



Barbara Sequeiros Hue Lessa

**Projeção de demanda no canal *Omnichannel* de uma
varejista**

Dissertação de Mestrado

(Opção Profissional)

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Logística, do Departamento Industrial da PUC-Rio.

Orientadora: Prof. Paula Medina Maçaíra Louro

Coorientador: Prof. Fernando Luiz Cyrino Oliveira

Rio de Janeiro
setembro de 2023



Barbara Sequeiros Hue Lessa

**Projeção de demanda no canal *Omnichannel* de uma
varejista**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Logística da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Paula Medina Maçaira Louro

Orientadora

Departamento de Engenharia Industrial – PUC Rio

Prof. Fernando Luiz Cyrino Oliveira

Coorientador

Departamento de Engenharia Industrial – PUC Rio

Prof. Igor Tona Peres

Departamento de Engenharia Industrial – PUC Rio

Prof. Mauricio Franca Lila

IBGE

Rio de Janeiro, 14 de setembro de 2023

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem a autorização da universidade, da autora e do orientador.

Barbara Sequeiros Hue Lessa

Graduada em Engenharia de Produção pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-Rio. Competências em gestão, com histórico em coordenação. Atuações nas áreas de compras e de engenharia de processos em empresas de médio e grande porte. Experiências nas áreas de indústria siderúrgica e varejo."

Ficha Catalográfica

Lessa, Barbara Sequeiros Hue

Projeção de demanda no canal Omnichannel de uma varejista / Barbara Sequeiros Hue Lessa; orientadora: Paula Medina Maçaíra Louro; coorientador: Fernando Luiz Cyrino Oliveira. – 2023.

69 f. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2023.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. ARIMA. 3. Demanda. 4. ETS. 5. Métodos de reconciliação. 6. Omnichannel. I. Louro, Paula Medina Maçaíra. II. Oliveira, Fernando Luiz Cyrino. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial.

CDD: 658.5

Agradecimentos

Transmito a minha gratidão a Deus, que me guiou e fortaleceu durante todo este percurso.

Expresso gratidão também aos meus colegas de trabalho por contribuírem para o meu desenvolvimento profissional.

Demonstro apreciação aos amigos de longa data pela compreensão nos momentos em que precisei estar distante e às amigas que formei durante o curso pelo carinho e companheirismo.

Também agradeço à PUC por me proporcionar essa oportunidade excepcional para o desenvolvimento da minha carreira. Em especial, à minha orientadora Profa. Paula e ao meu coorientador Prof. Fernando, por me conduzirem nesse projeto e colaborarem com ensinamentos e orientações que auxiliaram no aperfeiçoamento deste trabalho e do meu enriquecimento profissional.

Ao meu parceiro, agradeço o apoio incondicional e as palavras sábias nos momentos difíceis.

Minha família, por fim, foi fundamental nessa jornada, agradeço por sempre incentivarem e apoiarem os meus estudos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Lessa, Barbara Sequeiros Hue; Louro, Paula Medina Maçaíra (Orientadora); Oliveira, Fernando Luiz Cyrino (Coorientador). **Projeção de demanda no canal *Omnichannel* de uma varejista**. Rio de Janeiro, 2023. 69p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Tendo em vista mudanças significativas no varejo causadas pelo crescimento de compras *online* no Brasil, este estudo tem como objetivo facilitar um relevante *lead time* e um forte grau de assertividade na previsão de demanda do *Omnichannel* de uma empresa do setor. Com a crescente relevância do *Omnichannel*, é importante compreender as necessidades dos consumidores tradicionais e digitais, integrar suas experiências e oferecer múltiplos canais de compra. Nesse contexto, a previsão de demanda é crucial para apoiar as decisões estratégicas, táticas e operacionais da organização. A utilização de séries temporais hierárquicas auxilia na precisão das previsões e, portanto, na tomada de decisões, permitindo gerar estimativas coerentes ao longo dos múltiplos níveis hierárquicos. Dessa forma, neste estudo, combinando as metodologias de previsão de séries temporais ETS, ARIMA e SARIMAX, com métodos de reconciliação *Bottom-up*, *Top-down*, *MinTrace* Combinação Ótima (OLS) e *MinTrace* WLS *Struct*, doze modelos foram gerados. Baseado nas principais abordagens de séries temporais hierárquicas, com uma sequência de sete passos, os modelos foram comparados, por meio de métricas de avaliação de desempenho, para identificar qual deles melhor se encaixa na série trabalhada. Ao final do estudo, o modelo SARIMAX com *Bottom-up* se mostrou a combinação mais adequada para a série em análise. A abordagem alcançou um MAPE de 22% no nível mais agregado da hierarquia, reduzindo em cinco pontos percentuais o MAPE original da empresa, além de apresentar a melhor colocação na combinação das métricas comparativamente.

Palavras-chave

ARIMA; Demanda; ETS; Métodos de reconciliação; *Omnichannel*; Previsão hierárquica; SARIMAX; Séries temporais hierárquicas.

Abstract

Lessa, Barbara Sequeiros Hue; Louro, Paula Medina Maçaira (Advisor); Oliveira, Fernando Luiz Cyrino (Co-advisor). **Demand projection in the omnichannel channel of a retailer**. Rio de Janeiro, 2023. 69p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In light of recent changes in retail caused by the growth of online shopping in Brazil, this study aims to enable a substantial lead time and a high degree of accuracy of the Omnichannel demand forecast for a retail company. As Omnichannel success continues to expand, it becomes increasingly important to understand the needs of both traditional and digital consumers, integrate their experiences and offer multiple purchase channels. In this context, demand forecasting is crucial for identifying market trends, growth opportunities, potential strategies and supporting strategic, tactical and operational decisions. The use of Hierarchical Time Series improves forecasts accuracy and, therefore, assists in decision-making, allowing the development of consistent estimations across multiple hierarchical levels. Thus, this study combines the time series forecast generation methodologies ETS, ARIMA and SARIMAX, with Bottom-up, Top-down, MinTrace Optimal Combination (OLS) and MinTrace WLS Struct reconciliation methods, resulting in the generation of twelve models. Based on the main theories of Hierarchical Time Series and following a 7-steps sequence, the models were compared using performance evaluation metrics to identify the best fit for the investigated series. The research concludes that the SARIMAX model, together with the Bottom-up strategy, proves to be the most appropriate composition for the Hierarchical Time Series under analysis, as it demonstrates the best performance across the evaluation metrics, reaching a MAPE of 22% at the most aggregated level of the hierarchy and reducing the original company forecasting MAPE by five percentage points.

Keywords

ARIMA; Demand; ETS; Reconciliation Methods; Omnichannel; Hierarchical Forecast; SARIMAX; Hierarchical Time Series.

Sumário

| | |
|--|----|
| 1. Introdução | 11 |
| 2. Referencial Teórico | 16 |
| 2.1. Séries temporais | 16 |
| 2.1.1. Componentes de séries temporais | 16 |
| 2.1.2. Estacionariedade | 17 |
| 2.1.3. Horizonte x intervalo de previsão | 17 |
| 2.1.4. Séries hierárquicas | 18 |
| 2.2. Métodos de previsão | 20 |
| 2.2.1. ETS | 21 |
| 2.2.2. ARIMA | 26 |
| 2.2.3. SARIMAX | 29 |
| 2.3. Métodos de reconciliação linear | 30 |
| 2.3.1. Bottom-up | 32 |
| 2.3.2. Top-down | 33 |
| 2.3.3. MinTrace | 35 |
| 2.4. Métricas de desempenho | 37 |
| 2.4.1. MAPE | 37 |
| 2.4.2. RMSE | 38 |
| 3. Metodologia | 39 |
| 3.1. Estudo de caso | 39 |
| 3.2. Modelagem | 39 |
| 4. Resultados e Discussões | 43 |
| 4.1. Definição do problema | 43 |
| 4.2. Obtenção e tratamento de dados | 45 |
| 4.3. Análise exploratória dos dados | 47 |
| 4.4. Seleção dos modelos de previsões iniciais | 53 |
| 4.5. Implementação das previsões iniciais | 54 |
| 4.6. Implementação das previsões agregadas e análise de desempenho dos modelos | 57 |
| 5. Conclusões | 63 |
| 6. Referências Bibliográficas | 66 |
| Apêndice | 69 |

Lista de tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 1 - Componentes de modelos ETS | 22 |
| Tabela 2 - Equações de estado dos modelos ETS | 24 |
| Tabela 3 - Abordagens <i>MinTrace</i> | 36 |
| Tabela 4 - Resultados MAPE na série não reconciliada | 56 |
| Tabela 5 - MAPE por modelo | 58 |
| Tabela 6 - Ranking de RMSE por modelo | 59 |
| Tabela 7 - Raking médio dos erros por modelo | 60 |

Lista de figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1 - Série temporal hierárquica | 18 |
| Figura 2 - Série temporal agrupada | 19 |
| Figura 3 - Processo de reconciliação coerente | 31 |
| Figura 4 - Etapas de geração de previsões temporais hierárquicas | 40 |
| Figura 5 - Estrutura hierárquica das transações estudadas | 44 |
| Figura 6 - Variáveis exógenas | 46 |
| Figura 7 - Total de transações efetuadas por mês (nível 0) | 48 |
| Figura 8 - Transações efetuadas por mês por categoria de entrega (nível 1 – Grupo 1) | 49 |
| Figura 9 - Transações efetuadas por mês por categoria de item | 50 |
| Figura 10 - Transações efetuadas por mês por categoria final (nível 2) | 50 |
| Figura 11 - Distribuição anual de proporções do nível 2 | 51 |
| Figura 12 - Quantidades históricas de transações do nível 1 ano a ano | 52 |
| Figura 13 - Quantidades históricas de transações totais ano a ano (nível 0) | 53 |
| Figura 14 - Previsão inicial do total de transações – modelo ETS | 54 |
| Figura 15 - Previsão inicial do total de transações – modelo ARIMA | 54 |
| Figura 16 - Previsão inicial do total de transações – modelo SARIMAX | 55 |
| Figura 17 - Valores normalizados de RMSE | 57 |
| Figura 18 - Previsões reconciliadas SARIMAX BU | 62 |
| Figura 19 – Erro percentual SARIMAX BU vs <i>Baseline</i> | 62 |

Lista de siglas

| | |
|---------|--|
| O2O | <i>Online to Offline</i> |
| HTS | <i>Hierarchical Time Series</i> |
| ETS | Erro, Tendência e Sazonalidade |
| SES | Suavização Exponencial Simples |
| ARIMA | Autorregressivo Integrado de Médias Móveis |
| SARIMA | Autorregressivo Integrado de Médias Móveis com Sazonalidade |
| SARIMAX | Autorregressivo Integrado de Médias Móveis com Sazonalidade e Variáveis Exógenas |
| MAPE | Mean Absolute Percentage Error |
| RMSE | <i>Root Mean Squared Error</i> |
| AIC | Akaike Information Criteria |
| SFS | <i>Ship From Store</i> |
| CAC | <i>Click And Collect</i> |
| EDA | Análise Exploratória de Dados |

Introdução

O volume de compradores *online* no Brasil teve um crescimento significativo nos últimos anos. De acordo com dados da Associação Brasileira de Comércio Eletrônico (2023), o número aproximado de compradores *online* no Brasil passou de 63 milhões em 2017 para 84 milhões em 2022 (um crescimento de aproximadamente 5,9% a.a.). A expectativa é que nos próximos cinco anos surjam 18 milhões de novos consumidores, trazendo um aumento de aproximadamente 61% de venda nesse segmento se comparado ao quantitativo de 2022. Em uma realidade onde aparelhos eletrônicos portáteis se tornam cada vez mais necessários e os consumidores se sentem mais confortáveis com compras *online*, o setor de *Omnichannel*, também conhecido por O2O (*Online to Offline*), ganha espaço (RATCHFORD et al., 2023).

Brynjolfsson et al. (2013) destacam as características distintas das modalidades de varejo do passado. Enquanto as lojas físicas se beneficiavam do atendimento personalizado ao cliente e da capacidade de permitir que os consumidores experimentassem os produtos imediatamente, as lojas digitais atraíam os clientes com seus amplos sortimentos de produtos, preços competitivos e vastos recursos como avaliações públicas. No entanto, à medida que o varejo evolui para uma robusta experiência *Omnichannel*, a separação entre o ambiente físico e o *online* diminui. Isso leva os autores a descreverem o varejo como um "showroom sem paredes" (BRYNJOLFSSON et. al, 2013, p. 23) onde a experiência de compra se torna integrada e contínua em ambos os ambientes.

Neste contexto, os autores Verhoef et al. (2015) destacam a atual relevância do *showrooming* e *webrooming*. Atualmente, os consumidores conseguem simultaneamente examinar produtos na plataforma física e pesquisar mais detalhes sobre eles e suas ofertas por meio de dispositivos móveis. Da mesma forma, após amplas pesquisas pela plataforma digital, o consumidor é direcionado para a loja física mais adequada para efetivar sua compra. Assim como os exemplos mencionados, a experiência de compra *Omnichannel* é aquela que abrange o

envolvimento de mais de um canal, permitindo uma integração contínua e reduzindo as barreiras entre eles. Desde 2002, autores como Wind e Mahajan (2002), destacam a relevância de oferecer aos clientes múltiplos canais de compras como um elemento fundamental para o sucesso no competitivo ambiente de varejo. Os estudos de Venkatesan et al. (2007) associam os clientes que utilizam múltiplos canais de compra a um aumento no volume de compras anual, na satisfação do cliente e uma margem de retorno mais elevada para a empresa.

Embora as discussões sobre essa transformação no mercado sejam mais antigas, foi após a evolução da pandemia de *COVID-19* que a modalidade de O2O mais se desenvolveu, quando as empresas observaram a necessidade de repensar os diferentes elementos de ofertas do varejo, modificando suas operações de estocagem e suas formas de interagir com clientes (RATCHFORD et al., 2023). Com um comportamento semelhante a outras crises no passado, o varejo *online* desempenhou um papel crucial no fornecimento de produtos essenciais para clientes e, embora após a redução das restrições sociais alguns clientes tenham retornado para os canais tradicionais, muitos continuaram utilizando os canais digitais (SZÁSZ et al., 2022).

A transformação dos métodos tradicionais de compra nos últimos anos é acompanhada por mudanças nas categorias e variedades de produtos de interesse dos consumidores. Enquanto o canal físico pode ser descrito pelo Princípio do Pareto – que indica que 80% da venda é concentrada em 20% dos produtos –, a venda digital é mais difusa. Essa dispersão pode ser explicada pela maior oferta de produtos e pelo acesso a pesquisas de preços. Além disso, a praticidade de encontrar produtos inovadores online, por meio de ferramentas de busca e recomendação, também contribui para esse comportamento. No contexto do *Omnichannel*, é necessário que as empresas compreendam não apenas as necessidades dos clientes tradicionais, mas também dos clientes digitais (RATCHFORD et al., 2023; BRYNJOLFSSON et al., 2011).

Diante das transformações do mercado e da oportunidade de expansão da demanda digital, é de suma importância que as varejistas sejam capazes de se planejar adequadamente. A previsão de demanda emerge como uma ferramenta essencial para alcançar êxito nesse contexto. Ela tem um papel fundamental nas

tomadas de decisões em diferentes níveis das operações das varejistas. No nível estratégico, as projeções ajudam a identificar tendências de mercado, antecipar oportunidades de crescimento e se preparar contra possíveis ameaças. Já no nível tático, as previsões são aplicadas nas estratégias de comunicação, planejamentos de publicidade, definição de categorias e de variações de produtos e organização da equipe de trabalho (ATHANASOPOULOS et al., 2017; FILDES et al., 2022). Por fim, a nível operacional, as inferências são utilizadas no momento de compra e distribuição de recursos, preparação dos sistemas para o volume de usuários, definição da escala de trabalho e do volume da equipe necessários no dia-a-dia tanto das lojas, quanto das operações de suporte e dos serviços de pós-vendas (ATHANASOPOULOS et al., 2017; FILDES et al., 2022; BAI, 2022; KALCHSCHMIDT et al., 2006).

Dessa forma, torna-se fundamental ter projeções precisas para que as equipes em campo consigam atuar de forma planejada, entregando um bom serviço ao cliente, com a quantidade adequada de recursos. Portanto, é necessário estabelecer rotinas periódicas para gerar projeções futuras e incorporá-las de forma sistemática nas decisões de negócio. Para isso, é importante que o volume de dados necessários para realizar cada previsão seja mínimo, garantindo que ela seja produzida de forma ágil, simples e com baixo custo (WINTERS, 1960). No entanto, em um setor competitivo, fortemente influenciado pelas mudanças nos interesses dos consumidores e pela conjuntura macroeconômica do país, torna-se cada vez mais desafiador prever com precisão a demanda futura. Quanto mais dinâmicas e complexas as necessidades dos clientes, maiores são as dificuldades das ferramentas preditivas que, muitas vezes carecem de um longo histórico de informações relevantes, ao passo que precisam compreender o comportamento errático das variáveis (HOFMANN e RUTSCHMANN, 2018).

Entretanto, os diversos níveis estratégicos ou setores das organizações comerciais diferem quanto à granularidade das previsões de interesse. Em função das responsabilidades de cada área, deve ser definido o grau de agregação das estimativas. Tarefas estratégicas, por exemplo, devido ao seu maior grau de abstração, requerem panoramas mais consolidados sobre o todo. Por outro lado, outras atividades voltadas às metas mais específicas a um tipo de produto,

departamento ou localização beneficiam-se de um grau pertinente de agregação menor.

As séries temporais hierárquicas, do inglês *Hierarchical Time Series* (HTS), surgem nesse contexto para não apenas auxiliar a tomada de decisão nos diversos níveis do negócio, mas também aumentar a acurácia das previsões nos níveis agregados (YANG et al., 2017; ATHANASOPOULOS et al., 2017). O conceito, aplicado por meio dessas ferramentas deriva da natureza temporal dos dados observados permitindo a identificação de padrões subjacentes, tais como tendência e sazonalidade (HYNDMAN et al., 2008). Concomitantemente, o perfil hierárquico denota que as séries beneficiam-se das estruturas de agregação para aplicar métodos de reconciliação e gerar simultaneamente previsões coerentes em todos os níveis, garantindo que o somatório de cada hierarquia seja igual ao somatório da camada superior ou inferior a ela. Assim, enquanto os métodos tradicionais de projeção de séries temporais podem falhar em capturar as complexidades dos padrões de demanda nos diferentes níveis das estruturas hierárquicas, as agregações hierárquicas permitem explorar as identidades dos dados, justificando as relações determinísticas entre as diferentes variáveis do modelo. De modo geral, as agregações hierárquicas de séries temporais servem como uma ferramenta para melhor compreensão e modelagem dos dados disponíveis (ATHANASOPOULOS et al., 2020).

