Bibliografia

[1] Allen, F. e Gale D. “Financial Intermediaries and Markets”, *Econometrica*, v. 72, p. 1023-1061, 2004.

[2] Araujo, A., Fajardo J. e Páscoa M. “Endogenous Collateral”, *Journal of Mathematical Economics*, no prelo.

[3] Araujo, A., Páscoa, M. e Torres-Martínez, J.P. “Collateral avoids Bubbles in Incomplete Markets”, Mimeo, PUC-Rio, Brasil, 2004.

[4] Border, K. *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press, 1985.

[5] Chrity, D. e Torres-Martínez, J.P. “A Sequencial Model of Endogenous Collateral”, Mimeo, PUC-Rio, Brasil, 2004.

[6] DeMarzo, P. e Duffie, D. “A Liquidity-based Model of Security Design”, *Econometrica*, v. 67, p. 65-99, 1999.

[7] Diamond, D. “Financial Intermediation and Delegated Monitoring”, *Review of Economic Studies*, v. 51, p. 393-414, 1984.

[8] Dubey, Pr., Geanakoplos, J. e Shubik M. “Default and Punishment in General Equilibrium”, *Econometrica*, no prelo.

[9] Gale, D. e Mas-Colell, A. “An Equilibrium Existence Theorem for a General Model without Ordered Preferences”, *Journal of Mathematical Economics*, v. 2, p. 9-15, 1975.

[10] Gale, D. e Mas-Colell, A. “Corrections to: An Equilibrium Existence Theorem for a General Model without Ordered Preferences”, *Journal of Mathematical Economics*, v. 6, p. 297-298, 1979.

[11] Geanakoplos, J. “Promises Promises”, Cowles Foundation Discussion Paper No. 1143, 1996.

[12] Geanakoplos, J. e Zame, W.R. “Collateral and the Enforcement of Intertemporal Contracts”, Yale University, Mimeo, 2002.

[13] Haire, L. *Salomon Smith Barney guide to mortgage-backed and asset-backed securities*, Wiley Finance, John Wiley & Sons, 2001.

[14] Martins-da-Rocha, V.F. e Torres-Martínez, J.P. "Endogenous Collateral", Mimeo, Universite Paris I, 2004.

[15] Seghir, A. e Torres-Martínez, J.P. "Heritage and Default in a Model with Incomplete Demographic Participation", Mimeo, PUC-Rio, Brasil, 2004.

[16] Tavakoli, J.M. *Collateralized Debt Obligations* & *Structured Finance*, Wiley Finance, John Wiley & Sons, 2003.

[17] Zame, W. "Efficiency and the Role of Default when Security markets are incomplete", *American Economic Review*, v. 83, p. 1142-1164, 1993.

7
Apêndice: Prova do Teorema

De forma a garantir a existência de equilíbrio, restringimos nosso espaço de preços. No primeiro período, consideramos preços (p_0, q_K, q_J) que pertencem no conjunto compacto e convexo

$$\Xi = \Bigg\{ (p_0, q_K, q_J) \in \mathbb{R}^L_+ \times [0,1]^K \times \mathbb{R}^J_+ \quad : \quad (p_0, q_J) \in \Delta_+^{\#L+\#J-1},$$

$$\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} q_j \leq \sum_{k \in \mathbb{A}_i} q_k, \;\; \forall \mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i \Bigg\},$$

onde $q_K = (q_k)_{k \in K}$, $q_J = (q_j)_{j \in J}$ e, como de hábito, $\mathbb{A}_i$ denota uma classe genérica de primitivos de $\mathcal{A}_i$, com $i \in \{P, C\}$. Mais ainda, restringimos os preços dos bens p_s, em cada estado da natureza no segundo período a $\Delta_+^{\#L-1}$. Por conveniência de notação, denotamos um vetor genérico de preços de bens e ativos e de taxas de pagamento de derivativos por $\pi = (p, q, r)$, uma alocação genérica individual do agente h por $\eta^h = (x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)$, e por $\eta = (\eta^h)_{h \in H}$ um vetor genérico de alocações da economia. Definimos também Ξ_k como a projeção do conjunto Ξ nos preços dos bens e do primitivo k, isto é,

$$\Xi_k = \left\{ (p_0, q_k) \in \mathbb{R}^L_+ \times [0,1] \, : \, \exists \, (q_J, q_{k'})_{k' \neq k} \, , (p_0, q_K, q_J) \in \Xi \right\}.$$

Além disso, sem perda de generalidade podemos supor que $\sum_{k \in \mathbb{A}_i} A_{s,k} \leq \sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} A_{s,j}$ para cada $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$ com $i \in \{P, C\}$ e para cada $s \in S$.

Observação 5 *Note que, se provarmos que sempre existe um equilíbrio não trivial $(\overline{\pi}, \overline{\eta})$ para qualquer economia $\mathcal{E}$ que satisfaça $\sum_{k \in \mathbb{A}_i} A_{s,k} \leq \sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} A_{s,j}$, para cada $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$ com $i \in \{P, C\}$ e para cada $s \in S$, é sempre possível achar um equilíbrio não trivial para qualquer economia $\mathcal{E}'$ na qual as promessas dos derivativos e primitivos satisfaçam apenas a Hipótese 5. De fato, para tal economia $\mathcal{E}'$ temos que*

$$\left[\sum_{k \in \mathbb{A}_i} (A'_{s,k})_l \neq 0 \right] \Leftrightarrow \left[\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} (A'_{s,j})_l \neq 0 \right], \;\; \forall s \in S, \forall \, l \in L,$$

e consequentemente existe $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$ *tal que* $\sum_{k\in\mathbb{A}_i} A'_{s,k} \leq \sum_{j\in J(\mathbb{A}_i)} \lambda A'_{s,j}$*, para cada* $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$ *com* $i \in \{P, C\}$ *e para cada* $s \in S$*. Se existe um equilíbrio* $(\overline{\pi}, \overline{\eta})$ *para uma economia* $\mathcal{E}$*, que é igual a* $\mathcal{E}'$ *com exceção das promessas dos derivativos, definidas por* $A_{s,j} = \lambda A'_{s,j}$*, podemos considerar as alocações* $(\overline{\pi}', \overline{\eta}')$ *dadas por* $(\overline{p}', \overline{q}'_K, \overline{r}'\,; \overline{x}', \overline{\varphi}', \overline{\delta}') = (\overline{p}, \overline{q}_K, \overline{r}\,; \overline{x}, \overline{\varphi}, \overline{\delta})$*,* $\overline{\theta}' = \lambda\,\overline{\theta}$ *e* $\overline{q}'_J = \frac{1}{\lambda}\,\overline{q}_J$*. É fácil verificar que a alocação* $(\overline{\pi}', \overline{\eta}')$ *é um equilíbrio para economia* $\mathcal{E}'$*.*

Definimos a *correspondência de decisão* $\Psi^h : (\Delta_+^{\#L-1})^S \times \mathbb{X} \twoheadrightarrow \mathbb{X}$, por

$$\Psi^h(p_{-0}, \eta^h) := (T_{p_{-0}})^{-1} \circ Q^h \circ T(p_{-0}, \eta^h),$$

onde a função contínua $T_{p_{-0}} : \mathbb{X} \to X \times \mathbb{R}_+^{K\times S}$ é definida por $T_{p-0}(\eta^h) := T(p_{-0}, \eta^h)$. Segue que, *dados preços* (p, q) *e taxas de pagamento* r*, uma alocação* η^h *é ótima para o agente* $h \in H$ *se, e somente se,* $\Psi^h(p_{-0}, \eta^h) \cap B^h(p, q, r) = \emptyset$.

PROPOSIÇÃO 1 *Sob a Hipótese 2, para cada agente* $h \in H$*, a correspondência* Ψ^h *é hemicontínua inferior, tem valores convexos e abertos, é estritamente monotônica em* $(x_s)_{s\in S^*}$ *e é irreflexiva, no seguinte sentido* $\eta^h \notin \Psi^h(p_{-0}, \eta^h)$*, para todo* $(p_{-0}, \eta^h) \in (\Delta_+^{\#L-1})^S \times \mathbb{X}$*.*

PROVA: Por conveniência de notação, definimos $\mathbb{F} := (\Delta_+^{\#L-1})^S$. Denotamos também por f um elemento genérico de $\mathbb{F}$. Usando essa notação, $\Psi^h(f, \eta^h) = (T_f)^{-1} \circ Q^h \circ T(f, \eta^h)$,

Passo 1 : Ψ^h *tem valores abertos.* Fixe um vetor $(f, \eta^h) \in \mathbb{F} \times \mathbb{X}$. Como Q^h tem valores abertos, $Q^h(T(f, \eta^h))$ é um conjunto aberto. Como T_f é contínua, $(T_f)^{-1}(Q^h(T(f, \eta^h)))$ é também aberto, o que implicsa que Ψ^h tem valores abertos.

Passo 2 : Ψ^h *tem valores convexos.* Fixe um vetor $(f, \eta^h) \in \mathbb{F} \times \mathbb{X}$. É suficiente provar que, dado $\lambda \in [0, 1]$ e η_1^h e η_2^h em $\Psi^h(f, \eta^h)$, temos que $\left[\lambda\eta_1^h + (1-\lambda)\eta_2^h\right] \in (T_f)^{-1}\left(Q^h(T(f, \eta^h))\right)$. Como Q^h tem valores convexos, sabemos que $\lambda T(f, \eta_1^h) + (1-\lambda)T(f, \eta_2^h) \in Q^h(T(f, \eta^h))$. Mais ainda, pela definição da função T, existe $(x_1, x_2) \in X \times X$ tal que

$$T(f, \eta_i^h) = \left(x_i, \left(D_{s,k}(f, \eta_i^h)\right)_{(s,k)\in S\times K}\right), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Como as funções $D_{s,k}(f,\cdot)$ são convexas, temos que

$$\begin{array}{rc} & \lambda T(f,\eta_1^h)+(1-\lambda)T(f,\eta_2^h) \\ = & \left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\left[\lambda D_{s,k}(f,\eta_1^h)+(1-\lambda)D_{s,k}(f,\eta_2^h)\right]_{(s,k)\in S\times K}\right) \\ \geq & \left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\left[D_{s,k}(f,\lambda\eta_1^h+(1-\lambda)\eta_2^h)\right]_{(s,k)\in S\times K}\right) \\ = & T(f,\lambda\eta_1^h+(1-\lambda)\eta_2^h) \end{array}$$

Portanto, segue do item (ii) na Hipótese 2 que $T(f,\lambda\eta_1^h+(1-\lambda)\eta_2^h)$ pertence a $Q^h(T(f,\eta^h))$, o que implica que $\left(\lambda\eta_1^h+(1-\lambda)\eta_2^h\right)\in(T_f)^{-1}\left(Q^h(T(f,\eta^h))\right)$.

Passo 3 : Ψ^h é hemicontínua inferior. É suficiente mostrar que dado um conjunto aberto (relativo) $U\subset\mathbb{X}$, a inversa inferior $(\Psi^h)^-[U]=\{(f,\eta^h)\in\mathbb{F}\times\mathbb{X}:\Psi^h(f,\eta^h)\cap U\neq\emptyset\}$, é um conjunto aberto (relativo) de $\mathbb{F}\times\mathbb{X}$. Se $(\Psi^h)^-[U]$ é vazio, a prova é imediata. Assim, suponha que $(\Psi^h)^-[U]\neq\emptyset$ e fixe um vetor $(\overline{f},\overline{\eta}^h)\in(\Psi^h)^-[U]$. Estamos interessados em provar que existe $\overline{\mu}>0$ tal que

$$V_{\overline{\mu}}(\overline{f},\overline{\eta}^h)\bigcap(\mathbb{F}\times\mathbb{X})\subset(\Psi^h)^-[U],$$

onde $V_\mu(f,\eta^h)$ denota uma vizinhança aberta (na norma Euclidiana) de (f,η^h) com raio μ. Fixe agora um vetor $\hat{\eta}^h\in\Psi^h(\overline{f},\overline{\eta}^h)\cap U$.
Sabemos que $\hat{\eta}^h\in U$ e $T(\overline{f},\hat{\eta}^h)\in Q^h\circ T(\overline{f},\overline{\eta}^h)$, o que implica que $\left(T(\overline{f},\overline{\eta}^h),T(\overline{f},\hat{\eta}^h)\right)\in$ Gráfico Q^h.
Como a correspondência Q^h tem gráfico aberto, existe $\nu>0$ tal que

$$V_\nu\left(T(\overline{f},\overline{\eta}^h),T(\overline{f},\hat{\eta}^h)\right)\bigcap\left[(X\times\mathbb{R}_+^{K\times S})\times(X\times\mathbb{R}_+^{K\times S})\right]\subset\text{Gráfico } Q^h.$$

Mais ainda, como a função T é contínua, existe $\overline{\mu}>0$ tal que, se $(f',\eta'^h)\in V_\mu(\overline{f},\overline{\eta}^h)\cap[\mathbb{F}\times\mathbb{X}]$ então

$$\left(T(f',\eta'^h),T(f',\hat{\eta}^h)\right)\in V_\nu\left(T(\overline{f},\overline{\eta}^h),T(\overline{f},\hat{\eta}^h)\right)\bigcap\left[(X\times\mathbb{R}_+^{K\times S})\times(X\times\mathbb{R}_+^{K\times S})\right].$$

Portanto, para todo $(f',\eta'^h)\in V_{\overline{\mu}}(\overline{f},\overline{\eta}^h)\cap[\mathbb{F}\times\mathbb{X}]$, temos que $T(f',\hat{\eta}^h)\in Q^h\left(T(f',\eta'^h)\right)$, o que implica $\hat{\eta}^h\in\Psi^h(f',\eta'^h)$. Finalmente, como $\hat{\eta}^h\in U$, a alocação (f',η'^h) pertence a $(\Psi^h)^-[U]$, o que conclui a prova deste passo.

