5
Existência de Equilíbrio

De forma a garantir a existência de um equilíbrio *não-trivial*, fazemos neste artigo as seguintes hipóteses.

Hipótese 1

Para cada agente $h \in H$ e cada estado da natureza $s \in S^*$, a função renda $m_s^h(p)$ é contínua, estritamente positiva ($m_s^h(p_s) > 0$) sempre que $p_s \neq 0$ e satisfaz

$$\sum_{h \in H} m_s^h(p_s) = p_s W_s, \quad \textit{para todo} \quad p_s \in \mathbb{R}_+^L.$$

Como mencionado acima, essa hipótese é mais fraca do que hipótese forte de sobrevivência habitualmente usada na literatura de equilíbrio geral. Estamos apenas assumindo que sempre que os preços não são iguais a zero, os agente terão alguma renda. Então, não estamos interessados como os agentes obtém suas rendas (podemos inclusive pensar que existe algum tipo de planejador central que não permite ninguém morrer de fome). Mais ainda, assumimos também que a renda agregada dos agentes é igual ao valor da dotação disponível na economia.

Hipótese 2

Para cada agente $h \in H$, a correspondência $Q^h : X \times \mathbb{R}_+^{K \times S} \twoheadrightarrow X \times \mathbb{R}_+^{K \times S}$ tem gráfico aberto, é irreflexiva (isto é, $(x,d) \notin Q^h(x,d)$ para todo (x,d)), tem valores convexos, e satisfaz as seguintes condições:

(i) estritamente monotônica em $(x_s)_{s \in S^*}$, isto é, $(x', d) \in Q^h(x,d)$, para todo $x' > x$;

(ii) se $(x', d') \in Q^h(x,d)$, então para todo $d'' < d'$, (x', d'') também pertence a $Q^h(x,d)$;

onde, dados vetores w e z em um espaço Euclidiano, $w > z$ é definido como $w_i \geq z_i$ para todo i e $w_{i'} > z_{i'}$ para pelo menos um i'.

Como ressaltado acima, não estamos assumindo que as preferências individuais são completas, transitivas ou continuas. Mais ainda, as hipóteses feitas sobre as correspondências Q^h podem parecer muito restritivas, pois assumimos gráfico aberto ao invés de hemicontinuidade inferior com valores abertos como de hábito. Entretanto, precisamos dessa hipótese, assim como o item (ii), de forma a usar o Teorema de Ponto Fixo de Gale e Mas-Collel na prova do nosso resultado principal (ver Apêndice).

Hipótese 3

As funções de requerimentos de colateral $C_k : \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^L_+$ *são contínuas e diferentes de zero em seu domínio. Mais ainda, para cada primitivo* $k \in K$*, a função* C_k*, se não for constante, satisfaz* $Y_s C_k(p_0, q_k) \neq 0$ *para todo* $(p_0, q_k) \in \mathbb{R}^L_+ \times \mathbb{R}_+$ *e para cada* $s \in S$*.*

Então, quando os requerimentos de colateral dependem do nível de preços, os bens usados como garantias são não perecíveis. Mais ainda, é importante ressaltar que o colateral físico que serve como mecanismo de punição em caso de default, também garante que as vendas a descoberto de primitivos sejam limitadas em equilíbrio.[1]

Hipótese 4

Dado um agente $h \in H$ *e um* $\epsilon > 0$ *existe, para cada* $(x^h, d^h) \in X \times \mathbb{R}^{S\times K}_+$ *e para cada par* $(s,l) \in S^* \times L$*, uma constante* $Z^h_{s,l}(x^h, d^h, \epsilon) \in \mathbb{R}_{++}$ *tal que, a alocação* $(y^h, 0)$*, com*

$$y^h_{s',l'} = \begin{cases} \epsilon, & se\ \ (s',l') \neq (s,l), \\ Z^h_{s,l}(x^h, d^h, \epsilon), & se\ \ (s',l') = (s,l), \end{cases}$$

é estritamente preferida a (x^h, d^h)*, i.e.* $(y^h, 0) \in Q^h(x^h, d^h)$*. Mais ainda, as funções*

$$Z^h_{s,l} : X \times \mathbb{R}^{K\times S}_+ \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++},$$

são não decrescentes em x *e não crescentes em* d*.*

Essa hipótese garante que todos preços de bens de equilíbrio são uniformemente limitados por baixo em cada estado da natureza $s \in S^*$

[1]Se deixássemos a cesta de colateral ser zero (i.e. em caso de default, apenas as penalidades extra-econômicas puniriam os agentes), teríamos que supor que as vendas a descoberto dos primitivos são limitadas exogenamente para garantir a existência de equilíbrio. Além disso, para esse tipo de ativo nunca seria possível garantir, usando nossa prova de equilíbrio, que as taxas de pagamento dos derivativos associados são estritamente positivas.

(ver Apêndice). Essa propriedade sobre os preços é suficiente para garantir que existe um equilíbrio com taxas de pagamento não-triviais.[2]

Hipótese 5

Os ativos são não-triviais, no sentido que, para cada $k \in K$ (resp., para cada $j \in J$), o vetor de promessas reais $A_k = (A_{s,k})_{s\in S}$ (resp., $A_j = (A_{s,j})_{s\in S}$) é diferente de zero. Mais ainda, para cada classe de primitivos $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$, com $i \in \{P, C\}$, temos que

$$\left[\sum_{k\in\mathbb{A}_i} (A_{s,k})_l \neq 0\right] \Leftrightarrow \left[\sum_{j\in J(\mathbb{A}_i)} (A_{s,j})_l \neq 0\right], \quad \forall s \in S, \forall\, l \in L.$$

Essa última hipótese garante que, independente do nível de preços, um derivativo tem promessas reais positivas se, e somente se, pelo menos um primitivo também tem promessas positivas.