Práticas conhecidas que preveem séries com alto grau de complexidade, como essa, envolvem o uso de modelos como suavização exponencial, regressão, autorregressivo e com média móvel. Dessa forma, modelos como ARIMA (Autorregressivo Integrado de Médias Móveis) e ETS (acrônimo para *Error Trend Seasonal*) foram com sucesso testados em diversos estudos empíricos ao longo do tempo. Diante disto, o presente trabalho complementa essa esfera da literatura ao comparar, em um caso prático, os diferentes métodos de agregação de previsões desses modelos. Os dados de uma grande varejista brasileira serão utilizados para examinar a eficácia de diferentes modelos de séries hierárquicas na previsão de demanda no setor em que ela se enquadra. O estudo se concentra mais especificamente no comportamento dos consumidores no contexto do *Omnichannel*, modalidade que conquistou crescente visibilidade e reconhecimento nos últimos anos, como mencionado anteriormente. Combinados os conceitos

teóricos com as evidências empíricas deste estudo de caso, as descobertas aqui apresentadas não apenas fornecerão orientações valiosas para os profissionais de varejo que buscam melhorar suas capacidades de previsão, mas também servirão como base para pesquisas futuras neste domínio.

As informações coletadas nesta dissertação têm como objetivo desenvolver uma ferramenta capaz de fornecer, com um forte grau de assertividade e um relevante horizonte de previsão, o volume estimado de transações do canal *Omnichannel* de uma empresa de varejo. Por meio de uma análise aprofundada desse estudo de caso, serão explorados as aplicações práticas e os benefícios da previsão HTS em um cenário de varejo do mundo real. Para isso, foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Estudar as diferentes metodologias de séries temporais hierárquicas buscando encontrar informações valiosas sobre a eficácia e as limitações de cada abordagem.
- Aplicar as técnicas estudadas em um estudo de caso no canal *Omnichannel* de uma varejista brasileira de grande porte.
- Comparar os diferentes resultados gerados utilizando métricas encontradas na literatura.

Para alcançar os objetivos, esta dissertação é dividida em 5 seções. O capítulo 1 introduz o tema que será discutido. O capítulo 2 apresenta uma revisão da literatura sobre renomados modelos de previsão de séries temporais, métodos de agregação desses modelos e métricas para avaliá-los. O capítulo 3 expõe a metodologia de pesquisa escolhida. No capítulo 4 são revelados os resultados obtidos do estudo de caso e as discussões, comparando os diferentes modelos apresentados. Por fim, o capítulo 5 compreende a conclusão do trabalho e sugestões para próximas pesquisas. O código utilizado para obtenção dos resultados é exposto no Apêndice.

2

Referencial Teórico

Este capítulo reúne algumas informações relevantes a respeito do tema de previsões hierárquicas temporais. Primeiramente, são apresentados os conceitos relevantes, as vantagens e desvantagens e os procedimentos de alguns modelos de previsão de séries temporais. Além disso, o conceito de hierarquia e agrupamento é introduzido, trazendo diferentes métodos de agregação existentes. Por fim, são apresentadas algumas das formas de avaliar o desempenho dos modelos.

2.1

Séries temporais

2.1.1

Componentes de séries temporais

Séries temporais podem ser explicadas como uma composição dos parâmetros: tendência, sazonalidade, ciclo e erro. O primeiro deles apresenta o comportamento de crescimento ou decrescimento da curva ao longo do tempo. Flutuações repetidas a cada período de tempo, são representadas pela sazonalidade. De forma semelhante, o ciclo é explicado também por padrões de repetição, porém sem uma periodicidade clara. Por fim, o último parâmetro expressa os fatores imprevisíveis da série (HYNDMAN et al., 2008).

Além disso, é preciso introduzir a componente nível que está presente em todas as séries temporais. Ele representa o valor central em torno do qual os dados observados variam. Em conjunto com algum crescimento ou decrescimento, o parâmetro é responsável por formar a tendência. Logo, uma série com apenas nível e sem crescimento ou sem decrescimento não apresenta tendência (HYNDMAN et al., 2008).

Dependendo do método de previsão, as componentes dos modelos podem ser armazenadas em vetores de estado-espço. Os argumentos desse vetor são

alguns dos parâmetros apresentados neste tópico e são coletados em diferentes períodos de tempo (HYNDMAN et al., 2008).

2.1.2

Estacionariedade

Essencialmente, a estacionariedade está presente em uma série temporal quando, ao escolher arbitrariamente dois períodos de tempo de mesmo tamanho, as curvas apresentam comportamentos similares. Isto é, nesses casos, o valor esperado da série independe do tempo (MONTGOMERY et al., 2008). Dessa forma, os modelos estacionários pressupõem que o processo em análise permanece em um estado de equilíbrio estatístico, sustentando propriedades probabilísticas imutáveis ao longo do tempo. Esses modelos se caracterizam por exibirem flutuações em torno de um nível médio constante, além de apresentarem uma variância que se mantém constante ao longo do processo (BOX et al., 2016).

Dessa forma, séries temporais que apresentam tendência ou sazonalidade não são estacionárias. Por outro lado, séries com comportamentos cíclicos podem ser estacionárias, pois os ciclos são intermitentes (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

2.1.3

Horizonte x intervalo de previsão

No processo de geração de previsões estatísticas, dois pontos iniciais cruciais a serem definidos são o horizonte e o intervalo. Também conhecido como *lead time* de previsão, o horizonte, nesse contexto, representa a quantidade de períodos futuros contemplados ao realizar as projeções. Por outro lado, o intervalo determina qual a frequência com que a empresa irá gerar novas previsões. A escolha desses fatores deve considerar os distintos interesses estratégicos beneficiados pelo uso de tais dados estatísticos, a fim de garantir a máxima utilidade e relevância deles para as áreas envolvidas. Uma estratégia de horizonte móvel pode ser adotada

quando a previsão é atualizada com uma frequência menor do que o *lead time* escolhido (MONTGOMERY et al., 2008).

2.1.4

Séries hierárquicas

Quando uma série temporal pode ser decomposta em subséries que se correlacionam por meio de uma estrutura de árvore hierárquica, classificamos esse conjunto como séries temporais hierárquicas. Em função da estrutura desta árvore, elas podem ser estritamente hierárquicas ou agrupadas. Em contextos como esses, onde as observações das subcategorias são agrupadas de maneira coesa até o nível macro, naturalmente, as previsões também precisam se conformar a essa mesma coerência. Para garantir isso, precisamos utilizar além de métodos de previsão, métodos de reconciliação.

Particularmente, conforme mencionado, séries estritamente hierárquicas diferem de séries agrupadas em suas formas de agregação, pois enquanto a primeira possui apenas uma direção de distribuição dos totais mais agregados para os totais menos agregados, isso não acontece na segunda série. Esta diferença pode ser exemplificada na *Figura 1* e na *Figura 2*, onde a primeira representa uma série estritamente hierárquica e a segunda representa uma série agrupada. Cada nó das figuras simboliza, no tempo t , o valor observado na determinada categoria neste período.

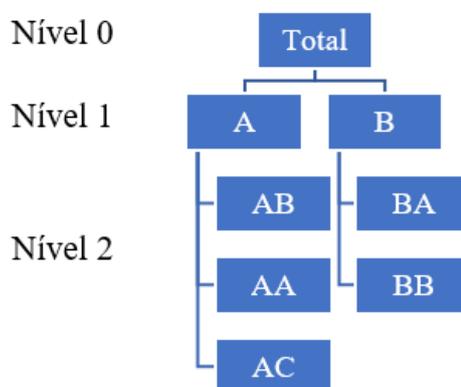


Figura 1: Série temporal hierárquica.
Fonte: Adaptado de Hyndman e Athanasopoulos (2021).

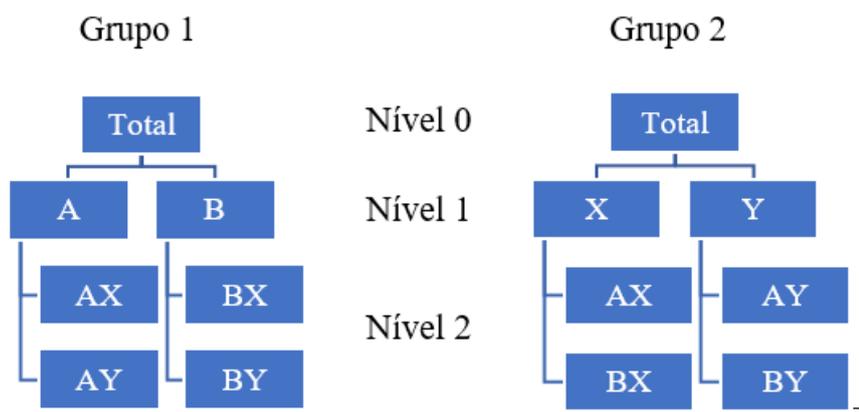


Figura 2: Série temporal agrupada.
Fonte: Adaptado de Hyndman e Athanasopoulos (2021).

Ao analisarmos a primeira figura, podemos notar que a única maneira de distribuir o valor mais agregado (nível 0) para o nível mais baixo da hierarquia (nível 2) é atravessando primeiramente o nível intermediário (nível 1). Essa dinâmica é frequentemente encontrada no setor varejista, como na distribuição das vendas de uma região entre suas cidades e, em seguida, entre suas lojas. Outro exemplo ocorre na divisão das vendas de uma organização entre seus departamentos e, posteriormente, entre seus produtos.

Por sua vez, na *Figura 2*, embora os nós do nível 2 dos dois grupos sejam idênticos, os nós dos níveis intermediários diferem. Esse padrão é observado, por exemplo, na venda por departamento por loja em uma determinada região. Podemos optar por agregar essas vendas primeiro por loja e, em seguida, obter o total para a região, ou podemos realizar a agregação inicialmente por departamento.

Seguindo a metodologia de Athanasopoulos et al. (2020), ao aprofundarmos nossa análise da *Figura 2*, sob um ponto de vista matricial, todas as observações podem ser representadas em um vetor Y_t (Equação (1)) e, as observações apenas do nível 2 em um outro vetor b_t (Equação (2)). Além disso, os valores agregados podem ser formulados como uma soma dos níveis inferiores, conforme a Equação (3).

$$Y_t = [Y_{total,t} \ Y_{a,t} \ Y_{b,t} \ Y_{x,t} \ Y_{y,t} \ Y_{ax,t} \ Y_{bx,t} \ Y_{ay,t} \ Y_{by,t}]' \quad (1)$$

$$b_t = [Y_{ax,t} \ Y_{bx,t} \ Y_{ay,t} \ Y_{by,t}]' \quad (2)$$

$$Y_{total,t} = Y_{a,t} + Y_{b,t} = Y_{x,t} + Y_{y,t} = Y_{ax,t} + Y_{bx,t} + Y_{ay,t} + Y_{by,t} \quad (3)$$

(ATHANASOPOULOS et al., 2020)

Matricialmente, representa-se essa equação por meio da operação $Y_t = S b_t$ apresentada abaixo, onde S é a matriz de soma.

$$\begin{array}{c} Y_t \\ \hline \begin{bmatrix} Y_{total,t} \\ Y_{a,t} \\ Y_{b,t} \\ Y_{x,t} \\ Y_{y,t} \\ Y_{ax,t} \\ Y_{bx,t} \\ Y_{ay,t} \\ Y_{by,t} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} S \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} b_t \\ \hline \begin{bmatrix} Y_{ax,t} \\ Y_{bx,t} \\ Y_{ay,t} \\ Y_{by,t} \end{bmatrix} \end{array} \quad (4)$$

Fonte: Adaptado de Athanasopoulos et al. (2020).

2.2

Métodos de previsão

Segundo HYNDMAN et al. (2008), um modelo estatístico pode ser utilizado para gerar uma distribuição de probabilidade completa de dados futuros a partir de um processo estocástico de geração de dados. Essa distribuição de probabilidade fornece uma gama de potenciais resultados para a variável de interesse. Ao calcular a média (ou mediana) dessa distribuição de probabilidade, pode-se obter uma previsão pontual, representando o valor esperado para o período de tempo futuro (HYNDMAN et al., 2008).

Além disso, um modelo estatístico permite o cálculo de intervalos de previsão, que fornecem uma medida de incerteza em torno do ponto de previsão. Dessa forma, eles indicam com um nível de confiança especificado, um intervalo dentro do qual se espera que os valores futuros estejam. Em outras palavras, eles fornecem uma noção da variabilidade ou dispersão de resultados possíveis (HYNDMAN et al., 2008; MONTGOMERY et al., 2008).

Ao considerar toda a distribuição de probabilidade e gerar previsões pontuais, bem como intervalos de previsão, um modelo estatístico oferece uma abordagem mais abrangente e proveitosa para a previsão, capturando o valor esperado e a incerteza associada aos resultados futuros. Observando a literatura tradicional de séries temporais hierárquicas, os métodos ETS e ARIMA são

modelos adequados e promissores para previsões dessas séries (HYNDMAN et al., 2008; HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021; MONTGOMERY et al., 2008; SHANG e HYNDMAN, 2016; KARMY e MALDONADO, 2019; HOLLYMAN et al., 2021). Além disso, devido à natureza do ambiente de varejo, os métodos utilizados para geração de previsões devem ser flexíveis, acessíveis e pouco dependentes de conjuntos de dados extensos. Dessa forma, neste capítulo serão apresentados os modelos ETS e ARIMA. O caso particular do ARIMA, SARIMAX será também abordado devido a sua capacidade de incluir informações de sazonalidade e variáveis exógenas ao modelo ARIMA. A distinção principal entre os três modelos reside nos fundamentos em que cada um se baseia: tendência e sazonalidade para o primeiro e auto correlação para o segundo e terceiro.

2.2.1

ETS

Alguns dos métodos de previsão de séries temporais mais eficazes utilizam um domínio chamado Suavização Exponencial (HYNDMAN et al., 2008). Segundo Montgomery e Jennings (2008), suavização, intrinsecamente, consiste em uma técnica que separa o padrão observado do ruído, possibilitando que um suavizador atue como um filtro para obter uma estimativa mais precisa desse padrão. Em suma, ao suavizar, o dado observado pode ser substituído pela sua melhor estimativa.

Do inglês *Exponential Smoothing*, a Suavização Exponencial nada mais é que um algoritmo que analisa os dados passados para calcular médias ponderadas de acordo com o período de cada observação. Em suma, o peso da informação analisada é reduzido exponencialmente conforme o período se torna mais antigo. Dessa forma, o modelo se baseia apenas no passado histórico do dado, tirando conclusões sobre os comportamentos observados (WINTERS, 1960).

Grandes vantagens citadas por Holt (2004) para esse tipo de método são sua flexibilidade, seu uso moderado de recursos computacionais e sua modesta dependência de conjuntos extensos de dados. Ao permitir, com pouco custo, uma ágil inclusão de novos dados, a abordagem revela-se então, altamente adequada para o contexto varejista, onde a multiplicidade de previsões é indispensável, em

virtude dos diversos propósitos estratégicos. Adicionalmente, a natureza dinâmica do setor pode restringir o histórico de dados disponíveis, tornando o modelo ainda mais proveitoso.

O ETS, como o próprio nome indica, é decomposto nos fundamentos de Erro, Tendência e Sazonalidade. Essas três componentes combinadas são utilizadas para prever valores futuros. Com o intuito de criar uma formulação da série observada, cada uma das componentes pode aparecer na função, no formato de vetores estado-espço, de forma aditiva ou multiplicativa. A *Tabela 1* demarca cada uma das possíveis variações das componentes tendência e sazonalidade. Já a componente erro pode aparecer em cada uma dessas variações de forma aditiva, ou multiplicativa. Ao combinar o erro com as variações encontradas na tabela, obtemos um total de 30 casos particulares do ETS, incluindo as famosas abordagens Holt e Holt-Winters. Vale notar que embora existam 30 possíveis casos de ETS, um modelo com um erro aditivo prevê as mesmas projeções pontuais que um modelo com um erro multiplicativo, desde que as variações de tendência e sazonalidade sejam as mesmas. A diferença entre os dois modelos será visível, no entanto, nos intervalos de confiança calculados (HYNDMAN et al., 2008).

Tabela 1: Componentes de modelos ETS.

| Tendência (T) | Sazonalidade (S) | | |
|--------------------------------|------------------|-------------|--------------------|
| | Nenhuma (N) | Aditivo (A) | Multiplicativo (M) |
| Nenhuma (N) | (N,N) | (N,A) | (N,M) |
| Aditiva (A) | (A,N) | (A,A) | (A,M) |
| Aditivo amortecido (Aa) | (Aa,N) | (Aa,A) | (Aa,M) |
| Multiplicativa (M) | (M,N) | (M,A) | (M,M) |
| Multiplicativo amortecido (Ma) | (Ma,N) | (Ma,A) | (Ma,M) |

Fonte: Adaptado de Hyndman e Athanasopoulos (2021).

Ao analisarmos a tabela, é possível observar que, em alguns casos, as componentes de tendência e sazonalidade podem estar ausentes, enquanto em outros, podem ser identificadas de forma aditiva ou multiplicativa. Por fim, existem cenários cujos comportamentos da tendência são amortecidos. Esse tipo de variação foi criado como uma solução para séries que embora apresentem uma tendência de

crescimento ou decrescimento, o comportamento provavelmente não se estenderá por um longo período de tempo. Isto é, quanto mais longe é o horizonte de previsão, menor é o efeito da tendência observada historicamente (HYNDMAN et al., 2008).

