

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Rodrigo Lazzarotto do Amparo

**Comparação entre as abordagens
MCC e MRH para determinação da
amplitude da tensão cisalhante no
plano crítico.**

Projeto de Graduação

Projeto de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia
Mecânica da PUC-Rio

Orientador: Marcos Venicius Soares Pereira
Coorientador: Tiago Lima d'Albuquerque e Castro

Rio de Janeiro
Dezembro de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, por terem me apoiado constantemente durante minha jornada na PUC-Rio.

Agradeço ao meu orientador, Marcos Venicius, pelas oportunidades que me deu na minha formação acadêmica e por todo o apoio. Agradeço também ao meu coorientador, Tiago Castro, por me aproximar do tema de fadiga multiaxial e pelo apoio.

Agradeço a todo o pessoal do LABFADAC, especialmente ao Marcos Venicius, Tiago Castro, Maria Clara e João Paulo pelo enriquecimento intelectual e companheirismo, já que são mentes e pessoas incríveis.

Agradeço ao pessoal do LEM-DEC e da Braver, especialmente ao Jessé, Filipe, Victor e Euclides por compartilharem seu conhecimento e me introduzirem a áreas novas do conhecimento, além do incrível companheirismo.

Agradeço, por fim, aos amigos que fiz durante a graduação na PUC-Rio e aos excelentes professores.

RESUMO

Comparação entre as abordagens MCC e MRH para determinação da amplitude da tensão cisalhante no plano crítico.

Critérios de fadiga multiaxial baseados em plano crítico utilizam a amplitude de tensão cisalhante e a máxima tensão normal para determinar se o componente carregado ciclicamente terá ou não vida infinita em fadiga. A metodologia numérica MCC (mínima circunferência circunscrita), embora muito empregada, apresenta como limitação o fato de não ser capaz de levar em conta efeitos de não proporcionalidade da trajetória do vetor tensão cisalhante. O método MRH foi criado para ser mais simples, sendo também um método numérico que, além de ter menor custo computacional, tem tendência a dar resultados mais conservadores que MCC.

Neste trabalho, foram utilizadas as mesmas 21 condições de carregamento para comparar MCC e MRH na obtenção da amplitude de tensão cisalhante aplicadas aos critérios de fadiga multiaxial de Matake, Susmel & Lazzarin, Findley e Carpinteri & Spagnoli, gerando tabelas e gráficos com relação às orientações dos planos críticos obtidos, máxima tensão normal, amplitude de tensão cisalhante e índice de erro. Para as condições de carregamento síncronas, o método analítico para obtenção da amplitude de tensão cisalhante foi também comparado aos MCC e MRH. Além disso, para as condições de carregamento assíncronas, a tensão equivalente de Von Mises foi calculada para os planos críticos acusados por MCC e MRH utilizando o critério de Matake.

Concluiu-se que os planos críticos e suas respectivas tensões só se diferem entre MCC e MRH para os critérios de Matake e Susmel & Lazzarin e, mesmo para esses critérios, somente duas condições de carregamento síncronas deram resultados destoantes. Dentre as condições assíncronas, as amplitudes de tensão cisalhantes obtidas por MRH são em média 30 MPa superiores às obtidas por MCC, enquanto as máximas tensões normais são pelo menos 90 MPa menores. As orientações críticas das condições assíncronas para MCC foram no ângulo $\theta = 90^{\circ}$, enquanto, para MRH, foram em $\theta = 45^{\circ}$ e 135° . Para todos os planos críticos obtidos por MRH, a tensão equivalente de Von Mises máxima é inferior à obtida nos planos com MCC.

Palavras chaves: critério de fadiga multiaxial, máxima tensão normal, amplitude de tensão cisalhante, plano crítico, orientação crítica, MCC, MRH, índice de erro, condição de carregamento

ABSTRACT

Comparison between the MCC and MRH approaches for determining the shear stress amplitude in the critical plane.

Critical plane-based multiaxial fatigue criteria utilize the shear stress amplitude and maximum normal stress to determine whether or not the cyclically loaded component will have infinite fatigue life. The numerical methodology MCC (minimum circumscribed circle), although widely used, has as a limitation the fact that it is not capable of taking into account effects of non-proportionality of the trajectory of the shear stress vector. The MRH method was created to be simpler, and is also a numerical method that, in addition to having lower computational cost, tends to give more conservative results than MCC.

In this work, the same 21 loading conditions were used to compare MCC and MRH in obtaining the shear stress amplitude applied to the multiaxial fatigue criteria of Matake, Susmel & Lazzarin, Findley and Carpinteri & Spagnoli, generating tables and graphs in relation to the guidelines of the critical planes obtained, maximum normal stress, shear stress amplitude and error index. For synchronous loading conditions, the analytical method for obtaining the shear stress amplitude was also compared to MCC and MRH. Furthermore, for the asynchronous loading conditions, the Von Mises equivalent stress was calculated for the critical planes accused by MCC and MRH using the Matake criterion.

It was concluded that the critical planes and their respective stresses only differ between MCC and MRH for the Matake and Susmel & Lazzarin criteria and, even for these criteria, only two synchronous loading conditions gave conflicting results. Among the asynchronous conditions, the shear stress amplitudes obtained by MRH are on average 30 MPa higher than those obtained by MCC, while the maximum normal stresses are at least 90 MPa lower. The critical orientations of the asynchronous conditions for MCC were at angle $\theta=90^\circ$, while for MRH they were at $\theta=45^\circ$ and 135° . For all critical planes obtained by MRH, the maximum Von Mises equivalent stress is lower than that obtained in the planes with MCC.

Key-words: multiaxial fatigue criterion, maximum normal stress, shear stress amplitude, critical plane, critical orientation, MCC, MRH, error index, loading condition

SUMÁRIO

1 Introdução	9
2 Revisão Bibliográfica	11
2.1. O estado de tensão e o Teorema de Cauchy	11
2.1.1. O vetor de tensões num plano material qualquer	13
2.1.2. Tensão equivalente de Von Mises	15
2.2. Fadiga	16
2.3. Fadiga Multiaxial	18
2.3.1. Critérios de fadiga multiaxial	19
2.3.2. Métodos para obtenção da amplitude de tensão cisalhante	22
3 Metodologia	26
3.1. Implementação da metodologia	30
3.1.1. Códigos para cálculo da amplitude de tensão cisalhante	30
3.1.2. Códigos para encontrar planos críticos	30
3.1.3. Código principal	31
3.1.4. Código para geração de gráficos	32
4 Resultados e discussões	33
4.1. Condições de carregamento síncronas	33
4.1.1. Matake e Susmel & Lazzarin	33
4.1.2. Findley	37
4.1.3. Carpinteri & Spagnoli	39
4.2. Condições de carregamento assíncronas	42
4.2.1. Matake e Susmel & Lazzarin	42
4.2.2. Findley	45
4.2.3. Carpinteri & Spagnoli	47
4.3. Considerações gerais	49
4.4. Aplicando tensão equivalente de Von Mises	51

5 Conclusões_____ **54**

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS_____ **55**

Lista de figuras

Figura 1. Ilustração de um ponto 0 na superfície de um corpo externamente carregado [2].

Figura 2. Ilustração do estado de tensões retirada de [4]

Figura 3. Representação do vetor de tensões t (e suas componentes N e C) referente a um plano material Δ qualquer [4]

Figura 4. Rotação da base, retirado de [4]

Figura 5. Gráfico Tensão vs Tempo do ensaio uniaxial de fadiga

Figura 6. Exemplo de curva S-N retirada do livro [8]

Figura 7. Trajetória da tensão cisalhante no plano material [4]

Figura 8. Resultados para cond. síncronas utilizando Mataka: (a) $Ca(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) IE

Figura 9. IE utilizando Susmel & Lazzarin para cond. síncronas

Figura 10. Trajetória da tensão cisalhante da condição 8 em $\theta = 90^\circ$

Figura 11. Trajetória da tensão cisalhante da condição 8 em $\theta = 45^\circ$

Figura 12. Resultados para cond. síncronas utilizando Findley (a) $Ca(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) IE

Figura 13. Resultados para cond. síncronas utilizando Carpinteri & Spagnoli (a) $Ca\theta_c, \phi_c$; (b) $N_{max}\theta_c, \phi_c$; (c) IE

Figura 14. Resultados para cond. assíncronas utilizando Mataka (a) $Ca(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) IE

Figura 15. IE para cond. assíncronas utilizando Susmel & Lazzarin

Figura 16. Resultados para cond. assíncronas utilizando Findley (a) $Ca(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) IE

Figura 17. Resultados para cond. assíncronas utilizando Carpinteri & Spagnoli (a) $Ca(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) IE

Figura 18. Representação gráfica de MCC e MRH para uma trajetória com $\theta = 90^\circ$

Figura 19. Tensão de Von Mises da cond. carregamento 15 no plano crítico obtido por MCC

Figura 20. Tensão de Von Mises da cond. carregamento 15 no plano crítico obtido por MRH

Lista de tabelas

Tabela 1. Nomenclaturas para máxima tensão normal e amplitude de tensão cisalhante

Tabela 2. Condições de carregamento utilizadas por [5]

Tabela 3. Exemplos de histórias e trajetórias de tensão estudadas

Tabela 4. Orientações crítica para critérios de Mataka e S&L para cond. síncronas

Tabela 5. Orientações críticas pelo critério de Findley para cond. síncronas

Tabela 6. Orientações críticas pelo critério de Carpinteri & Spagnoli para cond. síncronas

Tabela 7. Orientações crítica para critérios de Mataka e S&L para cond. assíncronas

Tabela 8. Orientações críticas pelo critério de Findley para cond. assíncronas

Tabela 9. Orientações críticas pelo critério de Carpinteri & Spagnoli para cond. assíncronas

Tabela 10. Máxima tensão equivalente de Von Mises aplicada aos planos críticos obtidos por MCC e MRH

1 Introdução

Estruturas e componentes mecânicos podem sofrer danos ao serem submetidos a cargas cíclicas. A principal causa deste fenômeno é a fadiga, o mecanismo de dano que causa, mesmo sob cargas previstas em projeto, o surgimento de trincas e, no pior dos casos, falhas. Com componentes estruturais e mecânicos sendo projetados para durar vidas longas, é necessário conhecer esse fenômeno [1].

Ao analisar o estado de tensões de um componente mecânico, dificilmente se encontrará solicitações uniaxiais. Solicitações multiaxiais têm um grau de complexidade bem maior do que a uniaxial e o dano acaba sendo bem mais severo. Daí vem a importância do estudo da fadiga multiaxial [2].

Crítérios de fadiga baseados em plano crítico são alguns dos mais estudados. Esses critérios são, basicamente, resumidos a inequações que relacionam tensões normais e cisalhantes relativas ao plano material crítico com propriedades do material. Se a inequação não for satisfeita, então é provável que haja o surgimento de uma trinca de fadiga nesse plano crítico [4].

A componente de tensão normal relativa a um plano material é unidirecional, então achar seu máximo é trivial. Já para achar a amplitude da tensão cisalhante no plano tem-se um problema, já que a tensão varia de direção ao longo do tempo, criando uma trajetória paralela ao plano estudado.

Um dos métodos mais utilizados para encontrar a amplitude de tensão cisalhante é o chamado MCC (*Minimum Circumscribed Circle*, Mínima Circunferência Circunscrita). Este método numérico relaciona a amplitude de tensão cisalhante no plano material com o raio da menor circunferência que circunscreva a trajetória da tensão cisalhante [3].

Há alguns anos, um novo método foi criado no intuito de melhorar a previsão da amplitude de tensão cisalhante relacionada a alguns casos onde esta acaba sendo superestimada pelo método MCC. Esse método é chamado de MRH (*Maximum Rectangular Hull*, Máxima Envoltória Retangular), onde a amplitude de tensão cisalhante está relacionada à metade da diagonal do maior retângulo que circunscreva a trajetória [5].

O método MRH, além de utilizar bem menos custo computacional, é mostrado como mais conservador do que o MCC na obtenção da amplitude de tensão cisalhante

quando utilizado com o critério de fadiga criado por Susmel & Lazzarin. A comparação feita em [5] é realizada com 21 condições de carregamento utilizadas em ensaios de fadiga multiaxial que combinam tração-compressão com torção-torção, sendo essas condições tanto síncronas (mesma frequência entre os carregamentos cíclicos) quanto assíncronas (frequências diferentes).

Para condições de carregamento síncronas de tração-compressão com torção-torção, é possível utilizar uma solução analítica para determinar a amplitude de tensão cisalhante no plano material [4].

O objetivo deste trabalho é comparar as metodologias MCC com MRH para 4 critérios de fadiga multiaxial: Matake, Susmel & Lazzarin, Findley e Carpinteri & Spagnoli. Serão gerados tabelas e gráficos com as orientações críticas, as amplitudes de tensão cisalhante, as máximas tensões normais e os índices de erro para cada uma das condições de carregamento do artigo [5]. Para as 10 condições de carregamento síncronas, será ainda feita uma comparação com o método analítico e, para as 11 assíncronas, um estudo da tensão equivalente de Von Mises nos planos críticos obtidos por MCC e por MRH.

2 Revisão Bibliográfica

Neste capítulo serão apresentados todos os conceitos necessários para a compreensão do trabalho.

2.1. O estado de tensão e o Teorema de Cauchy

Para introduzir essa seção, imagina-se uma porção cúbica infinitesimal localizada num ponto O de um corpo que sofre carregamentos externos, como ilustrado na Figura 1 retirada de [2].

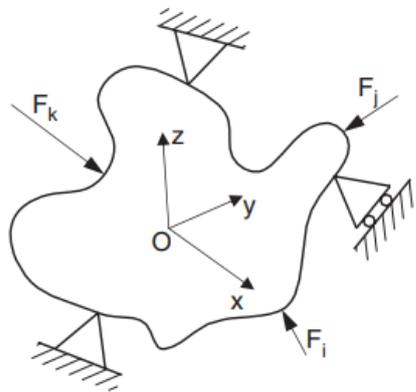


Figura 1. Ilustração de um ponto O na superfície de um corpo externamente carregado [2].