O fato que Ψ^h é estritamente monotônica e irreflexiva segue diretamente das propriedades de Q^h. □

É útil definir, para cada agente $h\in H$, uma correspondência $\hat{\Psi}^h:\left(\Delta_+^{\#L-1}\right)^S\times\mathbb{X}\twoheadrightarrow\mathbb{X}$, chamada *correspondência de decisão aumentada*, como a função conjunto que associa a cada vetor (p_{-0},η^h) a coleção de alocações $\hat{\eta}^h$

que satisfaz

$$\hat{\eta}^h = \lambda\tilde{\eta}^h + (1-\lambda)\eta^h \text{ para } 0 < \lambda \leq 1,\ \tilde{\eta}^h \in \Psi^h(p_{-0}, \eta^h).$$

Note que $\Psi^h(p_{-0}, \eta^h) \subset \hat{\Psi}^h(p_{-0}, \eta^h)$. Mais ainda, como ressaltado em Gale e Mas-Colell [9, 10], a correspondência $\hat{\Psi}^h$ preserva todas as propriedades de Ψ^h: é irreflexiva, estritamente monotônica e hemicontínua inferior com valores abertos e convexos (ver Proposição acima).

LEMA 1 *Dados preços e taxas de pagamento $\pi = (p, q, r)$, se alocações individuais $(\eta^h)_{h\in H}$ satisfazem as condições de equilíbrio (A)-(C) então, para cada agente $h \in H$, o vetor $(x^h, \varphi^h, \delta^h) \in X \times \mathbb{R}_+^K \times \mathbb{R}_+^{K\times S}$ é limitado.*

PROVA: Seja $\eta = (x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)_{h\in H}$ um vetor que satisfaça as condições de equilíbrio (A)-(C). A condição (B) implica que, no primeiro período, $\sum_{h\in H} x_0^h = W_0$. Como cada termo no lado esquerdo é não-negativo, segue que, para cada bem $l \in L$ e para cada agente $h \in H$, as alocações de consumo satisfazem $x_{0,l}^h \leq W_{0,l}$. Assim, as cestas de consumo dos agentes são limitadas em $t = 0$. Mais ainda, segue da condição (A) que $\eta^h \in B^h(\pi)$ e, portanto,

$$\sum_{k\in K} C_{k,l}(p_0, q_k)\varphi_k^h \leq x_{0,l}^h \leq W_{0,l}. \tag{7-1}$$

Como restringimos os preços (p_0, q_k) a pertencer ao conjunto compacto Ξ_k, segue da Hipótese (3) que existe um limite inferior $\underline{c}_k = \min_{(p_0,q_k)\in\Xi_k} \sum_{l\in L} C_{k,l}(p_0, q_k) > 0$. Então, somando sobre $l \in L$, temos da equação (7-1) que

$$\varphi_k^h \leq \frac{1}{\underline{c}_k} \sum_{l\in L} W_{0,l} =: \Omega_k, \tag{7-2}$$

o que implica que as vendas a descoberto são limitadas. Assim, a condição de equilíbrio (B) garante que, para cada estado $s \in S$, $\sum_{h\in H} x_s^h = W_s + Y_s W_0$. Como cada termo do lado esquerdo nesta equação é não-negativo, segue que as cestas individuais de consumo, x_s^h, são limitadas.

Finalmente, como restringimos os preços dos bens, em cada estado da natureza $s \in S$, a pertencer no simplex $\Delta_+^{\#L-1}$, o valor das promessas dos primitivos, $p_s A_{s,k}\varphi_k^h$, é limitada para cada $(h, k) \in H \times K$. Assim, segue da condição (C) que os devedores não tem incentivo, no ponto ótimo, a pagar mais que o valor de face das promessas originais. Portanto, os pagamentos δ^h são limitados por cima, nó por nó, primitivo por primitivo. $\square$

Agora, como as alocações de consumo, vendas a descoberto e pagamentos são limitadas em equilíbrio (caso exista), truncaremos as variáveis endógenas, de forma a achar um alocação ótima para a economia.

Nosso objetivo é provar que, dado limites superiores e inferiores para as alocações, existe um equilíbrio para economia truncada (como definida abaixo). Além disso, mostramos que essas alocações de equilíbrio truncadas convergem, quando o limite apropriado é tomado, para uma alocação de equilíbrio da economia original $\mathcal{E}(S^*,\mathcal{H},\mathcal{L},\mathcal{F})$.

A Economia Truncada $\mathcal{E}_M$. Definimos, para cada $M \in \mathcal{M} = \{(M_1, M_2) \in \mathbb{R}^2_{++} : M_1 < M_2\}$, uma economia truncada $\mathcal{E}_M$ na qual a estrutura de incerteza e dos mercados físicos são iguais a de $\mathcal{E}(S^*,\mathcal{H},\mathcal{L},\mathcal{F})$. Cada agente $h \in H$ pode demandar bens, vender primitivos $k \in K$ e comprar derivativos $j \in J$ restrito a um espaço de alocações $\mathbb{X}_M$, que é dado pelo conjunto de vetores $\eta^h = (x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h) \in \mathbb{X}$ que satisfazem

$$\|x^h\|_\infty \leq M_1, \quad \|\varphi^h\|_\infty \leq 2\Omega, \quad \|\theta^h\|_\infty \leq 2\,(\#H)\,\Omega, \quad \|\delta^h\|_\infty \leq 2\Omega \max_{(s,k)\in S\times K} \|A_{s,k}\|_1,$$

onde $\| \, \|_\infty$ denota a norma do máximo e $\Omega := \max_{k\in K} \Omega_k$, é o máximo dos limites superiores das vendas a descoberto definido na equação (7-2) no Lema 1. Mais ainda, de forma a garantir a existência de um equilíbrio não-trivial (como definido na Seção 4), precisamos de um limite inferior, estritamente maior que zero, para as taxas de pagamento dos derivativos:

- Dada uma classe $\mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C$ de primitivos, definimos o *espaço truncado de taxas de pagamento de CLO's* como o conjunto de vetores $(r_{s,j^m_{\mathbb{A}_C}}) \in \mathbb{R}^{n(\mathbb{A}_C)}_+$ que pertence a

$$\Upsilon^s_M(\mathbb{A}_C) := \prod_{m=1}^{n(\mathbb{A}_C)} \left[\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C), 1\right],$$

onde, denotando por $\overline{c}_{s,k} := \max_{(p_0,q_k)\in\Xi_k} \|Y_s C_k(p_0,q_k)\|_1$,

$$\beta^{s,1}_M(\mathbb{A}_C) = \begin{cases} \frac{1}{M_1}, & \text{se } \min_{k\in\mathbb{A}_C} \{||A_{s,k}||_1,\, \overline{c}_{s,k}\} > 0; \\ \frac{1}{M_2}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e para $m > 1$

$$\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C) = \begin{cases} \frac{1}{M_1}, & \text{se } \begin{array}{l} \left[\min_{k\in\mathbb{A}_C} \{||A_{s,k}||_1,\, \overline{c}_{s,k}\} > 0\right] \wedge \\ \left[||A_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)}||_1 = 0,\ \forall m' < m\right] \end{array} ; \\ \frac{1}{M_2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Dada uma classe $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$ de primitivos, definimos o *espaço truncado de taxas de pagamento de Pass-through* como

$$\Upsilon^s_M(\mathbb{A}_P) = \left\{ r = (r_i) \in [\beta^s_M(\mathbb{A}_C), 1]^{n(\mathbb{A}_P)} \,:\, r_i = r_{i'},\ 1 \leq i, i' \leq n(\mathbb{A}_P) \right\},$$

onde, similarmente ao caso dos CLO's,

$$\beta_M^s(\mathbb{A}_P) = \begin{cases} \frac{1}{M_1}, & \text{se } \min_{k\in\mathbb{A}_P}\{||A_{s,k}||_1,\, \overline{c}_{s,k}\} > 0; \\ \frac{1}{M_2}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O espaço de preços e taxas de pagamento $\pi = (p, q, r)$ é dado, em nossa economia truncada $\mathcal{E}_M$, por

$$\mathbb{P}_M := \Xi \times (\Delta_+^{\#L-1})^S \times \prod_{i\in\{P,C\}} \prod_{\mathbb{A}_i\subset\mathcal{A}_i} \prod_{s\in S} \Upsilon_M^s(\mathbb{A}_i).$$

Além disso, para um vetor $\pi \in \mathbb{P}_M$ de preços e taxas de pagamento dado, seja $B_M^h(\pi) = B^h(\pi) \cap \mathbb{X}_M$ o conjunto orçamentário *truncado*. Para cada agente h, definimos a *correspondência de decisão aumentada truncada* $\hat{\Psi}^{h,M} : (\Delta_+^{\#L-1})^S \times \mathbb{X}_M \twoheadrightarrow \mathbb{X}_M$ como a restrição da correspondência $\hat{\Psi}^h$ ao espaço truncado de alocações $\mathbb{X}_M$.

Agora, associado a cada agente $h \in H$, definimos a correspondência de reação $\psi_M^h : \mathbb{P}_M \times \mathbb{X}_M^H \twoheadrightarrow \mathbb{X}_M$ via

$$\psi_M^h(\pi,\eta) = \begin{cases} \dot{B}_M^h(\pi) & \text{se } \eta^h \notin B_M^h(\pi), \\ \dot{B}_M^h(\pi) \cap \hat{\Psi}^{h,M}(p_{-0},\eta^h) & \text{se } \eta^h \in B_M^h(\pi), \end{cases}$$

onde $\dot{B}_M^h(\pi)$ denota o interior de $B_M^h(\pi)$ relativo a $\mathbb{X}_M$. Correspondências de reação também são definidas para cada estado $s \in S^*$. Defina $\psi_M^0 : \mathbb{P}_M \times \mathbb{X}_M^H \twoheadrightarrow \Xi$ como

$$\begin{aligned} \psi_M^0(\pi,\eta) \quad = \quad & \Bigg\{(p'_0, q'_K, q'_J) : p'_0\left[\sum_{h\in H} x_0^h - W_0\right] + \\ & \sum_{i\in\{P,C\}}\left[\sum_{\mathbb{A}_i\subset\mathcal{A}_i}\left(\sum_{j\in J(\mathbb{A}_i)} q'_j \sum_{h\in H}\theta_j^h - \sum_{k\in\mathbb{A}_i} q'_k \sum_{h\in H}\varphi_k^h\right)\right] > 0\Bigg\} \end{aligned}$$

e, para cada $s \in S$, $\psi_M^s : \mathbb{P}_M \times \mathbb{X}_M^H \twoheadrightarrow \Delta_+^{\#L-1}$ como

$$\begin{aligned} \psi_M^s(\pi,\eta) = \Bigg\{p'_s \in \Delta_+^{\#L-1} \quad : \quad & p'_s\left(\sum_{h\in H}\left[x_s^h - Y_s x_0^h\right] - W_s\right) > \\ & p_s\left(\sum_{h\in H}\left[x_s^h - Y_s x_0^h\right] - W_s\right)\Bigg\}. \end{aligned}$$

Além disso, dada uma classe $\mathbb{A}_P$ de primitivos, definimos, para cada estado da natureza $s \in S$, uma correspondência de reação $\psi_M^{s,\mathbb{A}_P} : \mathbb{P}_M \times \mathbb{X}_M^H \twoheadrightarrow \Upsilon_M^s(\mathbb{A}_P)$, que leva um vetor (π,η) a um conjunto de vetores $r' := r'_{s,\mathbb{A}_P}(1,1,\ldots,1) \in$