A variação do ETS considerada mais simples é aquela com tendência e sazonalidade nulas, também chamada de Suavização Exponencial Simples (SES). Nela a previsão de cada período é composta pela média ponderada do dado e pela previsão do período imediatamente anterior. Embora prática, popular e adaptável, essa abordagem pode comprometer a precisão ao não considerar os efeitos de longo prazo de tendências e sazonalidades. Assim, só deve ser utilizada em séries sem comportamentos claros dessas componentes. Na prática, a previsão no tempo T+1 utilizando o SES é igual ao nível (L) do dado observado no período T (mais recente). Esse nível do período T é calculado pela Equação (5), onde α é um fator (de 0 à 1) responsável pelo peso de cada período observado (WINTERS, 1960).

$$\hat{Y}_{T+1|T} = L_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)L_{t-1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \dots + \alpha(1-\alpha)^n Y_{t-n} \quad (5)$$

Como é possível formar 30 casos particulares do ETS, para cada um deles existem também equações de estado, ou seja, equações utilizadas para definir a evolução dos estados ao longo do tempo. Na *Tabela 2* são apresentadas essas equações de acordo com as variações de combinações de erro, tendência e sazonalidade escolhidas. Mais especificamente, para cada caso, encontramos uma equação de previsão, uma equação de atualização de nível e, caso a tendência e/ou a sazonalidade estejam presentes no modelo, uma equação de atualização para cada uma delas (HYNDMAN et al., 2008).

Tabela 2: Equações de estado dos modelos ETS.

| E | T | S | | |
|---|----------------|---|--|--|
| | | N | A | M |
| A | N | $\hat{Y}_t = L_{t-1}$ $L_t = L_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / L_{t-1}$ |
| | A | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + b_{t-1}$ $L_t = L_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = (L_{t-1} + b_{t-1}) s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (L_{t-1} + b_{t-1})$ |
| | A _a | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + \phi b_{t-1}$ $L_t = L_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = (L_{t-1} + \phi b_{t-1}) s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (L_{t-1} + \phi b_{t-1})$ |
| | M | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / L_{t-1}$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1} + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / L_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1} s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / (s_{t-m} L_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (L_{t-1} b_{t-1})$ |
| | M _a | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + b_{t-1}^\phi$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / L_{t-1}$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / L_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / (s_{t-m} L_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (L_{t-1} b_{t-1}^\phi)$ |
| M | N | $\hat{Y}_t = L_{t-1}$ $L_t = L_{t-1}(1 + \alpha \varepsilon_t)$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + \alpha(L_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(L_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + (1 + \alpha \varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma \varepsilon_t)$ |
| | A | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + b_{t-1}$ $L_t = (L_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha \varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(L_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + b_{t-1} + \alpha(L_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(L_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(L_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = (L_{t-1} + b_{t-1}) s_{t-m}$ $L_t = (L_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha \varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(L_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma \varepsilon_t)$ |

| | | | |
|----------------|--|--|--|
| A _a | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + \phi b_{t-1}$ $L_t = (L_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha \varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(L_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}) \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha(L_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}) \varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(L_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}) \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(L_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}) \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = (L_{t-1} + \phi b_{t-1}) s_{t-m}$ $L_t = (L_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha \varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(L_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}) \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma \varepsilon_t)$ |
| M | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1} (1 + \alpha \varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} (1 + \beta \varepsilon_t)$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1} + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1} + \alpha(L_{t-1} b_{t-1} + s_{t-m}) \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(L_{t-1} b_{t-1} + s_{t-m}) \varepsilon_t / L_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(L_{t-1} b_{t-1} + s_{t-m}) \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1} s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1} (1 + \alpha \varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} (1 + \beta \varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m} (1 + \gamma \varepsilon_t)$ |
| M _a | $\hat{Y}_t = L_{t-1} + b_{t-1}^\phi$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi (1 + \alpha \varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^\phi (1 + \beta \varepsilon_t)$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi + s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha(L_{t-1} b_{t-1}^\phi + s_{t-m}) \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta(L_{t-1} b_{t-1}^\phi + s_{t-m}) \varepsilon_t / L_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(L_{t-1} b_{t-1}^\phi + s_{t-m}) \varepsilon_t$ | $\hat{Y}_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi s_{t-m}$ $L_t = L_{t-1} b_{t-1}^\phi (1 + \alpha \varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^\phi (1 + \beta \varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m} (1 + \gamma \varepsilon_t)$ |

Fonte: Adaptado de Hyndman et al. (2008).

Como é possível observar na tabela, cada equação de atualização possui no mínimo uma constante. O α , foi apresentado anteriormente no modelo SES e está fortemente associado ao nível. Já o ϕ é um parâmetro amortecedor. Por fim, os argumentos β e γ são utilizados para suavizar a tendência e a sazonalidade respectivamente.

Na prática, os métodos de suavização exponencial exigem a definição das constantes e dos valores iniciais presentes em suas respectivas equações. Assim, a partir dos dados, as previsões podem ser calculadas. Ao otimizar, o procedimento mais comum escolhe de acordo com o objetivo de minimizar os resíduos ou maximizar a máxima verossimilhança (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

2.2.2

ARIMA

Um ETS assume que não há correlação entre os ruídos da série, e, portanto, não explora a conexão entre as observações. Essa suposição, no entanto, em muitos casos não se confirma ao longo da extensão da série temporal e, dessa forma, o modelo dispensa informações relevantes do problema (MONTGOMERY et al., 2008).

Uma abordagem alternativa na geração de previsões de séries temporais, sem abrir mão do caráter econômico, versátil e simplificado, é por meio de modelos Autorregressivos Integrados de Médias Móveis (ARIMA), também denominados de modelos de Box & Jenkins (LIU et al., 2016). Como o próprio nome indica, a ferramenta pode ser decomposta em 3 métodos: AR (Autorregressivo), I (Integração) e MA (Médias Móveis). Nos tópicos seguintes, serão apresentados individualmente os recursos mencionados. Entretanto, é relevante, em um primeiro momento, abordarmos brevemente o conjunto formado por essas três partes.

Cada método mencionado é acompanhado por um elemento, representado pelas letras p, d, ou q, chamado ordem, de forma que o modelo pode ser descrito como ARIMA(p,d,q). Abaixo é apresentada a Equação (6), em notação de deslocamento retroativo, que combina os três métodos. Dessa forma, a parte 1 da fórmula provém do método autorregressivo (AR), enquanto a parte 2 origina-se da Integração e a parte 3 do método de médias móveis (MA). O operador B da fórmula denota o deslocamento retroativo da variável associada, isto é, ele indica que a observação é referente à algum período anterior e a sua potência especifica o número de períodos de defasagem. Além disso, como é possível observar, a fórmula manuseia um conjunto de parâmetros. De maneira semelhante ao ETS, o ARIMA exige a definição da constante e dos parâmetros, que pode ser feita de forma a minimizar os resíduos ou maximizar a máxima verossimilhança (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

$$\underbrace{(1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p)}_{\text{AR}(p)} \underbrace{(1 - B)^d}_{\text{I}(d)} y_t = c + \underbrace{(1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q)}_{\text{MA}(q)} (\varepsilon_t) \quad (6)$$

(HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021)

2.2.2.1

Modelo Autorregressivo (AR)

Modelos autorregressivos diferem de modelos regressivos, pois enquanto o segundo utiliza equações com variáveis externas para explicar o comportamento da série, o primeiro utiliza equações com valores históricos da própria série. Esses modelos podem ser descritos pela formulação abaixo, com um ruído aleatório ε_t , uma constante c e com o elemento p indicando a ordem do modelo. Dessa forma, um modelo de ordem 1, também conhecido como AR(1), baseia-se apenas no valor observado no período imediatamente anterior ao de previsão, ao passo que um modelo de ordem 2, ou AR(2), considera também o valor observado dois períodos antes ao de previsão (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (7)$$

(HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021)

Os parâmetros φ encontrados na Equação (7) são aplicados para descrever a relação entre o valor previsto pelo método e cada valor histórico presente. A definição deles varia de acordo com a ordem do modelo. No AR(1), por exemplo, o φ assume um valor entre -1 e 1. Já no AR(2), o φ_2 corresponde a um valor entre -1 e 1 e, em conjunto com φ_1 , precisa satisfazer as duas equações abaixo (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, \varphi_1 - \varphi_2 < 1 \quad (8)$$

(HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021)

2.2.2.2

Modelo de Médias Móveis (MA)

De maneira similar ao autorregressivo, o modelo de médias móveis utiliza equações com os erros históricos para explicar o comportamento da série. Assim, a formulação de médias móveis, exposta na Equação (9), é semelhante a Equação (7) anterior, porém com uma substituição dos valores históricos por erros históricos. A ordem nessa abordagem é simbolizada por q e os parâmetros utilizados são θ . A definição dos θ também varia conforme a ordem do modelo (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

$$y_t = c + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (9)$$

(HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021)

2.2.2.3

Integração (I)

De maneira oposta ao ETS, o ARMA, junção de Autorregressivo com Médias Móveis, atua com séries temporais estacionárias. Existem, no entanto, técnicas de transformação, como a diferenciação, para séries não estacionárias, permitindo que os dados se encaixam a esses tipos de modelos (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021). Dessa forma, em tais circunstâncias, o processo é composto por quatro passos adicionais:

- Transição dos dados para um formato estacionário;
- Construção do modelo;
- Reversão da transformação inicial;
- Geração das previsões.

Portanto, a inclusão do I no ARIMA denota ao processo de integração pelo qual o modelo é submetido ao reverter a transformação inicial dos dados. O número de vezes que a série precisou ser diferenciada é representada no modelo pela ordem d (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

2.2.3

SARIMAX

O ARIMA é, conforme mencionado, formado pelas ordens p, d, q e utilizado para previsões de séries não sazonais. Ao incluir elementos sazonais, encontramos a abordagem SARIMA(p, d, q)(P, D, Q) $_m$. Esse modelo manipula, além dos elementos originais do ARIMA, três parâmetros sazonais (m, Φ e Θ), sendo o m responsável pelo número de observações que se repete a cada período (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021). Dessa forma, as previsões de um SARIMA(1,1,1)(1,1,1) $_{12}$, por exemplo, podem ser obtidas por meio da Equação (10).

$$(1 - \varphi_1 B) (1 - \Phi_1 B^{12}) (1 - B) (1 - B^{12}) (y_t - c) = (1 + \theta_1 B) (1 + \Theta_1 B^{12}) (\varepsilon_t) \quad (10)$$

(HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021)

Além disso, por meio de regressões, é possível incluir múltiplas variáveis exógenas ao modelo, gerando novas percepções para aumentar a precisão das previsões (ARUNRAJ et al., 2016). Simbolizadas por $X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt}$, cada uma delas deve estar acompanhada por um parâmetro β responsável por descrever a relação entre a variável adicionada e o valor observado. As variáveis são adicionadas com o objetivo de explicar minuciosamente os resíduos que os outros modelos falham em capturar (DUTTA e ROY, 2021). Dessa forma, a nova abordagem ganha destaque ao combinar o uso de sazonalidade, autocorrelação e influências de variáveis externas.

A notação desse modelo é indicada como SARIMAX(p, d, q)(P, D, Q) $_m(k)$, com k indicando a quantidade de componentes externas adicionadas (ARUNRAJ et al., 2016). A fórmula genérica para calcular previsões para esse tipo de modelo com múltiplas variáveis externas é apresentada na Equação (11).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{AR}(p) & \text{AR}(P) & \text{I}(d) \quad \text{I}(D) \\ & \text{sazonal} & \text{sazonal} \end{array} \\ \hline (1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) (1 - \Phi_1 B^m - \Phi_2 B^{2m} - \dots - \Phi_P B^{Pm}) (1 - B)^d (1 - B^m)^D (y_t - c) \\ \hline = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) (1 + \Theta_1 B^m + \Theta_2 B^{2m} + \dots + \Theta_Q B^{Qm}) (\varepsilon_t) + \\ \hline \begin{array}{ccc} \text{MA}(q) & \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \dots + \beta_k X_{kt} & \text{MA}(q) \\ & \text{Variáveis Exógenas} & \text{sazonal} \end{array} \end{array} \quad (11)$$

(DUTTA e ROY, 2021)

Dessa forma, um SARIMAX(1,1,1)(1,1,1)₁₂(1), por exemplo, é um caso específico de um SARIMAX. Com uma sazonalidade anual e descrito por uma variável exógena, ele pode ser formulado conforme a Equação (12).

$$(1 - \phi_1 B) (1 - \Phi_1 B^{12}) (1 - B) (1 - B^{12}) (y_t - c) = (1 + \theta_1 B) (1 + \Theta_1 B^{12}) (\varepsilon_t) + \beta_1 X_{1t} \quad (12)$$

2.3

Métodos de reconciliação linear

Conforme mencionado anteriormente, as previsões desempenham um papel fundamental em diferentes níveis das instituições. Isto gera uma necessidade de desenvolvê-las em diferentes graus hierárquicos, abrangendo uma variedade de interesses. Por conta disso, muitas vezes, elas são realizadas por mais de uma área da organização, permitindo disponibilidades variadas de recursos de dados e atribuições diferentes de complexidades para a tarefa. Dessa forma, mais de uma estratégia pode ser aplicada na geração das previsões (HOLLYMAN et al., 2021).

Ainda que as estratégias adotadas para realizar as previsões nos diferentes níveis hierárquicos sejam as mesmas, e embora os dados históricos sejam naturalmente agregados na hierarquia, as previsões resultantes não seguem necessariamente o mesmo padrão. Essa variabilidade nas previsões pode levar a inconsistências e contradições que podem afetar as decisões gerenciais, impactando potencialmente o desempenho e os resultados organizacionais. Portanto, é importante adotar abordagens coerentes que possam fornecer previsões confiáveis e alinhadas com os objetivos estratégicos da organização (HOLLYMAN et al., 2021).

Neste contexto, são encontrados na literatura métodos de agregação capazes de solucionar as possíveis inconsistências de previsões mencionadas. Alguns dos métodos mais clássicos são o *Bottom-up* e o *Top-down* e serão abordados adiante. Individualmente, as duas estratégias mencionadas, no entanto, podem não incorporar plenamente, em alguns momentos, as informações contidas nos dados dos níveis inferiores (no caso da *Top-down*) ou superiores (para *Bottom-up*) da hierarquia (HOLLYMAN et al., 2021). Dessa forma, além dos métodos citados, uma terceira técnica será apresentada, a do *MinTrace*. No entanto,

independentemente do método escolhido para alcançar a coerência da previsão, é possível generalizar a estrutura matemática na qual eles se baseiam (WICKRAMASURIYA et al., 2019).

Basicamente, as abordagens envolvem obter primeiramente as projeções estatísticas para cada uma das séries, aqui nomeadas de previsões iniciais, de acordo com os métodos de previsão escolhidos. Ao fazer isso, espera-se que as estimativas não sejam somadas de forma coerente. Aplicando nelas uma operação de transformação, obtemos como resultado as previsões reconciliadas e, portanto, coerentes (WICKRAMASURIYA et al., 2019). Seja uma série de apenas um nível, cujo nó superior é caracterizado por Y_{total} e os nós inferiores são representados por Y_a e Y_b , a *Figura 3* exemplifica esse processo.

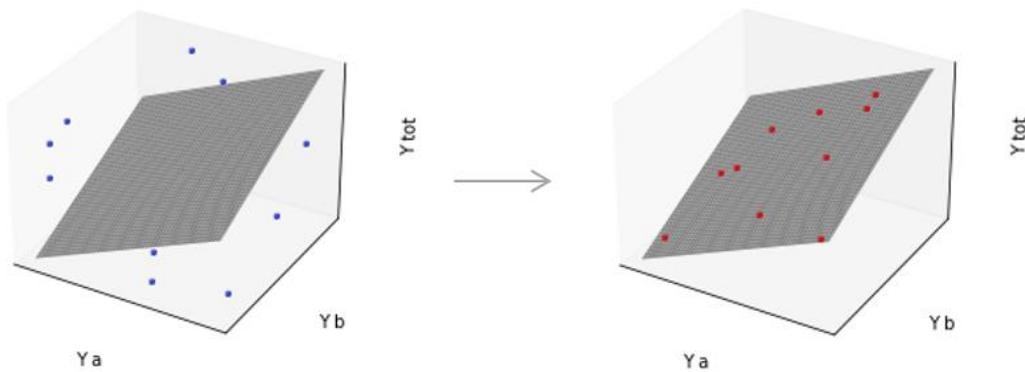


Figura 3: Processo de reconciliação coerente.
Fonte: Adaptado de Athanasopoulos et al. (2020).

Analisando a imagem, observamos que o plano em cinza representa o subespaço (Ω) da Equação (13). Dessa forma, qualquer conjunto de valores que satisfaça a equação, estará localizado sobre o plano. Representamos alguns desses casos com os pontos vermelhos. Por outro lado, qualquer ponto que não satisfaça a equação, neste contexto apresentado em azul, estará localizado fora da superfície (ATHANASOPOULOS et al., 2020). A seta entre as duas figuras simboliza a operação de transformação que é aplicada às previsões iniciais.

$$\tilde{Y}_{total} = \tilde{Y}_a + \tilde{Y}_b \quad (13)$$

(ATHANASOPOULOS et al., 2020)

De forma genérica, dado um vetor $\hat{y}_{T+h|T}$, que consiste nas previsões iniciais h períodos-a-frente de T e um vetor $\tilde{y}_{T+h|T}$, que corresponde às previsões

reconciliadas, temos que a transformação Ψ de adequação ao plano pode ser escrita conforme abaixo (ATHANASOPOULOS et al., 2020).

$$\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega \mid \tilde{y}_{T+h|T} = \Psi(\hat{y}_{T+h|T}) \quad (14)$$

(ATHANASOPOULOS et al., 2020)

Consideraremos as transformações Ψ lineares, as quais podem ser equacionadas matricialmente pela Equação (15), onde S é a matriz soma (ATHANASOPOULOS et al., 2020). Um exemplo de S foi apresentado no tópico 2.1.4, na Equação (4). A matriz G é uma matriz de transformação das previsões iniciais incoerentes. Diferentes estratégias de reconciliação utilizam matrizes G específicas. Nas próximas seções abordaremos algumas delas.

$$\tilde{y}_{T+h|T} = SG\hat{y}_{T+h|T} \quad (15)$$

(ATHANASOPOULOS et al., 2020)

2.3.1

Bottom-up

Uma das abordagens mais tradicionais envolve o uso da *Bottom-up*, que se enquadra como um método linear, conforme apresentado no tópico anterior. Um exemplo clássico da matriz G adotada para este caso é demonstrado a seguir, na Equação (16), onde n representa a quantidade de previsões no nível inferior da hierarquia e m retrata a quantidade total de séries. Se observarmos a fundo, percebemos que, particularmente para essa abordagem, precisamos das previsões iniciais do nível mais baixo da hierarquia apenas, pois os elementos que multiplicam as previsões dos níveis restantes são zerados (WICKRAMASURIYA et al., 2019).

$$G = [0_{n \times m-n} \mid I_n], \text{ onde } 0_{n \times m-n} \text{ é uma matriz nula} \quad (16)$$

(ATHANASOPOULOS et al., 2020)

Dessa forma, um *Bottom-up* aplicado na série agrupada exemplificada pelos grupos 1 e 2 da *Figura 2* pode ser obtido pela operação abaixo.