O estado de tensão agindo nesse volume infinitesimal pode ser definido pelo tensor de tensões de Cauchy: um tensor de dimensões 3×3 com 9 entradas com grandeza de tensão [2]. O tensor de tensões está presente na Equação 1 enquanto uma ilustração do estado de tensões está na Figura 2.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

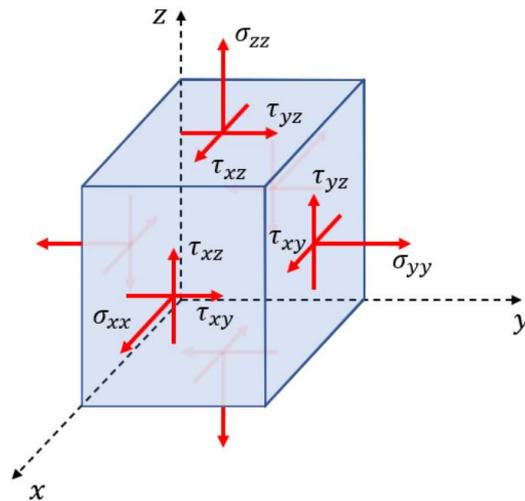


Figura 2. Ilustração do estado de tensões retirada de [4]

Percebe-se que as componentes do estado de tensão são as próprias tensões atuantes nos planos perpendiculares aos eixos ortogonais xyz . Para definir as componentes do estado de tensão do ponto, primeiro deve-se definir o teorema de Cauchy.

Esse teorema afirma que o vetor tensão atuante num plano que corte um corpo num ponto O definido é uma transformação linear do vetor normal a esse plano, onde o tensor dessa transformação é o tensor de tensões da Equação 1 [4]. A Equação 2 mostra o teorema:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2)$$

Sendo \mathbf{t} o vetor tensão e \mathbf{n} o vetor normal ao plano que corta o corpo, também chamado de plano material. O teorema implica que, dado um ponto a ser estudado, as tensões dependem do estado de tensões e da orientação do vetor \mathbf{n} , já que este é unitário.

Para um vetor \mathbf{t} qualquer, pode-se determinar sua componente normal ao projetá-lo no vetor direcional do plano material \mathbf{n} o qual ele pertence e sua

componente cisalhante ao subtrair a componente cisalhante do vetor \mathbf{t} [3]. As Equações 6 e 7 mostram esse processo.

$$\mathbf{N} = \mathbf{t}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{t} - \mathbf{N} \quad (4)$$

Onde \mathbf{N} é o vetor de tensão normal ao plano material (definido por \mathbf{n}) e \mathbf{C} é o vetor de tensão cisalhante paralelo ao mesmo.

2.1.1. O vetor de tensões num plano material qualquer

As componentes dos vetores normal e cisalhante num plano material qualquer não são tão facilmente encontradas com somente a aplicação do vetor diretor desse plano ao tensor de tensões. Isso porque, ao aplicar o teorema de Cauchy, tanto a componente normal quanto a cisalhante estarão descritas em função dos vetores da base ortonormal (\mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z). A Equação 5 trás o resultado da aplicação de Cauchy num vetor \mathbf{v} genérico, com as três componentes v_1 , v_2 e v_3 .

$$\mathbf{t}_v = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{t}_v = (\sigma_{xx}v_1 + \tau_{xy}v_2 + \tau_{xz}v_3)\mathbf{e}_x + (\sigma_{yy}v_1 + \tau_{xy}v_2 + \tau_{yz}v_3)\mathbf{e}_y +$$

$$(\sigma_{zz}v_1 + \tau_{xz}v_2 + \tau_{yz}v_3)\mathbf{e}_z$$

Para uma representação gráfica, a Figura 3 mostra um vetor de tensões \mathbf{t} com componente normal \mathbf{N} e cisalhante \mathbf{C} referentes a um plano material Δ com vetor normal \mathbf{n} qualquer nos eixos cartesianos x, y e z.

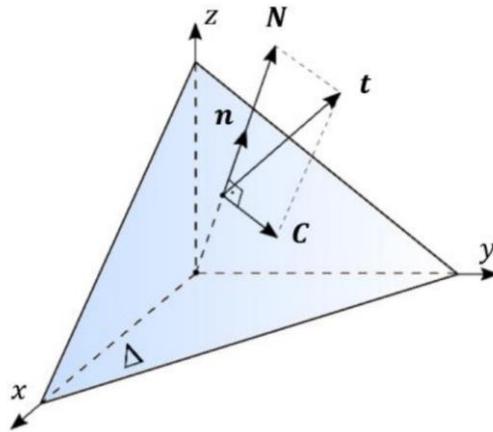


Figura 3. Representação do vetor de tensões t (e suas componentes N e C) referente a um plano material Δ qualquer [4]

A solução para esse problema é uma rotação da base, fazendo assim com que os vetores da base nova se alinhem com a orientação do plano material. Primeiramente é realizada uma rotação no sentido anti-horário de ϕ em torno do eixo z . Depois, uma rotação no sentido horário de θ (equivalente a uma rotação anti-horária de $90 - \theta$) em torno da nova direção do eixo y . As novas direções cartesianas (x' , y' , z') e os ângulos de rotação podem ser visualizados na Figura 4 retirada de [4].

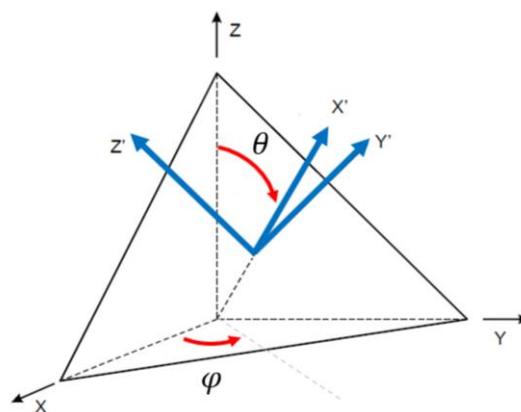


Figura 4. Rotação da base, retirado de [4]

Com essa mudança de base realizada, o vetor normal ao plano material, \mathbf{n} , fica na direção de $\mathbf{e}_{x'}$, fazendo com que o vetor de tensões \mathbf{t} possa ser decomposto em sua componente normal N e na sua cisalhante C como nas equações 8 e 9:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = N_{x'}\mathbf{e}_{x'} \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{t} - \mathbf{N} = C_{x'y'}\mathbf{e}_{y'} + C_{x'z'}\mathbf{e}_{z'} \quad (7)$$

As rotações envolvem a aplicação de tensores de mudança de base no tensor de tensões original σ para obter este tensor na base nova, σ' . O passo a passo para a álgebra dessa mudança de base pode ser encontrado em [6]. Com essas operações, a componente da tensão normal e ambas componentes de tensão cisalhante do vetor de tensões pode ser obtido com as Equações 8, 9 e 10 em função dos componentes da matriz presente na Equação 11, também retiradas de [6].

$$N_{x'} = \sigma_{xx}a_{11}^2 + \sigma_{yy}a_{12}^2 + \sigma_{zz}a_{13}^2 + 2(\tau_{xy}a_{11}a_{12} + \tau_{xz}a_{11}a_{13} + \tau_{yz}a_{13}a_{12}) \quad (8)$$

$$C_{x'y'} = \sigma_{xx}a_{11}a_{21} + \sigma_{yy}a_{12}a_{22} + \sigma_{zz}a_{13}a_{23} + \tau_{xy}(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) \\ + \tau_{yz}(a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22}) + \tau_{xz}(a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) \quad (9)$$

$$C_{x'z'} = \sigma_{xx}a_{11}a_{31} + \sigma_{yy}a_{12}a_{32} + \sigma_{zz}a_{13}a_{33} + \tau_{xy}(a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}) \\ + \tau_{yz}(a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32}) + \tau_{xz}(a_{13}a_{31} + a_{11}a_{33}) \quad (10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ -\cos(\phi)\cos(\theta) & -\text{sen}(\phi)\cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \quad (11)$$

2.1.2. Tensão equivalente de Von Mises

Ao estudar corpos submetidos a carregamentos, é importante ter ideia do impacto que o estado de tensões realiza sobre esse corpo. Para isso utilizam-se critérios de escoamento, que comparam a tensão exercida no corpo com a tensão limite de escoamento do material [7].

Um dos critérios mais utilizados é o de Von Mises, também chamado de critério da energia de distorção máxima. Esse critério introduz a tensão equivalente de Von Mises (σ_{VM}) para caracterizar uma tensão equivalente ao estado de tensão σ em um

ponto estudado no corpo. A formulação dessa tensão para um estado de tensão genérico está presente na Equação 17 [8].

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}}{\sqrt{2}} \quad (12)$$

2.2. Fadiga

Fadiga é o mecanismo de dano causado por carregamentos repetitivos. Seu estudo é de suma importância para prever falhas de estruturas de engenharia, já que é a causa da maior parte dessas falhas [1]. Apesar de estruturas serem projetadas para não saírem do regime elástico, esforços cíclicos causam danos locais em regiões de concentração de tensão, podendo fomentar a nucleação de trincas que podem levar o componente à falha. A caracterização do aumento do dano em fadiga, a partir daí, ocorre com o aumento do tamanho da trinca de forma estável com as flutuações de carga e o dano máximo ocorre quando a trinca chega num tamanho específico onde essa propagação torna-se instável, causando a falha mecânica do material. [1, 8].

Para quantificar o dano de um jeito macroscópico utiliza-se o método S-N, criado por Wöhler. Esse método quantifica o dano com base no número de ciclos de carregamento (quantas vezes a carga passou pelo seu máximo e pelo seu mínimo) e também na amplitude de tensão experimentada no ponto da estrutura estudada [8]. Com essas informações, é necessária a realização de ensaios uniaxiais de fadiga, onde aplica-se uma carga senoidal em função do tempo na direção do eixo longitudinal do corpo de prova (CP). Definindo o eixo x como alinhada à direção longitudinal do CP, o estado de tensão, sendo uniaxial, pode ser definido somente pela componente σ_{xx} , descrita pela Equação 18 abaixo:

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_m + \sigma_a \text{sen}(\omega t) \quad (13)$$

Onde σ_{xx} é a tensão na direção longitudinal aplicada ao CP, σ_m é a tensão média, σ_a a amplitude de tensão, ω a frequência e t o tempo. A Figura 5 mostra a

história de tensão (gráfico tensão vs tempo) de um ensaio de fadiga uniaxial para ilustrar essas grandezas, sendo T o período para completar um ciclo de carregamento.

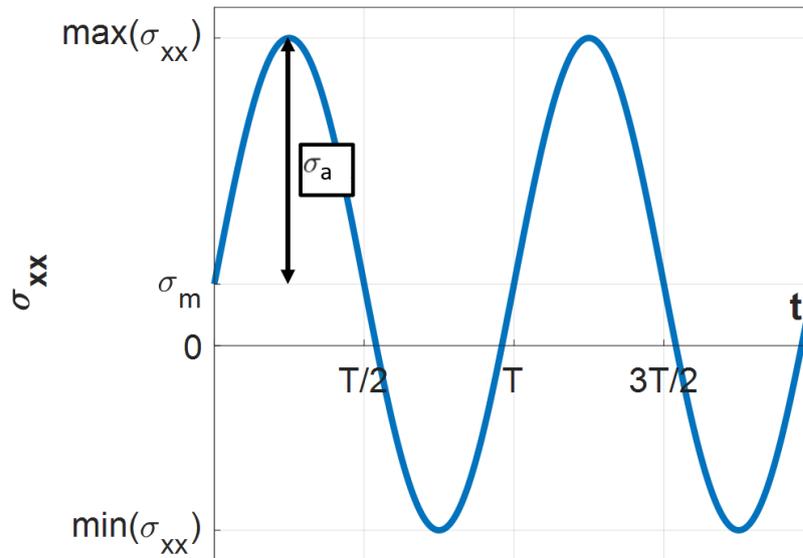


Figura 5. Gráfico tensão vs tempo do ensaio uniaxial de fadiga

Como visto na Figura 5, σ_m é definida como a média entre o máximo e o mínimo de σ_{xx} e σ_a como metade da diferença entre os mesmos máximo e mínimo.

Com a realização de ensaios de fadiga uniaxial, é possível alterar a amplitude de tensão σ_a e a tensão média σ_m para obter resultados sob diferentes níveis de carregamento. Esses ensaios são levados até a falha do corpo de provas, onde o número de ciclos é registrado. Com essas informações, é construída uma curva que relaciona amplitude de tensão com número de ciclos até a falha, chamada de S-N. Ela é feita ajustando uma curva aos resultados obtidos pelos ensaios. Um exemplo de curva S-N com 5 níveis de carregamento está presente na Figura 6, retirada de [8].

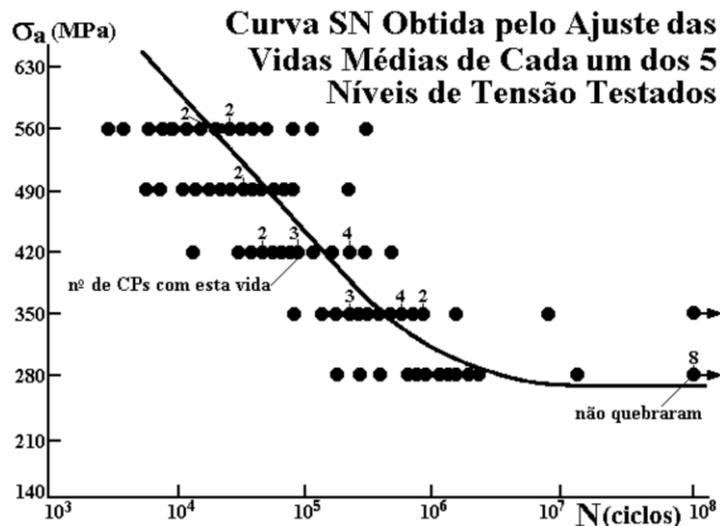


Figura 6. Exemplo de curva S-N retirada do livro [8]

Analisando a curva S-N, o comportamento geral é de que o aumento da amplitude de tensão causa diminuição no número de ciclos resistidos pelo material.

Os resultados obtidos por ensaios de fadiga têm altíssima dispersão. Por isso, faz-se necessária a realização de diversos ensaios com mesma condição de carregamento (mesma função $\sigma_{xx}(t)$), como pode ser visto na Figura 6.

É possível perceber um comportamento assintótico da curva SN ao atingir-se elevado número de ciclos de carregamento, onde a partir de uma certa amplitude de tensão a vida em fadiga (número de ciclos até a falha) parece ser infinita [8]. Essa amplitude de tensões é chamada de limite de resistência a fadiga. Para ensaios uniaxiais de tração pura, esse limite é chamado de f_{-1} , enquanto para ensaios de torção pura é chamado de t_{-1} .

2.3. Fadiga Multiaxial

Apesar do estudo da fadiga uniaxial ser de extrema importância para segurança e longevidade de estruturas de engenharia, diversos componentes mecânicos sofrem carregamentos combinados como, por exemplo, eixos virabrequins, eixos e lâminas de turbina [9]. Esses carregamentos tornam o problema de fadiga um problema multiaxial, onde modelagens uniaxiais subestimam o acúmulo de dano [2].