$\Upsilon^s_M(\mathbb{A}_P)$ que satisfaçam

$$\left(r'_{s,\mathbb{A}_P}\sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} p_s A_{s,j}\sum_{h\in H}\theta^h_j - \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\delta^h_{s,k}\right)^2$$

$$< \left(r_{s,\mathbb{A}_P}\sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} p_s A_{s,j}\sum_{h\in H}\theta^h_j - \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\delta^h_{s,k}\right)^2,$$

onde $\pi = (p,q,r)$ e $(r_{s,j})_{j\in J(\mathbb{A}_P)} := r_{s,\mathbb{A}_P}(1,1,\dots,1)$. Finalmente, dada um classe $\mathbb{A}_C$ de primitivos, para cada estado da natureza $s\in S$ e para cada $m\in\{1,2,\dots,n(\mathbb{A}_C)\}$, definimos a correspondência de reação

$$\psi^{s,j^m(\mathbb{A}_C)}_M : \mathbb{P}_M\times\mathbb{X}^H_M \twoheadrightarrow \left[\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C),1\right],$$

como a função conjunto que associa a cada vetor $(\pi,\eta)\in\mathbb{P}_m\times\mathbb{X}^H_M$, o conjunto de números $r'\in\left[\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C),1\right]$ que satisfaçam

$$\left(r' p_s A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\sum_{h\in H}\theta^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} + \sum_{i=1}^{m-1} r_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} p_s A_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}\sum_{h\in H}\theta^h_{j^i(\mathbb{A}_C)} - \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\delta^h_{s,k}\right)^2$$

$$< \left(\sum_{i=1}^{m} r_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} p_s A_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}\sum_{h\in H}\theta^h_{j^i(\mathbb{A}_C)} - \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\delta^h_{s,k}\right)^2.$$

Definição 3 *Dado $M\in\mathcal{M}$, um equilíbrio para economia truncada $\mathcal{E}_M$ é um vetor*

$$(\overline{\pi},\overline{\eta}) = \left((\overline{p}_M,\overline{q}_M,\overline{r}_M),(\overline{x}^h_M,\overline{\varphi}^h_M,\overline{\delta}^h_M,\overline{\theta}^h_M)_{h\in H}\right)\in\mathbb{P}_M\times\mathbb{X}^H_M,$$

no qual todas as correspondências de reação definidas acima assumem um valor vazio.

Lema 2 *Dado um vetor $M\in\mathcal{M}$, se as Hipóteses 1-3 são válidas, existe um equilíbrio para a economia truncada $\mathcal{E}_M$.*

Prova: Observe que pelas Hipóteses 1 e 3 $\dot{B}^h_M(\pi)$ tem valores não-vazios e gráfico aberto. Então, segue da Hipótese 2, que as correspondências de reação $(\psi^s_M)_{s\in S^*}$, $(\psi^{s,\mathbb{A}_P}_M)_{\{s\in S,\,\mathbb{A}_P\subset\mathcal{A}_P\}}$, $(\psi^h_M)_{h\in H}$, e $(\psi^{s,j}_M)_{\{(s,j)\in S\times J(\mathbb{A}_C),\,\mathbb{A}_C\subset\mathcal{A}_C\}}$ satisfazem as hipóteses do Teorema de Ponto Fixo de Gale-Mas-Colell (ver Gale e Mas-Colell [9, 10]), isto é, todas as correspondências são hemicontínuas inferiores com valores convexos e abertos, têm o mesmo domínio e o produto de seus espaços de imagem coincide com o domínio. Assim, existe um vetor $(\overline{\pi}_M,\overline{\eta}_M)\in\mathbb{P}_M\times\mathbb{X}^H_M$ para o qual

- $\psi^h_M(\overline{\pi}_M,\overline{\eta}_M)=\emptyset$ ou $\overline{\eta}^h_M\in\psi^h_M(\overline{\pi}_M,\overline{\eta}_M)$, para cada agente $h\in H$;
- $\psi^0_M(\overline{\pi}_M,\overline{\eta}_M)=\emptyset$ ou $((\overline{p}_M)_0,\overline{q}_M)\in\psi^0_M(\overline{\pi}_M,\overline{\eta}_M)$;

- $\psi_M^s(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M) = \emptyset$ ou $(\overline{p}_M)_s \in \psi_M^s(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M)$, para cada estado da natureza $s \in S$;
- $\psi_M^{s,\mathbb{A}_P}(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M) = \emptyset$ ou $(\overline{r}_M)_{s,\mathbb{A}_P} \in \psi_M^{s,\mathbb{A}_P}(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M)$, para cada classe de primitivos $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$ e estado da natureza $s \in S$;
- $\psi_M^{s,j^m(\mathbb{A}_C)}(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M) = \emptyset$ ou $(\overline{r}_M)_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} \in \psi_M^{s,j^m(\mathbb{A}_C)}(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M)$, para cada estado da natureza $s \in S$, para cada classe $\mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C$ e para cada $m \in \{1, 2, \ldots, n(\mathbb{A}_C)\}$.

Claramente não é possível $\overline{\eta}_M^h \notin B_M^h(\overline{\pi}_M)$, porque nesse caso não seriam nem um ponto fixo nem um valor vazio. Mais ainda, não podemos ter $\overline{\eta}_M^h \in \psi_M^h(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M)$ pois contradizeria o fato que $\overline{\eta}_M^h \notin \hat{\Psi}^{h,M}((\overline{p}_{-0})_M, \overline{\eta}_M^h)$. Assim, temos que ter $\psi_M^h(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M) = \emptyset$, para cada agente $h \in H$.

Como ressaltado acima, $\overline{\eta}_M^h \in B_M^h(\overline{\pi}_M)$. Somando em relação aos agentes, segue da Hipótese 1 que

$$(\overline{p}_M)_0 \left[\sum_{h\in H} (\overline{x}_M^h)_0 - W_0\right] +$$

$$\sum_{i\in\{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i\subset\mathcal{A}_i} \left(\sum_{j\in J(\mathbb{A}_i)} (\overline{q}_M)_j \sum_{h\in H} (\overline{\theta}_M^h)_j - \sum_{k\in\mathbb{A}_i} (\overline{q}_M)_k \sum_{h\in H} (\overline{\varphi}_M^h)_k\right)\right] \leq 0.$$

Assim, $((\overline{p}_M)_0, \overline{q}_M) \notin \psi_M^0(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M)$ e, portanto, $\psi_M^0(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M)$ é um valor vazio. Finalmente, é fácil ver que pela definição as correspondências ψ_M^s, $\psi_M^{s,\mathbb{A}_P}$ e $\psi_M^{s,j^m(\mathbb{A}_C)}$ não podem ter um ponto fixo. Então, temos que $\psi_M^s(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M) = \emptyset$, $\psi_M^{s,\mathbb{A}_P}(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M) = \emptyset$ e $\psi_M^{s,j^m(\mathbb{A}_C)}(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M) = \emptyset$. □

Agora, por conveniência de notação, quando não houver possibilidade de duvida, omitiremos o subscrito das alocações $(\overline{\pi}_M, \overline{\eta}_M)$. Assim, usando essa notação, com $M \in \mathcal{M}$ fixo, já sabemos que um alocação de equilíbrio para economia truncada $(\overline{\pi}, \overline{\eta})$ satisfaz $\overline{\eta}^h \in B_M^h(\overline{\pi})$ e $\hat{\Psi}^{h,M}(\overline{p}_{-0}, \overline{\eta}^h) \cap \dot{B}_M^h(\overline{\pi}) = \emptyset$. Mais ainda, o fato que ambos os conjuntos $\hat{\Psi}^{h,M}(\overline{p}_{-0}, \overline{\eta}^h)$ e $\dot{B}_M^h(\overline{\pi})$ são abertos implica que $\hat{\Psi}^{h,M}(\overline{p}_{-0}, \overline{\eta}^h) \cap \mathit{closure}\,[\dot{B}_M^h(\overline{\pi})] = \emptyset$. Como $\dot{B}_M^h(\overline{\pi})$ é não-vazio e convexo, concluímos que $\hat{\Psi}^{h,M}(\overline{p}_{-0}, \overline{\eta}^h) \cap B_M^h(\overline{\pi}) = \emptyset$. Além disso, como $\psi^0(\overline{\pi}, \overline{\eta}) = \emptyset$, para qualquer $(p', q'_K, q'_J) \in \Xi 1$ temos que

$$p'_0 \left[\sum_{h\in H} \overline{x}_0^h - W_0\right] + \sum_{i\in\{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i\subset\mathcal{A}_i} \left(\sum_{j\in J(\mathbb{A}_i)} q'_j \sum_{h\in H} \overline{\theta}_j^h - \sum_{k\in\mathbb{A}_i} q'_k \sum_{h\in H} \overline{\varphi}_k^h\right)\right] \leq 0. \tag{7-3}$$

Assim, suponha que $\sum_h \overline{x}_{0,l}^h - W_{0,l} > 0$ para algum $l \in L$. Então, pondo $p'_{0,l} = 1$, $p'_{0,l'} = 0$ para todo $l' \neq l$, $q_J = 0$ e $q_K = 0$, obtemos uma contradição. Mais ainda, suponha que $\sum_h \overline{\theta}_j^h > \sum_h \overline{\varphi}_k^h$ para algum par $(k, j) \in \mathbb{A}_i \times J(\mathbb{A}_i)$. Assim, fazendo $p_0 = 0$, $q_j = 1$, $q_{j'} = 0$ para todo $j' \neq j$, $q_k = 1$ e $q_{k'} = 0$ para todo $k' \neq k$, obtemos uma contradição com a equação (7-3). Portanto, segue que $\sum_h \overline{x}^h_{0,l} - W_{0,l} \leq 0$ para $l \in L$ e $\sum_h \overline{\theta}^h_j \leq \sum_h \overline{\varphi}^h_k$ para cada par $(k, j) \in \mathbb{A}_i \times J(\mathbb{A}_i)$ e para todo $\mathbb{A}_i \in \mathcal{A}_i$ com $i \in \{P, C\}$.

Lema 3 *Existe $M_1^\star > 0$ tal que, para cada $M_1 > M_1^\star$, se as Hipóteses 1-3 valem, cada alocação de equilíbrio $(\overline{\pi}, \overline{\eta})$ para economia truncada $\mathcal{E}_M$, com $M = (M_1, M_2) \in \mathcal{M}$, satisfaz*

(3.1) Para cada agente $h \in H$, $\overline{\eta}^h \in B^h_M(\overline{\pi})$;

(3.2) $\hat{\Psi}^{h,M}(\overline{p}_{-0}, \overline{\eta}^h) \cap B^h_M(\overline{\pi}) = \emptyset, \quad \forall\, h \in H$;

(3.3) $\sum_{h \in H} \overline{x}^h_0 = W_0$;

(3.4) $\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{q}_j \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j = \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \overline{q}_k \sum_{h \in H} \overline{\varphi}^h_k$, para cada classe $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$ com $i \in \{P, C\}$;

(3.5) Para cada $s \in S$ e $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$,

$$\overline{r}_{s,\mathbb{A}_P} \in \arg \max_{r \in [\beta^s_M(\mathbb{A}_P), 1]} - \left(r \sum_{j \in J(\mathbb{A}_P)} \overline{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_P} \sum_{h \in H} \overline{\delta}^h_{s,k} \right)^2 ;$$

(3.6) Para cada $s \in S$, $\mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C$, $j^m(\mathbb{A}_C) \in J(\mathbb{A}_C)$, a taxa de pagamento $\overline{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}$ minimiza a função

$$\left(r\, F^{s,m}_{\mathbb{A}_C}(\overline{\pi}, \overline{\eta}) + \sum_{i=1}^{m-1} \overline{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\overline{\pi}, \overline{\eta}) - \sum_{k \in \mathbb{A}_C} \sum_{h \in H} \overline{\delta}^h_{s,k} \right)^2 ,$$

sujeita a $r \in [\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C), 1]$, onde $F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\overline{\pi}, \overline{\eta}) := \overline{p}_s A_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_{j^i(\mathbb{A}_C)}$;

(3.7) Existe $\mathcal{X} < M_1^\star$ tal que, para cada $s \in S^*$ e $l \in L$, as alocações de consumo $(\overline{x}^h_{s,l})_{h \in H}$ satisfazem $\overline{x}^h_{s,l} \leq W_{s,l} \leq \mathcal{X}$;

(3.8) Para cada $s \in S$ e $l \in L$,

$$\sum_{h \in H} \overline{x}^h_{s,l} - (Y_s W_0)_l - W_{s,l}$$

$$\leq \sum_{i \in \{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i} \left(\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{r}_{s,j} \overline{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \sum_{h \in H} \overline{\delta}^h_{s,k} \right) \right] ;$$

(3.9) $\sum_h \overline{\theta}^h_j \leq \sum_h \overline{\varphi}^h_k$ para cada par $(k, j) \in \mathbb{A}_i \times J(\mathbb{A}_i)$, para todo $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$ com $i \in \{P, C\}$.