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{total,t} \\ \tilde{Y}_{a,t} \\ \tilde{Y}_{b,t} \\ \tilde{Y}_{x,t} \\ \tilde{Y}_{y,t} \\ \tilde{Y}_{ax,t} \\ \tilde{Y}_{bx,t} \\ \tilde{Y}_{ay,t} \\ \tilde{Y}_{by,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Y}_{total,t} \\ \hat{Y}_{a,t} \\ \hat{Y}_{b,t} \\ \hat{Y}_{x,t} \\ \hat{Y}_{y,t} \\ \hat{Y}_{ax,t} \\ \hat{Y}_{bx,t} \\ \hat{Y}_{ay,t} \\ \hat{Y}_{by,t} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Habitualmente, previsões do nível inferior da hierarquia podem ser ruidosas e voláteis, comprometendo, pela *Bottom-up*, as previsões agregadas. Além disso, o método ignora as relações entre as séries. Por outro lado, podem conter informações proveitosas, como o comportamento das componentes temporais, que podem não estar presentes nas previsões agregadas (ATHANASOPOULOS et al., 2020; WICKRAMASURIYA et al., 2019). Segundo Wickramasuriya et al. (2019), essa abordagem funciona suficientemente bem para amostras com poucos dados.

2.3.2

Top-down

De maneira análoga, a *Top-down* também se enquadra como um método linear. A matriz G adotada, no entanto, é diferente. Exposta na Equação (18), a matriz inclui elementos p_n responsáveis pelas proporções que cada série recebe sobre o nível superior. Analisando com mais detalhes, percebemos a princípio que, ao contrário da *Bottom-up*, para essa abordagem, precisamos das previsões iniciais do nível superior da hierarquia apenas, pois os elementos que multiplicam as previsões dos níveis restantes são zerados (WICKRAMASURIYA et al., 2019). No entanto, dependendo da estratégia de *Top-down* adotada, no momento de calcular os elementos p_n podemos precisar de todas as previsões iniciais. Isto é, existem três práticas comuns para calcular as proporções, onde nas duas primeiras, os valores são calculados de acordo com os dados históricos - neste caso, não precisaremos das previsões iniciais dos níveis inferiores -, enquanto na terceira os valores são baseados nas proporções das projeções iniciais. A terceira técnica é comumente

utilizada como padrão nos algoritmos computacionais (ATHANASOPOULOS et al., 2020; HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

$$G = [p \mid 0_{n \times m-1}], \text{ onde } p = [p_1, p_2, \dots, p_n] \quad (18)$$

(ATHANASOPOULOS et al., 2020)

Dessa forma, um Top-down aplicado na série agrupada exemplificada pelos grupos 1 e 2 da *Figura 2* pode ser obtido pela operação abaixo.

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{total,t} \\ \tilde{Y}_{a,t} \\ \tilde{Y}_{b,t} \\ \tilde{Y}_{x,t} \\ \tilde{Y}_{y,t} \\ \tilde{Y}_{ax,t} \\ \tilde{Y}_{bx,t} \\ \tilde{Y}_{ay,t} \\ \tilde{Y}_{by,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Y}_{total,t} \\ \hat{Y}_{a,t} \\ \hat{Y}_{b,t} \\ \hat{Y}_{x,t} \\ \hat{Y}_{y,t} \\ \hat{Y}_{ax,t} \\ \hat{Y}_{bx,t} \\ \hat{Y}_{ay,t} \\ \hat{Y}_{by,t} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$p_j = \prod_{l=0}^{K-1} \frac{\hat{y}_{j,h}^{(l)}}{\hat{S}_{j,h}^{(l+1)}} \quad (20)$$

(ATHANASOPOULOS et al., 2020)

Para o caso de reconciliação de uma estrutura de K níveis, o método dos fatores de proporções preditivas aplica a Equação (20). Dado que $j \in [1, n]$, onde n é a cardinalidade do nível mais inferior da hierarquia, os fatores de proporção são calculados em função de $\hat{y}_{j,h}^{(l)}$ (valor da previsão inicial h períodos-a-frente referente ao nó L níveis acima de j) e de $\hat{S}_{j,h}^{(l+1)}$ (soma das previsões iniciais h períodos-a-frente dos nós filhos do nó L níveis acima do nó j). Essa proporção, repetida ao longo da cadeia se traduz no produtório de 0 a $k-1$ que por sua vez contempla a desagregação proporcional das previsões resultando em uma previsão coerente da série temporal (ATHANASOPOULOS et al., 2009).

Ao contrário da abordagem *Bottom-up*, a abordagem *Top-down*, permite a identificação de tendências a nível macro que podem não ser observáveis a nível micro. Hollyman et al. (2021) cita o efeito portfólio como uma das vantagens de se

utilizar dados agregados. Segundo os autores, ao lidar com dados agregados, embora o conjunto seja formado por séries ruidosas, essas séries não possuem uma correspondência exata entre si, de forma que um ruído de uma série pode não aparecer na mesma proporção na outra. Dessa forma, dados agregados tendem a ser menos ruidosos. Ainda segundo os autores, essa redução de ruído pode revelar padrões que, de outra forma, seriam ofuscados no nível individual das séries. Os comportamentos revelados tendem a ser também mais consistentes e estáveis, facilitando a identificação de tendências de longo prazo. No entanto, o *Top-down* pode tornar as previsões enviesadas (ATHANASOPOULOS et al., 2009).

2.3.3

MinTrace

O objetivo da abordagem *MinTrace* é encontrar um G ótimo. Para isso, são consolidadas duas conclusões sobre a reconciliação linear, uma em relação à média e outra em relação à variância envolvendo \tilde{y} . A primeira conclusão é apresentada a seguir (WICKRAMASURIYA et al., 2019).

$$\text{Se} \quad E[\hat{y}_{T+h|T} | y_1, y_2, \dots, y_n] = E[y_{T+h|T} | y_1, y_2, \dots, y_n] \quad (21)$$

$$\text{e se} \quad SGS' = S \quad (22)$$

$$\text{então,} \quad E[\tilde{y}_{T+h|T} | y_1, y_2, \dots, y_n] = E[y_{T+h|T} | y_1, y_2, \dots, y_n] \quad (23)$$

Traduzindo em palavras, a dedução indica que previsões reconciliadas \tilde{y} são não enviesadas se as previsões \hat{y} forem não enviesadas e se SG for uma projeção. A outra conclusão indica que a matriz V_h de variância do erro de \tilde{y} em relação ao dado real, pode ser escrita conforme abaixo (WICKRAMASURIYA et al., 2019).

$$V_h = \text{Var}[y_{T+h} - \tilde{y}_{T+h|T} | y_1, y_2, \dots, y_n] = SGSW_h G'S', \quad (24)$$

$$\text{onde} \quad W_h = \text{Var}[y_{T+h} - \hat{y}_{T+h|T} | y_1, y_2, \dots, y_n] \quad (25)$$

A partir disso, buscamos um G que minimize o traço da matriz V_h . Isso é interessante porque o traço da matriz V_h é a soma das variâncias dos erros de \tilde{y} . A matriz G é obtida de acordo com a fórmula abaixo (WICKRAMASURIYA et al., 2019).

$$G = (S'W_h^{-1}S)^{-1}S'W_h^{-1} \quad (26)$$

No entanto, como W_h é uma matriz de difícil obtenção, algumas simplificações são amplamente utilizadas, originando diferentes subclasses de *MinTrace*. Duas delas são apresentadas na *Tabela 3* (WICKRAMASURIYA et al., 2019).

Tabela 3: Abordagens *MinTrace*.

| Método de Reconciliação | Simplificação de W_h^{-1} | Matriz G resultante |
|-------------------------|--|--------------------------------|
| Combinação Ótima (OLS) | $k_h I$, onde I é a matriz Identidade | $(S'S)^{-1} S'$ |
| WLS Struct | $k_h \chi_s$, onde $\chi_s = \text{diag}(S1)$ e 1 é um vetor unitário de dimensão n | $(S' \chi_s S)^{-1} S' \chi_s$ |

Fonte: Adaptado de Wickramasuriya et al. (2019).

k_h é a variância dos níveis mais baixos. No entanto, ela não precisa ser especificada para os propósitos deste estudo uma vez que ela é cancelada na operação de matriz G .

Uma vantagem do método OLS é tornar G independente das variâncias e, portanto, dos dados, gerando uma economia de recursos computacionais. No entanto, a abordagem não atribui pesos a nenhum nível e ignora qualquer relação entre as séries (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

Ao mesmo tempo, pelo método WLS, a simplificação $W_h^{-1} = k_h \chi_s$, assume que os erros da previsão inicial são descorrelacionados entre si. Dessa forma, os elementos da diagonal de χ_s contêm o número de nós cujas variâncias de erros de previsão tem relevância para o respectivo nó. Em outras palavras, esta aproximação depende apenas da estrutura de agregação e por isso é conhecido por WLS (*struct*). Essa aplicação é especialmente útil em casos em que não é possível acessar os resíduos e, portanto, o método se apoia no conhecimento da estrutura hierárquica (WICKRAMASURIYA et al., 2019).

2.4

Métricas de desempenho

Formas de avaliar o desempenho de modelos envolvem cálculos de erros que representam a diferença entre o valor observado e a sua previsão. Neste capítulo serão apresentadas métricas MAPE e RMSE.

2.4.1

MAPE

O erro percentual absoluto (APE) é calculado ao dividir, pelo dado real, o desvio absoluto entre o dado real e o valor previsto. Como o próprio nome indica, o MAPE é meramente a média dos APEs de cada horizonte de previsão (TICHY, 2023). Sua formulação é apresentada a seguir.

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum \frac{|e_t|}{y_t} \quad (27)$$

HYNDMAN e ATHANASOPOULOS (2021)

Embora seja uma métrica muito utilizada, sobretudo no ambiente corporativo, devido a sua linguagem simples e pela clara interpretação dos cálculos e resultados, o desempenho do MAPE é prejudicado quando aplicado a volumes pequenos de dados ou quando empregado em previsões intermitentes. Além disso, enquanto a medida pode amplificar certos ruídos, ela pode encobrir outros, induzindo os tomadores de decisão a escolher previsões com um viés sistemático (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021; TICHY, 2023). Portanto, segundo Tichy (2023), o MAPE não deve ser utilizado individualmente ou sem contexto. Ainda assim, o MAPE possui a grande vantagem em relação à métodos dependentes de escalas por tornar possível realizar comparações entre erros de previsões de diferentes categorias, ainda que os dados estejam em diferentes escalas.

2.4.2

RMSE

O RMSE, do inglês *Root Mean Squared Error* (raiz do erro médio quadrático) é uma métrica apresentada na mesma escala dos dados observados. Ele pode ser calculado segundo a fórmula abaixo (HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021).

$$RMSE = \sqrt{\sum \frac{e_t^2}{n}} \quad (28)$$

Por consequência, não é possível comparar RMSEs de observações em escalas diferentes. Além disso, a métrica atribui um forte peso para erros grandes, permitindo profunda influência de *outliers*.

3

Metodologia

3.1

Estudo de caso

Este trabalho representa um estudo de caso aplicado, impulsionado pelo intuito de traduzir o conhecimento científico apresentado previamente no segundo capítulo para a aplicação prática. Para tanto, analisa os dados concretos de uma empresa e as projeções e os resultados são obtidos e discutidos com base nos instrumentos encontrados na literatura. Sobretudo, o estudo adota uma abordagem quantitativa cujos desdobramentos mensuráveis são fortalecidos por uma estrutura matemática (GIL, 2008).

3.2

Modelagem

Python foi a linguagem utilizada para desenvolver a aplicação prática de cada estágio deste projeto. Suas bibliotecas statsforecast, hierarchicalforecast, pmdarima e statsmodels foram as principais utilizadas conforme indicado por Hyndman como as principais implementações em Python para os seus métodos de series temporais originalmente construídos em R (HYNDMAN, 2022).

O Python é uma linguagem de programação de sintaxe simples, amplamente utilizada em diversos campos de aplicações e com uma extensa e ativa comunidade de desenvolvedores que elaborou uma rica coleção de bibliotecas competentes (SAABITH et al., 2019). De acordo com o IEEE Spectrum de 2023, Python conquistou novamente a primeira posição no ranking das linguagens mais utilizadas pelos membros da comunidade científica IEEE (CASS et al., 2023). Tendo em vista a crescente relevância que a linguagem alcançou nos últimos anos, esse trabalho visa adicionar à pouco explorada literatura de séries temporais hierárquicas em Python mais uma aplicação prática.

O diagrama contendo os sete passos desse trabalho utilizados para gerar previsões temporais hierárquicas é apresentado na *Figura 4*. Baseado nas etapas de Montgomery et al. (2008), o esquema é detalhado em sequência.

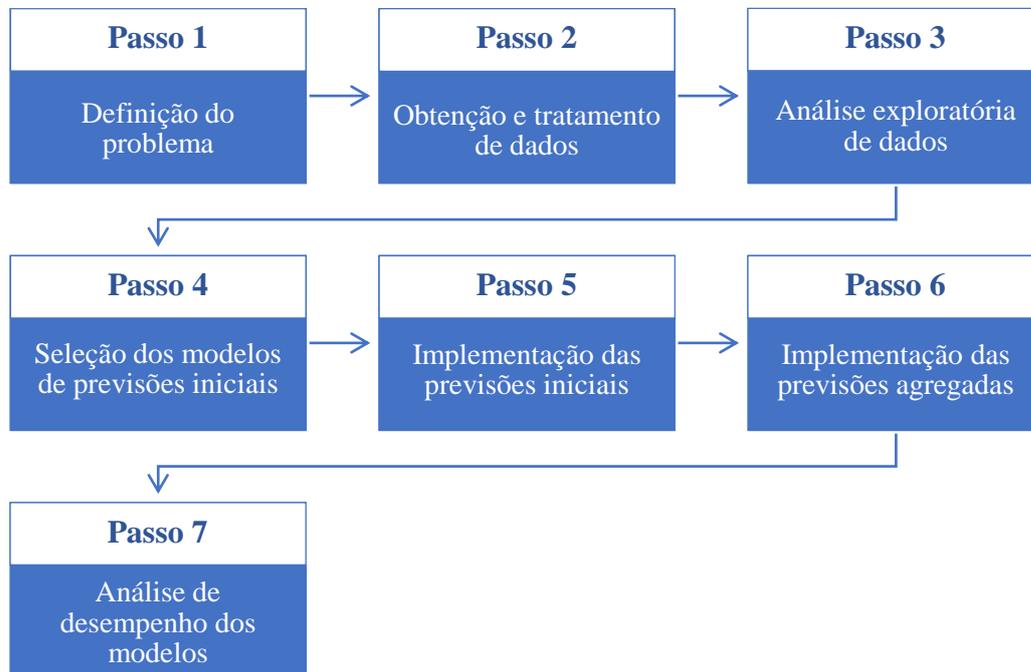


Figura 4: Etapas de geração de previsões temporais hierárquicas.
Fonte: Elaborado pela autora.

Passo 1) Definição do problema: a primeira etapa na geração de previsões estatísticas abrange a percepção das necessidades e expectativas do cliente para a previsão. Dessa forma, nesse passo devem ser definidos o formato, a complexidade de precisão exigida e o horizonte de previsão. Particularmente, a exploração de variados aspectos do sistema de negócios permite compreender componentes de previsão relevantes (MONTGOMERY et al., 2008).

Passo 2) Obtenção e tratamento de dados: a segunda etapa consiste na coleta dos dados históricos referentes às séries de previsão. Dependendo do método preditivo que será adotado, pode ser relevante reunir também os dados externos que impactam nos resultados das séries estudadas. Neste momento, será necessário definir e aplicar soluções para *outliers* e dados nulos. Por fim, deve-se considerar a coleta futura e o armazenamento dos dados de forma a manter a confiabilidade e a integridade das informações nas próximas projeções (MONTGOMERY et al., 2008).

Passo 3) Análise exploratória de dados: a análise de dados permite, por meio de gráficos, a identificação visual de padrões de comportamento, como as componentes de séries temporais mencionadas na revisão da literatura. Conhecimentos adicionais podem ser extraídos de resumos numéricos. Ao elucidar profundamente o problema, a análise auxilia na definição de métodos de previsão que se adequam às séries estudadas (MONTGOMERY et al., 2008).

Passo 4) Seleção dos modelos de previsões iniciais: neste momento são definidos os modelos de previsão que serão utilizados e, portanto, são definidos os respectivos parâmetros para adequar o modelo ao conjunto de dados (MONTGOMERY et al., 2008). Para efetivar a implementação dessa abordagem, as funções `AutoETS()` e `AutoARIMA()` da biblioteca `statsforecast` são adotadas nos modelos ETS e ARIMA e a função `Auto_arima()` da biblioteca `pmdarima` nos modelos SARIMAX.

Essas funções utilizam, conforme mencionado na revisão da literatura, as técnicas de minimização dos resíduos e maximização da máxima verossimilhança para adequar as diferentes opções de modelos de ETS, ARIMA, ou SARIMAX aos dados. Em seguida, são selecionadas as ordens mais eficazes e, portanto, os modelos mais competentes, de acordo com o menor *Akaike Information Criteria* (AIC) calculado conforme abaixo, onde L é a máxima verossimilhança (HYNDMAN e KHANDAKAR, 2008).

$$AIC(ETS) = -2 \log(L) + 2k, \text{ onde } k \text{ é o número total de} \quad (29)$$

parâmetros e estados iniciais estimados

$$AIC(ARIMA) = -2 \log(L) + 2(p + q + k + 1), \text{ onde } k=1 \quad (30)$$

se existe constante ou $k=0$, caso contrário, e p e q são as ordens
(HYNDMAN e ATHANASOPOULOS, 2021)

Passo 5) Implementação das previsões iniciais: após definidos os modelos dos tipos ETS, ARIMA e SARIMAX, eles são utilizados para gerar as previsões iniciais para cada uma das séries temporais no período de interesse (MONTGOMERY et al., 2008). Para implementação prática dos modelos ETS e ARIMA, a função `forecast()` em conjunto com a função `StatsForecast()` da biblioteca `StatsForecast` geram as previsões para o horizonte de previsão. É importante ressaltar que, por se tratarem de séries temporais hierárquicas, conforme

esclarecido na revisão da literatura, nesta etapa as previsões dos níveis hierárquicos ainda não estarão coerentes entre si.