Um tipo de modelagem comum e bem aceita é a baseada em plano crítico: o plano material onde o dano por fadiga é maximizado. O plano crítico geralmente é encontrado varrendo diversos planos materiais no ponto de interesse e calculando, para cada um, a máxima tensão normal e a amplitude de tensão cisalhante, chamadas de N_{max} e C_a , respectivamente. A Tabela 1 a seguir traz algumas definições da nomenclatura a ser utilizada:

Tabela 1. Nomenclaturas para máxima tensão normal e amplitude de tensão cisalhante

$N_{max}(\theta, \phi)$	Máxima tensão normal em relação ao plano material cuja orientação é definida pelos ângulos ϕ e θ
$N_{max}(\theta_c, \phi_c)$	Máxima tensão normal em relação ao plano crítico cuja orientação é definida pelos ângulos ϕ_c e θ_c
$C_a(\theta, \phi)$	Amplitude de tensão cisalhante em relação ao plano material cuja orientação é definida pelos ângulos ϕ e θ
$C_a(\theta_c, \phi_c)$	Amplitude de tensão cisalhante em relação ao plano crítico cuja orientação é definida pelos ângulos ϕ_c e θ_c

A escolha dessas duas grandezas é feita porque, enquanto a amplitude de tensão cisalhante é o principal mecanismo para iniciação e propagação de trincas de fadiga, é a máxima tensão normal que pode acelerar a abertura da trinca, aplicando mais deformação em suas faces [2].

2.3.1. Critérios de fadiga multiaxial

Para definir o dano que um estado de tensões multiaxial causa num corpo carregado utiliza-se critérios de fadiga. Existem diversos critérios, mas os 4 estudados nesse trabalho serão os de Mataka [10], Susmel & Lazzarin [11], Findley [12] e Carpinteri & Spagnoli [13], cujas equações estão presentes a seguir, respectivamente.

$$C_a(\theta_c, \phi_c) + k_M N_{max}(\theta_c, \phi_c) \leq t_{-1} \quad (14)$$

$$C_a(\theta_c, \phi_c) + k_S \frac{N_{max}(\theta_c, \phi_c)}{C_a(\theta_c, \phi_c)} \leq t_{-1} \quad (15)$$

$$C_a(\theta_c, \phi_c) + k_F N_{max}(\theta_c, \phi_c) \leq \lambda_F \quad (16)$$

$$\sqrt{(N_{max}(\theta_c, \phi_c))^2 + k_C (C_a(\theta_c, \phi_c))^2} \leq f_{-1} \quad (17)$$

Onde f_{-1} e t_{-1} são as tensões limite de fadiga sob ensaios uniaxiais de tração pura e torção pura. Além disso, as constantes k_M , k_S , k_F , λ_F e k_C estão explicitadas abaixo.

$$k_M = 2 \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}} \right) - 1 \quad (18)$$

$$k_S = t_{-1} - \frac{f_{-1}}{2} \quad (19)$$

$$k_F = \frac{2 - \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} \right)}{2 \sqrt{\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1}} \quad (20)$$

$$\lambda_F = \sqrt{\frac{f_{-1}^2}{4 \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} - 1 \right)}} \quad (21)$$

$$k_C = \left(\frac{f_{-1}}{t_{-1}} \right)^2 \quad (22)$$

Observando as equações 19-22, percebe-se que esses critérios de fadiga são jeitos diferentes de comparar as tensões no plano crítico com propriedades do material. A inequação vem do fato de que, se a inequação não for satisfeita, existe a probabilidade de nucleação de uma trinca de fadiga no plano crítico [3].

Para contabilizar o quão prejudicial ao material é a condição de carregamento, é a grandeza índice de erro I_E , definida por:

$$I_E = 100 \frac{LHS - RHS}{RHS} \quad (23)$$

Sendo LHS o lado esquerdo da inequação do critério e RHS o lado direito. O índice de erro é expresso em porcentagem (por isso a expressão é multiplicada por 100%). $I_E > 0$ significa que $LHS > RHS$, ou seja, que haverá vida finita em fadiga. Já $I_E < 0$ significa $LHS < RHS$, que haverá vida infinita em fadiga. É claro que pela grande dispersão em fadiga, o fato de ser maior ou menor que 0 não garante a segurança ou não do corpo. Para isso, pode-se pensar que, quanto mais positivo for I_E , maior probabilidade de falha e, quanto mais negativo, menor probabilidade.

Cada critério utiliza um procedimento diferente para a definição da orientação crítica (θ_c, ϕ_c) , tentando encontrar o valor desses ângulos entre 0° e 180° . Matake faz uma primeira varredura afim de obter candidatos a planos críticos que contenham o maior valor de $C_a(\theta, \phi)$ [10]. A partir desses candidatos, o desempate é feito buscando as orientações com maior $N_{max}(\theta, \phi)$. O critério de Susmel & Lazzarin utiliza a mesma rota [11].

Para o critério de Findley, é fixado o ângulo θ em 90° , resultando somente numa varredura do ângulo ϕ a fim de se obter os planos em que o lado esquerdo da inequação de seu critério (Equação 16) seja máximo [12].

Para Carpinteri & Spagnoli também o ângulo θ é fixado em 90° . A rota é feita inicialmente encontrando as orientações de fratura do material (θ_f, ϕ_f) , definidos como os planos onde $N_{max}(\theta, \phi)$ é maximizada. O ângulo crítico ϕ_c é encontrado a partir do ângulo de fratura ϕ_f somado a um ângulo δ , cuja expressão encontra-se abaixo [13].

$$\delta = (45^\circ) \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{t_{-1}}{f_{-1}} \right)^2 \right] \quad (24)$$

$$\phi_c = \begin{cases} \phi_f + \delta, & \phi_f < 90^\circ \\ \phi_f - \delta, & \phi_f \geq 90^\circ \end{cases} \quad (25)$$

Com os ângulos θ_c e ϕ_c obtidos, as expressões para determinar $C_a(\theta_c, \phi_c)$ e $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ serão discutidas na seção 2.3.2 a seguir.

2.3.2. Métodos para obtenção da amplitude de tensão cisalhante

Num estado de fadiga multiaxial, o estado de tensões generalizado, com todas as componentes de tensão variando ao longo do tempo tem a seguinte representação:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_{yy}(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_{zz}(t) \end{pmatrix} \quad (26)$$

O vetor de tensões em um plano material de orientação θ, ϕ tem sua componente normal $N_{x'}(t)$ e suas cisalhantes $C_{x'y'}(t)$ e $C_{x'z'}(t)$ obtidas através das equações 8-11. Para obter $N_{max}(\theta, \phi)$, basta achar o máximo valor da tensão normal ao plano. Visto que $N(t)$ é um vetor que não muda de direção, a obtenção de $N_{max}(\theta, \phi)$ é simples:

$$N_{max}(\theta, \phi) = \max N(t) = \max N_{x'}(t) \quad (27)$$

O cálculo de $C_a(\theta, \phi)$ já é mais complexo, já que a componente de tensão cisalhante $C(t)$ muda de direção e módulo ao longo do tempo, dando origem a uma trajetória no plano material, como mostrado na Figura 7, retirada de [4].

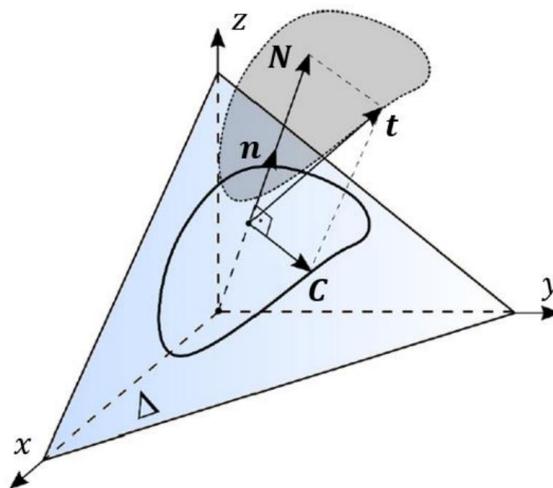


Figura 7. Trajetória da tensão cisalhante no plano material [4]

Para solucionar esse problema existem alguns métodos que podem ser utilizados. O primeiro deles, descrito em [14] é chamado de *Minimum Circumscribed Circle* (Mínimo círculo circunscrito). Nele, $C_a(\theta, \phi)$ tem valor igual ao raio da menor circunferência que circunscribe a trajetória da tensão cisalhante e $C_m(\theta, \phi)$ (tensão cisalhante média) é a norma do vetor que liga o centro do círculo com a origem do plano ($y'z'$). O algoritmo, que pode ser encontrado em [14], tem o procedimento listado a seguir.

Para cada iteração i , primeiramente calcula-se D :

$$D = \|C_i - C_{m,i-1}\| \quad (28)$$

Onde C_i é o vetor C na iteração i e $C_{m,i-1}$ é o vetor que liga a origem ao centro do círculo na iteração $i - 1$. Então, o raio novo é calculado como:

$$R_i = R_{i-1} + \kappa(D - R_{i-1}) \quad (29)$$

Onde R_i é o raio da iteração i , R_{i-1} é o raio da iteração $i - 1$ e κ é a taxa de aumento do raio. Assim, o processo é de transladar o centro em direção a C_i :

$$C_{m,i} = C_{m,i-1} + \frac{D - R}{D}(C_i - C_{m,i-1}) \quad (30)$$

Esse processo é repetido por uma certa quantidade de iterações até que a expressão abaixo atina um valor definido por uma tolerância tol .

$$tol > \frac{(R_i - R_{i-1})}{R_i} \quad (31)$$

Com o critério de parada atingido, tem-se que:

$$C_a(\theta, \phi) = R_{final} \quad (32)$$

O segundo critério a ser utilizado neste trabalho é o MRH, *Maximum Rectangular Hull* (Máxima envoltória retangular). Neste método, o valor de $C_a(\theta, \phi)$ é dado pela metade da diagonal da maior envoltória retangular que circunscreva a trajetória de $C(t)$. O algoritmo, que consta em [5], está descrito a seguir.

Primeiramente, cria-se uma varredura de um novo ângulo, α , de 0 a 90 graus. É feita uma rotação de α dos eixos y' e z' em torno de x' , obtendo-se as componentes $C_{x'y'}(\alpha, t)$ e $C_{x'z'}(\alpha, t)$. A partir daí, são definidas amplitudes de $C_{x'y'}(\alpha, t)$ e $C_{x'z'}(\alpha, t)$ para cada α :

$$a_1(\alpha) = \frac{1}{2} [\max C_{x'y'}(\alpha, t) - \min C_{x'y'}(\alpha, t)] \quad (33)$$

$$a_2(\alpha) = \frac{1}{2} [\max C_{x'z'}(\alpha, t) - \min C_{x'z'}(\alpha, t)] \quad (34)$$

Com as amplitudes $a_1(\alpha)$ e $a_2(\alpha)$, a amplitude de tensão cisalhante na base rotacionada em α se dá por:

$$C_a(\alpha) = \sqrt{a_1^2(\alpha) + a_2^2(\alpha)} \quad (35)$$

Com isso, a amplitude de tensão cisalhante da trajetória de tensão de C é dada buscando pelo α que maximize $C_a(\alpha)$:

$$C_a(\theta, \phi) = \max C_a(\alpha) \quad (36)$$

O terceiro e último método para calcular $C_a(\theta, \phi)$ é um método analítico. Este método se baseia no fato de que, quando o corpo é submetido somente a componentes de tração e torção síncronas (de mesma frequência), a trajetória da tensão cisalhante no plano material é um segmento de reta. Isso ocorre quando somente as componentes $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$ são não nulas e senoidais de mesma frequência [3].

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_m + \sigma_a \text{sen}(\omega t) \quad (37)$$

$$\tau_{xy}(t) = \tau_m + \tau_a \text{sen}(\omega t + \beta) \quad (38)$$

Sendo τ_m e τ_a , respectivamente, a média e a amplitude de $\tau_{xy}(t)$, enquanto β é o ângulo de defasagem entre $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$. Sob essas condições, a formulação para $C_a(\theta, \phi)$ é dada da seguinte forma:

$$C_a(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{f^2 + g^2 + p^2 + q^2}{2}\right)^2 - (fq - gp)^2}} \quad (39)$$

Onde as funções auxiliares f , g , p e q são dadas por:

$$f = \text{sen}(\theta) \left(-\frac{\sigma_a}{2} \text{sen}(2\phi) + \tau_a \cos(2\phi) \cos(\beta) \right) \quad (40)$$

$$g = -\tau_a \text{sen}(\theta) \cos(2\phi) \text{sen}(\beta) \quad (41)$$

$$p = -\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) (\sigma_a \cos^2(\phi) + \tau_a \text{sen}(2\phi) \cos(\beta)) \quad (42)$$

$$q = -\frac{1}{2} \tau_a \text{sen}(2\theta) \text{sen}(2\phi) \text{sen}(\beta) \quad (43)$$

3 Metodologia

Para comparar os métodos MCC e MRH na obtenção da amplitude da tensão cisalhante no plano crítico para os 4 critérios de fadiga citados (Matake, Susmel & Lazzarin, Findley e Carpinteri & Spagnoli), foi decidido avaliá-los sob as mesmas condições de carregamento utilizadas em [5], que são todas combinações de tração-compressão com torção-torção. Todas as condições de carregamento têm somente histórias de tensão $\sigma(t)_{xx}$ e $\tau(t)_{xy}$. As expressões das histórias de tensão e os estados de tensão associado a essas condições de carregamento são:

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_a \text{sen}(\omega_\sigma t) \quad (44)$$

$$\tau_{xy}(t) = \tau_a \text{sen}(\omega_\tau t + \beta) \quad (45)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{xy}(t) & 0 \\ \tau_{xy}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Como algumas condições de carregamento são assíncronas, as frequências dos sinais de $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$, ω_σ e ω_τ , são diferentes. Para identificar a razão entre frequências, é introduzida a variável λ_{xy} , que é a razão entre ω_τ e ω_σ .

