

3

Equilíbrio

De forma a definirmos equilíbrio precisamos deixar claro qual o conceito de otimalidade no contexto de nossas preferências gerais. Embora as preferências dependam apenas das cestas de consumo e dos níveis de default real, os níveis de default não são variáveis de decisão direta dos agentes. Entretanto, os agentes podem prever perfeitamente o default real gerado por qualquer alocação em seu conjunto orçamentário, permitindo que eles percebam quais alocações são estritamente preferidas a qualquer outra alocação.

Formalmente, dados preços de bens para os estados da natureza no segundo período, $p_{-0} = [(p_s)_{s \in S}]$, quando um agente h escolhe um posição vendida φ_k^h no primitivo k e escolhe pagamentos $(\delta_{s,k}^h)_{s \in S}$, ele sabe que dará um default real no estado $s \in S$ dado por

$$D_{s,k}(p_s, \varphi_k^h, \delta_{s,k}^h) = \frac{[p_s A_{s,k} \varphi_k^h - \delta_{s,k}^h]^+}{p_s v_s},$$

onde, assim como em Dubey, Geanakoplos e Shubik [8], o vetor $v_s \in \mathbb{R}_{++}^L$ é exogenamente dado e permite que os agentes calculem o nível de default em termos reais.

Portanto, como os agentes são tomadores de preços, dado uma alocação financeira e de consumo $(x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)$ em $\mathbb{X} := X^h \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_+^{K \times S} \times \mathbb{R}_+^J$, o agente h pode determinar a alocação de consumo e default (x^h, d^h) gerada por $(x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)$, que é dada por

$$T(p_{-0}, x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h) := (x^h, D_{s,k}(p_s, \varphi_k^h, \delta_{s,k}^h))_{(s,k) \in S \times K}.$$

Então, cada agente sabe o conjunto de alocações de consumo e default factíveis $T(p_{-0}, B^h(p, q, r))$. Portanto, dado preços (p, q) e taxas de pagamento r , uma alocação $(x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)$ será ótima para o agente h se, e somente se, $[Q^h \circ T(p_{-0}, x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)] \cap [T(p_{-0}, B^h(p, q, r))] = \emptyset$. Isto é, não existe uma alocação no conjunto orçamentário que gere uma alocação

de consumo e default que é estritamente preferida a alocação de consumo e default gerada pela alocação $(x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)$.¹

Podemos agora definir o conceito de equilíbrio para economia com securitização de ativos.

DEFINIÇÃO 1 *Um equilíbrio para economia $\mathcal{E}(S^*, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{F})$ é constituído por preços e taxas de pagamento $[\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}] \in \mathbb{P} := \mathbb{R}_+^{L \times S^*} \times \mathbb{R}_+^J \times \mathbb{R}_+^K \times [0, 1]^{S \times J}$, e alocações $[\bar{x}^h, \bar{\varphi}^h, \bar{\delta}^h, \bar{\theta}^h] \in \mathbb{X}$, para cada agente $h \in H$, tal que*

(A) *Para todo agente $h \in H$, $(\bar{x}^h, \bar{\varphi}^h, \bar{\delta}^h, \bar{\theta}^h) \in B^h(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$.*

(B) *O mercado de bens está em equilíbrio,*

$$\sum_{h \in H} \bar{x}_0^h = W_0, \quad \sum_{h \in H} \bar{x}_s^h = W_s + Y_s(W_0), \quad \forall s \in S.$$

(C) *Os agentes estão fazendo escolhas ótimas,*

$$\left[Q^h \circ T(\bar{p}_{-0}, \bar{x}^h, \bar{\varphi}^h, \bar{\delta}^h, \bar{\theta}^h) \right] \cap \left[T(\bar{p}_{-0}, B^h(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})) \right] = \emptyset \quad \forall h \in H.$$

(D) *Para cada $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$, com $i \in \{P, C\}$, o valor agregado das compras de derivativos têm que ser igual ao valor agregado das vendas de promessas primitivas,*

$$\sum_{h \in H} \sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \bar{q}_j \bar{\theta}_j^h = \sum_{h \in H} \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \bar{q}_k \bar{\varphi}_k^h,$$