Prova: Como discutido acima, os itens (3.1), (3.2) e (3.9) são válidos para cada $M = (M_1, M_2) \in \mathcal{M}$. Assim, como $\sum_h \overline{x}^h_{0,l} - W_{0,l} \leq 0$ para $l \in L$, existe M_1' tal que, para cada $M_1 > M_1'$, uma alocação de consumo de equilíbrio da economia truncada $\mathcal{E}_M$ satisfaz $\overline{x}_{0,l}^h < M_1$. Então, dado $M_1 > M_1'$, suponha que a alocação de equilíbrio de um agente h satisfaz

$$\overline{p}_0 \overline{x}_0^h + \sum_{i \in \{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i} \left(\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{q}_j \overline{\theta}_j^h - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \overline{q}_k \overline{\varphi}_k^h \right) \right] < m_0^h(\overline{p}_0).$$

Como $\overline{x}_0^h$ é interior, existe $\hat{x}_0^h \gg \overline{x}_0^h$ tal que $\hat{\eta}^h = (\hat{x}_0^h, \overline{\varphi}^h, \overline{\delta}^h, \overline{\theta}^h) \in B_M^h(\overline{\pi})$. Pela monotonicidade estrita de $\hat{\Psi}^{h,M}$ on x_0, sabemos que $\hat{\Psi}^{h,M}(\overline{p}_{-0}, \overline{\eta}^h) \cap B_M^h(\overline{\pi}) \neq \emptyset$, o que contradiz o item (3.2). Assim, para cada agente h, a restrição orçamentária para o primeiro período deve valer com igualdade. Somando em relação aos agentes, segue da Hipótese 1 que

$$\overline{p}_0 \left[\sum_{h \in H} \overline{x}_0^h - W_0 \right] + \sum_{i \in \{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i} \left(\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{q}_j \sum_{h \in H} \overline{\theta}_j^h - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \overline{q}_k \sum_{h \in H} \overline{\varphi}_k^h \right) \right] = 0. \tag{7-4}$$

Dada uma classe $\mathbb{A}_i$, definindo k' como

$$\sum_{h \in H} \varphi_{k'}^h = \min_{k \in \mathbb{A}_i} \sum_{h \in H} \varphi_k^h,$$

segue do fato que $\sum_{h \in H} \overline{\theta}_j^h \leq \sum_{h \in H} \overline{\varphi}_k^h$, para todo $(j,k) \in J(\mathbb{A}_i) \times \mathbb{A}_i$, que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{q}_j \sum_{h \in H} \overline{\theta}_j^h - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \overline{q}_k \sum_{h \in H} \overline{\varphi}_k^h &\leq \sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{q}_j \sum_{h \in H} \overline{\varphi}_{k'}^h - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \overline{q}_k \sum_{h \in H} \overline{\varphi}_{k'}^h \quad (7\text{-}5) \\ &= \sum_{h \in H} \overline{\varphi}_{k'}^h \left(\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{q}_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \overline{q}_k \right) \leq 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é uma consequência de $\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{q}_j \leq \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \overline{q}_k$. Segue de (7-5) e da desigualdade $\sum_h \overline{x}_0^h \leq W_0$ que o lado esquerdo da equação (7-4) é uma soma de termos não-positivos. Assim, cada termo tem que ser igual a zero e a condição (3.4) é válida, i.e.

$$\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{q}_j \sum_{h \in H} \overline{\theta}_j^h - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \overline{q}_k \sum_{h \in H} \overline{\varphi}_k^h = 0,$$

para cada classe $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$ com $i \in \{P, C\}$. Mais ainda, suponha que existe um bem $l \in L$ tal que $\sum_{h \in H} \overline{x}_{0,l}^h < W_{0,l}$. Pela equação 7-4, temos que $\overline{p}_{0,l} = 0$. Entretanto, segue da estrita monotonicidade de $\hat{\Psi}^{h,M}$ em $x_{0,l}$ que $B_M^h(\overline{\pi}) \cap \hat{\Psi}^{h,M}(\overline{p}_{-0}, \overline{\eta}^h) \neq \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, o item (3.3) vale.

Segue do Lema 2 que, dado um estado da natureza $s \in S$, uma classe de primitivos $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$ e $M = (M_1, M_2) \in \mathcal{M}$, temos que, para cada

$r \in [\beta^s_M(\mathbb{A}_P), 1]$,

$$\left(r \sum_{j \in J(\mathbb{A}_P)} \overline{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_P} \sum_{h \in H} \overline{\delta}^h_{s,k} \right)^2$$

$$\geq \left(\overline{r}_{s,\mathbb{A}_P} \sum_{j \in J(\mathbb{A}_P)} \overline{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_P} \sum_{h \in H} \overline{\delta}^h_{s,k} \right)^2 .$$

Portanto,

$$\overline{r}_{s,\mathbb{A}_P} \in \arg \max_{r \in [\beta^s_M(\mathbb{A}_P),1]} - \left(r \sum_{j \in J(\mathbb{A}_P)} \overline{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_P} \sum_{h \in H} \overline{\delta}^h_{s,k} \right)^2 ,$$

e o item (3.5) está provado. Com argumento análogo, podemos garantir o item (3.6).

Além disso, dado um equilíbrio $(\overline{\pi}, \overline{\eta})$ para uma economia abstrata $\mathcal{E}_M$, com $M = (M_1, M_2)$ e $M_1 > M_1'$, sabemos que $\psi^s_M(\overline{\pi}, \overline{\eta}) = \emptyset$, para cada estado da natureza $s \in S$. Então, para todos os preços $p_s' \in \Delta^{\#L-1}_+$ temos

$$p_s' \left(\sum_{h \in H} \left[\overline{x}^h_s - Y_s \overline{x}^h_0 \right] - W_s \right) \leq \overline{p}_s \left(\sum_{h \in H} \left[\overline{x}^h_s - Y_s \overline{x}^h_0 \right] - W_s \right) . \tag{7-6}$$

Mais ainda, segue do item (3.1) que $\overline{\eta}^h \in B^h_M(\overline{\pi})$, para cada agente $h \in H$. Assim, dado um estado $s \in S$,

$$\overline{p}_s \left(\sum_{h \in H} \left[\overline{x}^h_s - Y_s \overline{x}^h_0 \right] - W_s \right)$$

$$\leq \sum_{i \in \{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i} \left(\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{r}_{s,j} \overline{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \sum_{h \in H} \overline{\delta}^h_{s,k} \right) \right] . \tag{7-7}$$

Fazendo na equação (7-6) $p'_{s,l} = 1$ e $p'_{s,l'} = 0$ para cada $l' \neq l$, temos por (7-6), (7-7) e item (3.3) que

$$\sum_{h \in H} \overline{x}^h_{s,l} - (Y_s W_0)_l - W_{s,l}$$

$$\leq \sum_{i \in \{P,C\}} \left[\sum_{\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i} \left(\sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \overline{r}_{s,j} \overline{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \sum_{h \in H} \overline{\delta}^h_{s,k} \right) \right] , \tag{7-8}$$

o que prova o item (3.8). Como na economia $\mathcal{E}_M$, (a) a posição de primitivos, $\overline{\varphi}^h_j$, são limitadas por 2Ω, e (b) as compras agregadas de cada derivativo, $\sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_j$, são limitadas pelo total de posições vendidas nos primitivos; segue da equação (7-8) que

$$\sum_{h\in H} \overline{x}^h_{s,l} - (Y_s W_0)_l - W_{s,l} \leq 2\sum_{j\in J} \|A_{s,j}\|_1 (\#H)\,\Omega.$$

Então, para cada $l \in L$,

$$\overline{x}^h_{s,l} \leq \max_{(s,l)\in S\times L} \left\{ W_{s,l} + (Y_s W_0)_l + 2\sum_{j\in J} \|A_{s,j}\|_1 (\#H)\,\Omega \right\}, \quad \forall h \in H,$$

o que garante que as alocações de consumo $\overline{x}^h_s$, $s \in S$, são uniformemente limitadas por cima, independente do valor de $M_1 > M_1'$. Mais ainda, o item (3.3) garante que as alocações de consumo do primeiro período, $\overline{x}^h_0$, são também limitadas uniformemente, independente de $M = (M_1, M_2)$. Portanto, existe $\mathcal{X} > 0$ e $M_1^\star > \max\{\mathcal{X}, M_1'\}$ tal que $\overline{x}^h_{s,l} \leq W_{s,l} \leq \mathcal{X} < M_1^\star$, para todo $(s,l) \in S^* \times L$, o que prova o item (3.7). □

Definição 4 *Dado $M \in \mathcal{M}$, um M-semi-equilíbrio é uma alocação $(\tilde{\pi}_M, \tilde{\eta}_M) \in \mathbb{P}_M \times \mathbb{X}^H_M$ que satisfaz os itens (3.1)-(3.8).*

É importante notar que o item (3.9) não entra na definição de M-semi-equilíbrio. Note que, dado $M = (M_1, M_2)$, segue do Lema 3 que, para $M_1 > M_1^\star$, sempre existe um M-semi-equilíbrio. Por conveniência de notação, também omitimos o subscrito M das alocações de M-semi-equilíbrio quando não existe possibilidade de dúvida.

Lema 4 *Existe $M_1^{\star\star} > M_1^\star$ tal que, se as Hipóteses 1-4 valem, para cada M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$, com $M = (M_1, M_2)$ e $M_1 > M_1^{\star\star}$, os preços dos bens $\tilde{p}_{s,l}$, com $(s,l) \in S^* \times L$, tem um limite inferior uniforme $\underline{p}$, estritamente maior do que zero e independente de $M = (M_1, M_2)$.*

Prova: Fixe $M = (M_1, M_2)$ com $M_1 > M_1^\star$. Segue de (3.7) que, uma alocação de M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ satisfaz $\tilde{x}^h_{s,l} \leq \mathcal{X} < M_1$, para todo $(s,l) \in S^* \times L$, o que garante que $\tilde{p}_{s,l} > 0$.[1] Mais ainda, segue da Hipótese 1 que, para cada $s \in S$ e cada $h \in H$, $\underline{m}^h_s := \min_{p_s \in \Delta_+^{\#L-1}} m^h_s(p_s) > 0$, porque $\Delta_+^{\#L-1}$ é compacto. Definindo, para cada par diferente de bens (l, l'), o conjunto compacto

$$G(l,l') = \left\{ p_0 \in \mathbb{R}^L_+ \,:\, \left(p_{0,l'} \geq \frac{1 - p_{0,l}}{\#L + \#J - 1} \right) \wedge \left(\exists (q_K, q_J), (p_0, q_K, q_J) \in \Xi \right) \right\},$$

[1] Caso contrário, como as preferências são estritamente monotônicas no consumo, cada agente $h \in H$ poderia aumentar seu consumo de um bem com preço zero, escolhendo uma outra alocação $\hat{\eta}^h$ que melhora sua situação e ainda pertence ao seu conjunto orçamentário $B^h_M(\tilde{\pi})$, o que contradiz o item (3.2).

temos que, como $p_0 = 0$ não pertence a $G(l, l')$,

$$\underline{m}_0^h := \min_{l \in L} \min_{l' \neq l} \min_{p_0 \in G(l,l')} m_0^h(p_0) > 0, \quad \forall h \in H.$$

Dado um M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ o vetor $(\tilde{p}_0, \tilde{q}_J) \in \Delta_+^{\#L+\#J-1}$. Portanto, para um $l \in L$ fixo, de forma a garantir que $\tilde{p}_{0,l}$ é uniformemente limitado, independente de M, temos que considerar duas possibilidades, como em Seghir e Torres-Martínez [15]:

Caso I: *Existe um bem $l' \neq l$ para o qual $\tilde{p}_{0,l'} \geq \frac{1-\tilde{p}_{0,l}}{\#L+\#J-1}$.*

Nesse caso, $\tilde{p}_0 \in G(l, l')$, o que implica que $m_0^h(\tilde{p}_0) \geq \underline{m}_0^h$. Assim, qualquer agente h pode escolher a alocação $(\hat{x}^h, 0, 0, 0)$, definida por

$$\hat{x}^h_{s'',l''} = \begin{cases} \epsilon & , \ \text{se}\,(s'', l'') \neq (0, l), \\ \min\left\{\frac{\underline{m}_0^h}{2\tilde{p}_{0,l}}, M_1\right\} & , \ \text{se}\,(s'', l'') = (0, l), \end{cases}$$

onde $\epsilon := \min_{h \in H} \left\{\frac{\underline{m}_0^h}{2}\, ; \min_{s \in S} \frac{\underline{m}_s^h}{2}\right\} > 0$.