$$\lambda_{xy} = \frac{\omega_\tau}{\omega_\sigma} \quad (47)$$

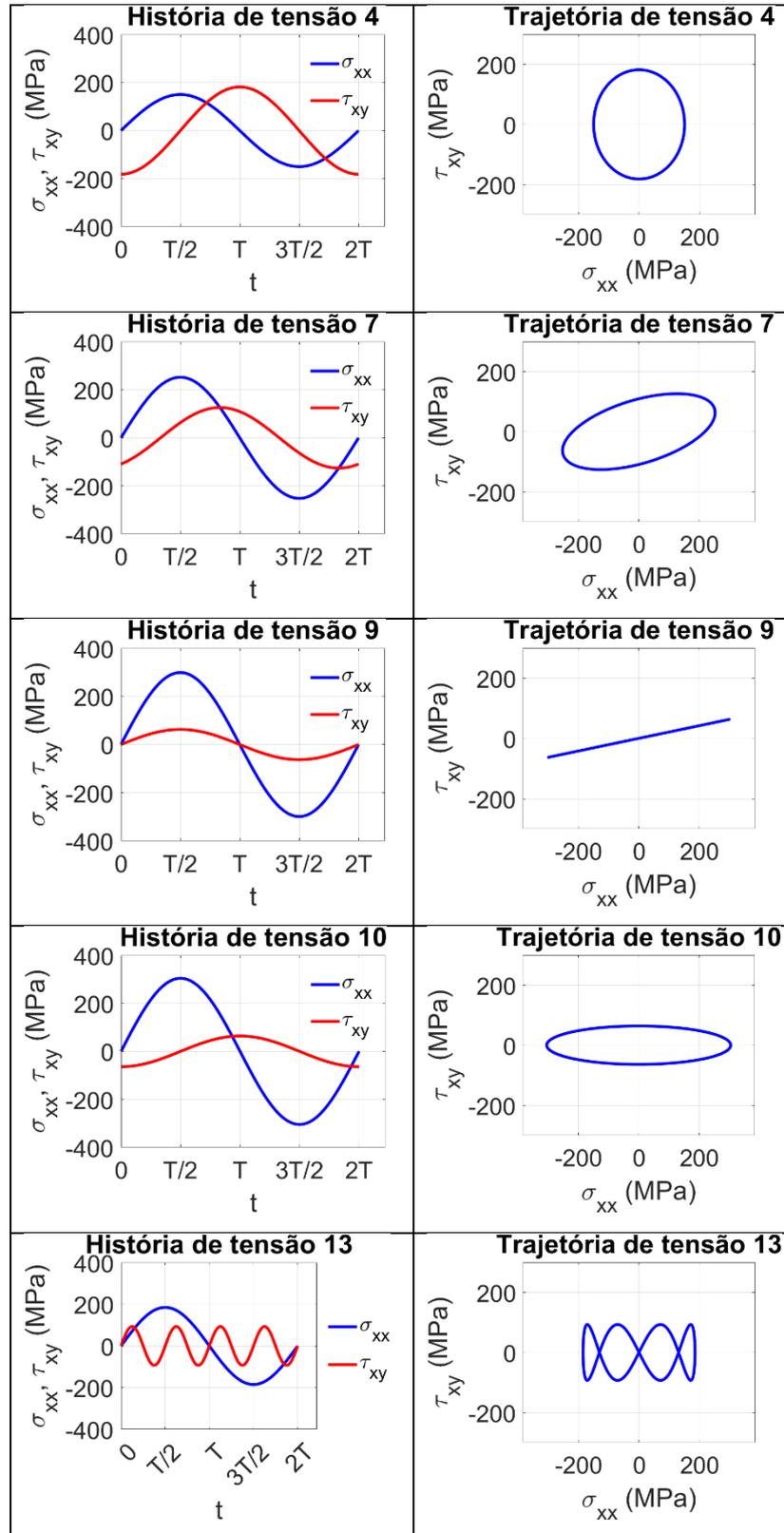
Quando $\lambda_{xy} = 1$, as histórias de tensão $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$ são síncronas, enquanto quando $\lambda_{xy} \neq 1$, elas são assíncronas. Essas condições de carregamento são ensaios de fadiga multiaxial feitos para alguns tipos diferentes de aço, o que significa que os limites de fadiga f_{-1} e t_{-1} diferem entre as condições de carregamento. Todas as condições levaram o respectivo material até a falha. A Tabela 2 mostra as variáveis de cada condição de carregamento e os limites de fadiga dos aços, enquanto a Tabela

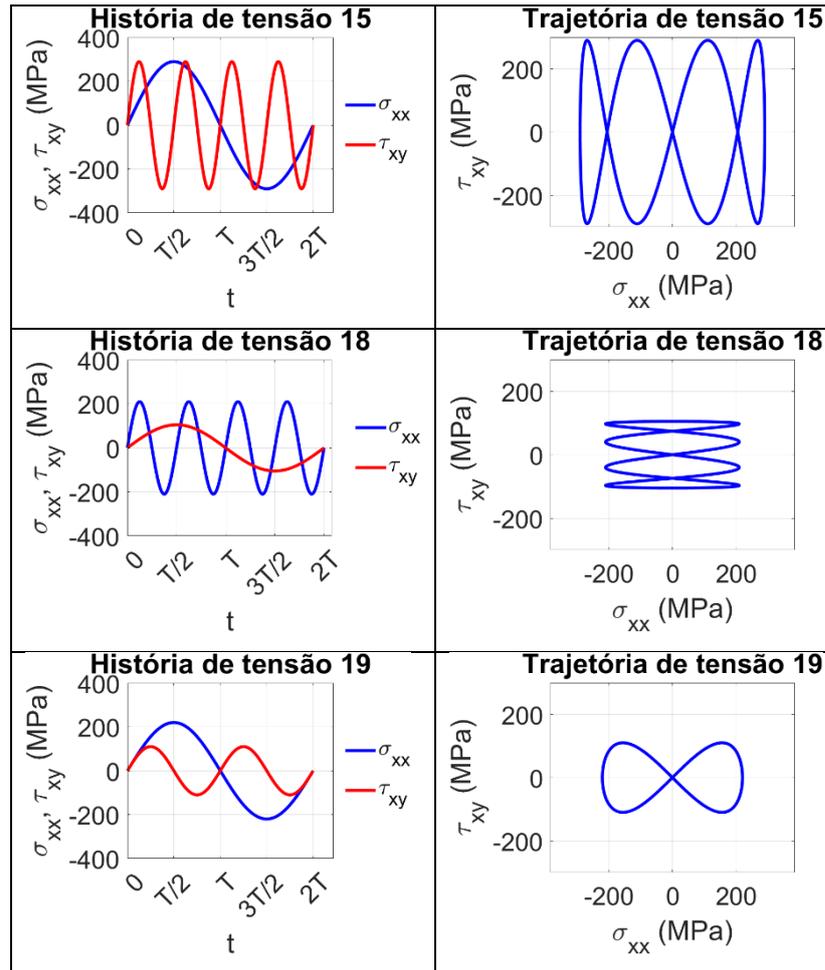
3 mostra as histórias e trajetórias de tensão ($\tau_{xy}(t)$ vs $\sigma_{xx}(t)$) para algumas das condições.

Tabela 2. Condições de carregamento utilizadas por [5]

Condição de carregamento	σ_a [MPa]	τ_a [MPa]	β [°]	λ_{xy}	f_{-1}	t_{-1}
1	138,1	167,1	0	1	319,9	196,2
2	140,4	169,9	30	1		
3	145,7	176,3	60			
4	150,2	181,7	90	1		
5	245,3	122,6	0	1		
6	249,7	124,8	30	1		
7	252,4	126,2	60	1		
8	258	129	90	1		
9	299,1	62,8	0	1		
10	304,5	63,9	90	1		
11	263	132	0	4	415	259
12	186	93	0	0,25	275	249
13	185	93	0	4		
14	285	285	0	0,25	585	405
15	290	290	0	4		
16	259,5	150	0	2		
17	266	153,6	0	3		
18	210	105	0	0,25	340	228
19	220	110	0	2		
20	242	121	90	2		
21	196	98	0	8		

Tabela 3. Exemplos de histórias e trajetórias de tensão estudadas





Sob as condições 1-10, como há mesma frequência entre $\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$, pode-se comparar MCC e MRH com o método analítico para obtenção da tensão cisalhante no plano material $C_a(\theta, \phi)$.

Com isso posto, a metodologia consiste em, para cada um dos 4 critérios de fadiga, comparar as orientações críticas (θ_c, ϕ_c) e os resultados $C_a(\theta_c, \phi_c)$ e $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ através dos métodos MCC e MRH (e analítico para condições 1-10), além de comparar o índice de erro I_E com relação a cada critério. A comparação será realizada gerando tabelas com as orientações críticas e gráficos para cada combinação de critério de fadiga com grandeza (C_a , N_{max} e I_E). Além disso, as condições de carregamento que derem orientações críticas diferentes entre MCC e MRH serão comparadas quanto à máxima tensão equivalente de Von Mises aplicada ao plano crítico.

3.1. Implementação da metodologia

Para a implementação da metodologia, o software Matlab foi utilizado. Foram escritos um total de 9 códigos Matlab divididos em 4 categorias para obtenção dos resultados: 1 código principal, 3 códigos para obtenção de planos críticos, 3 códigos para cálculo da amplitude de tensão cisalhante e 1 código para obtenção de gráficos comparativos entre métodos. Cada um dos códigos está mais detalhado abaixo.

3.1.1. Códigos para cálculo da amplitude de tensão cisalhante

Esses códigos são funções nomeadas a partir dos métodos para cálculo de $C_a(\theta, \phi)$ no plano material: MCC, MRH e analítico. Todos os códigos têm como objetivo calcular a amplitude de tensão cisalhante num plano material com orientação (θ, ϕ) qualquer.

Tanto MCC quanto MRH recebem as componentes verticais e horizontais da tensão cisalhante do plano material ($C_{x'y'}(\theta, \phi, t)$ e $C_{x'z'}(\theta, \phi, t)$) e calculam $C_a(\theta, \phi)$ pelos respectivos métodos iterativos. No caso do MCC, foi escolhido raio inicial $R_0 = 0,05$, taxa de aumento de raio $\chi = 0,05$ e tolerância de diferença entre os raios da iteração atual e da anterior igual a 10^{-9} . No caso do MRH, a variação do ângulo escolhida foi de $\Delta\alpha = 1^\circ$.

Já para o método analítico, como seu resultado não depende $C_{x'y'}$ e $C_{x'z'}$, a função recebe os ângulos de orientação do plano material (θ e ϕ), as amplitudes de tensão da condição de carregamento (σ_a e τ_a) e o ângulo de defasagem β . O cálculo de $C_a(\theta, \phi)$ é feito somente aplicando essas entradas à equação 44.

3.1.2. Códigos para encontrar planos críticos

Esses códigos são funções nomeadas a partir dos critérios de fadiga multiaxial Matake, Findley e Carpinteri & Spagnoli. Não há código para encontrar o plano crítico por Susmel & Lazzarin porque este critério utiliza a mesma definição de Matake. Em

todos os códigos é realizada uma varredura de ângulos ϕ para cada ângulo θ e, para cada par (θ, ϕ) , são calculados $C_{x'y'}(\theta, \phi, t)$, $C_{x'z'}(\theta, \phi, t)$ e a tensão normal ao plano $N_{x'}(\theta, \phi, t)$. Essa varredura é feita com a variação do ângulo θ igual a $\Delta\theta = 45^\circ$ e com a variação do ângulo ϕ igual a $\Delta\phi = 1^\circ$. No caso específico de Carpinteri & Spagnoli, θ será igual a 90° em todo momento.

Os códigos recebem como entradas as histórias de tensão ($\sigma_{xx}(t)$ e $\tau_{xy}(t)$), as amplitudes de tensão da condição de carregamento (σ_a e τ_a), o ângulo de defasagem β e uma *string* que denota qual dos métodos para cálculo de $C_a(\theta, \phi)$ será utilizado. Gera-se então uma tabela com cada combinação orientação (θ, ϕ) contando com amplitude de tensão cisalhante e máxima tensão normal de cada orientação ($C_a(\theta, \phi)$ e $N_{max}(\theta, \phi)$). A diferença entre cada código se dá somente na escolha das orientações críticas (θ_c, ϕ_c) . Todos retornam as orientações críticas (θ_c, ϕ_c) , amplitude de tensão cisalhante no(s) plano(s) crítico(s) $C_a(\theta_c, \phi_c)$ e máxima tensão normal no(s) mesmo(s) plano(s) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$.

3.1.3. Código principal

O primeiro objetivo do código principal é ceder as informações das condições de carregamento $\sigma_{xx}(t)$, $\tau_{xy}(t)$, σ_a , τ_a e β às funções para encontrar planos críticos e receber as informações (θ_c, ϕ_c) , $C_a(\theta_c, \phi_c)$ e $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$. Com a seleção tanto das *strings* que denotam tanto o método para obtenção de $C_a(\theta, \phi)$ quanto dos critérios de fadiga, esse código recebe $C_a(\theta_c, \phi_c)$ e $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ para calcular o índice de erro I_E .

Para cada uma das 21 condições de carregamento de [5], o processo é refeito e, ao final, o código armazena numa planilha σ_a , τ_a , β , θ_c , ϕ_c , $C_a(\theta_c, \phi_c)$, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ e I_E de cada condição de carregamento. Assim, é feita uma tabela para cada combinação método-critério, obtendo-se 12 tabelas para condições de carregamento síncronas e 12 para condições assíncronas.

3.1.4. Código para geração de gráficos

Este código, sendo o mais simples, tem por objetivo concatenar as 3 tabelas de cada critério de fadiga e plotar três gráficos: $C_a(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento e I_E vs condição de carregamento. Cada gráfico contém, na mesma janela, os resultados obtidos por cada um dos três métodos de obtenção de $C_a(\theta, \phi)$. O código é usado então 4 vezes, uma para cada um dos critérios de fadiga, gerando assim 24 gráficos (12 para condições síncronas e 12 para assíncronas).

4 Resultados e discussões

Realizando a metodologia descrita anteriormente, as seções a seguir estão separadas por critério de fadiga. Essa seção será dividida em resultados para condições de carregamento síncronas e assíncrona. Em cada uma, serão expostos os resultados para cada critério de fadiga, encontrando-se tabelas com orientações críticas, resultados de amplitude de tensão cisalhante no plano crítico, de máxima tensão normal no plano crítico e índices de erro.