(E) *Em cada estado $s \in S$ e para cada classe $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$, com $i \in \{P, C\}$, o total de pagamentos dos derivativos deve ser igual ao total de pagamentos feitos pelos devedores,*

$$\sum_{h \in H} \sum_{j \in J(\mathbb{A}_i)} \bar{r}_{s,j} \bar{p}_s A_{s,j} \bar{\theta}_j^h = \sum_{h \in H} \sum_{k \in \mathbb{A}_i} \bar{\delta}_{s,k}^h.$$

¹Definimos nossa condição de otimalidade como $[Q^h \circ T(p_{-0}, x^h, \varphi^h, \delta^h, \theta^h)] \cap [T(p_{-0}, B^h(p, q, r))] = \emptyset$, pois queremos deixar claro a relação entre nosso arcabouço e o modelo de Dubey, Geanakoplos e Shubik [8], permitindo que os agentes tenham as mesmas variáveis de decisão que no modelo deles. Obviamente, para alguns leitores poderia ser mais natural que os agentes escolhessem diretamente as variáveis (x, φ, d, θ) , em vez de $(x, \varphi, \delta, \theta)$, onde d denota o default real. Nesse contexto, podemos redefinir nosso conjunto orçamentário e nossa condição de otimalidade passaria a ser $Q^h(x^h, d^h) \cap B_{x,d}^h(p, q, r) = \emptyset$, onde $B_{x,d}^h(p, q, r)$ é a projeção do novo conjunto orçamentário nas variáveis (x, d) . Entretanto, essa abordagem pode gerar dificuldades técnicas na prova da hemicontinuidade inferior da correspondência orçamentária caso as preferências fossem definidas apenas sobre valores não negativos de default, como seria natural.

(F) Em cada estado $s \in S$ e para cada classe $\mathbb{A}_i \subset \mathcal{A}_i$, com $i \in \{P, C\}$, as taxas de pagamento têm que ser consistentes com a estrutura financeira,

$$\bar{r}_{s,j} = \bar{r}_{s,\mathbb{A}_P}, \quad \forall j \in J(\mathbb{A}_P), \quad \forall \mathbb{A}_P \subset \mathcal{A}_P,$$

$$(\bar{r}_{s,j})_{j \in J(\mathbb{A}_C)} \in \mathcal{R}(\mathbb{A}_C), \quad \forall \mathbb{A}_C \subset \mathcal{A}_C.$$

OBSERVAÇÃO 3 (TAXAS DE PAGAMENTO DE EQUILÍBRIO) *Segue das condições de equilíbrio (E) e (F) que se um derivativo pass-through $j \in J(\mathbb{A}_P)$ for negociado e, no estado $s \in S$, o valor das suas promessas for estritamente positivo, então a taxa de pagamento $\bar{r}_{s,\mathbb{A}_P}$ é dada pela razão entre o total de entregas feitas pelos devedores e o valor total das promessas feitas aos emprestadores. Além disso, para um tranche $j^m(\mathbb{A}_C)$ que é negociado e tem o valor de suas promessas estritamente positivos, a taxa de pagamento de equilíbrio $\bar{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)}$ leva em consideração os pagamentos recebidos pelos tranches anteriores, no seguinte sentido*

$$\bar{r}_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} = \max \left\{ 0; \min \left\{ \frac{\sum_{h \in H} \sum_{k \in \mathbb{A}_C} \bar{\delta}_k^h - \sum_{i=1}^{m-1} \bar{p}_s A_{s,j^i(\mathbb{A}_C)} \sum_{h \in H} \bar{\theta}_{j^i(\mathbb{A}_C)}^h}{\bar{p}_s A_{s,j^m(\mathbb{A}_C)} \sum_{h \in H} \bar{\theta}_{j^m(\mathbb{A}_C)}^h}; 1 \right\} \right\}.$$

Finalmente, é importante observar que a existência de penalidades extra-econômicas pode permitir que os tomadores de empréstimo paguem mais do que o valor do colateral. Entretanto, se não existir penalidades extra-econômicas, o valor de uma unidade de colateral será, em equilíbrio, estritamente maior do que o preço do ativo. Caso contrário, quando um agente faz a operação conjunta de comprar colateral e vender promessas, ele tem um oportunidade de arbitragem, pois recebe transferências não-negativas hoje, recebe retornos não-negativos amanhã e tem o direito de consumir os requerimentos de colateral.