Passo 6) Implementação das previsões agregadas: de acordo com as previsões não reconciliadas, cuja soma dos valores de camadas inferiores não corresponde as camadas superiores, para cada um dos modelos ARIMA, SARIMAX e ETS são produzidas uma série de previsões utilizando as seguintes abordagens: *Bottom-up*, *Top-down*, *Min Trace (OLS)* e *Min Trace (WLS Struct)*. Para isso, é preciso primeiramente construir a matriz de soma S. A biblioteca *hierarchicalforecast* permite, então, reconciliar os dados com as funções adequadas para cada um dos métodos.

Passo 7) Análise de desempenho dos modelos: a última etapa envolve a utilização de métricas de avaliação das previsões. Por estarmos lidando com previsões de mais de uma categoria, é adequado utilizarmos uma análise baseada nas duas métricas mencionadas na revisão da literatura, a MAPE e o RMSE, aproveitando as vantagens de cada uma. Karmy e Maldonado (2019) propõem uma estratégia para avaliação dos métodos de previsão que favorece a comparação de erros em escalas diferentes. Basicamente, para cada método de previsão, é calculado a primeira métrica em cada nível da hierarquia e os modelos são ranqueados de acordo com os menores valores encontrados. Em seguida, uma média aritmética dos ranques de cada método é produzida. O processo é repetido para o segundo erro, de forma que, ao concluir, cada método receberá duas pontuações, uma para o MAPE e outra para o RMSE. Calculando a média entre elas, será alcançado o *ranking* final. Dessa forma, esta abordagem permitirá pontuar os modelos e derivar conclusões sobre os seus desempenhos relativos.

4

Resultados e Discussões

Neste capítulo, serão apresentados e discutidos os resultados dos sete passos descritos na Metodologia. Os resultados obtidos ao empregar, no problema em estudo, os métodos de previsão e de reconciliação detalhados no Referencial Teórico, são, portanto, apresentados e avaliados.

4.1

Definição do problema

Este estudo de caso é baseado em uma varejista brasileira de grande porte que opera diferentes canais de venda, como lojas físicas tradicionais e website. A empresa otimiza ao máximo suas estruturas ao proporcionar aos seus clientes experiências de *Omnichannel* de forma integrada e abrangente. Mais especificamente, duas modalidades de O2O da empresa são exploradas neste trabalho: os serviços de *Ship From Store* (SFS) e *Click And Collect* (CAC). A primeira faz referência às compras de entregas rápidas, feitas no website e entregues ao cliente por meio da loja mais próxima. A segunda consiste em compras feitas também no website, porém o próprio cliente retira os produtos na loja escolhida por ele. Ambos os modais têm as suas próprias particularidades e atendem diferentes necessidades do cliente, como o conforto oferecido pelo SFS, ou o recebimento quase instantâneo da compra e sem taxas de entrega do CAC. A organização comercializa nestas atividades uma ampla gama de produtos, abrangendo desde artigos eletrônicos e de diversas outras categorias. Dessa forma, neste trabalho cada transação mencionada que inclua apenas itens eletrônicos é classificada como “eletro”, enquanto a venda de produtos genéricos é simplificada como “gm”. Uma terceira categoria “misto” foi criada, para abranger operações que envolvem os dois tipos mencionados simultaneamente. Os dados históricos referentes às quantidades de transações de cada categoria mencionada podem ser organizados em séries temporais agrupadas, de modo que elas podem ser agregadas por modalidade de entrega (simplificado como entrega), ou por categoria de item (simplificado como

divisão). Dessa forma, o setor em estudo pode ser estruturado, com base na secção 2.3 do referencial teórico, conforme o esquema da *Figura 5* e a matriz apresentada em sequência.

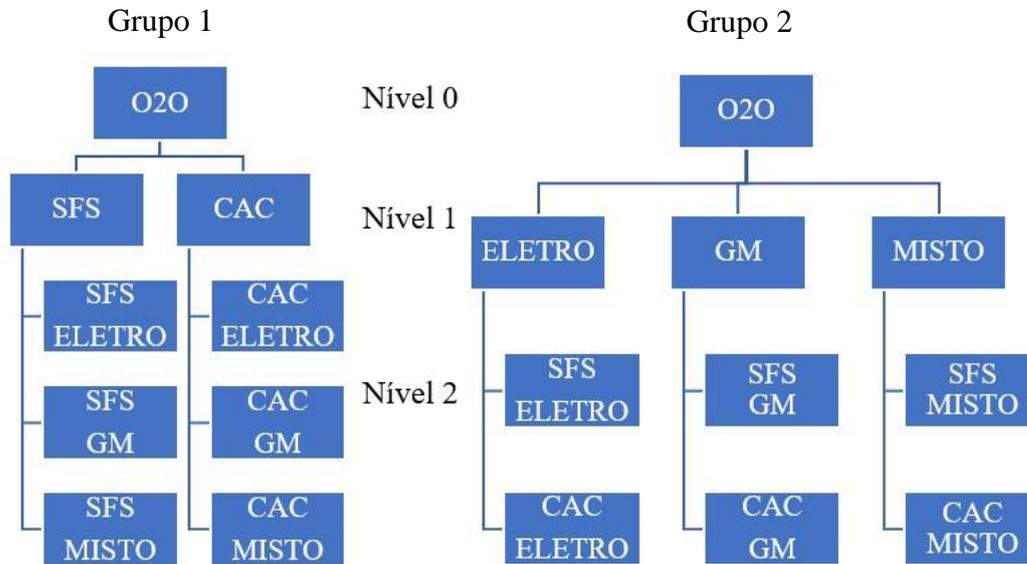


Figura 5: Estrutura hierárquica das transações estudadas.
 Fonte: elaborado pela autora.

$$\begin{matrix}
 Y_t & S & b_t \\
 \begin{bmatrix}
 Y_{O20,t} \\
 Y_{SFS,t} \\
 Y_{CAC,t} \\
 Y_{ELETRO,t} \\
 Y_{GM,t} \\
 Y_{MISTO,t} \\
 Y_{SFS\ ELETRO,t} \\
 Y_{SFS\ GM,t} \\
 Y_{SFS\ MISTO,t} \\
 Y_{CAC\ ELETRO,t} \\
 Y_{CAC\ GM,t} \\
 Y_{CAC\ MISTO,t}
 \end{bmatrix}
 & = &
 \begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Y_{SFS\ ELETRO,t} \\
 Y_{SFS\ GM,t} \\
 Y_{SFS\ MISTO,t} \\
 Y_{CAC\ ELETRO,t} \\
 Y_{CAC\ GM} \\
 Y_{CAC\ MISTO}
 \end{bmatrix}
 \end{matrix} \quad (31)$$

Para conduzir as operações do dia-a-dia do serviço estudado, a empresa faz uso de múltiplas projeções de demanda com propósitos variados. Atualmente, essas previsões são elaboradas manualmente, em planilhas, em um intervalo de projeção mensal e com um *lead time* mensal, considerado curto. Embora este processo permita a obtenção de insights, pode falhar em capturar as complexidades dos

padrões de demanda nos diferentes níveis das estruturas hierárquicas. A automatização dessa atividade além de garantir mais agilidade na replicação da projeção para maiores horizontes de tempo, pode garantir uma maior acurácia. Este fato se torna ainda mais apropriado ao escopo do estudo uma vez que existe uma demanda da empresa de planejar suas projeções anuais com maior antecedência.

De acordo com a estrutura deste problema, torna-se relevante gerar novas projeções utilizando métodos de previsão de séries temporais agrupadas. Portanto, este trabalho se propõe a gerar previsões em um horizonte de previsão de 12 meses para cada uma das 12 séries e, posteriormente, comparar os resultados gerados pelos diferentes modelos testados. A expectativa é que os métodos e insights relevantes aqui utilizados possam ser replicados pela empresa para dados futuros.

4.2

Obtenção e tratamento de dados

Tendo em vista que este estudo demanda a utilização de dados históricos a fim de conduzir as devidas comparações dos resultados alcançados, o período de previsão escolhido foi o ano completo de 2022. Dessa maneira, foram coletados dados mensais desde agosto de 2018 até dezembro de 2022 das séries analisadas, de forma que as observações dos 41 meses até dezembro de 2021 foram classificadas como dados de treino e as 12 seguintes foram chamadas de dados de teste. Considerando as seis séries localizadas na base da hierarquia, a quantidade de valores reunidos no conjunto de dados foi, portanto, 246 para o treino e 72 para o teste. Dessa forma, distribuiu-se aproximadamente 75% dos dados para o treino e 25% para o teste, o que se confirma adequado.

Em seguida, para melhor mapear o problema, consideramos que seria relevante adicionar dados de sete variáveis explicativas e controláveis ao problema. Conforme exposto no capítulo 2, existem muitos fatores que influenciam o comportamento de séries temporais. As novas entradas foram escolhidas de acordo com o conhecimento prático dos profissionais da empresa em estudo e são apresentadas na *Figura 6*.

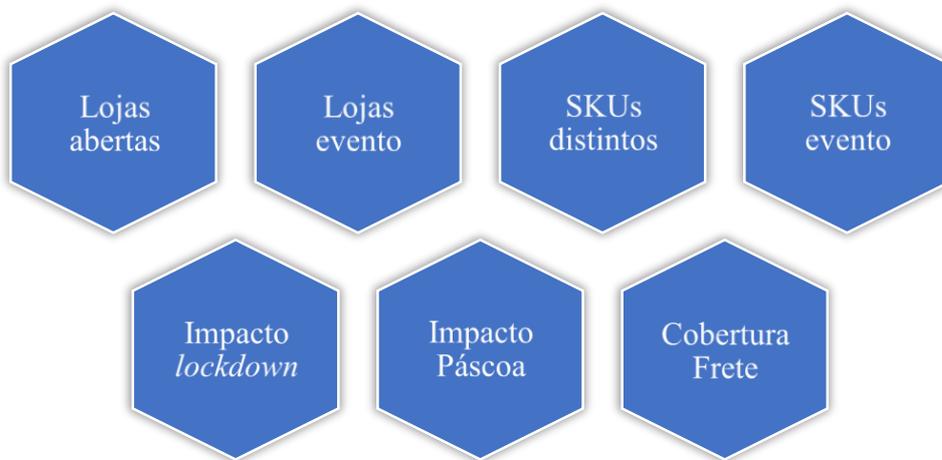


Figura 6: Variáveis exógenas.
Fonte: Elaborado pela autora.

A primeira delas, “**lojas abertas**”, representa a quantidade de lojas operando em cada uma das duas modalidades de entrega. Este atributo ajuda a entender o comportamento de aumento ou redução no número de transações causado pela inclusão ou retirada de um ponto de venda. Sobretudo, apesar da constatação contrária ser correta, lojas que operam na modalidade CAC não necessariamente estão adaptas ao SFS. A variável “**lojas evento**” é parecida com a primeira, porém é preenchida apenas nos meses marcados por grandes eventos e contém o total de lojas operando no dia específico do evento, quando a quantidade de lojas em cada modalidade é limitada. A terceira variável, “**SKUs distintos**”, consiste na quantidade de itens distintos disponíveis para venda para cada categoria de departamento. Esse campo ajuda a explicar o crescimento ou decréscimo do número de transações devido ao aumento ou redução do sortimento disponível. De forma análoga, como a quantidade de itens disponíveis também é limitada nos dias de grandes eventos, a “**SKUs evento**” reúne, em meses específicos, o total de itens distintos disponíveis para o respectivo dia. O quinto conjunto de dados, “**impacto lockdown**”, é uma variável *dummy* criada para explicar o comportamento da demanda impactado pelos períodos de *lockdown* de 2020 e 2021. Como o feriado de Páscoa varia anualmente, o campo “**impacto Páscoa**” foi estipulado de acordo

com a quantidade de dias restantes desde o primeiro dia do mês até o próximo domingo de páscoa. Este campo é calculado apenas nos meses março e abril e é zerado para os períodos restantes. Por fim, a “cobertura frete” foi adicionada para indicar, para a modalidade SFS, o percentual do custo do frete de entrega que foi pago pelo próprio cliente no mês. Com isso, busca-se explicar a alavancagem de venda causada pelo investimento de frete da empresa.

Em seguida, “lojas abertas”, “lojas evento”, “SKU distintos”, “SKUs evento” foram categorizados de forma a facilitar a definição desses valores em projeções futuras. Dessa forma, outra vantagem dos novos dados é que eles são considerados acessíveis para aplicação futura, uma vez que a empresa se planeja a longo prazo ter essas respostas. Assim, espera-se que a coleta futura e o armazenamento dos dados consigam manter a confiabilidade e a integridade das informações, viabilizando novas projeções.

4.3

Análise exploratória dos dados

A realização de uma Análise Exploratória de Dados (AED) consistente é fundamental para o entendimento e o sucesso de qualquer projeto orientado por bancos de dados. A exploração das informações de entrada permite identificar padrões, tendências e correlações escondidas, além de auxiliar na detecção de valores ausentes, erros e inconsistências. Desse modo, ela proporciona maior precisão e confiabilidade das análises subsequentes e a produção de insights valiosos para a seleção das melhores técnicas de modelagem de dados, bem como para a formulação de hipóteses e tomada de decisão. Assim, para analisar os padrões de comportamento das séries temporais em estudo, foram elaboradas ferramentas gráficas para retratar as suas progressões ao longo do período de treino e extrair conhecimento sobre elas.

O primeiro aspecto investigado é o comportamento do total de transações efetuadas (nível 0) ao longo do tempo. Para isso, a *Figura 7* ilustra mês a mês o valor da série temporal em seu nível mais agregado. Nota-se, assim, um claro

comportamento ascendente ao longo do eixo horizontal, bem como alguns meses de pico.

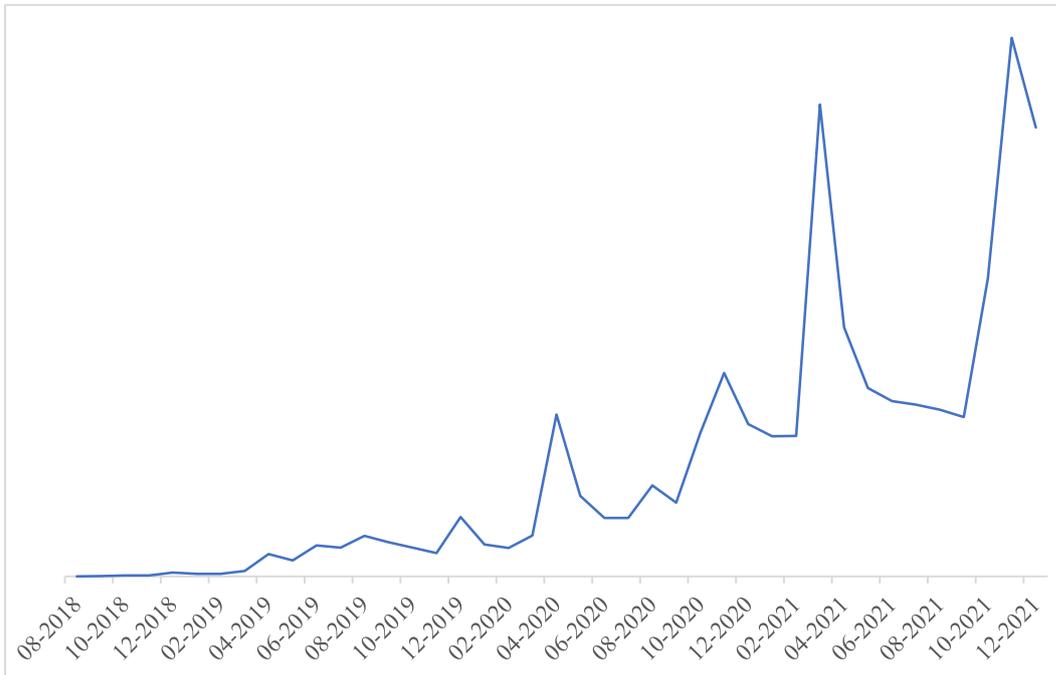


Figura 7: Total de transações efetuadas por mês (nível 0).

Fonte: Elaborado pela autora.

Em seguida, o mesmo tratamento é realizado para as séries temporais no nível de agregação imediatamente inferior, conforme a estrutura apresentada no Grupo 1 da *Figura 5*. Dessa forma, naturalmente a tendência de crescimento com momentos de pico é também observada para ambas as séries filhas, *Figura 8*. Além disso, desde a implementação da modalidade de entrega SFS, cada vez mais tal crescimento ocorreu de maneira equilibrada entre as formas de entrega, isto é, sem que houvesse uma adoção predominante pelo consumidor por um só tipo de entrega em dado momento. Essa constatação indica que o mercado parece reconhecer e aproveitar as vantagens e a pertinência de ambas. Adicionalmente, podemos observar que os dados de SFS adquirem relevância significativa a partir do ano de 2020, especialmente a partir de março, quando foi iniciado o primeiro período de *lockdown* no Brasil devido a pandemia de COVID-19.