4.1. Condições de carregamento síncronas

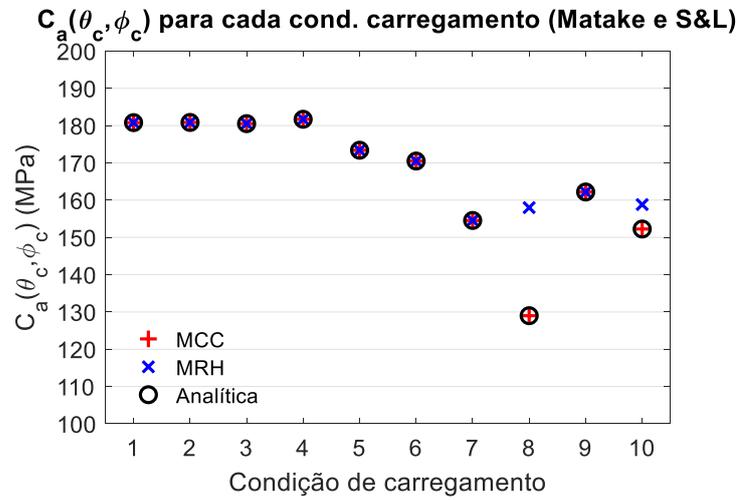
4.1.1. Matake e Susmel & Lazzarin

A Tabela 4 apresenta as orientações críticas obtidas com o critério de Matake (o mesmo de Susmel & Lazzarin para orientações críticas) utilizando as metodologias MCC, MRH e analítica, enquanto os gráficos $C_a(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento e I_E vs condição de carregamento estão disponíveis nas Figura 8 (a), (b) e (c), respectivamente. Já o gráfico I_E vs condição de carregamento para o critério de Susmel & Lazzarin encontra-se na Figura 9.

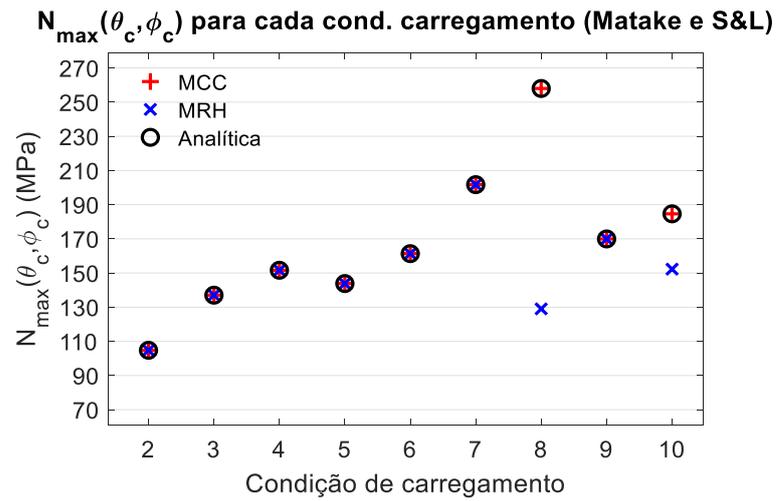
Tabela 4. Orientações crítica para critérios de Matake e S&L para cond. síncronas

Cond.	MCC		MRH		Analítica	
	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$
1	90°, 75°	-	90°, 75°	-	90°, 75°	-
2	90°, 173°	-	90°, 173°	-	90°, 173°	-
3	90°, 177°	-	90°, 177°	-	90°, 177°	-
4	90°, 4°	90°, 176°	90°, 4°	90°, 176°	90°, 4°	90°, 176°
5	90°, 161°	-	90°, 161°	-	90°, 161°	-
6	90°, 161°	-	90°, 161°	-	90°, 161°	-
7	90°, 162°	-	90°, 162°	-	90°, 162°	-

8	90°, 0°	-	45°, 0°	135°, 0°	90°, 0°	-
9	90°, 150°	-	90°, 150°	-	90°, 150°	-
10	90°, 41°	90°, 139°	45°, 0°	135°, 0°	90°, 41°	90°, 139°



(a)



(b)

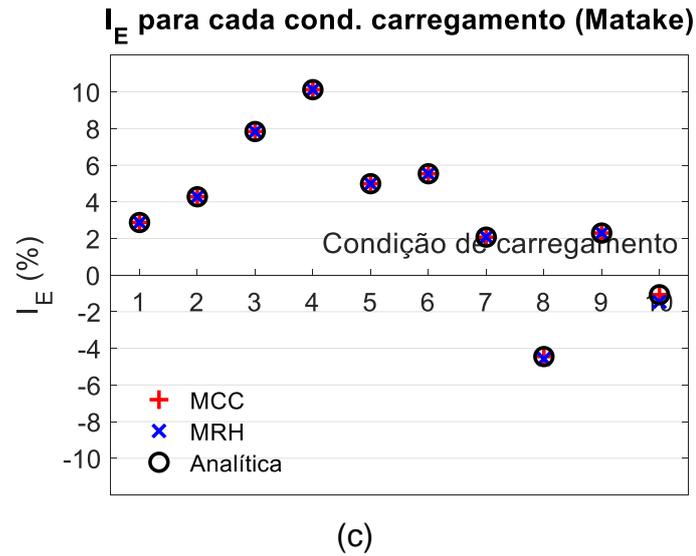


Figura 8. Resultados para cond. síncronas utilizando Matake: (a) $C_a(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) I_E

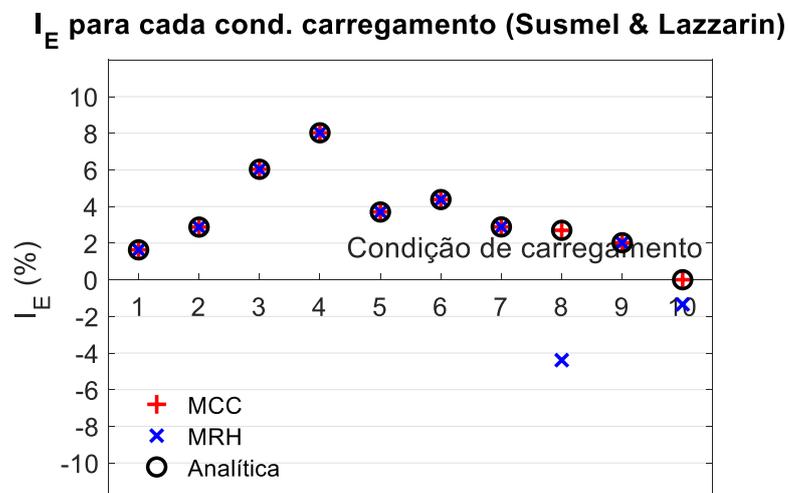


Figura 9. I_E utilizando Susmel & Lazzarin para cond. síncronas

Ao analisar a Tabela 4, percebe-se que somente há diferença em orientações críticas nas condições 8 e 10. Nesses casos, a discrepância entre MCC e MRH ocorre porque, com $\theta = 90^\circ$, a trajetória da tensão cisalhante é uma função linear entre $C_{x'z'}$ e $C_{x'y'}$. O método MRH entende, no geral, esse tipo de trajetória como menos danosa do que uma trajetória elíptica (dependendo dos tamanhos dos semi-eixos), já que a envoltória se torna um retângulo com um dos lados iguais a 0. Já com $\theta = 45^\circ$ e $\theta = 135^\circ$, a trajetória é uma elipse que muda de inclinação e tamanho conforme a

passagem de ϕ , o que indica maior quantidade de dano para o MRH. As Figura 10 e Figura 11 apresentam as trajetórias de tensão cisalhante em $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 45^\circ$ para a condição 8, respectivamente.

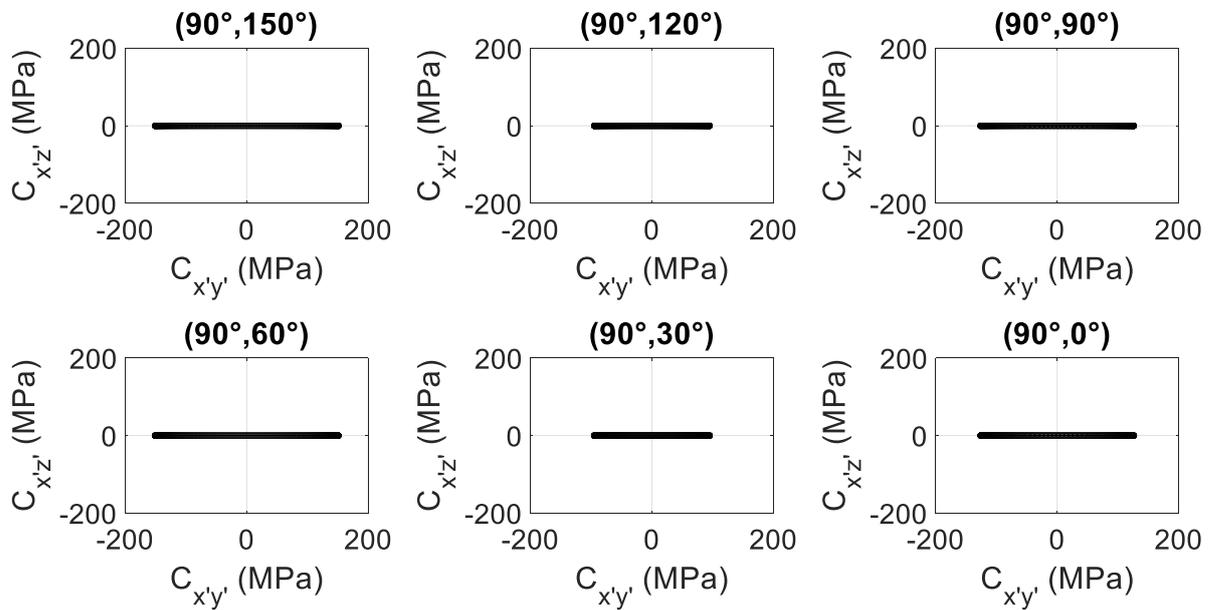


Figura 10. Trajetória da tensão cisalhante da condição 8 em $\theta = 90^\circ$

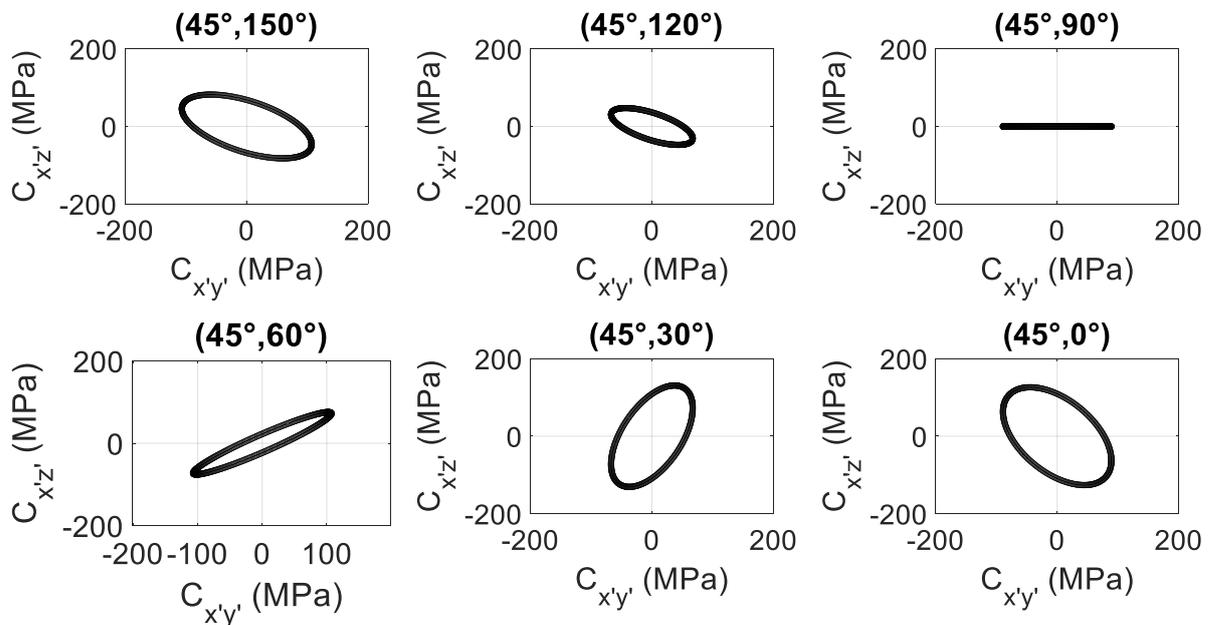


Figura 11. Trajetória da tensão cisalhante da condição 8 em $\theta = 45^\circ$

Com relação aos resultados da Figura 8, há diferenças em índice de erro nas mesmas condições de carregamento em que há diferença nas orientações críticas entre MRH e os demais métodos (8 e 10).

Na condição 8, o valor de $C_a(\theta_c, \phi_c)$ com MRH é superestimado em pouco menos de 30 MPa em relação aos demais, mas o de $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ é menor em 130 MPa em relação aos métodos analítico e MCC. Essas discrepâncias causam poucas diferenças em relação ao dano em Mataka, deixando os 3 índices de erro por volta de -4,5%. Já com o critério de Susmel & Lazzarin, a diferença em $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ causa bruscas diferenças em I_E , com valor de -4,4% para MRH e 2,7% para os demais.

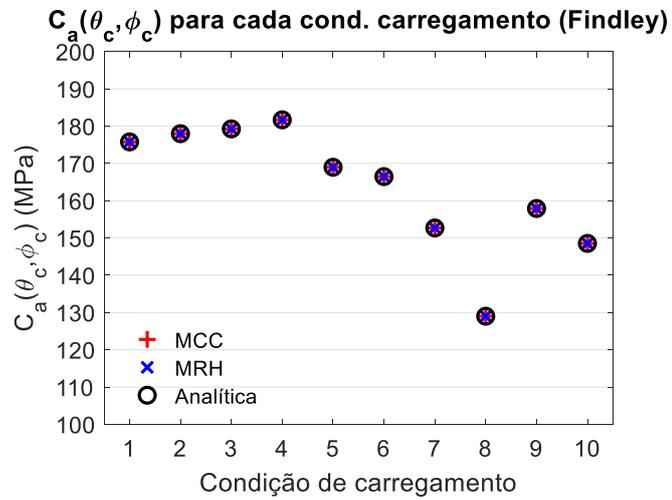
4.1.2. Findley

A Tabela 5 apresenta as orientações críticas obtidas com o critério de Findley utilizando as metodologias MCC, MRH e analítica, enquanto os gráficos $C_a(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento e I_E vs condição de carregamento estão disponíveis nas Figura 12 (a), (b) e (c), respectivamente.