Por outro lado, como cada alocação de consumo $(\tilde{x}^h)_{h \in H}$ é uniformemente limitada, segue da Hipótese 4 que

$$Z^h_{0,l}(\tilde{x}, \tilde{d}, \epsilon) \leq \tilde{Z}_\epsilon := \max_{h \in H} \max_{(s'',l'') \in S^* \times L} Z^h_{s'',l''}\left((\mathcal{X}, \mathcal{X}, \ldots, \mathcal{X}), 0, \epsilon\right).$$

Como o lado esquerdo da desigualdade acima não depende de M, existe $(M_1^\star)' \geq M_1^\star$ tal que, se $M_1 > (M_1^\star)'$, $\tilde{Z}_\epsilon < M_1$. Assim, segue da Hipótese 4 e da condição de otimalidade (3.2) que, para um M-semi-equilíbrio fixo com $M_1 > (M_1^\star)'$, $\tilde{Z}_\epsilon > \frac{\underline{m}_0^h}{2\tilde{p}_{0,l}}$, o que implica que

$$\tilde{p}_{0,l} \geq \underline{p}_0^I := \max_{h \in H} \frac{\underline{m}_0^h}{2\tilde{Z}_\epsilon} > 0.$$

Caso II: *Existe um ativo $j \in J$ para o qual $\tilde{q}_j \geq \frac{1-\tilde{p}_{0,l}}{\#L+\#J-1}$.*

Defina $\underline{W}_0 = \min_{l \in L} W_{0,l}$. Note que, sempre existe um agente $h(\tilde{p}_0) \in H$ que pode demandar $\frac{\underline{W}_0}{\#H}$ unidades de cada bem no primeiro período sem fazer transações financeiras. De fato, suponha que não exista tal agente. Então, segue da restrição orçamentário do primeiro período que $m_0^h(\tilde{p}_0) < \|\tilde{p}_0\|_1 \frac{\underline{W}_0}{\#H}$ para todo $h \in H$. Entretanto, a Hipótese 1 implica que $\sum_{h \in H} m_0^h(\tilde{p}_0) \geq \|\tilde{p}_0\|_1 \underline{W}_0$, o que é uma contradição. Mais ainda, como estamos restringindo $(p_0, q_K, q_J) \in \Xi$, segue que existe $k \in K$ para o qual $\tilde{q}_k \geq \frac{1-\tilde{p}_{0,l}}{(\#L+\#J-1)\#K}$.

Desta forma, o agente $h(\tilde{p}_0)$ pode demandar uma cesta $\hat{x}^{h(\tilde{p}_0)}$, definida por

$$\hat{x}^{h(\tilde{p}_0)}_{s',l'} = \begin{cases} \epsilon' & , \text{ se } (s',l') \neq (0,l), \\ \min\left\{\epsilon' + \frac{q_k \gamma}{\tilde{p}_{0,l}}, M_1\right\} & , \text{ se } (s',l') = (0,l), \end{cases}$$

onde $\epsilon' := \min_{h\in H}\left\{\frac{W_0}{2\#H}\,;\, \min_{s\in S}\frac{\underline{m}^h_s}{2}\right\} > 0$, vendendo γ unidades do primitivo k, sem fazer nenhuma outra transação financeira e pagando todos seu compromissos no segundo período, onde γ satisfaz

$$\gamma\left(\max_{(p_0,q_k)\in\Xi_k}\|C_{k,l}(p_0,q_k)\|_1\right) \leq \frac{W_0}{2\#H}; \qquad \gamma \leq 2\Omega(\#H); \qquad \gamma A_{s,k} \leq \epsilon',\ \forall s \in S.$$

Portanto, essa alocação pertence ao conjunto orçamentário do agente $h(\tilde{p}_0)$ e γ é independente dos preços. Então, segue da Hipótese 4 e da condição de otimalidade (3.2) que existe $(M_1^\star)_0 > (M_1^\star)'$ tal que, para cada M-semi-equilíbrio fixo, com $M = (M_1, M_2)$, se $M_1 > (M_1^\star)_0$ então $\epsilon' + \frac{\tilde{q}_k\gamma}{\tilde{p}_{0,l}} \leq \tilde{Z}_{\epsilon'}$, o que implica que

$$\tilde{p}_{0,l} \geq \underline{p}_0^{II} := \frac{\gamma}{\gamma + (\#L + \#J - 1)\#K\,\tilde{Z}_{\epsilon'}}.$$

Portanto, os Casos I e II implicam que os preços dos bens de um M-semi-equilíbrio para o primeiro período (onde $M_1 > (M_1^\star)_0$) são uniformemente limitados por baixo por $\tilde{p}_{0,l} \geq \underline{p}_0 := \min\{\underline{p}_0^I\,;\, \underline{p}_0^{II}\}$.

Agora, como $\tilde{p}_{0,l} \geq \underline{p}_0$, definimos ϵ_S como

$$\epsilon_S := \min_{h\in H}\left\{\min_{p_0\in\Xi_1} m_0^h(p_0);\, \min_{s\in S}\underline{m}^h_s\right\} > 0,$$

onde Ξ_1 denota o conjunto de preços $p_0 \geq \underline{p}_0(1,1,\ldots,1)$ tal que existe preços q para os quais $(p_0,q) \in \Xi$.

Assim, para um M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi},\tilde{\eta})$, com $M_1 > (M_1^\star)_0$ e para um par fixo $(s,l) \in S \times L$, qualquer agente pode demandar uma alocação $(\hat{x}^h, 0, 0, 0)$, definida como

$$\hat{x}^h_{s',l'} = \begin{cases} \epsilon_S & , \text{ se } (s',l') \neq (s,l), \\ \min\left\{\frac{\underline{m}^h_s}{2\tilde{p}_{s',l'}}, M_1\right\} & , \text{ se } (s',l') = (s,l). \end{cases}$$

Assim, existe $M_1^{\star\star} > \max\{\tilde{Z}_{\epsilon_S}, (M_1^\star)_0\}$ tal que segue da Hipótese 4 e da condição de otimalidade (3.2) que, se $M_1 > M_1^{\star\star}$, $\tilde{Z}_{\epsilon_S} > \frac{\underline{m}^h_s}{2\tilde{p}_{s',l'}}$. Isso implica que os preços de bens de M-semi-equilíbrio são limitados inferiormente por

$$\tilde{p}_{s,l} \geq \underline{p}_s := \max_{h\in H}\frac{\underline{m}^h_s}{2\tilde{Z}_{\epsilon_S}} > 0.$$

Portanto, concluímos que, para cada M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ com $M_1 > M_1^{\star\star}$, os preços dos bens $(\tilde{p}_s)_{s\in S^*}$ satisfazem $\tilde{p}_{s,l} \geq \underline{p} := \min_{s\in S^*} \underline{p}_s$. $\square$

Pegue $M = (M_1, M_2) \in \mathcal{M}$ tal que $M_1 > M_1^{\star\star}$. Fixe uma alocação de M-semi-equilíbrio $(\breve{\pi}, \breve{\eta})$ que também satisfaça o item (3.9) (note que, é suficiente pegar um equilíbrio da economia truncada $\mathcal{E}_M$). Dada uma classe de primitivos $\mathbb{A}_i$, com $i \in \{P, C\}$, segue dos itens (3.4) e (3.9) que se existe $j' \in J(\mathbb{A}_P)$ tal que $\sum_{h\in H} \breve{\theta}_{j'}^h < \max_{j\in J(\mathbb{A}_i)} \sum_{h\in H} \breve{\theta}_j^h$, então $\breve{q}_{j'} = 0$. A condição de otimalidade (item (3.2)) implica que, para tal j', $\breve{r}_{s,j'}\breve{p}_s A_{s,j'} = 0$ para todo $s \in S$. Entretanto, como (i) a taxa de pagamento de j' é limitada por baixo por $\frac{1}{M_2} > 0$, e (ii) os preços dos bens, em cada estado $s \in S$, são estritamente positivos; precisamos ter que $\|A_{s,j'}\|_1 = 0$ para todo $s \in S$, o que é uma contradição com a Hipótese 5. Portanto, $\sum_{h\in H} \breve{\theta}_{j'}^h = \sum_{h\in H} \breve{\theta}_j^h$ para todo $j, j' \in J(\mathbb{A}_i)$, $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$ com $i \in \{P, C\}$. Analogamente, se existe um primitivo $k \in \mathbb{A}_i$ que satisfaça $\sum_{h\in H} \breve{\varphi}_k^h > \min_{k'\in\mathbb{A}_i} \sum_{h\in H} \breve{\varphi}_{k'}^h$, então $\breve{q}_k = 0$.

Assim, segue do item (3.4) que

$$\sum_{j\in J} \breve{q}_j \sum_{h\in H} \breve{\theta}_j^h = \sum_{k\in\mathbb{A}_i} \breve{q}_k \min_{k'\in\mathbb{A}_i} \sum_{h\in H} \breve{\varphi}_{k'}^h,$$

o que implica que $\sum_{h\in H} \breve{\theta}_j^h = \min_{k'\in\mathbb{A}_i} \sum_{h\in H} \breve{\varphi}_{k'}^h$ for all j in $J(\mathbb{A}_i)$. Portanto, $\sum_{h\in H} \breve{\theta}_j^h = \sum_{h\in H} \breve{\varphi}_k^h$, para todo par $(k, j) \in \mathbb{A}_i \times J(\mathbb{A}_i)$ tal que o preço de M-semi-equilíbrio $\breve{q}_k$ é estritamente positivo.

Defina uma nova alocação $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta}) \in \mathbb{P}_M \times \mathbb{X}_M^H$ como

$$\left(\tilde{\pi};\, \tilde{x}^h, \tilde{\delta}^h, \tilde{\theta}_j^h\right) = \left(\breve{\pi};\, \breve{x}^h, \breve{\delta}^h, \breve{\theta}_j^h\right), \;\; \forall j \in J;$$

$$\tilde{\varphi}_k^h = \begin{cases} \breve{\varphi}_k^h, & \text{se } \breve{q}_k > 0; \\ 0\,, & \text{se } \breve{q}_k = 0. \end{cases} \qquad \forall h \in H, \forall k \in K;$$

Segue que a alocação $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ ainda é um M-semi-equilíbrio. Mais ainda, para uma classe dada $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$ com $i \in \{P, C\}$, as seguintes condições são satisfeitas

$$\sum_{h\in H} \tilde{\theta}_j^h = \sum_{h\in H} \tilde{\varphi}_k^h, \quad \forall\, (k, j) \in \mathbb{A}_i \times J(\mathbb{A}_i), \text{ para os quais } \tilde{q}_k > 0; \tag{7-9}$$

$$\sum_{h\in H} \tilde{\varphi}_k^h = 0, \quad \forall\, k \in K, \text{ para os quais } \tilde{q}_k = 0. \tag{7-10}$$

Lema 5 *Existe $M_1^{\star\star\star} > M_1^{\star\star}$ tal que, para cada $M = (M_1, M_2)$ com $M_1 > M_1^{\star\star\star}$, existe um M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ no qual cada classe de primitivos $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$*

tem taxas de pagamento associadas aos seus derivativos, $(\tilde{r}_{s,j})_{j\in J(\mathbb{A}_P),\, s\in S}$*, que satisfazem (7-9), (7-10) e*

(5.1) $\tilde{r}_{s,j} = \tilde{r}_{s,j'}$*, para todo* $j, j' \in J(\mathbb{A}_P)$*, para todo* $s \in S$*;*

(5.2)

$$0 \leq \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{r}_{s,j}\tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_j - \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H} \tilde{\delta}^h_{s,k} \leq \frac{2}{M_2} \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \|A_{s,j}\|_1 (\#H)^2\,\Omega.$$

Prova: Já sabemos que, para cada $M = (M_1, M_2)$ com $M_1 > M_1^{\star\star}$, existe um M-semi-equilíbrio que satisfaz as equações (7-9) e (7-10). Então, para um dado M com $M_1 > M_1^{\star\star}$, fixe um M-semi-equilíbrio no qual (7-9) e (7-10) são válidas. Dado $s \in S$ e $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$, segue do fato que $(\tilde{r}_{s,j})_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \in \Upsilon^s_M(\mathbb{A}_P)$ que

$$\tilde{r}_{s,j} = \tilde{r}_{s,j'}, \quad \forall j, j' \in J(\mathbb{A}_P), \forall s \in S,$$

o que prova o item (5.1). Como o valor de $\tilde{r}_{s,j}$ é independente de $j \in J(\mathbb{A}_P)$, usaremos a seguinte notação $\tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P}$.

Note que as equações (7-9) e (7-10), juntamente com a Hipótese 5, implicam que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H} \tilde{\delta}^h_{s,k} &= \sum_{\{k\in\mathbb{A}_P:\, \tilde{q}_k\neq 0\}} \sum_{h\in H} \tilde{\delta}^h_{s,k} \leq \sum_{\{k\in\mathbb{A}_P:\, \tilde{q}_k\neq 0\}} \tilde{p}_s A_{s,k} \sum_{h\in H} \tilde{\varphi}^h_k \\ &= \tilde{p}_s \sum_{\{k\in\mathbb{A}_P:\, \tilde{q}_k\neq 0\}} A_{s,k} \max_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_j \leq \tilde{p}_s \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_j.\end{aligned} \tag{7-11}$$

Mais ainda, de forma a provar o item (5.2), temos que considerar duas situações. Primeiro, se $\sum_{h\in H} \tilde{\varphi}^h_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{A}_P$, segue do item (3.4) e do fato que $\tilde{q}_j > 0$ para $j \in J$, que $\sum_{h\in H} \tilde{\theta}_j = 0$ para todo $j \in J(\mathbb{A}_P)$. Assim, para qualquer $r \in [\beta^s_M(\mathbb{A}_P), 1]$, temos que

$$r \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_j - \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H} \tilde{\delta}^h_{s,k} = 0, \quad \forall s \in S,$$

e, como um caso particular, $\tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P}$ satisfaz a equação acima. Então, sempre que os primitivos em $\mathbb{A}_P$ não são negociados o item (5.2) vale.