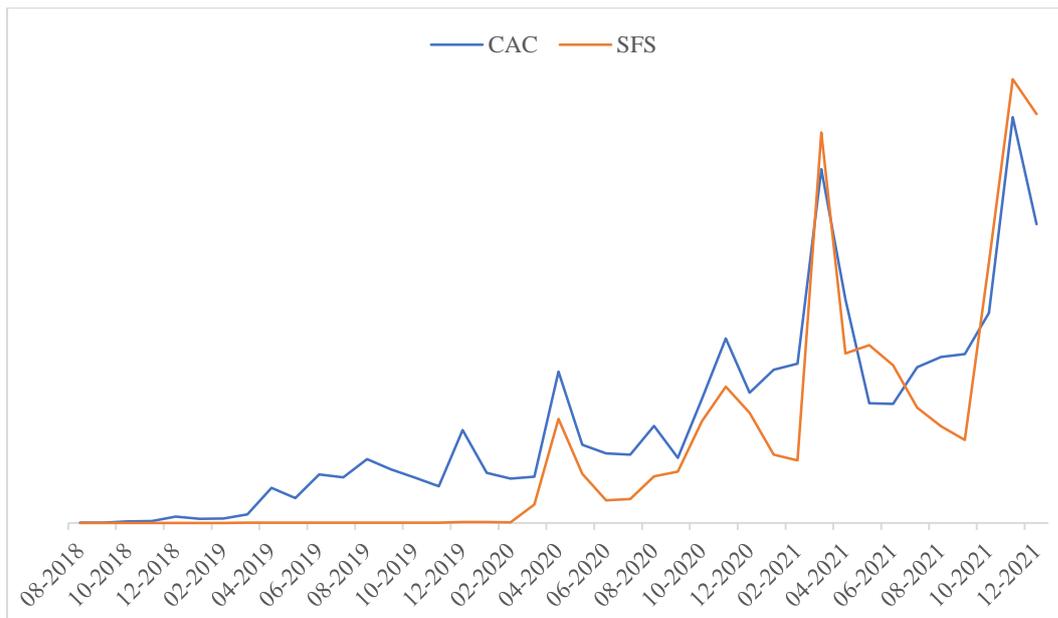


Figura 8: Transações efetuadas por mês por categoria de entrega (nível 1 – Grupo 1).

Fonte: Elaborado pela autora.

Tendo em vista a característica agrupada da série temporal hierárquica em estudo, é preciso explorar também as séries desagregadas por departamento. Observamos que o crescimento ao longo do tempo, nesse caso, não acontece de forma balanceada e nem que a ordem de grandeza das componentes é similar *Figura 9*. Visivelmente, a categoria de itens “gm” é a que compõe a maior parte do total de transações ao passo que a categoria de pedidos “misto”, que compõe uma quantidade significativa de transações, pareça quase nula ao seu lado. Logicamente, nos períodos econômicos mais instáveis o mercado consumidor prefere manter um ticket médio (TM) mais baixo em suas compras, característico de pedidos de menor valor agregado. Na prática destaca-se no gráfico o período de pandemia entre meados de 2020 até o segundo semestre de 2021. Por outro lado, a partir do final do ano 2021 pedidos da divisão “eletro”, portanto de maior TM, parecem retomar força.

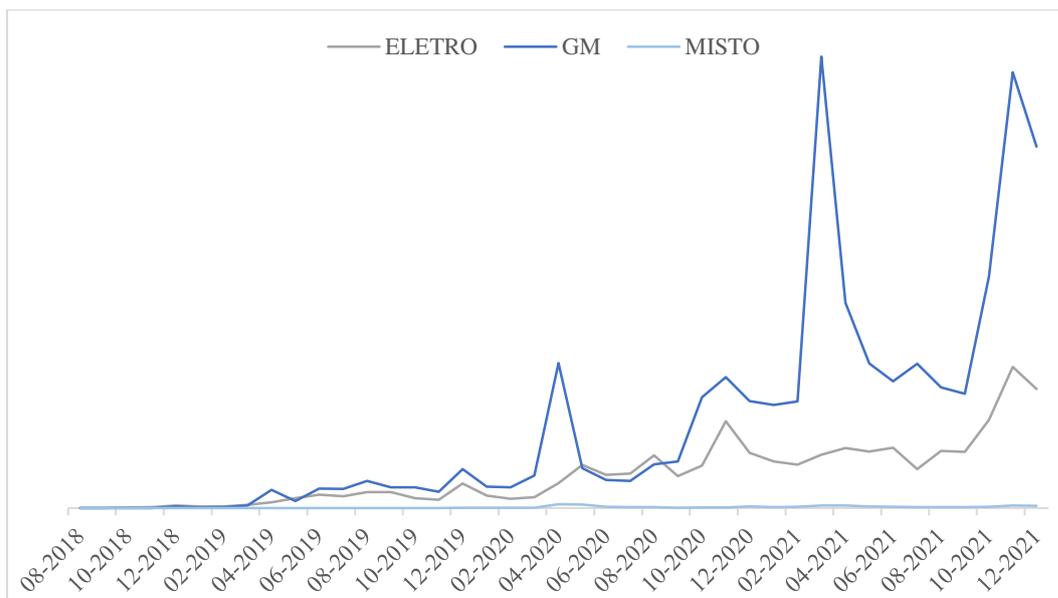


Figura 9: Transações efetuadas por mês por categoria de item (nível 1 – Grupo 2).

Fonte: Elaborado pela autora.

Finalmente, a *Figura 10* apresenta o nível hierárquico mais baixo composto pelas combinações de entrega e departamento que formam o total de transações da companhia. A fim de facilitar a análise do comportamento das múltiplas séries nesse grau de agrupamento e extrair informações sobre elas, foi elaborado na *Figura 11* um gráfico com as participações de cada categoria no total de pedidos por ano.

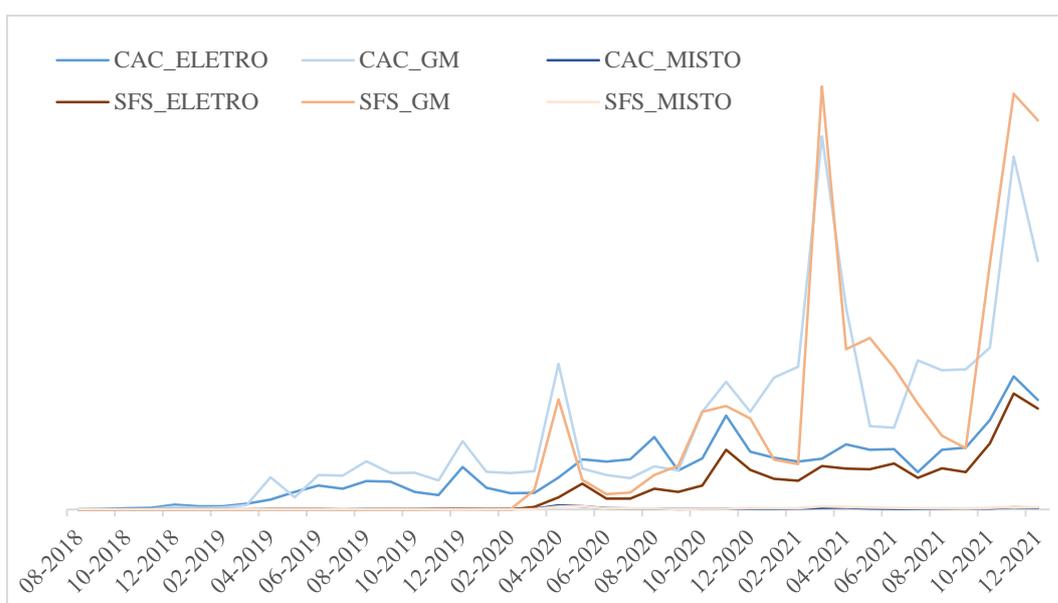


Figura 10: Transações efetuadas por mês por categoria final (nível 2).

Fonte: Elaborado pela autora.

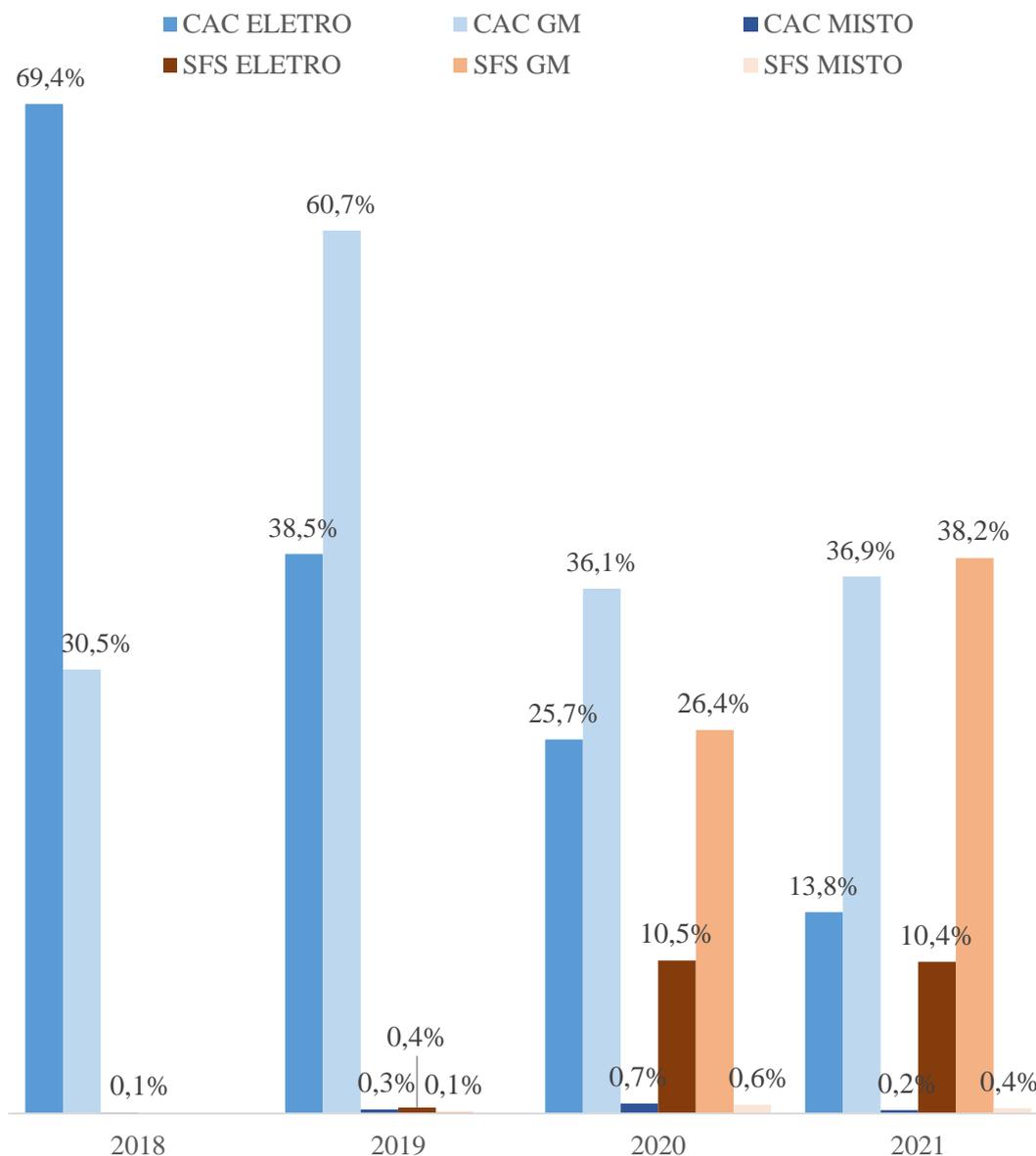


Figura 11: Distribuição anual de proporções do nível 2.
Fonte: Elaborado pela autora.

Observando os gráficos de proporção dos anos completos de treino, é notável que embora todas as séries cresçam (fato indicado nos outros gráficos), elas não crescem na mesma proporção. Isso é evidente na passagem do ano de 2019 que praticamente era composto apenas por CAC ELETRO e CAC GM, para o ano de 2020, quando o SFS ganha valores mais significativos. Outra forma de observar isso é do ano de 2020 para o ano de 2021, pois enquanto o SFS GM ganha participação no total, o CAC ELETRO, por outro lado, perde participação.

Por fim, o setor de varejo é fortemente impactado por padrões de vendas sazonais. Dessa forma, a fim de aumentar a precisão das previsões, torna-se

relevante explorar esse comportamento na série em estudo. A *Figura 12* apresenta a sazonalidade de forma mais nítida, mostrando claros períodos de picos durante meses de grandes eventos na Companhia, como março, abril e novembro.

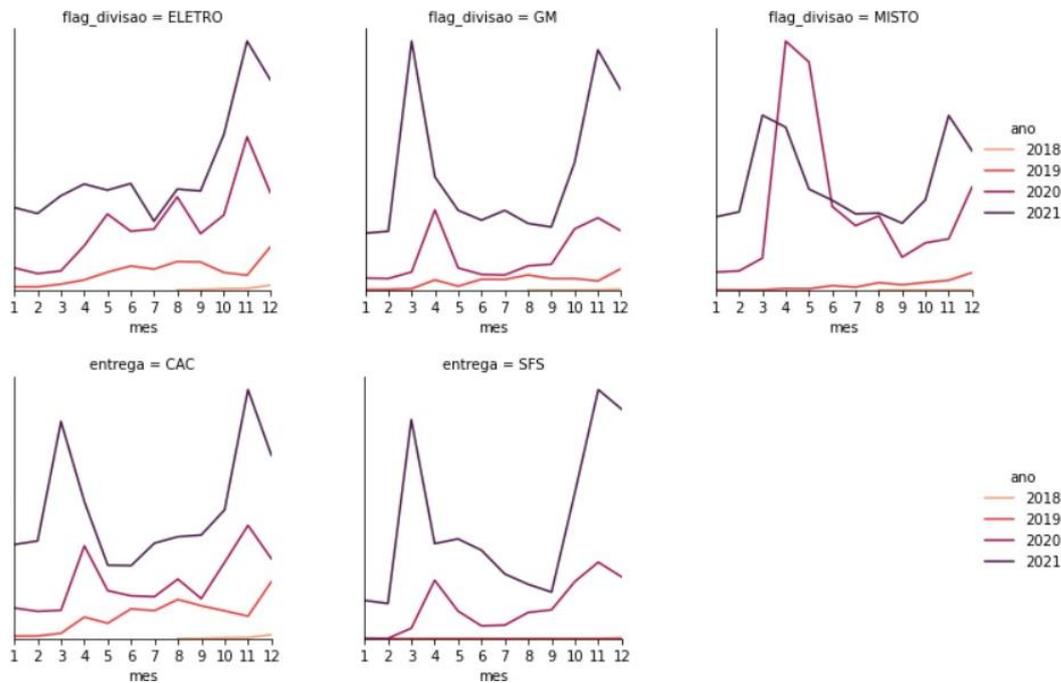


Figura 12: Quantidades históricas de transações do nível 1 ano a ano.
Fonte: Elaborado pela autora.

Os gráficos acima mostram a sazonalidade ao longo de toda a estrutura hierárquica de forma mais nítida, mostrando claros períodos recorrentes de picos durante meses de grandes eventos na Companhia e no varejo. Ainda assim, em alguns casos, meses em que são esperados picos apresentam quedas. Além disso, a desagregação SFS aparenta ter um comportamento mais descolado da sazonalidade dos demais. Indicações como essas sugerem que variáveis complementares acrescentariam informações importantes para prever a série temporal.

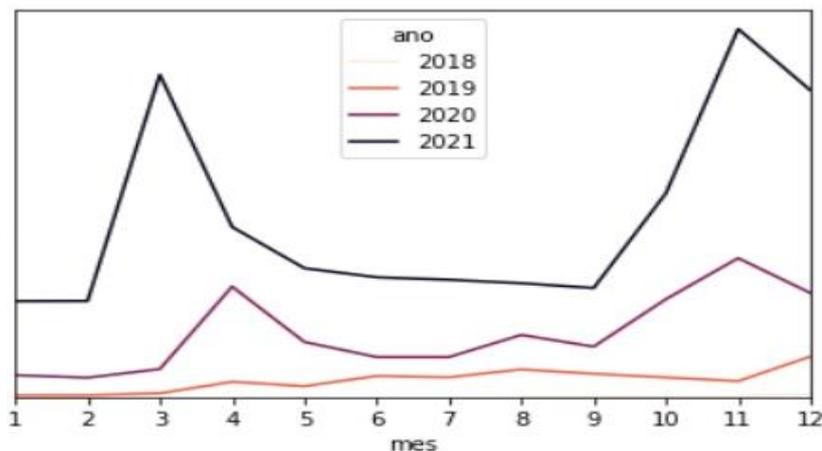


Figura 13: Quantidades históricas de transações totais ano a ano (nível 0).
Fonte: Elaborado pela autora.

O último elemento da EDA diz respeito ao tamanho do banco de dados amostrado. Um banco de dados deve ser dimensionado de forma a ser capaz de traduzir as características do fenômeno em estudo, garantindo a confiabilidade dos resultados obtidos pela regressão. Ele também auxilia na escolha dos modelos a serem aplicados. Dessa forma, considera-se que o conjunto de dados composto por 318 instâncias coletadas ao longo de quase 4 anos de vendas (*Figura 13*) embora limitado é suficiente para a pesquisa conduzida nesse trabalho.

4.4

Seleção dos modelos de previsões iniciais

Buscando encontrar os melhores modelos para cada método de previsão inicial, o programa foi alimentado por um *dataframe* organizado no tempo com as datas e as suas respectivas observações. Particularmente para o modelo SARIMAX, foram incluídas adicionalmente no *dataframe* as variáveis exógenas escolhidas.

Além disso, no SARIMAX, especificamente para duas das doze séries (CAC_ELETRO e SFS_MISTO) foi necessário definir manualmente os parâmetros, pois a função `auto_arima()` falhou em capturar o modelo ótimo ao divergir na otimização. Para isso, foram testados manualmente alguns dos possíveis modelos e escolhido, dentre eles, o de menores valores de MAPE e RMSE. Dessa forma, para os dois casos mencionados foi utilizado o modelo SARIMAX(1,1,1)(0,1,0)₁₂(7), seguindo a notação do referencial teórico.

4.5

Implementação das previsões iniciais

Após a adequação dos modelos aos dados, para cada uma das séries, as previsões foram geradas para o horizonte de 12 meses previamente estabelecido. Para efeitos de uma análise visual dos resultados, são apresentados abaixo os gráficos que ilustram os dados observados do total mensal de transações do ano de 2022 em comparação com as previsões iniciais para cada um dos modelos testados.