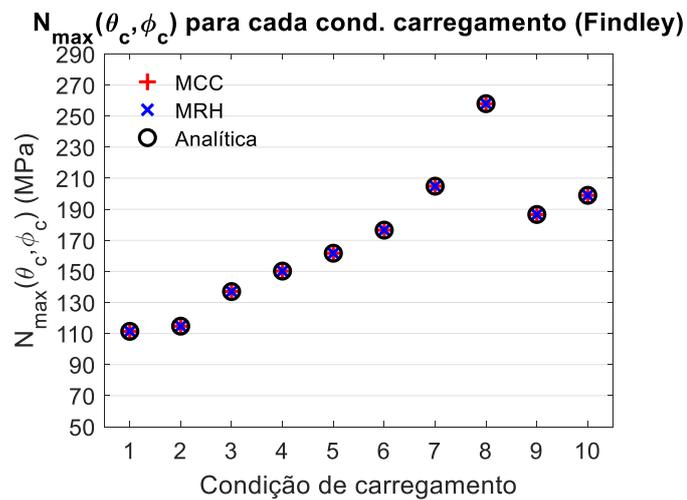
Tabela 5. Orientações críticas pelo critério de Findley para cond. síncronas

Cond. Carregamento	MCC		MRH		Analítico	
	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$
1	90°, 72°	-	90°, 72°	-	90°, 72°	-
2	90°, 175°	-	90°, 175°	-	90°, 175°	-
3	90°, 177°	-	90°, 177°	-	90°, 177°	-
4	90°, 0°	-	90°, 0°	-	90°, 0°	-
5	90°, 164°	-	90°, 164°	-	90°, 164°	-
6	90°, 164°	-	90°, 164°	-	90°, 164°	-
7	90°, 163°	-	90°, 163°	-	90°, 163°	-
8	90°, 0°	-	90°, 0°	-	90°, 0°	-

9	90°, 153°	-	90°, 153°	-	90°, 153°	-
10	90°, 38°	90°, 142°	90°, 38°	90°, 142°	90°, 38°	90°, 142°



(a)



(b)

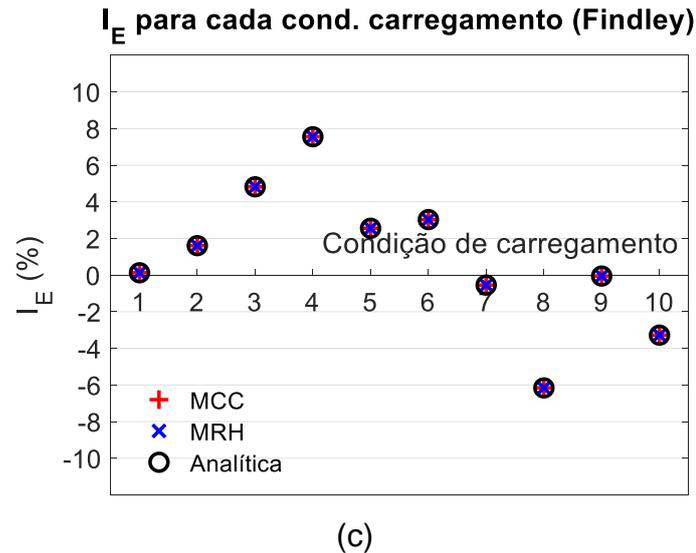


Figura 12. Resultados para cond. síncronas utilizando Findley (a) $C_a(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) I_E

Ao analisar a Tabela 5, nota-se que todas as orientações críticas foram iguais para cada condição de carregamento, comparando-se MCC, MRH e analítica. Além disso, os valores de $C_a(\theta_c, \phi_c)$, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ e, conseqüentemente I_E também não diferem. É interessante reparar que, para todas as condições de carregamento, o valor de θ_c é sempre de 90° , assim como no critério de Mataka.

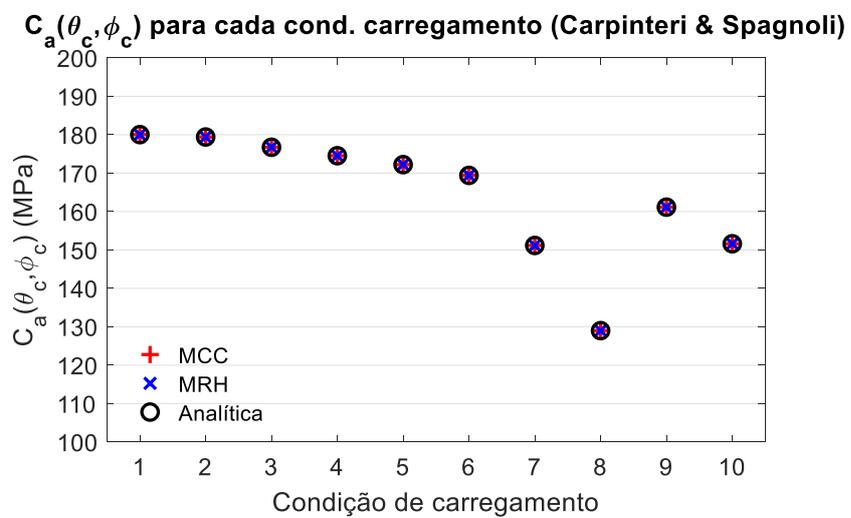
O motivo pelo qual não existem discrepâncias entre MCC e MRH em nenhuma das condições está relacionado ao fato de que a máxima tensão normal no plano material também é considerada para encontrar o plano crítico. Assim, mesmo nos casos em que há maior amplitude de tensão cisalhante por MRH, a combinação de $C_a(\theta, \phi)$ com $N_{max}(\theta, \phi)$ limita a busca a candidatos com as duas grandezas elevadas.

4.1.3. Carpinteri & Spagnoli

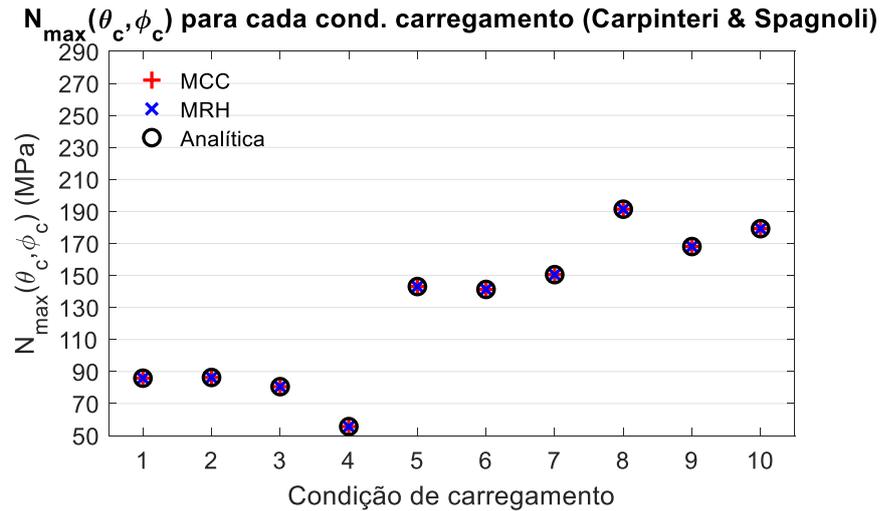
A Tabela 6 apresenta as orientações críticas obtidas com o critério de Carpinteri & Spagnoli utilizando as metodologias MCC, MRH e analítica, enquanto os gráficos $C_a(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento e I_E vs condição de carregamento estão disponíveis nas Figura 13 (a), (b) e (c), respectivamente.

Tabela 6. Orientações críticas pelo critério de Carpinteri & Spagnoli para cond. síncronas

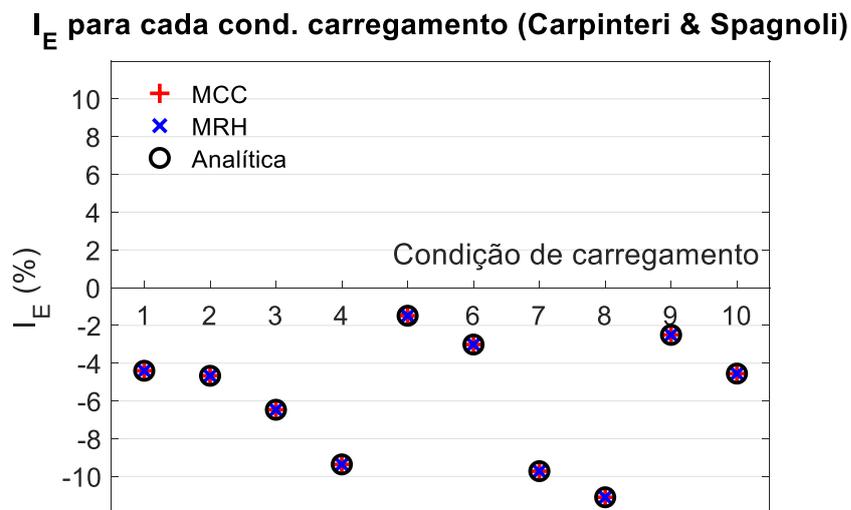
Cond. Carreg	MCC		MRH		Analítico	
	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$
1	90°, 76,11°	-	90°, 76,11°	-	90°, 76,11°	-
2	90°, 76,11°	-	90°, 76,11°	-	90°, 76,11°	-
3	90°, 77,11°	-	90°, 77,11°	-	90°, 77,11°	-
4	90°, 81,11°	90°, 98,89°	90°, 81,11°	90°, 98,89°	90°, 81,11°	90°, 98,89°
5	90°, 64,11°	-	90°, 64,11°	-	90°, 64,11°	-
6	90°, 64,11°	-	90°, 64,11°	-	90°, 64,11°	-
7	90°, 60,11°	-	90°, 60,11°	-	90°, 60,11°	-
8	90°, 42,11°	-	90°, 42,11°	-	90°, 42,11°	-
9	90°, 53,11°	-	90°, 53,11°	-	90°, 53,11°	-
10	90°, 42,11°	-	90°, 42,11°	-	90°, 42,11°	-



(a)



(b)



(c)

Figura 13. Resultados para cond. síncronas utilizando Carpinteri & Spagnoli (a)

$C_a(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{\max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) I_E

Pela Tabela 6, percebe-se que, assim como em Findley, não há diferença entre as orientações críticas obtidas pelos métodos MCC, MRH e analítico para nenhuma das condições. Além disso, os valores de $C_a(\theta_c, \phi_c)$, $N_{\max}(\theta_c, \phi_c)$ e, conseqüentemente I_E também não diferem.

No caso de Carpinteri & Spagnoli, a permanência em $\theta_c = 90^\circ$ é um dos requisitos desse critério, já que se sabe que pelo menos um plano de fratura existe nessa orientação em qualquer caso.

4.2. Condições de carregamento assíncronas

4.2.1. Matake e Susmel & Lazzarin

A Tabela 7. Orientações crítica para critérios de Matake e S&L para cond. assíncronas apresenta as orientações críticas obtidas com o critério de Matake (o mesmo de Susmel & Lazzarin para orientações críticas) utilizando as metodologias MCC e MRH, enquanto os gráficos $C_a(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento e I_E vs condição de carregamento estão disponíveis nas Figura 14 (a), (b) e (c), respectivamente. Já o gráfico I_E vs condição de carregamento para o critério de Susmel & Lazzarin encontra-se na Figura 15.

Tabela 7. Orientações crítica para critérios de Matake e S&L para cond. assíncronas

Cond. Carregamento	MCC		MRH			
	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_3$	$(\theta_c, \phi_c)_4$
11	90°, 23°	90°, 157°	45°, 8°	45°, 172°	135°, 8°	135°, 172°
12	90°, 21°	90°, 159°	45°, 9°	45°, 171°	135°, 9°	135°, 171°
13	90°, 23°	90°, 157°	45°, 8°	45°, 172°	135°, 8°	135°, 172°
14	90°, 17°	90°, 163°	45°, 7°	45°, 173°	135°, 7°	135°, 173°
15	90°, 16°	90°, 164°	45°, 7°	45°, 173°	135°, 7°	135°, 173°
16	90°, 21°	90°, 159°	45°, 8°	45°, 172°	135°, 8°	135°, 172°
17	90°, 24°	-	45°, 172°	135°, 8°	-	-
18	90°, 21°	90°, 159°	45°, 9°	45°, 171°	135°, 9°	135°, 171°
19	90°, 21°	90°, 159°	45°, 8°	45°, 172°	135°, 8°	135°, 172°
20	90°, 19°	-	45°, 8°	135°, 8°	-	-
21	90°, 23°	90°, 157°	45°, 8°	45°, 172°	135°, 8°	135°, 172°

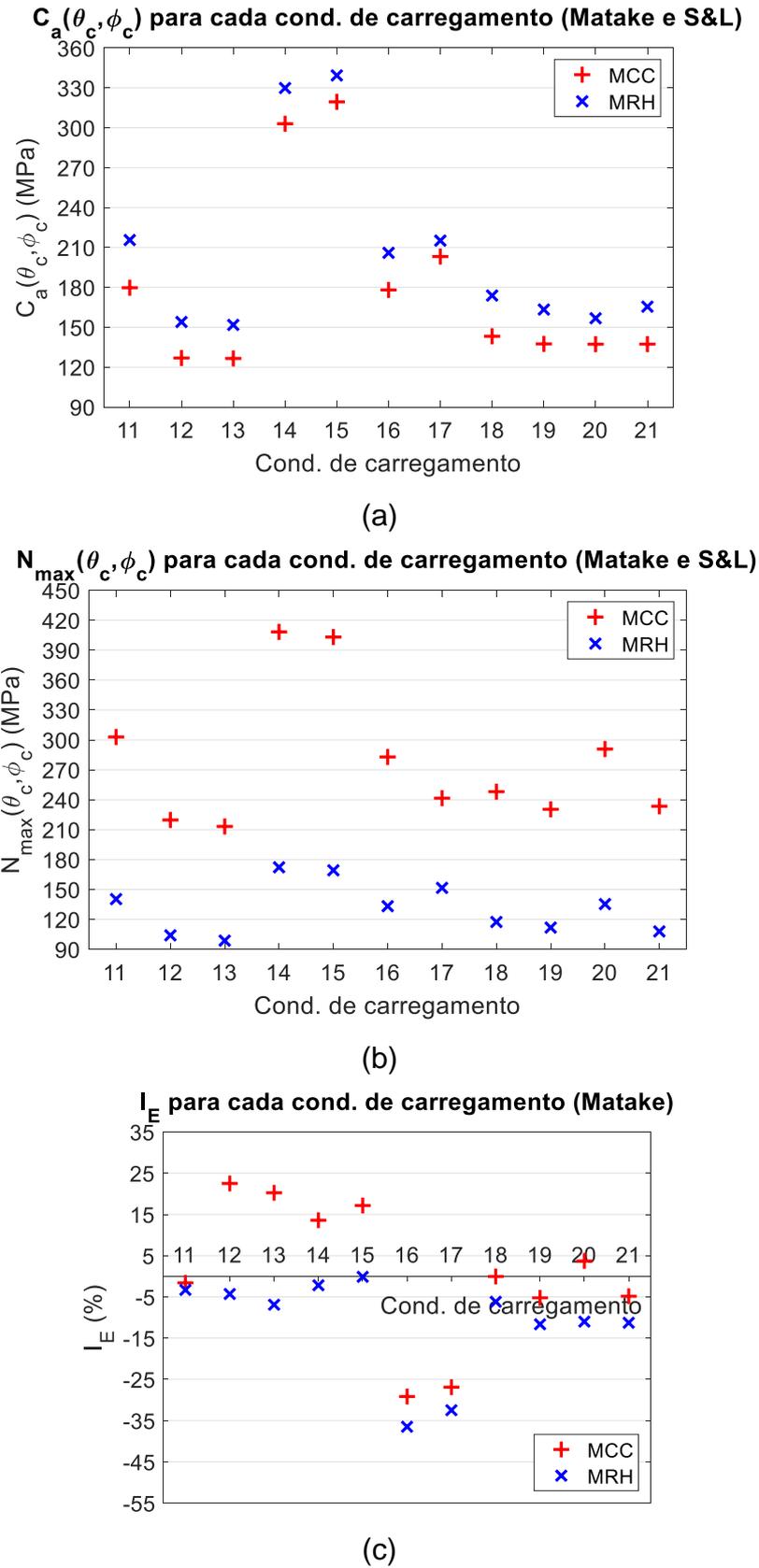


Figura 14. Resultados para cond. assíncronas utilizando Matake (a) $C_a(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) I_E