Por outro lado, se $\sum_{h\in H} \tilde{\varphi}^h_k > 0$ para algum $k \in \mathbb{A}_P$, temos que analisar dois sub-casos:

Caso I: Suponha que $\min_{k\in\mathbb{A}_P} \{||A_{s,k}||_1, \overline{c}_{s,k}\} = 0$, então $\beta^s_M(\mathbb{A}_P) = \frac{1}{M_2}$, e como $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ é um M-semi-equilíbrio, sabemos que

$$\tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P} \in \arg\max_{r\in[\frac{1}{M_2},1]} -\left(r \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_j - \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H} \tilde{\delta}^h_{s,k}\right)^2.$$

Portanto, segue de (7-11) que

$$\tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P} \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}_j^h \geq \sum_{k\in\mathbb{A}_P} \sum_{h\in H} \tilde{\delta}_{s,k}^h. \tag{7-12}$$

Assim, se $\frac{1}{M_2}\sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}_j^h \leq \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}_{s,k}^h$, então

$$\tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P} \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}_j^h - \sum_{k\in\mathbb{A}_P} \sum_{h\in H} \tilde{\delta}_{s,k}^h = 0. \tag{7-13}$$

Caso contrário, se $\frac{1}{M_2}\sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}_j^h > \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}_{s,k}^h$, temos que $\tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P} = \frac{1}{M_2}$, o que implica, juntamente com (7-12) e (7-13), que

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P} \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}_j^h - \sum_{k\in\mathbb{A}_P} \sum_{h\in H} \tilde{\delta}_{s,k}^h &\leq \frac{1}{M_2} \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}_j^h \\ &\leq \frac{2}{M_2} \sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \|A_{s,j}\|_1 (\#H)^2\,\Omega, \end{aligned}$$

o que garante que o item (5.2) vale sempre que $\min_{k\in\mathbb{A}_P}\{||A_{s,k}||_1,\, \overline{c}_{s,k}\} = 0$ e $\sum_{h\in H}\tilde{\varphi}_k^h > 0$ para algum $k \in \mathbb{A}_P$.

Caso II: Se $\min_{k\in\mathbb{A}_P}\{||A_{s,k}||_1,\, \overline{c}_{s,k}\} > 0$, temos que $\beta_M^s(\mathbb{A}_P) = \frac{1}{M_1}$. Segue da Hipótese 3 que, para cada $k\in\mathbb{A}_P$, uma das condições abaixo é satisfeita:

a. $Y_s C_k(p_0, q_k) \neq 0$ para todo $(p_0, q_k) \in \Xi_k$ e para cada $s \in S$;

b. $C_k(p_0, q_k) = C_k$ para todo $(p_0, q_k) \in \Xi_k$.

Quando o item (b) vale, sabemos que $\overline{c}_{s,k} = \underline{c}_{s,k} := \min_{(p_0,q_k)\in\Xi_k} \|Y_s C_k(p_0,q_k)\|_1$, para cada $s \in S$. Por outro lado, como restringimos (p_0, q_k) ao conjunto compacto Ξ_k, se o item (a) vale, então $\underline{c}_{s,k} > 0$. Isso implica que, dada uma classe $\mathbb{A}_i$ e um estado s, $\min_{k\in\mathbb{A}_P}\{||A_{s,k}||_1,\, \overline{c}_{s,k}\} > 0$ se, e somente se, $\min_{k\in\mathbb{A}_P}\{||A_{s,k}||_1,\, \underline{c}_{s,k}\} > 0$.

Assim, segue do Lema 4 que

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}_{s,k}^h &\geq \sum_{k\in\mathbb{A}_P} \min\{\tilde{p}_s A_{s,k}, \tilde{p}_s Y_s C_k(\tilde{p}_0, \tilde{q}_k)\} \sum_{h\in H}\tilde{\varphi}_k^h \\ &\geq \underline{p} \sum_{k\in\mathbb{A}_P} \min\left\{\|A_{s,k}\|_1, \underline{c}_{s,k}\right\} \sum_{h\in H}\tilde{\varphi}_k^h \\ &\geq \underline{p} \sum_{k\in\mathbb{A}_P:\,\tilde{q}_k\neq 0} \min\left\{\|A_{s,k}\|_1, \underline{c}_{s,k}\right\} \max_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \sum_{h\in H}\tilde{\theta}_j^h \\ &\geq \underline{p} \min_{k\in\mathbb{A}_P} \left\{\|A_{s,k}\|_1, \underline{c}_{s,k}\right\} \max_{j\in J(\mathbb{A}_P)} \sum_{h\in H}\tilde{\theta}_j^h. \end{aligned}$$

Mais ainda, sabemos que $\varsigma^s(\mathbb{A}_P) := \underline{p}\,\min_{k\in\mathbb{A}_p}\left\{\|A_{s,k}\|_1, \underline{c}_{s,k}\right\}$ é estritamente positivo e segue da Hipótese 5 que $\sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)}\|A_{s,j}\|_1 > 0$. Portanto, existe $M_1^{\star\star\star}(\mathbb{A}_P) > M_1^{\star\star}$, tal que se $M \in \mathcal{M}$ com $M_1 > M_1^{\star\star\star}(\mathbb{A}_P)$, temos que

$\frac{1}{M_1}\sum_{j\in\mathbb{A}_P}||A_{s,j}||_1 \leq \varsigma^s(\mathbb{A}_P)$. Então,

$$\frac{1}{M_1}\tilde{p}_s\sum_{j\in\mathbb{A}_P}A_{s,j}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}_j^h \leq \varsigma^s(\mathbb{A}_P)\max_{j\in J(\mathbb{A}_P)}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}_j^h \leq \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}_{s,k}^h \leq \tilde{p}_s\sum_{j\in\mathbb{A}_P}A_{s,j}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}_j^h,$$

o que garante que o máximo global de

$$-\left(r\sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)}\overline{p}_sA_{s,j}\sum_{h\in H}\overline{\theta}_j^h - \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\overline{\delta}_{s,k}^h\right)^2$$

é atingível neste caso. Isso implica que $\tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P}\sum_{j\in J(\mathbb{A}_P)}\tilde{p}_sA_{s,j}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}_j^h - \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}_{s,k}^h = 0$. Se tomarmos $M_1^{\star\star\star} = \max_{\mathbb{A}_P\subset\mathcal{A}_P}M_1^{\star\star\star}(\mathbb{A}_P)$, então o item (5.2) vale sempre que $\min_{k\in\mathbb{A}_P}\{||A_{s,k}||_1, \overline{c}_{s,k}\} > 0$ e $\sum_{h\in H}\tilde{\varphi}_k^h > 0$ para algum $k\in\mathbb{A}_P$. Isto conclui a prova do Lema 5. $\square$

Para qualquer M-semi-equilíbrio $(\breve{\pi},\breve{\eta})$, considere uma alocação $(\breve{\pi}',\breve{\eta}')$ definida por

$$(\breve{p}',\breve{q}',(\breve{r}'_{s,\mathbb{A}_P})_{\{s\in S,\mathbb{A}_P\subset\mathcal{A}_P\}},\breve{\eta}') = (\breve{p},\breve{q},(\breve{r}_{s,\mathbb{A}_P})_{\{s\in S,\mathbb{A}_P\subset\mathcal{A}_P\}},\breve{\eta})$$

e, para cada classe $\mathbb{A}_C\subset\mathcal{A}_C$,

$$\breve{r}'_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \begin{cases} \beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C) & \text{se } \sum_{h\in H}\theta^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} = 0, \\ \alpha(j^m(\mathbb{A}_C)) & \text{se } \sum_{h\in H}\theta^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} \neq 0 \wedge \|A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\|_1 = 0, \\ \breve{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} & \text{caso contrário,}\end{cases} \tag{7-14}$$

onde $\alpha(j^m(\mathbb{A}_C))\in[\beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C),1]$. Segue que $B_M(\breve{\pi}')\subset B_M(\breve{\pi})$. Assim, o fato que $\breve{r}_{s,j}$ aparece multiplicado por $A_{s,j}$ e $\sum_{h\in H}\breve{\theta}_j$ no item (3.6), implica que qualquer $(\breve{\pi}',\breve{\eta}')$ é também um M-semi-equilíbrio.

Lema 6 *Existe $M_1^\star > M_1^{\star\star\star}$ tal que para cada $M=(M_1,M_2)\in\mathcal{M}$, com $M_1 > M_1^\star$, existe um M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi},\tilde{\eta})$ no qual as condições (5.1) e (5.2) são satisfeitas e para cada classe de primitivos $\mathbb{A}_C\subset\mathcal{A}_C$ temos*

(6.1) As taxas de pagamento $(\tilde{r}_{s,j})_{j\in J(\mathbb{A}_C)}\in\mathcal{R}_M^s(\mathbb{A}_C)$, para todo $s\in S$, onde[2]

$$\mathcal{R}_M^s(\mathbb{A}_C)\equiv\left\{\, r\in\Upsilon_M^s(\mathbb{A}_C) : \exists\, r'\in\mathcal{R}(\mathbb{A}_C),\ \ r_m=\max\{\, r'_m,\beta^{s,m}\}\right\};$$

[2]Equivalentemente, o conjunto $\mathcal{R}_M^s(\mathbb{A}_C)$ pode ser definido como

$$\mathcal{R}_M^s(\mathbb{A}_C)\equiv\{r\in\Upsilon_M^s(\mathbb{A}_C) : \exists m,\ 1\leq m\leq n(\mathbb{A}_C)$$
$$(r_{m'}=1,\ \forall m'<m)\wedge(r_{m'}=\beta^{s,m}(\mathbb{A}_C),\ \forall m'>m)\}.$$

(6.2)

$$0 \leq \sum_{j \in J(\mathbb{A}_C)} \tilde{r}_{s,j}\tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \tilde{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_C} \sum_{h \in H} \tilde{\delta}^h_{s,k} \leq \frac{2}{M_2} \sum_{j \in J(\mathbb{A}_P)} \|A_{s,j}\|_1 (\#H)^2\, \Omega.$$

PROVA: Dado $M = (M_1, M_2) \in \mathcal{M}$, com $M_1 > M_1^{\star\star\star}$, tome um M-semi-equilíbrio $(\breve{\pi}, \breve{\eta})$ que satisfaça as propriedades (5.1) e (5.2) e as equações (7-9) e (7-10). Sabemos que esse M-semi-equilíbrio existe pelo Lema 5. Assim, considere uma alocação diferente $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ com

$$(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P}, \tilde{\eta})_{\{s \in S, \mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P\}} = (\breve{p}, \breve{q}, (\breve{r}_{s,\mathbb{A}_P})_{\{s \in S, \mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P\}}, \breve{\eta})$$

e

$$\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \begin{cases} \beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C) & \text{se } \sum_{h \in H} \theta^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} = 0; \\ \breve{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} & \text{se } \sum_{h \in H} \theta^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} \neq 0 \wedge \|A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\|_1 \neq 0; \\ 1 & \text{se } \sum_{h \in H} \theta^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} \neq 0 \wedge \|A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\|_1 = 0 \wedge m = 1; \\ \tilde{r}_{s,j^{m-1}(\mathbb{A}_C)} & \text{se } \begin{array}{l} \sum_{h \in H} \theta^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} \neq 0 \wedge \|A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\|_1 = 0 \wedge \\ m \neq 1 \wedge \tilde{r}_{s,j^{m-1}(\mathbb{A}_C)} = 1; \end{array} \\ \beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C) & \text{se } \begin{array}{l} \sum_{h \in H} \theta^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} \neq 0 \wedge \|A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\|_1 = 0 \wedge \\ m \neq 1 \wedge \tilde{r}_{s,j^{m-1}(\mathbb{A}_C)} \neq 1. \end{array} \end{cases} \tag{7-15}$$

Como $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ respeita a equação (7-14), $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ é um M-semi-equilíbrio e ainda satisfaz as propriedades (5.1) e (5.2) do Lema 5 e as equações (7-9) e (7-10). Mostraremos que $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ satisfaz todas as condições desse lema.

Fixe uma classe $\mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C$. Temos dois casos,

CASO I: *Suponha que* $\sum_{h \in H} \tilde{\varphi}^h_k = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{A}_C$.