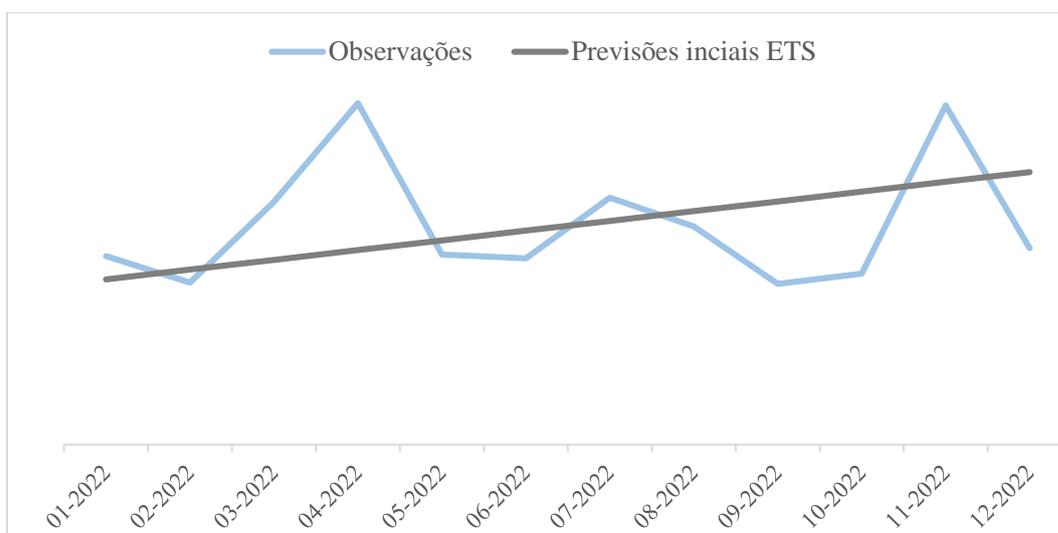


Figura 14: Previsão inicial do total de transações – modelo ETS.
Fonte: Elaborado pela autora.

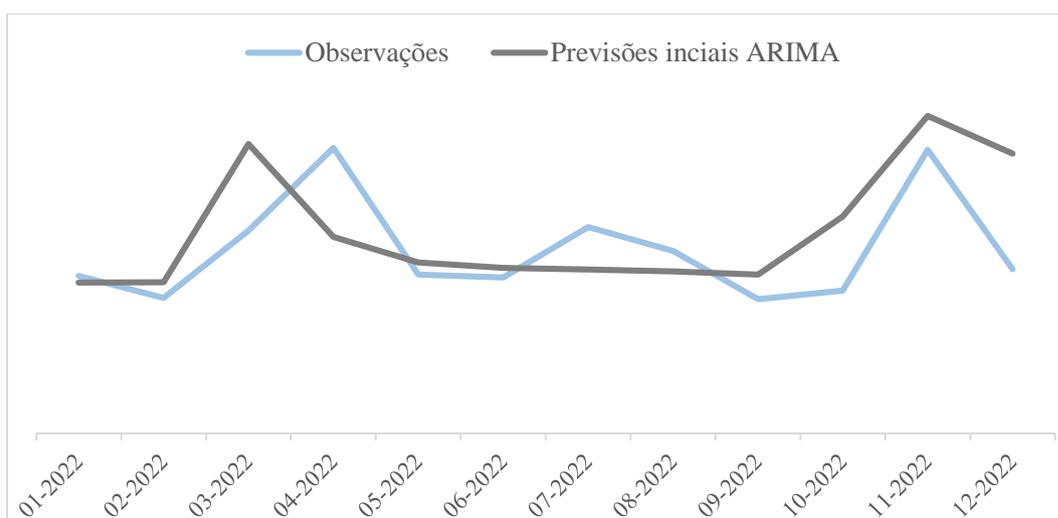


Figura 15: Previsão inicial do total de transações – modelo ARIMA.
Fonte: Elaborado pela autora.

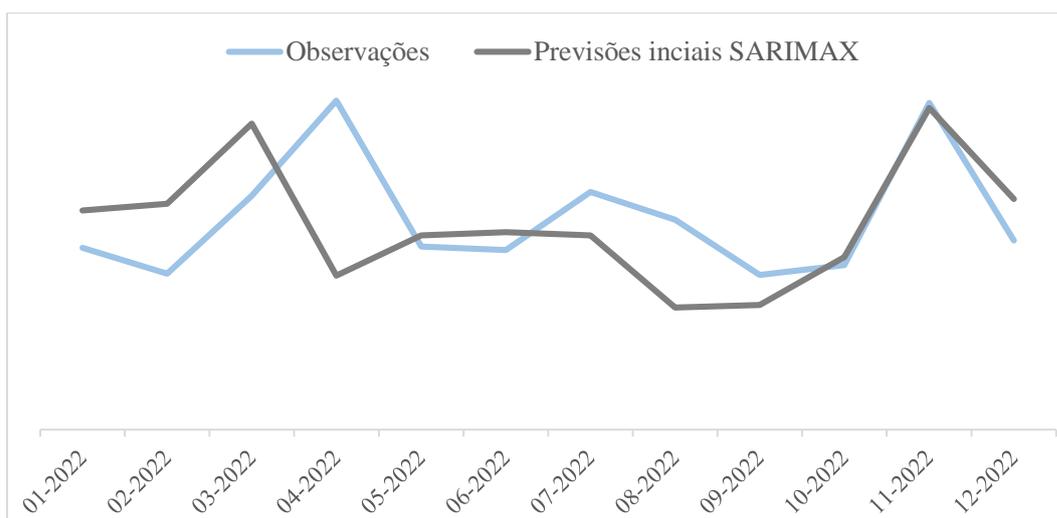


Figura 16: Previsão inicial do total de transações – modelo SARIMAX.
Fonte: Elaborado pela autora.

Em uma análise meramente visual, são derivadas as seguintes conclusões para a série em análise:

- Modelo ETS: é perceptível que a abordagem capturou com êxito a tendência de crescimento dos dados, no entanto, não é possível observar a respectiva sazonalidade nas previsões. O modelo parece se comportar razoavelmente bem para os meses de janeiro, fevereiro, maio e agosto e não tão bem para meses de picos de venda;

- Modelo ARIMA: este modelo, por sua vez, explorou a sazonalidade da série. No entanto, os picos e as valas previstos apresentam, em alguns momentos, atrasos em comparação aos dados reais, enquanto em outros períodos demonstram antecipações. Os valores previstos para janeiro e junho parecem próximos aos dados reais. Outro ponto relevante é que a série prevista possui bastante semelhança com a sazonalidade do ano de 2021. É possível perceber isso ao comparar as previsões com as quantidades históricas de transações ano a ano apresentadas na *Figura 13* no tópico 4.3. Como a páscoa em 2021 ocorreu em março, o segundo maior pico do ano foi neste mês. De forma semelhante, a previsão com ARIMA previu que o pico seria em março. No entanto, em 2022 a páscoa ocorreu em abril. Esse foi um dos pontos que buscou ser suavizado no SARIMAX ao adicionar as variáveis externas.

- Modelo SARIMAX: mesmo com a variável externa Impacto Páscoa responsável pela contagem de dias até o domingo de páscoa, assim como o ARIMA,

o SARIMAX também previu um pico precipitado em abril. O pico de novembro, no entanto, foi estimado com alta precisão. Outros dois meses que foram bem-sucedidos nesse modelo foram maio e outubro. Dessa forma, é possível perceber que, assim como esperado, o modelo compreendeu uma parte da sazonalidade da série.

Embora essa análise tenha sido realizada apenas para os valores do nível 0 da hierarquia, os pontos principais levantados podem ser extrapolados para praticamente todas as outras séries.

Tabela 4: Resultados MAPE na série não reconciliada.

| MAPE | ETS | ARIMA | SARIMAX |
|-----------------|------|-------|---------|
| Média Ponderada | 0,65 | 0,66 | 0,47 |
| Nível 0 | 0,24 | 0,24 | 0,23 |
| Entrega | 0,71 | 0,81 | 0,47 |
| Divisão | 0,43 | 0,50 | 0,28 |
| Nível 2 | 0,81 | 0,76 | 0,61 |

Fonte: Elaborado pela autora.

Os resultados MAPE para as previsões iniciais de cada modelo testado são apresentados na *Tabela 4*. Com o propósito de preservar o sigilo da empresa em estudo e evitar a exposição de valores absolutos, os resultados de RMSE foram normalizados para serem apresentados na *Figura 17*. Nesse processo, todos os resultados foram submetidos a uma divisão pelo valor mais elevado entre eles, que, neste caso, corresponde ao erro da previsão de “Entrega” pelo ARIMA, conferindo-lhe, assim, um índice de RMSE igual a 1. No geral, tanto para o MAPE, quanto para o RMSE, o modelo SARIMAX desempenhou melhor do que os outros dois, embora para algumas séries, como na série total (nível 0) e na série agregada por divisão, os RMSEs do ETS tenham sido mais baixos. Os resultados do SARIMAX, no geral mais baixos do que os do ARIMA, indicam que a adição dos parâmetros sazonais e das variáveis explicativas gera impactos positivos ao modelo.

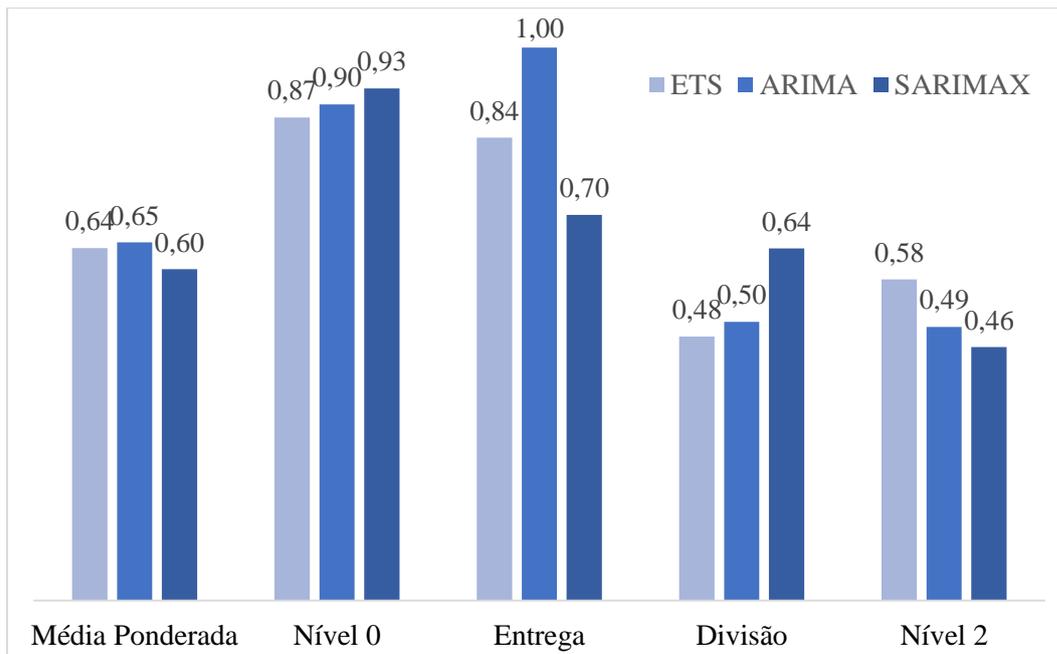


Figura 17: Valores normalizados de RMSE.
Fonte: Elaborado pela autora.

4.6

Implementação das previsões agregadas e análise de desempenho dos modelos

Utilizando como *input* a matriz de soma S apresentada no tópico 4.1, as previsões obtidas no passo 4.5 foram reconciliadas de acordo com as 4 abordagens estudadas: *Bottom-up*, *Top-down*, *Min Trace (OLS)* e *Min Trace (WLS Struct)*. A seguir serão apresentados primeiramente na *Tabela 5* os valores de MAPE obtidos para cada um dos 12 modelos resultantes e seus respectivos rankings. Em sequência são apresentados os rankings do RMSE na *Tabela 6*.

Tabela 5: MAPE por modelo.

| Método | MAPE | | | | Ranking | | | | |
|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|----------|----------|----------|----------|-------|
| | Nível 0 | Entrega | Divisão | Nível 2 | Nível 0 | Entrega | Divisão | Nível 2 | Média |
| ETS BU | 0,22 | 0,91 | 0,43 | 0,81 | 1 | 12 | 5 | 6 | 6 |
| ETS TD | 0,24 | 0,71 | 0,36 | 0,5 | 9 | 5 | 1 | 2 | 4,25 |
| ETS OLS | 0,23 | 0,76 | 0,9 | 4,58 | 4 | 6 | 9 | 12 | 7,75 |
| ETS WLS | 0,23 | 0,81 | 0,89 | 3,3 | 4 | 8 | 8 | 11 | 7,75 |
| ARIMA BU | 0,23 | 0,82 | 0,42 | 0,76 | 4 | 10 | 4 | 5 | 5,75 |
| ARIMA TD | 0,24 | 0,8 | 0,38 | 0,53 | 9 | 7 | 3 | 3 | 5,5 |
| ARIMA OLS | 0,25 | 0,81 | 0,9 | 2,71 | 11 | 8 | 9 | 9 | 9,25 |
| ARIMA WLS | 0,25 | 0,82 | 0,88 | 2,03 | 11 | 10 | 7 | 8 | 9 |
| SARIMAX BU | 0,22 | 0,58 | 0,36 | 0,61 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2,5 |
| SARIMAX TD | 0,23 | 0,5 | 0,49 | 0,46 | 4 | 1 | 6 | 1 | 3 |
| SARIMAX OLS | 0,22 | 0,5 | 2,57 | 3,19 | 1 | 1 | 12 | 10 | 6 |
| SARIMAX WLS | 0,23 | 0,52 | 1,45 | 1,99 | 4 | 3 | 11 | 7 | 6,25 |

Fonte: Elaborado pela autora.

Ao observar os dados da *Tabela 5*, é possível inferir que de acordo com o MAPE, o modelo que mais se adequa aos dados testados é o SARIMAX em conjunto com a forma de agregação *Bottom-up*. Outro ponto que merece destaque são os valores de MAPE das abordagens OLS e WLS de reconciliação para o nível 2, pois independentemente do modelo de previsões iniciais escolhido, esse método gerou erros elevados discrepantes.

Tabela 6: Ranking de RMSE por modelo.

| Método | Ranking | | | | |
|----------------|----------|----------|----------|----------|-------|
| | Nível 0 | Entrega | Divisão | Nível 2 | Média |
| ETS BU | 2 | 12 | 2 | 11 | 6,75 |
| ETS TD | 4 | 5 | 11 | 12 | 8 |
| ETS OLS | 3 | 6 | 3 | 7 | 4,75 |
| ETS WLS | 1 | 11 | 1 | 8 | 5,25 |
| ARIMA BU | 5 | 7 | 4 | 4 | 5 |
| RIMA TD | 7 | 8 | 10 | 9 | 8,5 |
| ARIMA OLS | 12 | 10 | 6 | 6 | 8,5 |
| ARIMA WLS | 11 | 9 | 5 | 5 | 7,5 |
| SARIMAX BU | 6 | 4 | 7 | 3 | 5 |
| SARIMAX TD | 10 | 1 | 12 | 10 | 8,25 |
| SARIMAX OLS | 8 | 2 | 9 | 1 | 5 |
| SARIMAX WLS | 9 | 3 | 8 | 2 | 5,5 |

Fonte: Elaborado pela autora.

A segunda tabela demonstra que, de acordo com o RMSE, o modelo ETS com a agregação OLS apresenta o melhor rank médio. É relevante destacar que o modelo SARIMAX com *Top-down*, que na *Tabela 5* havia recebido a segunda colocação no ranking, recebeu a penúltima colocação pelo RMSE. Esse exemplo reforça a importância de adotar mais de um erro para avaliar os resultados.

Tabela 7: Raking médio dos erros por modelo.

| Método | RMSE | MAPE | Média |
|----------------|------|------|-------------|
| ETS BU | 6,75 | 6 | 6,38 |
| ETS TD | 8 | 4,25 | 6,13 |
| ETS OLS | 4,75 | 7,75 | 6,25 |
| ETS WLS | 5,25 | 7,75 | 6,50 |
| ARIMA BU | 5 | 5,75 | 5,38 |
| ARIMA TD | 8,5 | 5,5 | 7,00 |
| ARIMA OLS | 8,5 | 9,25 | 8,88 |
| ARIMA WLS | 7,5 | 9 | 8,25 |
| SARIMAX BU | 5 | 2,5 | 3,75 |
| SARIMAX TD | 8,25 | 3 | 5,63 |
| SARIMAX OLS | 5 | 6 | 5,50 |
| SARIMAX WLS | 5,5 | 6,25 | 5,88 |

Fonte: Elaborado pela autora.

Em uma primeira derivada dos resultados obtidos, é possível enxergar as diferenças de adequação de cada um dos modelos ETS, ARIMA e SARIMAX ao problema apresentado. Analisando os dados da coluna ‘média’ da *Tabela 7* observa-se que a métrica de performance para os quatro modelos ETS reconciliados tem mediana igual a 6.25 e média aritmética igual a 6.32. O mesmo raciocínio aplicado aos modelos ARIMA e SARIMAX revela respectivamente medianas iguais a 7.00 e 5.50, assim como médias aritméticas iguais a 7.38 e 5.19. Dessa forma, torna-se claro que utilizando os métodos de reconciliação apresentados, o tratamento estatístico por SARIMAX foi o mais eficiente.

Por outra perspectiva, a escolha da técnica de agregação também se mostrou impactante sobre a performance dos algoritmos base. Nesse sentido, o *Bottom-up* consolidou-se como o sistema capaz de elevar a performance dos modelos base ARIMA e SARIMAX a um nível superior àquele consistentemente obtido pelas demais reconciliações. Esse bom resultado do método era em certa medida esperado, tendo em vista que essa abordagem funciona especialmente bem para amostras com quantidade limitada de dados, conforme indicado na literatura. Em contrapartida, comparativamente, o método de agregação *MinTrace* WLS ou OLS obteve sempre o resultado menos satisfatório.

Dessa forma, ao calcular a média entre os rankings dos valores de RMSE e MAPE na *Tabela 7* não é surpreendente que o modelo SARIMAX com *Bottom-up* tenha apresentado os melhores resultados. Destaca-se a competência dessa abordagem sob a ótica da métrica de desempenho MAPE. Por meio da *Tabela 5* verifica-se que ela atingiu a primeira classificação duas vezes para os níveis 0 e “divisão” e a quarta para os dois demais. Ao mesmo tempo, a combinação apresentou consistência e robustez quando sob a lente do RMSE (*Tabela 6*). Por fim, a reconciliação por *Bottom-up* além de tornar a série temporal de interesse coerente, também reduziu o RMSE ao longo dos níveis de agregação.