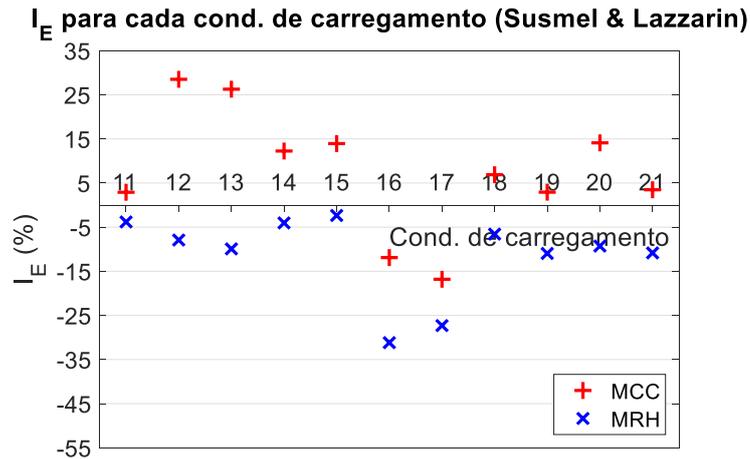


Figura 15. I_E para cond. assíncronas utilizando Susmel & Lazzarin

Ao analisar a Tabela 7, percebe-se que somente há diferença em orientações críticas em todas as condições de carregamento assíncronas. Todas as orientações críticas utilizando MCC têm $\theta_c = 90$ e todas utilizando MRH têm $\theta_c = 45$ e $\theta_c = 135$. É interessante reparar que as mesmas condições de carregamento que geram 2 planos críticos com ângulos ϕ_c suplementares ($\phi_2 = 180 - \phi_1$) para MCC geram para MRH (condições 17 e 20).

Pela Figura 14(a) é notável que os valores de $C_a(\theta_c, \phi_c)$ obtidos por MRH são sempre superiores aos obtidos por MCC, com uma diferença próxima de 30 MPa em média. Já pela Figura 14(b), nota-se uma diferença enorme entre os valores de $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ gerados pelos dois métodos, sendo os valores de MCC maiores que os de MRH. A menor diferença está em torno de 90 MPa na condição 17.

Por fim, pelas Figura 14(c) e Figura 15, percebe-se que os índices de erro utilizando MCC são todos superiores aos obtidos utilizando MRH. Isso denota uma clara tendência do método MRH gerar resultados mais conservadores que MCC. Pelo critério de Matake, somente 5 condições de carregamento mostraram MCC com IE maior que 0, enquanto com o de Susmel & Lazzarin esse número sobe para 9. Com relação ao MRH, não há diferença relevante entre os valores de IE pelos dois critérios.

4.2.2. Findley

A Tabela 8 apresenta as orientações críticas obtidas com o critério de Findley utilizando as metodologias MCC e MRH, enquanto os gráficos $C_a(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento e I_E vs condição de carregamento estão disponíveis nas Figura 16 (a), (b) e (c), respectivamente.

Tabela 8. Orientações críticas pelo critério de Findley para cond. assíncronas

Cond. Carregamento	MCC		MRH	
	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$
11	90°, 22°	90°, 158°	90°, 22°	90°, 158°
12	90°, 22°	90°, 158°	90°, 22°	90°, 158°
13	90°, 23°	90°, 157°	90°, 23°	90°, 157°
14	90°, 19°	90°, 161°	90°, 19°	90°, 161°
15	90°, 18°	90°, 162°	90°, 18°	90°, 162°
16	90°, 19°	90°, 161°	90°, 19°	90°, 161°
17	90°, 163°	-	90°, 163°	-
18	90°, 23°	90°, 157°	90°, 23°	90°, 157°
19	90°, 20°	90°, 160°	90°, 20°	90°, 160°
20	90°, 18°	-	90°, 18°	-
21	90°, 22°	90°, 158°	90°, 22°	90°, 158°

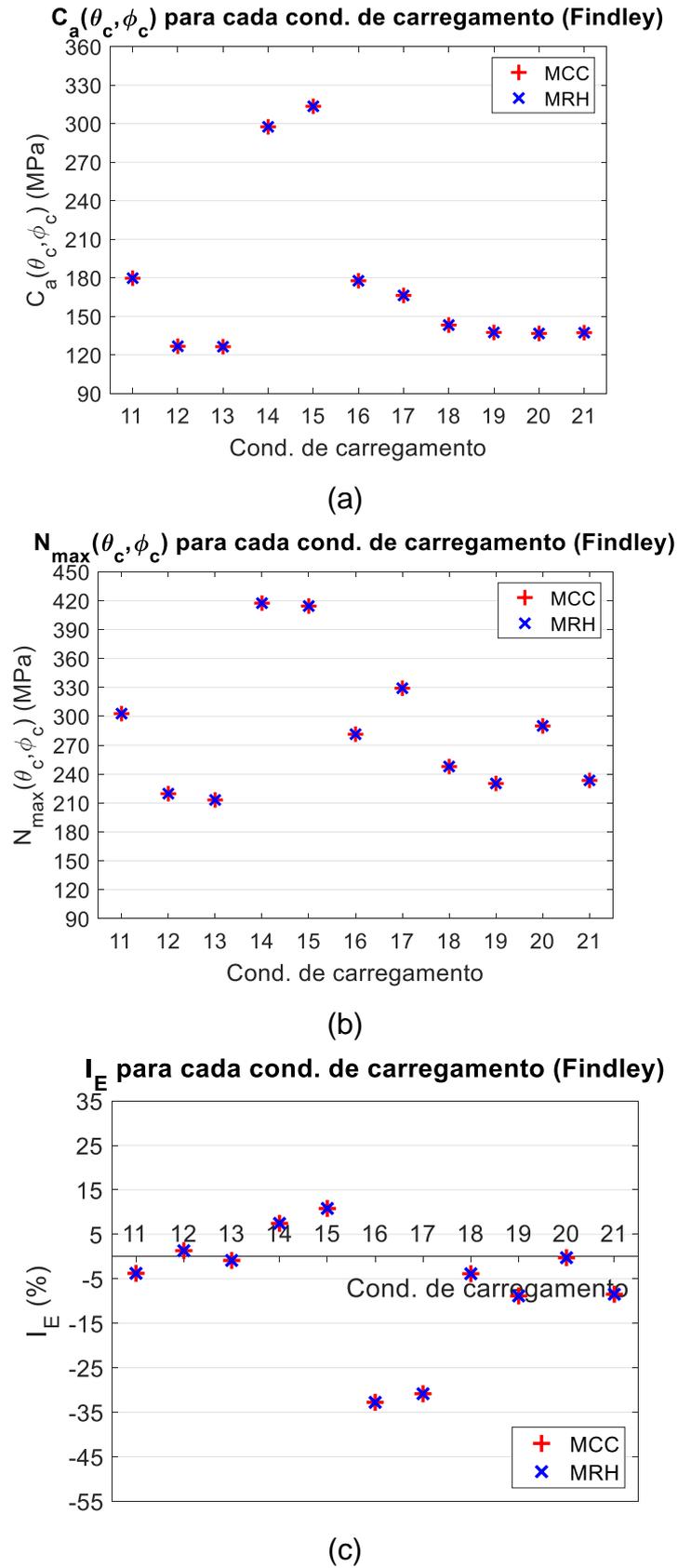


Figura 16. Resultados para cond. assíncronas utilizando Findley (a) $C_a(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) I_E

Ao analisar a Tabela 8, nota-se que todas as orientações críticas foram iguais para cada condição, comparando-se MCC e MRH. Assim como em Matake e Susmel & Lazzarin, as mesmas orientações críticas são suplementares. Pelas Figura 16 (a), (b) e (c) nota-se também a constância das três grandezas entre os métodos, assim como ocorrido com as condições de carregamento síncronas.

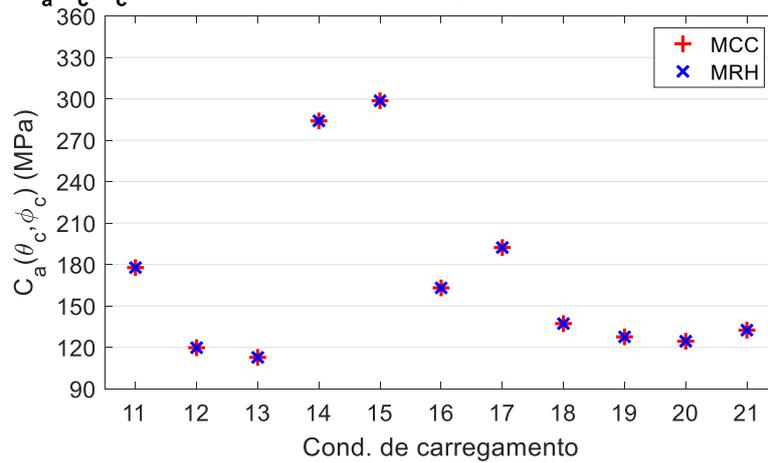
4.2.3. Carpinteri & Spagnoli

A Tabela 9 apresenta as orientações críticas obtidas com o critério de Carpinteri & Spagnoli utilizando as metodologias MCC e MRH, enquanto os gráficos $C_a(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ vs condição de carregamento e I_E vs condição de carregamento estão disponíveis nas Figura 17 (a), (b) e (c), respectivamente.

Tabela 9. Orientações críticas pelo critério de Carpinteri & Spagnoli para cond. assíncronas

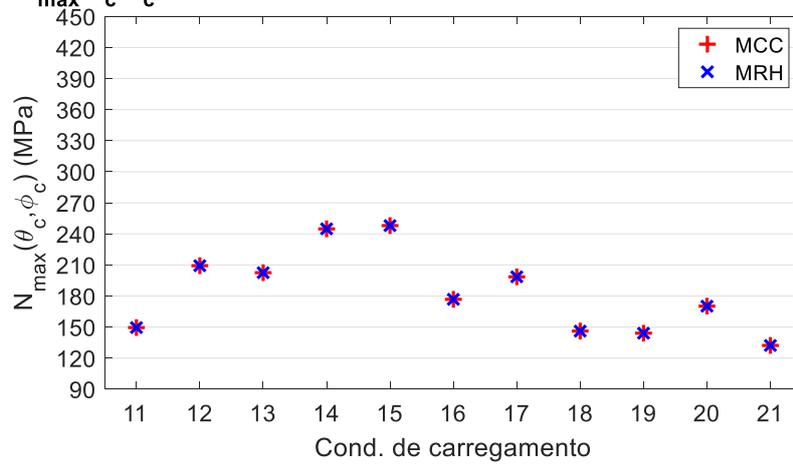
Cond. carregamento	MCC		MRH	
	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$	$(\theta_c, \phi_c)_1$	$(\theta_c, \phi_c)_2$
11	90°, 64,21°	90°, 115,79°	90°, 64,21°	90°, 115,79°
12	90°, 33,16°	90°, 146,84°	90°, 33,16°	90°, 146,84°
13	90°, 35,16°	90°, 144,84°	90°, 35,16°	90°, 144,84°
14	90°, 66,15°	90°, 113,85°	90°, 66,15°	90°, 113,85°
15	90°, 67,15°	90°, 112,85°	90°, 67,15°	90°, 112,85°
16	90°, 60,15°	90°, 119,85°	90°, 60,15°	90°, 119,85°
17	90°, 119,85°	-	90°, 119,85°	-
18	90°, 58,15°	90°, 121,85°	90°, 58,15°	90°, 121,85°
19	90°, 58,15°	90°, 121,85°	90°, 58,15°	90°, 121,85°
20	90°, 59,15°	90°, 60,15°	90°, 59,15°	90°, 60,15°
21	90°, 60,15°	90°, 119,85°	90°, 60,15°	90°, 119,85°

$C_a(\theta_c, \phi_c)$ para cada cond. de carregamento (Carpinteri & Spagnoli)



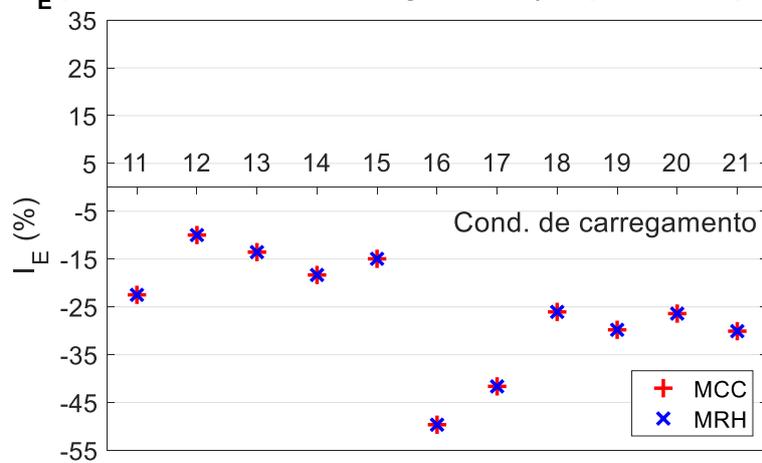
(a)

$N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ para cada cond. de carregamento (Carpinteri & Spagnoli)



(b)

I_E para cada cond. de carregamento (Carpinteri & Spagnoli)



(c)

Figura 17. Resultados para cond. assíncronas utilizando Carpinteri & Spagnoli

(a) $C_a(\theta_c, \phi_c)$; (b) $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$; (c) I_E

Pela Tabela 9, percebe-se que, assim como em Findley, não há diferença entre as orientações críticas obtidas pelos métodos MCC, MRH e analítico para nenhuma das condições de carregamento. Além disso, os valores de $C_a(\theta_c, \phi_c)$, $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ e, conseqüentemente I_E também não diferem.