Segue do item (3.4) e do fato que $\tilde{q}_j > 0$ para $j \in J$ que $\sum_{h \in H} \tilde{\theta}_j = 0$ para todo $j \in J(\mathbb{A}_C)$. Assim, para qualquer $(r_{s,j})_{j \in J(\mathbb{A}_C)} \in \Upsilon^s_M(\mathbb{A}_C)$, temos que

$$\sum_{j \in J(\mathbb{A}_C)} \tilde{r}_{s,j}\tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \tilde{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_C} \sum_{h \in H} \tilde{\delta}^h_{s,k} = 0, \ \ \forall s \in S,$$

e, como um caso particular, $(\tilde{r}_{s,j})_{j \in J(\mathbb{A}_C)}$ satisfaz a equação acima e, consequentemente, sempre que os primitivos não são negociados a propriedade (6.2) vale. Mais ainda, como $\sum_{h \in H} \tilde{\theta}^h_j = 0$ para todo $m \in \{1, 2, \ldots, n(\mathbb{A}_C)\}$, segue de (7-15) que $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C)$ para todo $j \in J(\mathbb{A}_C)$. Assim, $(\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)})_{m=1}^{n(\mathbb{A}_C)}$ pertence a $\mathcal{R}^s_M(\mathbb{A}_C)$, e o item (6.1) é satisfeito sempre que os primitivos não são negociados.

CASE II: *Suponha que* $\sum_{h \in H} \tilde{\varphi}^h_k > 0$ *para algum* $k \in \mathbb{A}_C$.

Segue de (7-9) que $\sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_j > 0$ para todo $j \in J(\mathbb{A}_C)$. Como $(\tilde{\pi},\tilde{\eta})$ é um M-semi-equilíbrio, sabemos que

$$\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \arg \max_{r\in[\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C),1]} -\left(r\, F^{s,m}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{m-1}\tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) - \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k}\right)^2, \tag{7-16}$$

onde $F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) := \tilde{p}_s A_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_{j^i(\mathbb{A}_C)}$.

Mais ainda, como $\sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_j > 0$ para todo $j \in J(\mathbb{A}_C)$, temos que $F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) = 0$ se, e somente se, $\|A_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}\|_1 = 0$. Defina, então, para cada estado da natureza $s \in S$ o conjunto $I^s_{\mathbb{A}_C} = \{m : \|A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\|_1 \neq 0\}$.

Se $I^s_{\mathbb{A}_C}$ é vazio, então segue de (7-15) que $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = 1$, para todo $m \in \{1,2,\ldots,n(\mathbb{A}_C)\}$. Assim, o item (6.1) é satisfeito neste caso. Caso contrário, suponha que $I^s_{\mathbb{A}_C} \neq \emptyset$ e considere as seguintes afirmações,

Afirmação 1 *Dado $m \in I^s_{\mathbb{A}_C}$, se*

$$F^{s,m}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{m-1}\tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) \leq \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k} \tag{7-17}$$

é satisfeito, então $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = 1$ e $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1$ para cada $m' < m$ com $m' \in I^s_{\mathbb{A}_C}$.

Prova: Como $m \in I^s_{\mathbb{A}_C}$, se (7-17) vale, então $r_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = 1$ é o único argumento que maximiza a função objetivo em (7-16) e, consequentemente, $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = 1$. Agora, suponha que existe m' em $I^s_{\mathbb{A}_C}$ tal que $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} < 1$ e $m' < m$. Como (7-17) vale para m, temos que

$$\sum_{i=1}^{m'}\tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) < \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k}, \tag{7-18}$$

o que é uma contradição com a condição de otimalidade do leiloeiro (3.6). Portanto, $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1$. ⊠

Afirmação 2 *Dado $m \in I^s_{\mathbb{A}_C}$, se*

$$\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C)F^{s,m}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{m-1}\tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta})$$

$$< \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k} < F^{s,m}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{m-1}\tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}F^{s,i}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) \tag{7-19}$$

vale, então $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} \in (\beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C), 1)$,

$$\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} F_{\mathbb{A}_C}^{s,m}(\tilde{\pi}, \tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} F_{\mathbb{A}_C}^{s,i}(\tilde{\pi}, \tilde{\eta}) = \sum_{k \in \mathbb{A}_C} \sum_{h \in H} \tilde{\delta}_{s,k}^h, \tag{7-20}$$

e $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1$ *para cada* $m' < m$ *com* $m' \in I_{\mathbb{A}_C}^s$.

Prova: Se (7-19) é satisfeita, o máximo global da função objetivo é atingível e, portanto, (7-20) vale. Mais ainda, temos que $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} \in (\beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C), 1)$. Agora, suponha que exista $m' < m$ tal que $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} < 1$ e $m' \in I_{\mathbb{A}_C}^s$. Como (7-19) vale para m, temos que

$$\sum_{i=1}^{m'} \tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} F_{\mathbb{A}_C}^{s,i}(\tilde{\pi}, \tilde{\eta}) < \sum_{k \in \mathbb{A}_C} \sum_{h \in H} \tilde{\delta}_{s,k}^h, \tag{7-21}$$

o que é uma contradição com (3.6). Portanto, $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1$. ⊠

Afirmação 3 *Dado* $m \in I_{\mathbb{A}_C}^s$, *se*

$$\beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C) F_{\mathbb{A}_C}^{s,m}(\tilde{\pi}, \tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} F_{\mathbb{A}_C}^{s,i}(\tilde{\pi}, \tilde{\eta}) \geq \sum_{k \in \mathbb{A}_C} \sum_{h \in H} \tilde{\delta}_{s,k}^h, \tag{7-22}$$

vale, então $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C)$ *e* $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = \beta_M^{s,m'}(\mathbb{A}_C)$ *para cada* $m' > m$ *com* $m' \in I(\mathbb{A}_C)$.

Prova: Se (7-22) vale, então $r_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C)$ é o único argumento que maximiza a função objetivo em (7-16) e, portanto, $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C)$. Além disso, como (7-22) é válido para cada $m' > m$, se $m' \in I(\mathbb{A}_C)$, então $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = \beta_M^{s,m}(\mathbb{A}_C)$. ⊠

Podemos facilmente perceber que cada $m \in I_{\mathbb{A}_C}^s$ satisfaz a condição de uma, e apenas uma, Afirmação. Adicionalmente, o conjunto $m \in I_{\mathbb{A}_C}^s$ que satisfaz a condição de uma Afirmação específica pode ser vazio. Mais ainda, os seguintes fatos são válidos:

- Existe no máximo um m para o qual a condição da Afirmação 2 vale.
- Se $m \in I_{\mathbb{A}_C}^s$ satisfaz a condição das Afirmações 1 ou 2, então cada $m' < m$, com $m' \in I_{\mathbb{A}_C}^s$, satisfaz a condição da Afirmação 1.
- Se $m \in I_{\mathbb{A}_C}^s$ satisfaz a condição da Afirmação 2 ou 3, então cada $m'' > m$, com $m'' \in I_{\mathbb{A}_C}^s$, satisfaz a condição da Afirmação 3.

Portanto, suponha que existe $m \in I^s_{\mathbb{A}_C}$ que satisfaça a condição da Afirmação 2. Então, segue dos itens acima e de (7-15) que (i) $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1$, para todo $m' < m$; (ii) $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} \in (\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C), 1)$; e (iii) $\tilde{r}_{s,j^{m''}(\mathbb{A}_C)} = \beta^{s,m''}_M(\mathbb{A}_C)$, para todo $m'' > m$. Isto garante que a condição (6.1) é satisfeita neste caso.

Se não existir $m \in I^s_{\mathbb{A}_C}$ que satisfaça a condição da Afirmação 2, temos duas possibilidades:

- Existe $m \in I^s_{\mathbb{A}_C}$ tal que $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C)$. Neste caso, defina $\tilde{m} = \min\{m' \in I^s_{\mathbb{A}_C} : \tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = \beta^{s,m'}_M(\mathbb{A}_C)\}$. Os itens acima garantem que $\tilde{m}$ satisfaz a condição da Afirmação 3. Isso implica, usando (7-15), que

$$\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1, \quad \forall\, m' < \tilde{m}$$

$$\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = \beta^{s,m'}_M(\mathbb{A}_C), \quad \forall\, m' > \tilde{m}$$

- Todos $m \in I^s_{\mathbb{A}_C}$ satisfazem $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = 1$. Assim, $\tilde{r}_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)} = 1$, para todo $m' \in \{1, 2, \dots, n(\mathbb{A}_C)\}$.

Portanto, a condição (6.1) sempre é válida.

Falta provar que o item (6.2) sempre vale quando $\sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_j > 0$ para todo $j \in J(\mathbb{A}_C)$.

Note que, analogamente a equação (7-11), segue das equações (7-9) e (7-10), juntamente com a Hipótese 5 que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k} &= \sum_{\{k\in\mathbb{A}_C:\,\tilde{q}_k\neq 0\}}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k} \le \sum_{\{k\in\mathbb{A}_C:\,\tilde{q}_k\neq 0\}}\tilde{p}_s A_{s,k}\sum_{h\in H}\tilde{\varphi}^h_k \\ &= \tilde{p}_s \sum_{\{k\in\mathbb{A}_C:\,\tilde{q}_k\neq 0\}} A_{s,k}\max_{j\in J(\mathbb{A}_C)}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_j \le \tilde{p}_s\sum_{j\in J(\mathbb{A}_C)} A_{s,j}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_j.\end{aligned} \tag{7-23}$$

Assim, segue de (3.6) e (7-23) que se temos $\sum_{j\in J(\mathbb{A}_C)} \tilde{r}_{s,j}\tilde{p}_s A_{s,j}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_j < \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k}$, seria uma contradição. Portanto,

$$\sum_{j\in J(\mathbb{A}_C)} \tilde{r}_{s,j}\tilde{p}_s A_{s,j}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_j \ge \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k}.$$

Agora, suponha que $\min_{k\in\mathbb{A}_C}\{||A_{s,k}||_1, \bar{c}_{s,k}\} > 0$ e defina $m^* = \min\{m' : \|A_{s,j^{m'}(\mathbb{A}_C)}\|_1 \neq 0\}$. Assim, segue da definição de $\Upsilon^s_M(\mathbb{A}_C)$ que $\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C) = \frac{1}{M_1}$ para todo $m \le m^*$. Analogamente ao argumento feito no Caso II da prova do Lema 5, temos que $\min_{k\in\mathbb{A}_C}\{||A_{s,k}||_1, \bar{c}_{s,k}\} > 0$ se, e somente se, $\min_{k\in\mathbb{A}_C}\{||A_{s,k}||_1, \underline{c}_{s,k}\} > 0$ e que

$$\sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k} \ge \underline{p}\min_{k\in\mathbb{A}_C}\{\|A_{s,k}\|_1, \underline{c}_{s,k}\}\max_{j\in J(\mathbb{A}_C)}\sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_j.$$

Portanto, sabemos que $\varsigma^s(\mathbb{A}_C) := \underline{p}\ \min_{k\in\mathbb{A}_C}\ \{\|A_{s,k}\|_1, \underline{c}_{s,k}\}$ é estritamente positivo e que $\|A_{s,j^{m^*}(\mathbb{A}_C)}\|_1 > 0$. Assim, existe $M_1^\star(\mathbb{A}_C) > M_1^{\star\star\star}$ tal que para cada M-semi-equilíbrio, com $M_1 > M_1^\star(\mathbb{A}_C)$, temos que $\frac{1}{M_1}\|A_{s,j^{m^*}(\mathbb{A}_C)}\|_1 < \varsigma^s(\mathbb{A}_C)$. Então,

$$\frac{1}{M_1}\tilde{p}_s A_{s,j^{m^*}(\mathbb{A}_C)} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_{j^{m^*}(\mathbb{A}_C)} < \varsigma^s(\mathbb{A}_C) \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_{j^{m^*}(\mathbb{A}_C)} \leq \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H} \tilde{\delta}^h_{s,k}, \qquad (7\text{-}24)$$

e segue do fato que, para qualquer $m < m^*$, $\|A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\|_1 = 0$ e de (3.6) que

$$\sum_{m=1}^{m^*} \tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\tilde{p}_s A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} - \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H} \tilde{\delta}^h_{s,k} \leq 0. \qquad (7\text{-}25)$$

Assim, quando $\min_{k\in\mathbb{A}_C}\{||A_{s,k}||_1, \overline{c}_{s,k}\} > 0$, se $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C)$, temos que $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \frac{1}{M_2}$, pois caso contrário $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \frac{1}{M_1}$, o que implicaria $m \leq m^\star$, o que seria uma contradição com (7-24) e (3.6).

Além disso, quando $\min_{k\in\mathbb{A}_C}\{||A_{s,k}||_1, \overline{c}_{s,k}\} = 0$, das definições temos que $\beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C) = \frac{1}{M_2}$ para cada $m \in \{1,2,\ldots,n(\mathbb{A}_C)\}$ e, consequentemente, se $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C)$, então $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \frac{1}{M_2}$.

