fingers in the radial displacement of confined viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022.

- OLIVEIRA, R. M. et al. Shape instabilities in confined ferrofluids under crossed magnetic fields. *Phys. Rev. E*, v. 105, p. 065113, 2021.
- OLIVEIRA, R. M.; MIRANDA, J. A. Fully nonlinear simulations of ferrofluid patterns in a radial magnetic field. *Phys. Rev. Fluids*, v. 5, p. 124003, 2020.
- PARK, C.-W.; HOMSY, G. M. Two-phase displacement in hele-shaw cells: theory. *J. Fluid Mech.*, v. 139, p. 291–308, 1984.
- PATERSON, L. Fingering with miscible fluids in a hele-shaw cell. *Phys. Fluids*, v. 28, p. 1, 1985.
- RAUTARAY, D. et al. Room-temperature synthesis of aragonite crystals at an expanding liquidliquid interface in a radial heleshaw cell. *Adv. Mater.*, v. 15, 2003.
- SADER, J.; CHAN, D.; HUGHES, B. *Phys. rev. e*. v. 49, p. 420, 1994.
- SAFFMAN, P. G.; TAYLOR, G. I. The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, v. 245, p. 312–329, 1958.
- SAYAVEDRA, L. et al. A discussion of different approaches for managing the timing of eor projects. In: *SPE 165304*. [S.l.: s.n.], 2013.
- THOME, H. et al. The saffmantaylor instability: From the linear to the circular geometry. *Phys. Fluids A*, v. 1, p. 224, 1989.
- TRYGGVASON, G.; AREF, H. Numerical experiments on hele-shaw flow with a sharp interface. *J. Fluid Mech.*, v. 136, 1983.
- VISHNUDAS, S.; CHAUDHURI, A. K. A comprehensive numerical study of immiscible and miscible viscous fingers during chemical enhanced oil recovery. *Fuel*, 2017.
- WILSON, S. *Colloid interface sci.* v. 51, p. 532, 1975.
- YAMAMOTO, T. et al. Viscous fingering of non-newtonian fluids in a rectangular hele-shaw cell. *Journal of the Society of Rheology, Japan*, v. 29, n. 2, p. 81–87, 2001.