Podemos agora enunciar nosso resultado principal,

Teorema 1 *Sob as Hipóteses 1-5 nossa economia $\mathcal{E}(S^*, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ tem um equilíbrio não-trivial.*

No caso particular em que a única punição em caso de default é o confisco dos requerimentos de colateral, que são independentes dos preços,

[2]No contexto de Dubey, Geanakoplos e Shubik [8], no qual

$$Q^h(x, d) := \left\{(x', d') \,:\, U^h(x') - \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} \lambda^h_{s,k} d'_{s,k} > U^h(x) - \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} \lambda^h_{s,k} d_{s,k}\right\},$$

onde $U^h : \mathbb{R}_+^{L\times S^*} \to \mathbb{R}_+$ e $\lambda^h_{s,k} \in \mathbb{R}_+$, a Hipótese 4 é conseqüência da hipótese sobre utilidades, $\lim_{||z||_\infty \to +\infty} U^h(z) = +\infty$. De fato, nossa condição é mais fraca, pois não assumimos, por exemplo, que $U^h(a, 0, \ldots, 0)$ vai para infinito quando $a \in \mathbb{R}_+$ vai para infinito.

Mais ainda, esses autores usam a hipótese de utilidade ilimitada para provar que existe um equilíbrio sem dotações individuais interiores. Em nosso contexto, a Hipótese 4 garante que todos os preços de bens de equilíbrio são uniformemente limitados por baixo e, portanto, existe $\underline{p} > 0$ tal que, dados preços de equilíbrio $\overline{p}$, temos que $\overline{p}_{s,l} \geq \underline{p}$, para todos os estados $s \in S^*$ e para todos os bens $l \in L$ (ver Lema 4 no Apêndice). Então, fixe dotações $w^h = (w^h_s)_{s\in S^*} \in \mathbb{R}_+^{L\times S^*}$, que satisfaçam para cada estado da natureza $\sum_{h\in H} w^h_s \gg 0$, e reescreva nossa Hipótese 1, de forma a requerer que a última condição $\sum_{h\in H} m^h(p_s) = p_s W_s$ vale apenas para os preços $p_s \geq \underline{p}$. Podemos definir funções de renda $m^h_s(p_s) = \sum_{l\in L} \max\{p_{s,l}, \underline{p}\} w^h_{s,l}$ de forma a garantir, como consequência do nosso principal resultado, que existe um equilíbrio não-trivial para uma economia em que os agentes tenham dotações físicas que não precisam ser pontos interiores de $\mathbb{R}^L_+$. Note que, em nosso contexto no qual bens podem ser duráveis, essa propriedade tem um interesse particular, pois permite que os agentes recebam dotações no segundo período apenas de bens perecíveis.

nosso resultado garante que existe um equilíbrio não-trivial no contexto do modelo original de Geanakoplos e Zame [12], permitindo a securitização de ativos e preferências não ordenadas. Além disso, quando temos apenas um derivativo associado a cada primitivo, obtemos uma extensão do modelo de Geanakoplos e Zame [12] permitindo preferências não ordenadas.[3]

Observação 4 (Ativos com Taxas de Pagamento Não-triviais) *Podemos garantir, independente dos preços de equilíbrio, que alguns derivativos têm sempre taxas de pagamento positivas, mesmo quando não são negociados. De fato, como supomos que as preferências são estritamente monotônicas no consumo, os preços de equilíbrio dos bens (se existirem) vão ser estritamente positivos,* $\overline{p} \gg 0$*, o que implica que para cada classe de primitivos* $\mathbb{A}_i$*, com* $i \in \{P, C\}$*, um condição necessária e suficiente para garantir que*

$$\min \{\overline{p}_s A_{s,k}; \overline{p}_s Y_s C_k(\overline{p}_0, \overline{q}_k)\} > 0, \ \ \forall k \in \mathbb{A}_i \, ,$$

é que $\min_{k \in \mathbb{A}_i} \{||A_{s,k}||_1; ||Y_s C_k(\overline{p}_0, \overline{q}_k)||_1\} > 0$*. Segue da Hipótese 3 que essa última condição não depende de* $(\overline{p}_0, \overline{q}_k)$*. De fato, se os requerimentos de colateral dependem dos preços, sabemos que o colateral depreciado é diferente de zero em cada estado da natureza, o que implica que a condição acima é equivalente a* $\min_{k \in \mathbb{A}_i} \{||A_{s,k}||_1\} > 0$*. Caso contrário, quando o colateral é fixo, como em Geanakoplos e Zame [12], uma família de derivativos terá taxas de pagamento positivas em um estado* $s \in S$ *se ambos* $\min_{k \in \mathbb{A}_i} \{||A_{s,k}||_1\} > 0$ *e* $\min_{k \in K} ||Y_s C_k||_1 \neq 0$*. Portanto, sob nossas hipóteses, a condição que garante que uma família de derivativos tem um vetor de taxas de pagamento diferente de zero é independente dos preços de equilíbrio.*

[3] No contexto de modelos de colateral endôgeno, Martins-da-Rocha e Torres-Martínez [14] também obtém esse último resultado como um caso particular do seu teorema principal.