Agora, segue das Afirmações acima que

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_{s,j^i(\mathbb{A}_C)}\tilde{p}_s A_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} \sum_{h\in H} \tilde{\theta}^h_{j^i(\mathbb{A}_C)} - \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H} \tilde{\delta}^h_{s,k}$$

é maior que zero se, e somente se, $\tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \beta^{s,m}_M(\mathbb{A}_C) = \frac{1}{M_2}$. Assim, defina $m^{**} = \min\{m\ :\ \tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \frac{1}{M_2}\}$. Note que $m^* < m^{**}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{j\in J(\mathbb{A}_C)} \tilde{r}_{s,j}\tilde{p}_s A_{s,j} \sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_j - \sum_{k\in\mathbb{A}_P}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k} \\
&= \sum_{m=1}^{m^{**}-1} \tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} F^{s,m}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) + \sum_{m=m^{**}}^{n(\mathbb{A}_C)} \tilde{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} F^{s,m}_{\mathbb{A}_C}(\tilde{\pi},\tilde{\eta}) - \sum_{k\in\mathbb{A}_C}\sum_{h\in H}\tilde{\delta}^h_{s,k} \\
&\leq \sum_{m=m^{**}}^{n(\mathbb{A}_C)} \frac{1}{M_2}\tilde{p}_s A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} \sum_{h\in H}\tilde{\theta}^h_{j^m(\mathbb{A}_C)} \\
&\leq \frac{2}{M_2}\sum_{j\in J(\mathbb{A}_C)} \|A_{s,j}\|_1 (\#H)^2\,\Omega,
\end{aligned}$$

o que garante que o item (6.2) sempre é válido.

Portanto, o lema é válido tomando $M_1^\star = \max_{\mathbb{A}_C\subset\mathcal{A}_C} M_1^\star(\mathbb{A}_C)$. □

Lema 7 *Para cada $M = (M_1, M_2) \in \mathcal{M}$ com $M_1 > M_1^\star$, existe um M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi},\tilde{\eta})$ no qual as condições (5.1), (5.2), (6.1) e (6.2) valem e as* *seguintes propriedades são satisfeitas*

(7.1) Para cada $s \in S$ e $l \in L$,

$$\sum_{h \in H} \tilde{x}^h_{s,l} - (Y_s W_0)_l - W_{s,l} \leq \frac{2}{M_2} \sum_{i \in \{P,C\}} \sum_{\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i} \sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \|A_{s,j}\|_1 (\#H)^2 \, \Omega;$$

(7.2) Para cada $h \in H$, $\hat{\Psi}^h(\tilde{p}_{-0}, \tilde{\eta}^h) \cap B^h(\tilde{\pi}) = \emptyset$.

Prova: Sabemos pelo Lema 6 que existe, para cada $M \in \mathcal{M}$ com $M_1 > M_1^\star$, um M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ que satisfaz as condições (5.1), (5.2), (6.1) e (6.2). Portanto, fixe $(\tilde{\pi}, \tilde{\eta})$ no qual as propriedades acima são satisfeitas. O item (7.1) segue diretamente dos itens (3.8), (5.2) e (6.2).

Já sabemos pelo item (3.2) que $\hat{\Psi}^{h,M}(\tilde{p}_{-0}, \tilde{\eta}^h) \cap B^h_M(\tilde{\pi}) = \emptyset$. Suponha que exista $y \in \hat{\Psi}^h(\tilde{p}_{-0}, \tilde{\eta}^h) \cap B^h(\tilde{\pi})$. Segue da definição das preferências aumentadas que para $\lambda \in (0,1]$ suficientemente pequeno, $z := \lambda y + (1-\lambda)\tilde{\eta}^h \in \hat{\Psi}^h(\tilde{p}_{-0}, \tilde{\eta}^h)$ e $\|z\|_\infty < M_1$, pois $\|\tilde{\eta}^h\|_\infty < M_1$. Portanto, como $z \in B^h_M(\tilde{\pi})$ temos uma contradição com $\hat{\Psi}^{h,M}(\tilde{p}_{-0}, \tilde{\eta}^h) \cap B^h_M(\hat{\pi}) = \emptyset$. Isto conclui a prova do item (7.2). □

Finalmente, a prova do Teorema 1 é uma consequência direta do Lema abaixo.

Lema 8 *Existe um equilíbrio não-trivial para para economia $\mathcal{E}(S^*, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$, que pode ser obtido como o limite de uma sequência de M-semi-equilíbrios quando M_2 vai para o infinito e $M_1 > M_1^\star$.*

Prova: Sabemos que pelo Lema 7 que existe, para cada $M \in \mathcal{M}$ com $M_1 > M_1^\star$, um M-semi-equilíbrio $(\tilde{\pi}_M, \tilde{\eta}_M)$ que satisfaz as condições (5.1), (5.2), (6.1), (6.2), (7.1) e (7.2). Assim, fixe $M_1 > M_1^\star$ e construa uma sequência de M-semi-equilíbrios $(\tilde{\pi}_{M_2}, \tilde{\eta}_{M_2})$, indexados apenas por M_2, que satisfaçam as condições mencionadas acima para todo M_2. Segue do fato que $(\tilde{\pi}_{M_2}, \tilde{\eta}_{M_2})$ pertence a um conjunto compacto, independente de M_2, que existe uma subsequência convergente. Chamaremos o limite desta subsequência de $(\hat{\pi}, \hat{\eta})$.

É direto que os itens (3.3), (3.4) e (5.1) ainda valem na alocação limite $(\hat{\pi}, \hat{\eta})$. Mais ainda, pode ser facilmente visto que o limite dos itens (3.1), (5.2), (6.2) e (7.1) são, respectivamente,

(3.1*) Para cada $h \in H$, $\hat{\eta} \in B^h(\hat{\pi})$;

(5.2*) Para cada $\mathbb{A}_P \in \mathcal{A}_P$ e cada $s \in S$,

$$\sum_{j \in J(\mathbb{A}_P)} \hat{r}_{s,j} \hat{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \hat{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_P} \sum_{h \in H} \hat{\delta}^h_{s,k} = 0;$$

(6.2*) Para cada $\mathbb{A}_C \in \mathcal{A}_C$ e cada $s \in S$,

$$\sum_{j \in J(\mathbb{A}_C)} \hat{r}_{s,j} \hat{p}_s A_{s,j} \sum_{h \in H} \hat{\theta}^h_j - \sum_{k \in \mathbb{A}_C} \sum_{h \in H} \hat{\delta}^h_{s,k} = 0;$$

(7.1*) Para cada $s \in S$ e $l \in L$,

$$\sum_{h \in H} \hat{x}^h_{s,l} - (Y_s W_0)_l - W_{s,l} \leq 0;$$

onde o item (3.1*) segue do gráfico fechado da correspondência do conjunto orçamentário B^h.

Mais ainda, sabemos que para cada M_2 a restrição orçamentária do segundo período é satisfeita com igualdade. Então, o limite das restrições orçamentárias do segundo período vai também ser satisfeito com igualdade. Esse fato, juntamente com os itens (5.2*), (6.2*) e (7,1*), implica que, para cada $(s,l) \in S \times L$,

$$\sum_{h \in H} \hat{x}^h_{s,l} - (Y_s W_0)_l - W_{s,l} = 0. \tag{7-26}$$

Note que, toda sequência convergente de elementos pertencentes a $\mathcal{R}^s_M(\mathbb{A}_C)$ para cada M_2 tem limite em $\mathcal{R}(\mathbb{A}_C)$. Isso implica que $(\hat{r}_{s,j})_{j \in J(\mathbb{A}_C)} \in \mathcal{R}(\mathbb{A}_C)$ para todo $\mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C$ e $s \in S$. Além disso, segue do fato que M_1 é fixo e da definição de $\mathcal{R}^s_M(\mathbb{A}_C)$ que se $\min_{k \in \mathbb{A}_C} \{||A_{s,k}||_1, \overline{c}_{s,k}\} > 0$, para uma dada classe de primitivos $\mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C$ e um dado estado $s \in S$, temos que $(\tilde{r}_{s,j^m_{\mathbb{A}_C}})_{M_2} \geq \frac{1}{M_1}$ para todo $m \leq m^\star$ e para todo M_2, onde $m^\star := \min\{m : \|A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}\|_1 \neq 0\}$. Analogamente, se $\min_{k \in \mathbb{A}_P} \{||A_{s,k}||_1, \overline{c}_{s,k}\} > 0$, para classe de primitivos $\mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P$ e estado $s \in S$ dados, temos que $(\tilde{r}_{s,\mathbb{A}_P})_{M_2} \geq \frac{1}{M_1}$

Portanto, o limite das taxas esperadas de pagamento satisfazem

$$\left[\min_{k \in \mathbb{A}_C} \{||A_{s,k}||_1, \overline{c}_{s,k}\} > 0\right] \Rightarrow \hat{r}_{s,j^m_{\mathbb{A}_C}} \geq \frac{1}{M_1}, \ \forall m \leq m^\star$$

e

$$\left[\min_{k \in \mathbb{A}_P} \{||A_{s,k}||_1, \overline{c}_{s,k}\} > 0\right] \Rightarrow \hat{r}_{s,\mathbb{A}_P} > \frac{1}{M_1},$$

o que implica, usando o fato que $\hat{p}_{s,l} \geq \underline{p}$, para todo (s,l), que

$$[\min\{\hat{p}_s Y_s C_k(\hat{p}_0, \hat{q}_k); \hat{p}_s A_{s,k}\} > 0, \ \ \forall k \in \mathbb{A}_C] \Rightarrow \hat{r}_{s,j^m_{\mathbb{A}_C}} > 0, \ \forall m \leq m^\star,$$

e

$$[\min\{\hat{p}_s Y_s C_k(\hat{p}_0, \hat{q}_k); \hat{p}_s A_{s,k}\} > 0, \ \ \forall k \in \mathbb{A}_P] \Rightarrow \hat{r}_{s,\mathbb{A}_P} > 0.$$

De forma a provar que a otimalidade do limite $(\hat{\pi}, \hat{\eta})$, primeiro vamos mostrar que, para um dado agente $h \in H$, não existe nada melhor no interior do seu conjunto orçamentário que é estritamente preferido a $\hat{\eta}^h$. Suponha que existe uma alocação y tal que $y \in \hat{\Psi}^h(\hat{p}_{-0}, \hat{\eta}^h) \cap \dot{B}^h(\hat{\pi})$. Como $\hat{\Psi}^h$ é hemicontínua inferior e $(\tilde{\pi}_{M_2}, \tilde{\eta}_{M_2}) \to (\hat{\pi}, \hat{\eta})$, existe $y_{M_2} \in \hat{\Psi}^h((\tilde{p}_{-0})_{M_2}, \tilde{\eta}_{M_2})$ tal que $y_{M_2} \to y$. Como $\dot{B}_M$ tem valores abertos, para M_2 suficientemente grande, $y_{M_2} \in \hat{\Psi}^h((\tilde{p}_{-0})_{M_2}, \tilde{\eta}^h_{M_2}) \cap \dot{B}^h(\tilde{\pi}_{M_2})$, o que é uma contradição com (7.2). Assim, $\hat{\Psi}^h(\hat{p}_{-0}, \hat{\eta}^h) \cap \dot{B}^h(\hat{\pi}) = \emptyset$. Mais ainda, segue do Lema 4 que os preços de bens de M-semi-equilíbrio são limitados inferiormente e, portanto, a alocação limite tem preços estritamente maiores do que zero. Isso implica que o interior do conjunto orçamentário é não vazio, $\dot{B}^h(\hat{\pi}) \neq \emptyset$. Agora, como B^h também tem valores convexos, temos que o fechamento de $\dot{B}^h(\hat{\pi})$ é igual ao conjunto orçamentário original, $B^h(\hat{\pi})$. Então, segue que $\hat{\Psi}^h(\hat{p}_{-0}, \hat{\eta}^h) \cap B^h(\hat{\pi}) = \emptyset$. Como $\Psi^h(\hat{p}_{-0}, \hat{\eta}^h) \subset \hat{\Psi}^h(\hat{p}_{-0}, \hat{\eta}^h)$, temos que $\Psi^h(\hat{p}_{-0}, \hat{\eta}^h) \cap B^h(\hat{\pi}) = \emptyset$. Isto completa a prova de otimalidade.

Finalmente, dada uma classe de primitivos $\mathbb{A}_i$, para a qual existe pelo menos um derivativo $j \in J(\mathbb{A}_i)$ que tem taxas de pagamento positivas (em pelo menos um estado da natureza), a condição de otimalidade dos agentes garante que o seu preço é positivo, $\hat{q}_j > 0$. Assim, como $(\hat{p}, \hat{q}_K, \hat{q}_J) \in \Xi$, existe pelo menos um primitivo $k \in \mathbb{A}_i$ para o qual $\hat{q}_k > 0$. Isto conclui a prova. $\square$