No caso de Carpinteri & Spagnoli, a permanência em $\theta_c = 90^\circ$ é um dos requisitos desse critério, já que se sabe que pelo menos um plano de fratura existe nessa orientação em qualquer caso.

4.3. Considerações gerais

O fato de que MCC e MRH dão mesmos resultados com $\theta = 90^\circ$ pode ser provado pelo fato de que, em condições de carregamento tração-torção, a trajetória de tensão cisalhante em qualquer plano material será uma reta, com $C_{x'z'} = 0$. Ao observar os termos do tensor de rotação A (Equação 11) com o ângulo $\theta = 90^\circ$, obtém-se esses termos:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \operatorname{sen}(90^\circ) & \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) \\ -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ -\cos(\phi) \cos(90^\circ) & -\operatorname{sen}(\phi) \cos(90^\circ) & \operatorname{sen}(90^\circ) \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Com os termos a_{13} , a_{23} , a_{31} e a_{32} iguais a 0 e $a_{33}=1$, pode-se reescrever a Equação 14 como:

$$C_{x'z'} = \tau_{yz}(a_{12}) + \tau(a_{11}) \quad (50)$$

Como nos casos de tração-torção só são diferentes de 0 as tensões σ_{xx} e τ_{xy} , pode-se perceber que $C_{x'z'}$ será sempre igual 0 para $\theta = 90^\circ$ e, conseqüentemente, a trajetória de tensão cisalhante para qualquer ϕ é uma reta.

Nesses casos, as soluções dadas por MCC e MRH tem de dar o mesmo resultado. Para MCC, a menor circunferência que circunscribe essa trajetória tem diâmetro igual à diferença entre $\max(C_{x'y'})$ e $\min(C_{x'y'})$, resultando em:

$$C_a(\theta_c, \phi_c) = \frac{(\max(C_{x'y'}) - \min(C_{x'y'}))}{2} \quad (51)$$

Já para MRH, a única envoltória retangular possível (que toque na trajetória em mais do que 2 pontos) é um retângulo com maior lado igual a $\max(C_{x'y'}) - \min(C_{x'y'})$ e menor lado igual a 0, resultando em:

$$C_a(\theta_c, \phi_c) = \sqrt{\left(\frac{(\max(C_{x'y'}) - \min(C_{x'y'}))}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{(\max(C_{x'y'}) - \min(C_{x'y'}))}{2} \quad (52)$$

A Figura 18 a seguir mostra as representações gráficas de MCC e MRH para uma trajetória desse tipo:

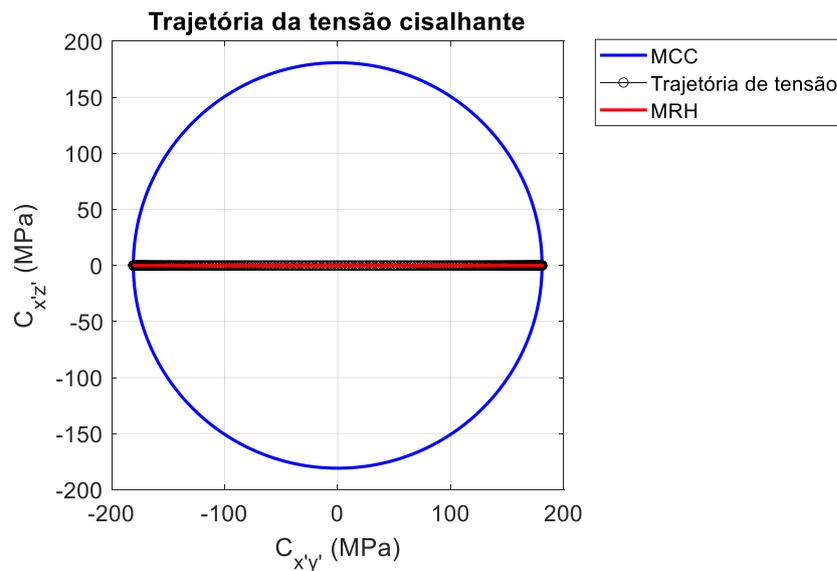


Figura 18. Representação gráfica de MCC e MRH para uma trajetória do vetor tensão cisalhante com $\theta = 90^\circ$

4.4. Aplicando tensão equivalente de Von Mises

Pode-se perceber pelos resultados obtidos que, principalmente para condições assíncronas, os planos críticos obtidos pelo método MRH têm $\theta_c, \phi_c, C_a(\theta_c, \phi_c)$ e $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ diferentes de MCC. É interessante estudar qual dos métodos apresenta planos com maior tensão equivalente de Von Mises.

A aplicação se baseia no fato de que somente há componentes de tensão $N_{x'}(t), C_{x'y'}(t)$ e $C_{x'z'}(t)$, gerando, utilizando a Equação 12:

$$\sigma_{VM}(t) = \frac{\sqrt{2(N_{x'}(t))^2 + 6\left(\left(C_{x'y'}(t)\right)^2 + \left(C_{x'z'}(t)\right)^2\right)}}{\sqrt{2}} \quad (53)$$

Assim, $\sigma_{VM}(t)$ torna-se uma função do tempo, podendo ser plotada para verificar seu máximo ao longo do tempo. Para dar um exemplo do plot, será utilizada a condição de carregamento 15, onde houve maior diferença entre os $N_{max}(\theta_c, \phi_c)$ de MCC e MRH. Para as orientações críticas obtida pelo MCC ($90^\circ, 16^\circ$) e ($90^\circ, 164^\circ$), obtém-se na Figura 19 o seguinte gráfico $\sigma_{VM}(t)$ vs tempo:

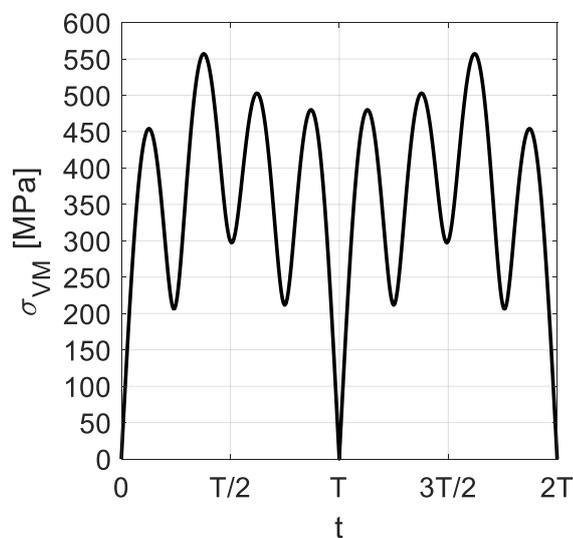


Figura 19. Tensão de Von Mises da cond. carregamento 15 no plano crítico obtido por MCC

Já para as orientações críticas obtidas pelo MRH ($45^\circ, 7^\circ$), ($45^\circ, 173^\circ$), ($135^\circ, 7^\circ$) e ($135^\circ, 173^\circ$), obtém-se na Figura 20 o seguinte gráfico $\sigma_{VM}(t)$ vs tempo:

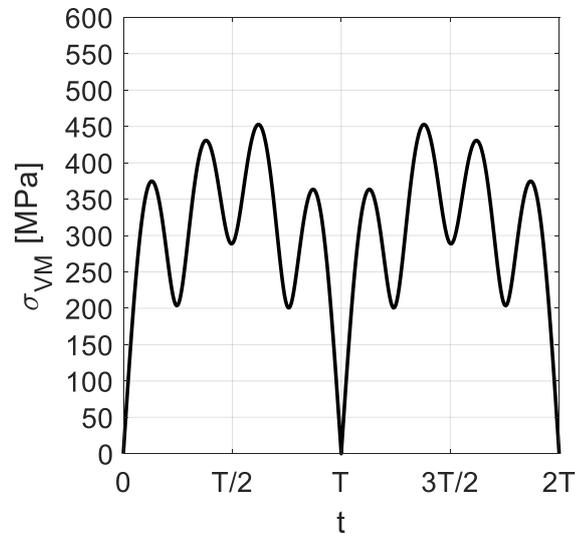


Figura 20. Tensão de Von Mises da cond. carregamento 15 no plano crítico obtido por MRH

Pelas Figura 19. Tensão de Von Mises da cond. carregamento 15 no plano crítico obtido por MCC Figura 20 é perceptível que a máxima tensão equivalente de Von Mises aplicada aos planos críticos encontrados com MCC ($\max \sigma_{VM}(t)_{MCC}$) é maior que a aplicada aos planos críticos encontrados com MRH ($\max \sigma_{VM}(t)_{MRH}$). Aplicando essa análise para todas as condições de carregamento assíncronas, foi criada a Tabela 10, onde encontram-se $\max \sigma_{VM}(t)_{MCC}$ e $\max \sigma_{VM}(t)_{MRH}$ para cada condição de carregamento.

Tabela 10. Máxima tensão equivalente de Von Mises aplicada aos planos críticos obtidos por MCC e MRH

Cond. Carregamento	$\max \sigma_{VM}(t)_{MCC}$ [MPa]	$\max \sigma_{VM}(t)_{MRH}$ [MPa]	$(\max \sigma_{VM}(t)_{MCC} - \max \sigma_{VM}(t)_{MRH})$ [MPa]
11	331,30	299,63	31,67
12	242,32	217,98	24,34
13	233,17	210,87	22,3
14	531,35	439,63	91,72
15	557,24	452,77	104,47
16	318,03	280,82	37,21
17	365,48	332,26	33,22
18	273,58	246,11	27,47
19	254,50	228,37	26,13
20	326,59	289,11	37,48
21	255,09	231,03	24,06

A partir da Tabela 10, é possível afirmar que, para todas as condições de carregamento assíncronas, a máxima tensão equivalente de Von Mises nas orientações críticas obtidas por MCC são maiores que as obtidas por MRH.

5 Conclusões

Após avaliação dos resultados obtidos, pode-se concluir que, para as condições de carregamento estudadas:

- Os critérios de fadiga de Findley e de Carpinteri & Spagnoli não denotam diferença de resultados com a mudança do método de obtenção da amplitude de tensão cisalhante.
- Nos critérios de Mataka e Susmel & Lazzarin, a mudança nesse método é sim significativa, principalmente tratando-se de condições de carregamento assíncronas.
- Para as condições assíncronas, tanto o índice de erro dos critérios de Mataka e Susmel & Lazzarin quanto a máxima tensão equivalente de Von Mises para os planos considerados críticos para MCC são menores do que nos considerados críticos para MRH.
- Sob nenhuma das condições de carregamento síncronas estudadas o método MCC obteve resultados diferentes do método analítico. Já para os resultados de MRH, 2 das 10 condições obtiveram resultados diferentes.
- Em todas as condições de carregamento estudadas com resultados diferentes entre MCC e MRH, o ângulo θ crítico achado para MCC foi de 90 e para MRH de 45
- Devido ao menor custo computacional e simplicidade, o método MRH parece ser mais recomendável para os critérios de Findley e Carpinteri e Spagnoli.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] TEIXEIRA, Maria Clara Carvalho. Fatigue failure assessment in ultrasonic test based on temperature evolution and crack initiation mechanisms. 2023. 103 p. Dissertação de doutorado — PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2023.
- [2] SUSMEL, Luca. Multiaxial notch fatigue From nominal to local stress/strain quantities. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2009. 588 p.
- [3] PAPADOPOULOS, I. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue*, v. 19, n. 3, p. 219-235, mar. 1997. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0142-1123\(96\)00064-3](https://doi.org/10.1016/s0142-1123(96)00064-3). Acesso em: 2 dez. 2023.
- [4] CASTRO, Tiago Lima d'Albuquerque e. Elliptical curve method for fatigue life prediction of structural steels under multiaxial loadings. 2023. 96 p. Dissertação de doutorado — PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2023.
- [5] ARAÚJO, J. A. et al. On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue. *International Journal of Fatigue*, v. 33, n. 8, p. 1092-1100, ago. 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.01.002>. Acesso em: 2 dez. 2023.
- [6] G. B. Marquis and D. F. Socie, *Multiaxial Fatigue*. SAE International, 2000. doi: 10.1016/B0-08-043749-4/04030-1
- [7] BEER, Ferdinand P. et al. *Mechanics of materials*. 5. ed. Maidenhead: McGraw-Hill, 2011. 800 p. ISBN 978-85-8055-008-5.
- [8] JAIME TUPIASSÚ PINHO DE CASTRO; MEGGIOLARO, Marco Antonio; TOPPER, Timothy Hamilton. *Fadiga - técnicas e práticas de dimensionamento*

estrutural sob cargas reais de serviço: volume I - iniciação de trincas. [S.l.]: Createspace Independent Publishing Platform, 2009. 494 p. ISBN 9781449514693.

[9] LIU, Y.; MAHADEVAN, S. Multiaxial high-cycle fatigue criterion and life prediction for metals. *International Journal of Fatigue*, v. 27, n. 7, p. 790-800, jul. 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2005.01.003>. Acesso em: 3 dez. 2023.

[10] MATAKE, Tomokazu. An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bulletin of JSME*, v. 20, n. 141, p. 257-263, 1977. Disponível em: <https://doi.org/10.1299/jsme1958.20.257>. Acesso em: 3 dez. 2023.

[11] SUSMEL, L.; LAZZARIN, P. A bi-parametric Wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, v. 25, n. 1, p. 63-78, 7 jan. 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1046/j.1460-2695.2002.00462.x>. Acesso em: 2 dez. 2023.

[12] FINDLEY, W. N. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *Journal of Engineering for Industry*, v. 81, n. 4, p. 301-305, 1 nov. 1959. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.4008327>. Acesso em: 3 dez. 2023.

[13] CARPINTERI, A.; SPAGNOLI, A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue*, v. 23, n. 2, p. 135-145, 2001. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0142-1123\(00\)00075-x](https://doi.org/10.1016/s0142-1123(00)00075-x). Acesso em: 3 dez. 2023.

[14] BERNASCONI, A. Efficient algorithms for calculation of shear stress amplitude and amplitude of the second invariant of the stress deviator in fatigue criteria applications. *International Journal of Fatigue*, v. 24, n. 6, p. 649-657, jun. 2002. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/s0142-1123\(01\)00181-5](https://doi.org/10.1016/s0142-1123(01)00181-5). Acesso em: 3 dez. 2023.