Considerando o desempenho favorável da combinação do método de previsão SARIMAX com o método de agregação *Bottom-up*, torna-se relevante comparar a curva prevista por esse conjunto com a curva de *baseline* prevista pela empresa em estudo. Para isso, a *Figura 18* ilustra as previsões mensais do total de transações do ano de 2022 geradas pela combinação dos métodos em comparação com os valores reais observados e com as previsões originalmente geradas pela empresa. Em seguida, a *Figura 19* apresenta graficamente a variação mensal dos erros percentuais das previsões, além do MAPE de cada curva. Podemos observar que, embora, em alguns meses, os erros das projeções do SARIMAX com *Bottom-up* sejam maiores se comparados aos erros do *baseline*, os picos de erros são menores e o MAPE para o ano de 2022 é significativamente menor (22% vs 27%). Em relação ao RMSE do total de transações de 2022, o conjunto conquistou uma redução de 28% do erro originalmente previsto pela empresa. Além disso, conforme mencionado no tópico 4.1, o horizonte de previsão utilizado pela empresa no *baseline* foi de um mês. Dessa forma, a nova abordagem aumenta o horizonte de

previsão, melhorando, portanto, a agilidade e o planejamento da operação, sem comprometer a acurácia nas previsões agregadas.

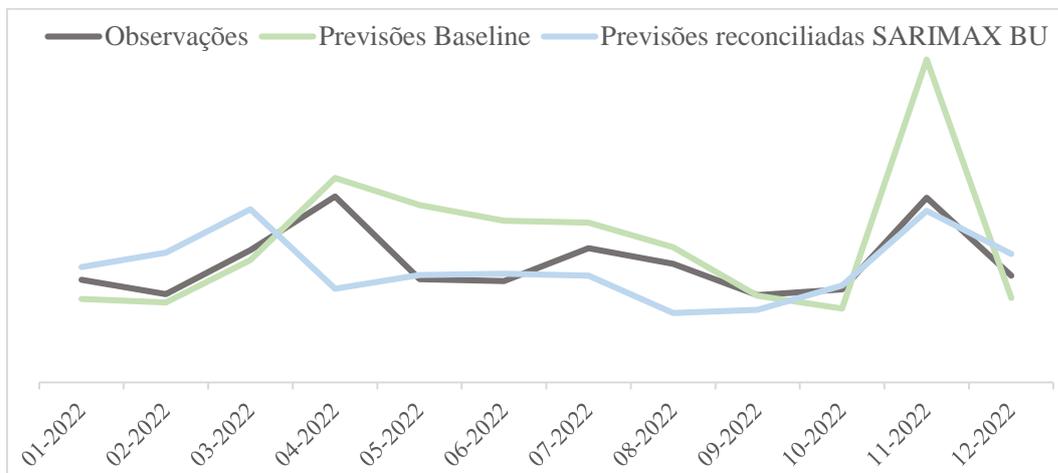


Figura 18: Previsões reconciliadas SARIMAX BU.

Fonte: Elaborado pela autora.

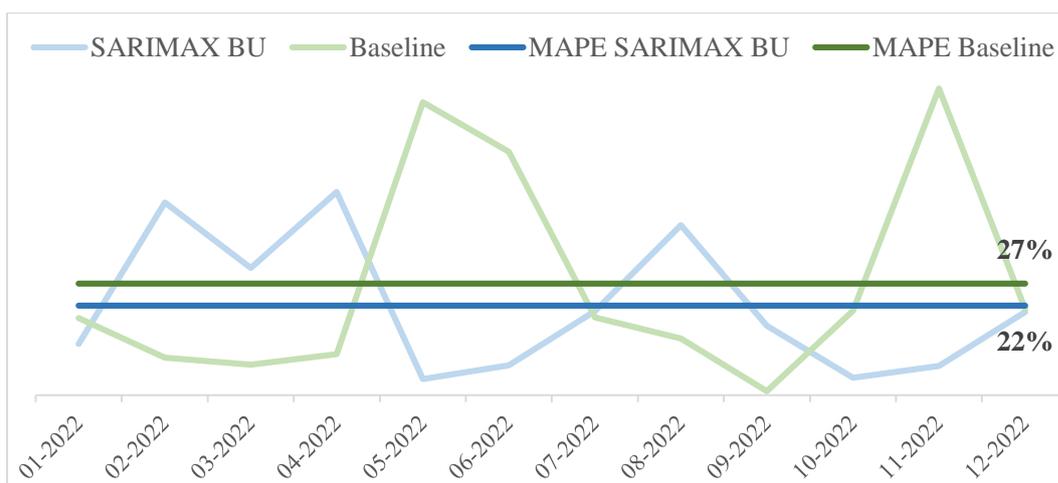


Figura 19: Erro percentual SARIMAX BU vs *Baseline*.

Fonte: Elaborado pela autora.

Em última análise, concluímos que o modelo SARIMAX com as sete variáveis exógenas escolhidas e com o método de agregação *Bottom-up* desempenha com satisfação a tarefa de gerar previsões estatísticas para cada uma das séries em estudo. Além disso, no contexto dessa aplicação, ficaram claras as vantagens comparativas das estratégias SARIMAX, seguidas de ETS e ARIMA usando complementarmente as métricas MAPE e RMSE. Por fim, verificaram-se os impactos e a importância da escolha da forma de reconciliação.

5

Conclusões

A previsão da demanda é essencial para o sucesso das operações das empresas varejistas. Em um contexto de transformação do mercado e de aproximação dos ambientes físico e digital, a expansão da demanda *Omnichannel* ganha cada vez mais relevância. A previsão no O2O ajuda a identificar tendências de mercado, antecipar oportunidades de crescimento e se preparar contra possíveis ameaças. Além disso, as projeções são aplicadas em estratégias de comunicação, planejamento de publicidade, definição de categorias e variações de produtos, e organização da equipe de trabalho. Essa taxa de consumo difunde-se pelos diferentes tipos de produtos e pelas formas de entrega listados na modalidade comercial.

Nesse sentido, o estado da arte argumenta que a abordagem de séries temporais hierárquicas (HTS) surge como uma solução para auxiliar a tomada de decisão em diferentes níveis do negócio e aumentar a precisão das previsões. As séries temporais hierárquicas utilizam a natureza temporal dos dados observados e a estrutura de agregação para identificar padrões subjacentes e produzir previsões coerentes, isto é, condizentes às condições de agregação.

É com esse interesse que o presente estudo se muniu dos principais métodos de previsão de séries temporais e metodologias de reconciliação hierárquica encontrados na literatura para produzir e avaliar prognósticos da demanda doze passos à frente. As métricas selecionadas MAPE e RMSE demonstram a superioridade do modelo SARIMAX e do algoritmo de agregação *Bottom-up*. Além disso, mostrou-se que a utilização de variáveis exógenas e de parâmetros de sazonalidades aumentaram a acurácia das previsões e que o método de *MinTrace WLS Struct* apresentou os resultados menos satisfatórios ao comparar os rankings dos erros conforme proposto na Metodologia. Por fim, o modelo SARIMAX com *Bottom-up* foi comparado com os valores previstos manualmente pela empresa para o nível mais agregado de transações e a nova abordagem reduziu 28% do RMSE

original e resultou em um MAPE no ano de 22%, igualmente abaixo do MAPE do *baseline* de 27%.

Dessa forma, foram levantadas informações relevantes sobre a eficácia e as limitações de cada abordagem de tratamento de séries temporais hierárquicas. Ao mesmo tempo, a aplicação desse estudo sob o contexto do canal *Omnichannel* de uma varejista brasileira de grande porte evidenciou características temporais dos seus dados e permitiu prever com sucesso a demanda dentro de um intervalo de confiança. Os resultados foram ainda comparados valendo-se das diferentes métricas encontradas na literatura.

Mais precisamente, este trabalho se propôs, como primeiro objetivo específico, a explorar as principais teorias de séries temporais hierárquicas para desvendar as particularidades de cada abordagem. O capítulo de Referencial Teórico, portanto, reúne as informações relevantes encontradas sobre o tema em estudo.

Em sequência, como segundo objetivo, o trabalho visou aplicar as técnicas estudadas em um estudo de caso no canal *Omnichannel* de uma varejista brasileira de grande porte. Para isso, foram adotados os sete passos descritos na Metodologia. Os resultados dessa estratégia envolveram a geração de doze meses de previsão por meio de doze modelos distintos e foram detalhados no capítulo 4.

O terceiro, e último objetivo específico, é comparar resultados por meio de métricas de desempenho encontradas na literatura. Buscando alcançar esse propósito, foi criado um subcapítulo no Referencial Teórico que expõe duas técnicas muito utilizadas para avaliação de desempenho de modelos estatísticos (MAPE e RMSE) e as principais diferenças entre elas. Em seguida, ambas foram com sucesso aplicadas nos resultados gerados pelos modelos de previsão das séries temporais hierárquicas analisadas.

Por fim, ao atender suas três finalidades específicas, o presente trabalho desenvolve uma ferramenta capaz de fornecer, de forma satisfatória, o volume estimado de transações do canal *Omnichannel* da varejista em análise. Dessa forma, o objetivo principal é igualmente alcançado.

É importante mencionar que a geração dos resultados foi limitada por dois pontos principais. O primeiro é relacionado com os dados exógenos utilizados, pois para a geração de previsões futuras, dependem do planejamento inicial da Companhia. O segundo é que, pelo estudo ser realizado em apenas uma empresa e, em um período de tempo específico, a generalização deste trabalho é limitada.

Em última análise, como sugestão de pesquisa futura, pode-se propor a exploração de outras granularidades do problema, como as previsões por dia ou semana e o estudo do impacto da adição de variáveis explicativas macroeconômicas sobre a performance das metodologias apresentadas. Por fim, recomenda-se que a mesma metodologia seja aplicada no setor de *Omnichannel* de outras varejistas buscando encontrar padrões de comportamento e, conseqüentemente, formular conclusões mais generalistas sobre o modelo mais adequado ao setor.

Referências Bibliográficas

ABCOMM. **Previsão de vendas no e-Commerce para os Próximos 5 anos.** Disponível em: <<https://dados.abcomm.org/previsao-de-vendas-online>>. Acesso em: 21 mai. 2023, às 11:00.

ARUNRAJ, Nari; AHRENS, Diane; FERNANDES, Michael. **Application of SARIMAX Model to Forecast Daily Sales in Food Retail Industry.** International Journal of Operations Research and Information Systems, v. 7, n. 2, p. 1-21, 2016.

ATHANASOPOULOS, George; GAMAKUMARA, Puwasala; PANAGIOTELIS, Anastasios; HYNDMAN, Rob; AFFAN, Mohamed. **Hierarchical Forecasting.** Macroeconomic Forecasting in the Era of Big Data: Theory and Practice. Advanced Studies in Theoretical and Applied Econometrics, v. 52, n. 1, 2020.

ATHANASOPOULOS, George; HYNDMAN, Rob; KOURENTZES, Nikolaos; PETROPOULOS, Fotios. **Forecasting with temporal hierarchies.** European Journal of Operational Research, v. 262, n. 1, p. 60-74, 2017.

ATHANASOPOULOS, George; HYNDMAN, Rob; AHMED, Roman. **Hierarchical forecasts for Australian domestic tourism.** International Journal of Forecasting, v. 25, n. 1, p. 146–166, 2009.

BAI, Bingfeng. **Acquiring supply chain agility through information technology capability: the role of demand forecasting in retail industry.** Kybernetes, v. ahead-of-print, n. ahead-of-print, 2022.

BOX, George; JENKINS, Gwilym; REINSEL, Gregory; LJUNG, Greta. **Time series analysis: forecasting and control.** Hoboken: John Wiley & Sons, 2016 – 5ª edição.

BRYNJOLFSSON, Erik; HU, Yu; RAHMAN, Mohammad. **Competing in the Age of Omnichannel Retailing.** MIT Sloan Management Review, v. 54, n. 4, p. 23-29 2013.

BRYNJOLFSSON, Erik; HU, Yu; SIMESTER, Duncan. **Goodbye Pareto Principle, Hello Long Tail: The Effect of Search Costs on the Concentration of Product Sales.** Management Science v. 57, n. 8, p. 1373-1386, 2011.

CASS, S.; GOLDSTEIN, H. **How Python Swallowed the World: Lessons from Compiling Top Programming Languages.** IEEE Spectrum, v. 60, n. 9, p. 2-2, 2023.

DUTTA, Joy; ROY, Sarbani. **IndoorSense: context based indoor pollutant prediction using SARIMAX model.** Multimed Tools Appl, v. 80, p. 19989–20018, 2021.

FILDES, Robert; MA, Shaohui; KOLASSA, Stephan. **Retail forecasting: Research and practice**. International Journal of Forecasting, v. 38, n. 4, p. 1283-1318, 2022

GIL, Antonio. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo: Atlas, 2008 – 6ª edição.

HOFMANN, Erik; RUTSCHMANN, Emanuel. **Big data analytics and demand forecasting in supply chains: a conceptual analysis**. The International Journal of Logistics Management, v. 29, n. 2, p. 739-766, 2018.

HOLLYMAN, Ross; PETROPOULOS, Fotios; TIPPING, Michael. **Understanding forecast reconciliation**. European Journal of Operational Research, v. 294, n. 1, p. 149-160, 2021.

HOLT, Charles. **Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages**. International Journal of Forecasting, v. 20, n. 1, p. 5-10, 2004.

HYNDMAN, Rob. **Python implementations of time series forecasting and anomaly detection**. 2022. Disponível em: <https://robjhyndman.com/hyndsight/python_time_series.html>. Acesso em: 21 jun. 2023, às 06:30.

HYNDMAN, Rob; ATHANASOPOULOS, George. **Forecasting: Principles and Practice**. Melbourne: OTexts, 2021 – 3ª edição. Disponível em: <<https://OTexts.com/fpp3>>. Acesso em: 21 jun. 2023, às 06:00.

HYNDMAN, Rob; KHANDAKAR, Yeasmin. **Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R**. Journal of Statistical Software, v. 27, n. 3, 2008.

HYNDMAN, Rob; KOWHLER, Anne; ORD, Keith; SNYDER, Ralph. **Forecasting with Exponential Smoothing: The State Space Approach**. Heidelberg: Springer Berlin, 2008 – 1ª edição.

KALCHSCHMIDT, Matteo; VERGANTI, Roberto; ZOTTERI, Giulio. **Forecasting demand from heterogeneous customers**. International Journal of Operations & Production Management, v. 26 n. 6, p. 619-638, 2006.

KARMY, Juan Pablo; MALDONADO, Sebastián. **Hierarchical time series forecasting via Support Vector Regression in the European Travel Retail Industry**. Expert Systems with Applications, v. 137, p. 59-73, 2019.

LIU, Chenghao; HOI, Steven; ZHAO, Peilin; SUN, Jianling. **Online ARIMA algorithms for time series prediction**. AAAI'16: Proceedings of the Thirtieth AAAI Conference on Artificial Intelligence, p. 1867–1873, 2016.

MALDONADO, Sebastián; KARMY, Juan. **Hierarchical time series forecasting via Support Vector Regression in the European Travel Retail Industry**. Expert Systems With Applications, v. 137, p. 59-73, 2019.

MONTGOMERY, Douglas; JENNINGS, Cheryl; KULAHCI, Murat. **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008 – 1^a edição.

RATCHFORD, Brian; SOYSAL, Gonca; ZENTNER, Alejandro. **Multichannel customer purchase behavior and long tail effects in the fashion goods market**. *Journal of Retailing*, v. 99, n. 1, p. 46-65, 2023.

SAABITH, Sayeth; FAREEZ, M; VINOTHRAJ, Thangarajah. **Python current trend applications - an overview**. *Scientific Journal of Impact Factor*, v. 6, n. 10, 2019.

SHANG, Han Lin; HYNDMAN, Rob. **Grouped Functional Time Series Forecasting: An Application to Age-Specific Mortality Rates**. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, v. 26, n. 2, 2016.

SZÁSZ, Levente; BÁLINT, Csaba; OTTÓ, Csíki; NAGY, Bálint; RACZ, Béla-Gergely; CSALA, Dénes; HARRIS, Lloyd. **The impact of COVID-19 on the evolution of online retail: The pandemic as a window of opportunity**. *Journal of Retailing and Consumer Services*, v. 69, 2022.

TICHY, Malter. **Time to Retire the MAPE**. *Foresight: The International Journal of Applied Forecasting*, v. 69, p. 5-12, 2023.

VERHOEF, Peter; KANNAN P.K.; INMAN, Jeffrey. **From Multi-Channel Retailing to Omni-Channel Retailing: Introduction to the Special Issue on Multi-Channel Retailing**. *Journal of Retailing*, v. 91, n. 2, p. 174-181, 2015.

WICKRAMASURIYA, Shanika; ATHANASOPOULOS, George; HYNDMAN, Rob. **Forecasting hierarchical and grouped time series through trace minimization**. Working Paper 15/15, Department of Econometrics & Business Statistics, Monash University, 2015.

WICKRAMASURIYA, Shanika; ATHANASOPOULOS, George; HYNDMAN, Rob. **Optimal forecast reconciliation for hierarchical and grouped time series through trace minimization**. *Journal of the American Statistical Association*, v. 114, n. 4, p. 1-45, 2019.

WINTERS, Peter. **Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages**. *Management Science*, v. 6, n. 3, p. 324-342, 1960.

YANG, Dazhi; QUAN, Hao; DISFANI, Vahid; LIU, Licheng. **Reconciling solar forecasts: Geographical hierarchy**. *Solar Energy*, v. 146, p. 276-286, 2017.

YORAM, Wind; VIJAY, Mahajan. **Convergence Marketing**. *Journal of Interactive Marketing*, v. 16, n. 2, p. 64-79, 2002.

Apêndice

Três códigos com a linguagem Python foram utilizados para a obtenção dos resultados apresentados neste trabalho. O primeiro deles foi desenvolvido para modelos ETS, enquanto o segundo e o terceiro foram elaborados para modelos ARIMA e SARIMAX, respectivamente. Cada um deles pode ser acessado por meio dos links correspondentes abaixo.

- ETS: <https://www.dropbox.com/scl/fi/lzrs944z9mm1iz28toj96/C-digo-ETS.docx?rlkey=dlyi226dfhv98m9s7t4x0agij&dl=0>.

- ARIMA: <https://www.dropbox.com/scl/fi/krykl7rk5lwsf0kjg35ja/C-digo-ARIMA.docx?rlkey=c04ykujmcz53i3sjmofdp7jmk&dl=0>.

- SARIMAX: <https://www.dropbox.com/scl/fi/nz1icguow7kk74nsg4wbs/C-digo-SARIMAX.docx?rlkey=z46pwptxp1awmd7929gd33fv1&dl=0>.